



بیستوفیل

حسابان یازدهم-فصل ۵
ریاضی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲
امیر محمد رضائی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴
امیر محمد کیانی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲
امیر محمد شکوهی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲
سید محمد صادق حسینی

رتبه ۳۴۱
حمید رضا بشیری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصریان

رتبه ۵۳۹
نجمه کبختا

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسونند

رتبه ۵۱۴
محمد پارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳
زهره بابائی

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰
زهره ولی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶
حسین تقضلی نژاد

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲
محمد ماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷
زهره بابائی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیر حسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملک شاهی

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸
امیر محمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱
محمد رضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سید آبادی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵
زهره جمعی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۵ یازدهم

سال یازدهم
ریاضی

فهرست

درس اول : مفهوم حد و فرایند های حدی

۱..... مفهوم حد، همسایگی

درس دوم : حد های یک طرفه (حد چپ و حد راست)

۲..... حد چپ و راست از روی نمودار تابع

درس سوم : قضایای حد

۳..... قضایای حد و حد توابع چند جمله ای، گویا، رادیکالی و مثلثاتی

۴..... حد در توابع براکتی

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم)

۵..... مبهم صفر صفرم جبری

۶..... مبهم صفر صفرم رادیکالی

۷..... مبهم صفر صفرم مثلثاتی

درس پنجم : پیوستگی

۷..... پیوستگی تابع در نقطه از روی نمودار و ضابطه

۸..... مسائل پارامتری پیوستگی

۸..... پیوستگی در بازه



درس اول : مفهوم حد و فرایندهای

حدی

مفهوم حد، همسایگی

۱ آیا تابع $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ در نقطه $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟

۲ اگر بازه $(x - 1, 2y + 5)$ یک همسایگی راستِ محذوف ۳ باشد، مجموعه مقادیر x و y را به دست آورید.

۳ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در یک همسایگی محذوف نقطه $x = 3$ تعریف شود ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

۴ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x > 1 \\ x^2 - 2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کرده، سپس با استفاده از نمودار حد تابع در نقطه $x = 1$ را بررسی کنید.

۵ به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید.

الف) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ ، حاصل $(\frac{f}{g})(2)$ چقدر است؟

ب) طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن کمانی به اندازه ۱۵۰ درجه طی می‌کند، طول کمان طی‌شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چقدر است؟ ($\pi = 3$)

۶ ضابطه‌ی تابعی را بنویسید که در $x = -1$ تعریف نشده و حد نداشته باشد، سپس نمودار آن را رسم کنید.

۷ کدامیک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی محذوف ۳ نیست؟

الف

$$A = (-2, 3) \cap (3, 4)$$

ب

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - 3| < 1\}$$

پ

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x - 3|} > 1\}$$

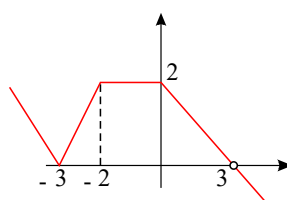
ت

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2\}$$

ث

$$E = (1, 2) - \{3\}$$

۸ نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است. حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

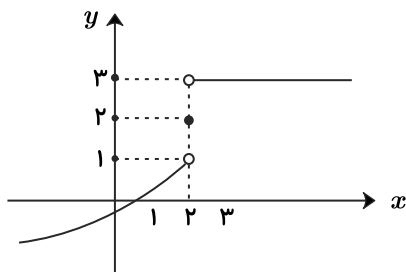




درس دوم: حد های یک طرفه (حد

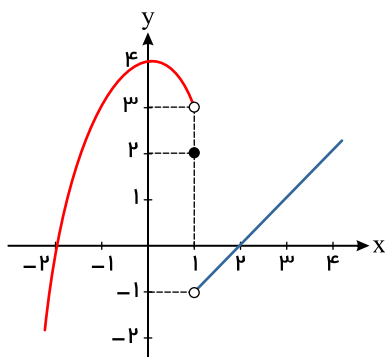
حد چپ و راست از روی نمودار تابع چپ و حد راست)

۹ با توجه به نمودار تابع $f(x)$ عبارت، $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] + f(2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است)



۱۰ با توجه به شکل، حاصل عبارت زیر را در صورت وجود به دست آورید.

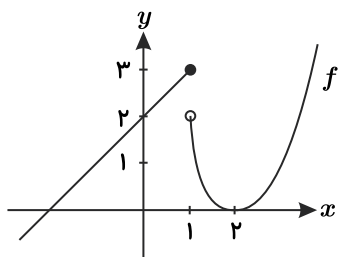
$$2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 3f(1) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$



۱۱ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 3 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ را در فاصله $[-2, 2]$ رسم نموده و سپس با استفاده از نمودار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید.

۱۲ حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x] - 3}$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید.

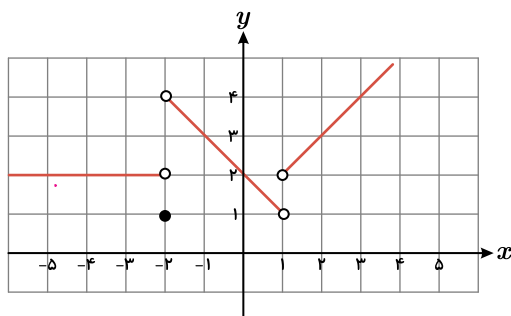
۱۳ با توجه به نمودار تابع f حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است).



۱۴ نمودار تابع f به صورت زیر است.

الف) دامنه این تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

ب) حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است).

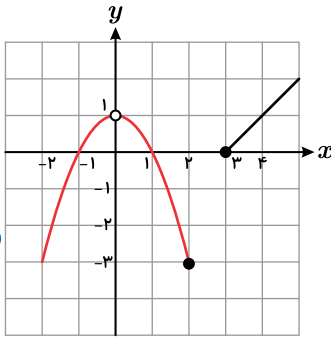


$$\lim_{x \rightarrow -2^+} [f(x)] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad (3)$$

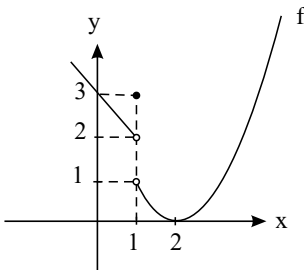
۱۵ با توجه به نمودار تابع f ، حدهای خواسته شده را در صورت وجود پیدا کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

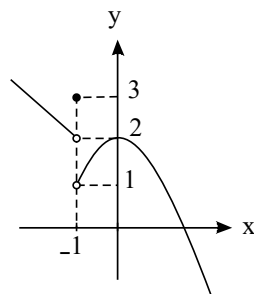
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



۱۶ با استفاده از نمودار رو به رو، عبارت خواسته شده را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1)$$

۱۷ با استفاده از نمودار رو به رو، عبارات خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



الف) $2f(-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$

درس سوم: قضایای حد

قضایای حد و حد توابع چند جمله ای، گویا، رادیکالی و مثلثاتی

۱۸ حدود زیر را محاسبه کنید. [] نماد جزء صحیح است

$$\lim_{x \rightarrow 3} \Delta$$



ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

۱۹ از عبارات زیر، عبارت درست را با کلمه درست و عبارت نادرست را با کلمه نادرست مشخص کنید.

الف

حد تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند، برابر صفر است.

۲۰

حد زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - 2 \cos 2x}}$$

حد در توابع براکتی

۲۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x^2 - 1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x}$$

۲۲ در هر سؤال، گزینه مناسب را انتخاب کنید.

الف) اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|}, & x < -1 \\ 3x + b, & x > -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد داشته باشد، مقدار b کدام است؟

۴ (۴)

-۲ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

ب) اگر $\log x + \log(x+1) = \log 12$ باشد، در این صورت $\log_3(x+6)$ کدام است؟

۱ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

ج) حاصل $\cos 22.5^\circ$ کدام است؟

$$\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \quad (۱)$$

۲۳ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x = -1$ حد داشته باشد.

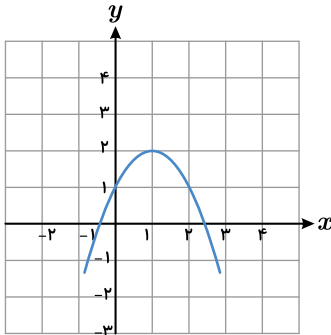
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + [x]}{|x|} & x < -1 \\ 3x + b & x > -1 \end{cases}$$



۲۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{[x] - 2}{x - 2}$ را در نظر بگیرید. با کامل کردن جدول زیر، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است)

x	۲٫۱	۲٫۰۱	۲٫۰۰۱	$\rightarrow 2$
$f(x)$				?

۲۵ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)



$$[\lim_{x \rightarrow 1} f(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$$

الف

ب

پ



درس چهارم : محاسبه حد توابع

کسری (حالت صفر صفرم)

مبهم صفر صفرم جبری

۲۶ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2|x| - 8}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}$$

۲۷ مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{6x - 2\pi}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3}$





۲۸ گزینه مناسب را انتخاب کنید.

الف) اگر $\log_b a = 2$ باشد، حاصل $\log_b \sqrt{a}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

ب) اگر $\tan x + \cot x = 6$ باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

ج) اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + a}{x^2 - 4}$ برابر عددی حقیقی باشد، آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

مبهم صفر صفرم رادیکالی

۳۰ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x}$

ب

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$

۳۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x - 5} - 2}$

ب

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x}$

۳۲ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x}$

ب

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$



۳۳ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) لگاریتم اعداد تعریف نمی شوند.

ب) اگر $a = \log 2$ باشد، حاصل $\log 0.5$ بر حسب a برابر است.

ج) کمترین مقدار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$ برابر است.

د) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$ مساوی است.

۳۴ حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 6^+} (\lfloor \frac{x}{2} \rfloor - \lfloor -\frac{x}{3} \rfloor)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{5x - 15}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

۳۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x-5} - 1} = 3$ آن گاه a را بیابید.

مبهم صفر صفرم مثلثاتی

۳۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan 3x}{x^2}$ را بیابید.

۳۷ حد زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$



درس پنجم : پیوستگی



پیوستگی تابع در نقطه از روی نمودار و ضابطه

۳۸ پیوستگی تابع f را در $x = 0$ به ازای تمام مقادیر a بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۳۹ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه‌ای به طول $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x > 0 \\ x - \frac{a}{4} & x = 0 \\ b + \frac{[x]}{2} & x < 0 \end{cases}$$

۴۰ نمودار تابع g را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه $x = -2$ حد راست داشته باشد ولی در این نقطه پیوستگی راست نداشته باشد.

۴۱ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x]+a}{x-1} & x > 2 \\ b-1 & x = 2 \\ 2bx+4 & x < 2 \end{cases}$$



۴۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) اگر در یک مستطیل به طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{W}{L} = \frac{L}{L+W}$ ، آنگاه در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.
 ب) هم‌دامنه تابع، همان برد تابع است.

ج) حد تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند، برابر صفر است.

د) تابع $f(x) = [x^2]$ در $x = -\sqrt{2}$ فقط پیوستگی چپ دارد.

۴۳ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} [x] + a & , x < 0 \\ 1 + b & , x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} & , x > 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ پیوسته باشد.

۴۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = \log_x (x - 2)$ برابر $(2, +\infty)$ است.

ب) حاصل $\log_{\sqrt{5}} 125$ مساوی $\frac{1}{3}$ است.

ج) مقدار عبارت $\sin 345^\circ \cos 165^\circ$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

د) تابع f در $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

ه) اگر حد تابع f در a موجود باشد، اما تابع g در a حد نداشته باشد، آنگاه ممکن است حد تابع $f + g$ در a موجود باشد.

مسائل پارامتری پیوستگی

۴۵ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} & x > 1 \\ b - 1 & x = 1 \\ x - 2a & x < 1 \end{cases}$$

۴۶ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ bx + 1 & x < 2 \end{cases}$$

۴۷ مقدار a را طوری بیابید که تابع $g(x) = ([x] - a)[x]$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد.

۴۸ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + a & x > 1 \\ 5 & x = 1 \\ bx - 2 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۴۹ a و b را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 2 & x > 1 \\ 4 & x = 1 \\ [-x] + bx & x < 1 \end{cases}$$

پیوستگی در بازه

۵۰ پیوستگی تابع $f(x) = [x] + x - 3$ را در بازه $[3, 4]$ بررسی کنید.

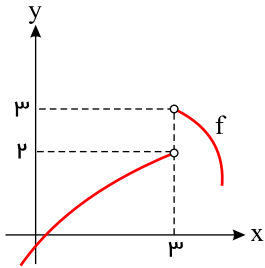


پاسخنامه تشریحی

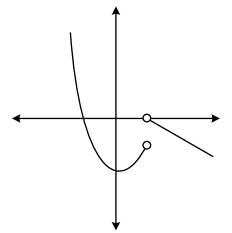
۱ خیر با توجه به دامنه تابع، همسایگی راست یک، وجود ندارد.

$$x - x^2 \geq 0 \Rightarrow D = [0, 1]$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4, \quad 2y + 5 > 3 \Rightarrow y > -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

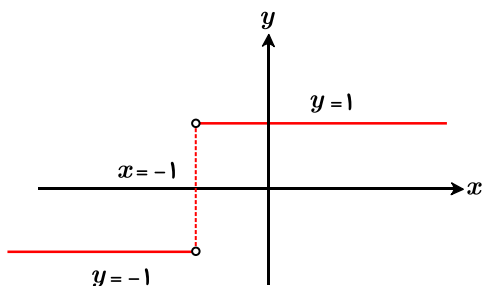


$$\text{الف) } \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3(2)} = 1$$

$$\text{ب) } L = R \times Q^R \xrightarrow{150^\circ = \frac{5\pi}{6}} L = 24 \times \frac{5\pi}{6} = 24 \times \frac{5 \times 3}{6} = 60$$

$$\text{الف) } \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3(2)} = 1$$

$$\text{ب) } L = R \times Q^R \Rightarrow L = 24 \times \frac{5\pi}{6} = 24 \times \frac{5 \times 3}{6} = 60$$



$$f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

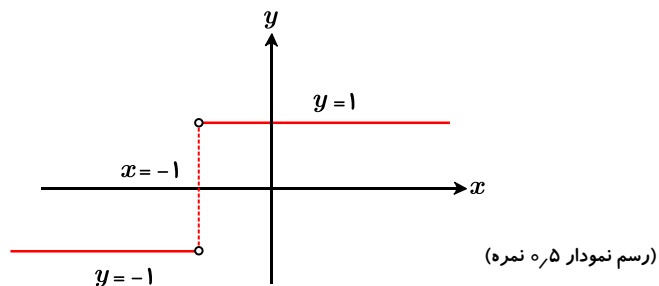
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1 \end{cases}$$

تابع در $x = -1$ حد چپ و راست نابرابر دارد؛ پس در این نقطه حد ندارد. از طرفی در این نقطه تعریف نشده؛ چون $x = -1$ ریشه مخرج کسر است.

(صفحه ۱۲۴ و ۱۲۵ کتاب درسی)



$$f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \quad (\text{نمره ۵, ۵})$$



به توابع دیگری که با ذکر دلیل خواسته سؤال را برآورده می‌کند، نمره کامل تعلق گیرد.

۷

الف هست

ب هست

پ

$$\text{همسایگی محذوف ۳ است.} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ \text{و} \\ x \neq 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-3| < 1 \Rightarrow -1 < x-3 < 1 \xrightarrow{+3} 2 < x < 4 \\ |x-3| \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \end{array} \right\}$$

باتوجه به هم علامت بودن نامساوی طرفین را معکوس می‌کنیم

$$\left. \begin{array}{l} x \neq 3 \\ |x-3| < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{همسایگی محذوف ۳ داریم.} \Rightarrow \text{نقاطی که فاصله آنها تا ۳ کمتر از ۱ است و خود ۳ نباشد}$$

راه دوم و

$$|x-3| > 2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-3 > 2 \\ \text{یا} \\ x-3 < -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > 5 \\ \text{یا} \\ x < 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{همسایگی محذوف ۳ نیست.}$$

فقط برداشتن ۳ مهم نیست. ابتدا باید یک همسایگی ۳ را داشته باشیم. بازه (۱, ۲) همسایگی از ۳ نیست.

۸

الف) $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-1)} f(x) = 2$

در هر سه قسمت حد موجود است.

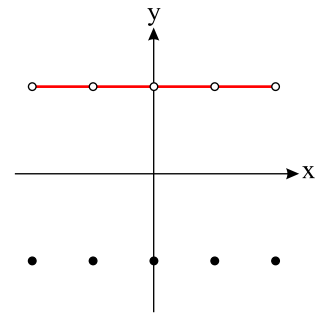
۹

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3, \quad f(2) = 2 \rightarrow A = 0 + 2 + 3 = 5$$

۱۰

$$2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 3f(1) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(-1) + 3(2) - 4 = 0$$

۱۱



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

۱۲ با توجه به دامنه تابع: $D = (-\infty, +\infty) - [3, 4]$ ، متغیر x نمی‌تواند با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک شود. بنابراین حد راست تابع در نقطه $x = 3$ وجود ندارد.

۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = [3^-] = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \text{عبارت داده شده} = 2 + 3 + 2(0) = 5$$

(صفحه ۱۲۷ و ۱۲۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = [3^-] = 2 \text{ (نمره ۰٫۲۵)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \text{ (نمره ۰٫۲۵)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت داده شده} = 2 + 3 + 2(0) = 5 \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$$

۱۴ الف ۱

(ب)

۳ (۱) ۱ (۲) ۳ وجود ندارد.

۱۵

الف -۳

ب وجود ندارد

پ ۱

۱۶

۱۷

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1) = 2 - 1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$$

$$\text{الف } 2f(-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = [2^+] - 2[2^-] = 2 - 2 \times 1 = 0$$

۱۸

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \Delta = \Delta$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3[x] - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x^3 - 9)}{x - 3} = 3 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = 18$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

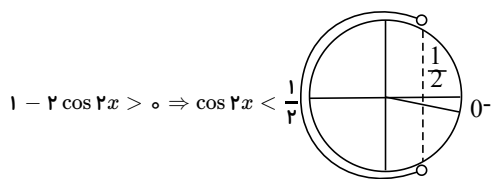
۱۹



نادرست

الف

۲۰



با توجه به دایره مثلثاتی تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است یعنی زمانی که $x \rightarrow 0^-$ داخل رادیکال منفی می شود و حد موجود نیست.

۲۱

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9 - (x + 8)}{(x - 1)(x + 1)(3 + \sqrt{x + 8})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x + 1)(3 + \sqrt{x + 8})} = \frac{-1}{12}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2 \sin^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \times \sin x}{x \sin x} = 4$$

۲۲ الف) گزینه ۲؛ با توجه به اینکه $-2 = [(-1)^-]$ ؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + [x]}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2}{-x} = \frac{1 - 2}{1} = -1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} 3x + b = -3 + b \Rightarrow b = 2$$

(صفحه ۱۲۹ کتاب درسی)

(ب) گزینه ۱:

$$\log x + \log(x + 1) = \log 12 \Rightarrow \log x(x + 1) = \log 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ غلط} \\ x = 3 \text{ قی} \Rightarrow \log_3(x + 6) = \log_3 9 = 2 \end{cases}$$

(صفحه ۸۵ کتاب درسی)

(ج) گزینه ۳:

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\rightarrow \cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

(صفحه ۱۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(ج) گزینه ۳

(ب) گزینه ۱

الف) گزینه ۲

(هر مورد ۵/۵ نمره)

۲۳

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \frac{(-1)^2 + [(-1)^-]}{|-1|} = \frac{1 - 2}{1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= 3(-1) + b = b - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b - 3 = -1 \Rightarrow b = 2$$

(صفحه ۱۲۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1 - 2}{1} = -1 \text{ (نمره ۲/۲۵)}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = b - 3 \text{ (نمره ۲/۲۵)} \Rightarrow b - 3 = -1 \text{ (نمره ۲/۲۵)}$$

$$\Rightarrow b = 2 \text{ (نمره ۲/۲۵)}$$

۲۴



x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \circ 1$	$\frac{1}{2} \circ \circ 1$	$\rightarrow \frac{1}{2}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

۲۵

الف

ب

پ

صفر

۲۶

الف

ب

۲۷

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{x^2 - \frac{1}{2}}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{(x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})}{x - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} &= \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{1 \times 2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6(x - \frac{\pi}{6})} \xrightarrow{x - \frac{\pi}{6} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3} \xrightarrow{[x^+] = 3} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 18$$

(صفحه ۱۴۱ تا ۱۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} &= \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{1 \times 2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6(x - \frac{\pi}{6})} \xrightarrow{x - \frac{\pi}{6} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3} \xrightarrow{[x^+] = 3} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 18$$

(هر مورد ۵ نمره)

۲۸ الف گزینه ۲

$$\log_b \sqrt{a} = \log_b a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_b a = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

ب) گزینه ۴

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 6 \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ج) گزینه ۲؛ در $x = 2$ حد مخارج برابر صفر و از طرفی حد کسر برابر عددی حقیقی است، پس به ازای $x = 2$ صورت کسر نیز برابر صفر می‌شود:



$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + a) = 0 \Rightarrow 4 + 2a + a = 0 \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+\frac{2}{3})}{(x-2)(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{1}{6}$$

(صفحة ۸۶ و ۱۱۰ تا ۱۱۲ و ۱۴۱ تا ۱۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۲ (۵، نمره) ب) گزینه ۴ (۵، نمره) ج) گزینه ۲ (۵، نمره)

۲۹

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1 - 2x - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1 - 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{1+1-1}{-1-1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + 2x - 2}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)}{x^2 + x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 3}{x+2} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (x+2)}{(x+3)(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)(x+\sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)}{(x+3)(x+\sqrt{x+2})} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x-5} - 2} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{(\sqrt{3x-5} - 2)(\sqrt{3x-5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3x-5-4} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3} = \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x \sin x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2 \sin^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x} = 4 \times 1 = 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin x \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۳۳ الف) نامشبت

ب)

$$\log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 10^3 = 1 - \log 2 - 3 \log 10 = 1 - a - 3 = -2 - a$$

(ج)

$$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 0 \Rightarrow \min(y) = -2$$

(د)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

(صفحة ۸۰ و ۸۶ و ۱۰۵ تا ۱۰۹ و ۱۴۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\frac{1}{16} \text{ (د)}$$

(ج) -2

(ب) -2 - a

(الف) نامثبت

(هر مورد ۲۵، ۲۵ نمره)

۳۴

$$\text{(الف)} \left[\frac{6^+}{2}\right] - \left[-\frac{6^+}{3}\right] = [3^+] - [-(2^+)] = [3^+] - [(-2)^-] = 3 - (-2) = 5$$

$$\text{(ب)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{5x - 15} \times \frac{x + \sqrt{2x+3}}{x + \sqrt{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x - 3}{5(x-2)(x + \sqrt{2x+3})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+1)}{5(x-2)(6)} = \frac{2}{15}$$

$$\text{(ج)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(صفحة ۱۲۹ و ۱۴۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{(الف)} [3^+] - [-2^-] = 3 - (-2) = 5 \text{ (نمره ۲۵، ۲۵ نمره)}$$

$$\text{(ب)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{5x - 15} \times \frac{x + \sqrt{2x+3}}{x + \sqrt{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+1)}{5(x-2)(6)} = \frac{2}{15} \text{ (نمره ۲۵، ۲۵ نمره)}$$

$$\text{(ج)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (نمره ۲۵، ۲۵ نمره)}$$

۳۵

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x-5} - 1} \times \frac{\sqrt{3x-5} + 1}{\sqrt{3x-5} + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5} + 1)}{3x - 5 - 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5} + 1)}{3(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{3x-5} + 1)}{3} = \frac{2a}{3} = 3 \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

۳۶

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} = 2 \times 3 = 6$$

(صفحة ۱۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} = 2 \times 3 = 6 \text{ (نمره ۲۵، ۲۵ نمره)}$$

۳۷

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 x \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{2 \sin^2 \frac{x}{2} \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x}{2} \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times 1 \times 1}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{0} \text{ حد ندارد.}$$

۳۸

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -a$$

$$a = 0 \Rightarrow f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

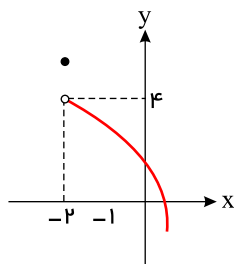
$$a \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$



۳۹

$$f(\circ) = \frac{-a}{f} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ^+} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x) = b - \frac{1}{f} \Rightarrow a = -2 \quad , \quad b = 1$$



۴۰

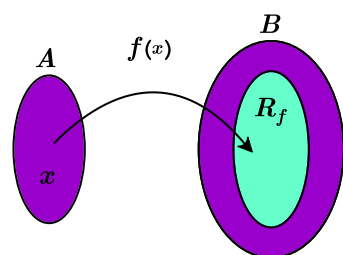
۴۱

برای اینکه تابع در $x = 2$ پیوسته باشد باید: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2+a}{1} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4b+4 \quad , \quad f(2) = b-1$$

$$4b+4 = b-1 \rightarrow b = \frac{-5}{3} \quad , \quad 2+a = b-1 \rightarrow a = \frac{-14}{3}$$

۴۲ الف) درست؛ اگر در یک مستطیل به طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{W}{L} = \frac{L}{L+W}$ یا $\frac{L}{W} = \frac{L+W}{L}$ ، آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. (صفحه ۱۹ کتاب درسی)

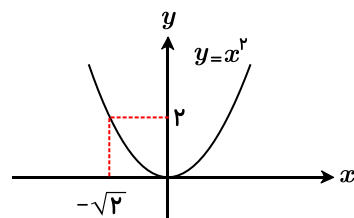


ب) نادرست؛ مجموعه A مجموعه ابتدا و دامنه تابع بوده $(D_f = A)$ و مجموعه B مجموعه انتها و هم دامنه نامیده می‌شود، ولی الزاماً برابر با برد تابع نیست؛ بلکه $R_f \subseteq B$ (صفحه ۳۸ کتاب درسی)

ج) نادرست؛ تابع در همسایگی راست نقطه $x = 2$ تعریف نشده و شرط لازم حد برقرار نیست؛ بنابراین حد ندارد. به عبارت دیگر:

$$f(x) = \sqrt{2x - x^2} \rightarrow 2x - x^2 \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, 2] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{0^-} = \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{0^+} = 0 \end{cases}$$

حد چپ دارد، ولی حد راست ندارد؛ پس در $x = 2$ حد ندارد. (صفحه ۱۲۴ کتاب درسی)



$$f(x) = [x^2] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) = [2^+] = 2$$

$$= f(-\sqrt{2}) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) = [2^-] = 1$$

(صفحه ۱۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست (ب) نادرست (ج) نادرست (د) درست
(هر مورد ۰٫۲۵ نمره)

۴۳ برای اینکه f در $x = 0$ پیوسته باشد، باید حدود چپ و راست در $x = 0$ موجود بوده و برابر با $f(0)$ باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2 \cos(0)}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + a = [0^-] + a = -1 + a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1$$

$$f(0) = 1 + b = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} - 1$$

(صفحه ۱۵۰ و ۱۵۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad (25, \text{نمره})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos(0)}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (5, \text{نمره})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + a = [0^-] + a = -1 + a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1 \quad (25, \text{نمره})$$

$$f(0) = 1 + b = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} - 1 \quad (25, \text{نمره})$$

۴۴ الف درست

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \xrightarrow{\cap} x > 2 \Rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

$$x > 0, x \neq 1$$

ب) نادرست

$$\log_{5 \times 5^{\frac{1}{3}}} 5^3 = \log_{5^{\frac{4}{3}}} 5^3 = 3 \times \frac{3}{4} \log_5 5 = 2$$

ج) درست

$$\cos(180^\circ - 15^\circ) \sin(360^\circ - 15^\circ) = (-\cos 15^\circ)(-\sin 15^\circ) = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

د) درست؛ تعریف تابع پیوسته

ه) نادرست؛ زیرا اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد، بنابر تساوی $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$ و قضیه حد تفاضل، حد تابع $g(x)$ نیز باید در a موجود باشد که خلاف فرض است.

(صفحه ۸۰ و ۸۶ و ۹۸ تا ۱۰۳ و ۱۴۶ و ۱۳۰ تا ۱۳۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست ب) نادرست ج) درست د) درست ه) نادرست

(هر مورد ۲۵/۰ نمره)

۴۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2a) = 1 - 2a$$

$$\text{مقدار } f(1) = b - 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} b - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2} \\ 1 - 2a = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

چون تابع f در $x = 1$ پیوسته است

۴۶ برای اینکه تابع در $x = 2$ پیوسته باشد باید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b + 1, \quad f(2) = 3$$

$$4 + a = 3 \rightarrow a = -1$$

$$2b + 1 = 3 \rightarrow b = 1$$

۴۷

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} ([x] - a)[x] = \lim_{x \rightarrow -2^-} ([-2^-] - a)[-2^-] = (-3 - a)(-3) = 9 + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} ([x] - a)[x] = \lim_{x \rightarrow -2^+} ([-2^+] - a)[-2^+] = (-2 - a)(-2) = 4 + 2a$$



$$f(-2) = ([-2] - a)[-2] = (-2 - a)(-2) = 4 + 2a$$

$$9 + 3a = 4 + 2a \Rightarrow a = -5$$

برای بررسی پیوستگی باید در نقطه $x = -2$ حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند.

۴۸

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + a) = 5 \Rightarrow 3 + a = 5 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 2) = 5 \Rightarrow b - 2 = 5 \Rightarrow b = 7$$

(صفحه ۱۵۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + a) = a + 3 = 5 \quad (\text{نمره ۲.۵}) \Rightarrow a = 2 \quad (\text{نمره ۲.۵})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 2) = b - 2 = 5 \quad (\text{نمره ۲.۵}) \Rightarrow b = 7 \quad (\text{نمره ۲.۵})$$

۴۹

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] + bx = [-(1 - \varepsilon)] + b = [-1 + \varepsilon] + b = -1 + b$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} a[x] - 2 = a - 2, f(1) = 4 \Rightarrow -1 + b = 4 \rightarrow \boxed{b = 5}$$

$$a - 2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

۵۰

$$f(x) = [x] + x - 3 \quad x \in (3, 4]$$

$$x \in (3, 4) \Rightarrow 3 < x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + x - 3 = x \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow \text{تابع پیوسته}$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = [4] + 4 - 3 = 5$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 4^-} [x] + x - 3 = [4 - \varepsilon] + 4 - 3 = 3 + 1 = 4 \neq f(4)$$

تابع در $x = 4$ پیوستگی چپ ندارد پس تابع در بازه $(3, 4]$ پیوسته نیست.