



گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل



# درس

## حسابان یازدهم - فصل ۴

نوتروپیست





# نوטר وفیل خونہ رتبہ برترها



## قبولی های کنکور ۱۴۰۴

### تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۸



ایمان نیک نام جهرمی

### دور رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۳۲



امیر محمد رضائی

رتبه ۲۰



سینا راضی

رتبه ۱۶



آریا قهرمانی

رتبه ۱۴



امیر محمد کیانی

رتبه ۸۰



محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵



محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱



بهار هلالی

رتبه ۵۹



ایمان انفرادی

رتبه ۵۵



مهسا سیاوشی

### سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲



امیر محمد شکوهی

رتبه ۱۶۹



هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰



اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷



محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲



سید محمد صادق حسینی

رتبه ۳۴۱



حمید رضا بشیری

رتبه ۳۰۸



سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱



فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹



ابوالفضل ناصریان

رتبه ۵۳۹



نجمه کیخا

رتبه ۵۳۷



ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۲



فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۱۴



محمد پارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳



زهرا بابائی

رتبه ۶۶۱



فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶



سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰



زهرا ولی نژاد

رتبه ۵۵۷



محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶



حسین تفضلی نژاد

رتبه ۷۸۱



احسان قنبری

رتبه ۷۱۴



محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱



بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲



محمد ماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷



سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹



کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳



فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴



آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳



مانده رنجبر

رتبه ۷۸۶



نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷



زهرا بابائی

رتبه ۱۱۲۲



علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸



الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲



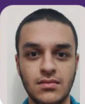
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷



صفورا بقاءئی

رتبه ۱۳۵۰



علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴



فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴



بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶



مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴



مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳



فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳



محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳



سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴



سید امیر حسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲



پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶



ندا ملک شاهی

رتبه ۱۶۷۸



سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹



ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸



امیر محمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴



فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹



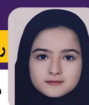
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵



علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶



مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴



هللیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱



محمد رضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴



مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱



سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱



فهمیه سید آبادی

رتبه ۲۷۱۱



محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵



زهرة جمعی

رتبه ۳۳۴۳



سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴



هللیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳



صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱



پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰



هدیه رحیمی



## فصل ۴: مثلثات

## رادیان و نسبت‌های مثلثاتی بر فی زوایا

سوال ۶۱ زاویه‌های  $\frac{2\pi}{9}$  رادیان و 3 رادیان را به درجه و 60 درجه را به رادیان تبدیل کنید.

حل: برای تبدیل رادیان به درجه و درجه به رادیان از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

اگر در سؤال خواسته شده  $\pi$  وجود نداشت که در اینجا  $(\frac{2\pi}{9})$  داریم و هست [آن را 180 در نظر می‌گیریم. اگر  $\pi$  را نداده بودند آن را در 57/3 ضرب می‌کنیم.

$$\text{رادیان } \frac{2\pi}{9} : \frac{2 \times 180}{9} = 40^\circ$$

در اینجا  $\pi$  نداریم  $\xrightarrow{3 \text{ رادیان}}$   $3 \approx 3 \times 57 / 3 \approx 171 / 9^\circ$

$$\text{درجه } 60^\circ : 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ Rad}$$

سوال ۶۲ حاصل عبارت  $B = \cot(-24^\circ) \tan(15^\circ) - 2 \sin(135^\circ) \cos(315^\circ)$  را پیدا کنید.

$$B = -\cot(\pi + 60^\circ) \cdot \tan(\pi - 30^\circ) - 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + 45^\circ\right) \cdot \cos(2\pi - 45^\circ)$$

حل:

$$\left( \overset{\uparrow}{\cot} > 0 \text{ ربع سوم} \right) \left( \overset{\uparrow}{\tan} < 0 \text{ ربع دوم} \right) \left( \overset{\uparrow}{\sin} > 0 \text{ ربع دوم} \right) \left( \overset{\uparrow}{\cos} > 0 \text{ ربع چهارم} \right)$$

$$= \left[ \underbrace{-\cot 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \cdot \underbrace{(-\tan 30^\circ)}_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right] - \left[ \underbrace{2 \cos 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \underbrace{\cos 45^\circ}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right]$$

مضارب  $\frac{\pi}{2}$  نسبت را عوض می‌کند

$$= \left[ \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right] - \left[ -2 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

تذکر: مضارب  $\pi$  نسبت را عوض نمی‌کنند ولی مضارب  $\frac{\pi}{2}$ ، نسبت را عوض می‌کنند.

(این نکته در تمامی نسبت‌ها صدق می‌کند)

$$\underbrace{\sin(\pi - \alpha)}_{\text{ربع دوم } \sin > 0} = \sin \alpha / \underbrace{\sin(\pi + \alpha)}_{\text{ربع سوم } \sin < 0} = -\sin \alpha / \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}_{\text{ربع اول } \sin > 0} = \cos \alpha$$

این نکته در تمامی نسبت‌ها صدق می‌کند.

سوال ۶۳ حاصل عبارت  $A = \frac{\sin(-27^\circ) - 2\cos(-48^\circ)}{\tan(-225^\circ)}$  چقدر است؟

$$\sin(-27^\circ) = -\sin 27^\circ = -(-1) = 1$$

حل:

$$\cos(-48^\circ) = \cos(48^\circ) \text{ کسینوس منفی خوره} = \cos(2\pi + 120^\circ) = \cos(120^\circ) = -\frac{1}{2}$$

$$\text{یا } (\cos 120^\circ = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 30^\circ\right) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2})$$

$$\tan(-225^\circ) = -\tan 225^\circ = -\tan(\pi + 45^\circ) \text{ (ربع سوم } \tan > 0) = -\tan 45^\circ = -1$$

$$\Rightarrow A = \frac{1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)}{-1} = \frac{1 + \frac{2}{2}}{-1} = -2$$



سوال ۶۴ اگر  $\cot \alpha = k$  حاصل  $\frac{2\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \sin(\Delta\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) - \cos(\alpha - \pi)}$  چقدر است؟

حل: تک به تک حساب می‌کنیم و در معادله قرار می‌دهیم:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \stackrel{\substack{\text{ربع اول } \sin > 0 \\ \frac{\pi}{2} \text{ نسبت را عوض می‌کند}}}{=} \cos \alpha$$

$$2) \sin(\Delta\pi + \alpha) \stackrel{\substack{\text{ربع سوم} \\ \sin < 0}}{=} -\sin \alpha$$

$$3) \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \stackrel{\substack{\text{ربع سوم} \\ \cos < 0}}{=} -\sin \alpha$$

$$4) \cos(\alpha - \pi) = \cos(-(\pi - \alpha)) = \underbrace{\cos(\pi - \alpha)}_{\cos < 0} = -\cos \alpha$$

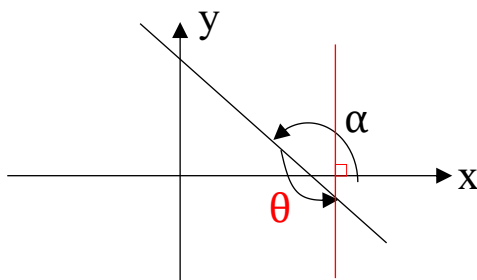
(کسینوس منفی خور است)

جایگذاری در معادله:  $\frac{2\cos \alpha - \sin \alpha}{-\sin \alpha - (-\cos \alpha)} = \frac{2\cos \alpha - \sin \alpha}{-\sin \alpha + \cos \alpha}$

طرفین تقسیم بر  $\sin \alpha$ :  $\frac{2\cot \alpha - 1}{-1 + \cot \alpha} = k \Rightarrow \boxed{\frac{2k - 1}{-1 + k}}$

نکته در این چونکه از  $\cot$  خواسته بودند باید آن را می‌ساختیم به خاطر همین طرفین تقسیم بر  $\sin$  شد.

سوال ۶۵ معادله خطی به صورت  $\sqrt{2}x + \sqrt{8}y - 2 = 0$  مقدار  $\tan \theta$  چقدر می‌تواند باشد؟



حل: شیب خط  $\sqrt{2}x + \sqrt{8}y - 2 = 0$  برابر است با:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = -\frac{1}{2}$$

پس از طرفی داریم:

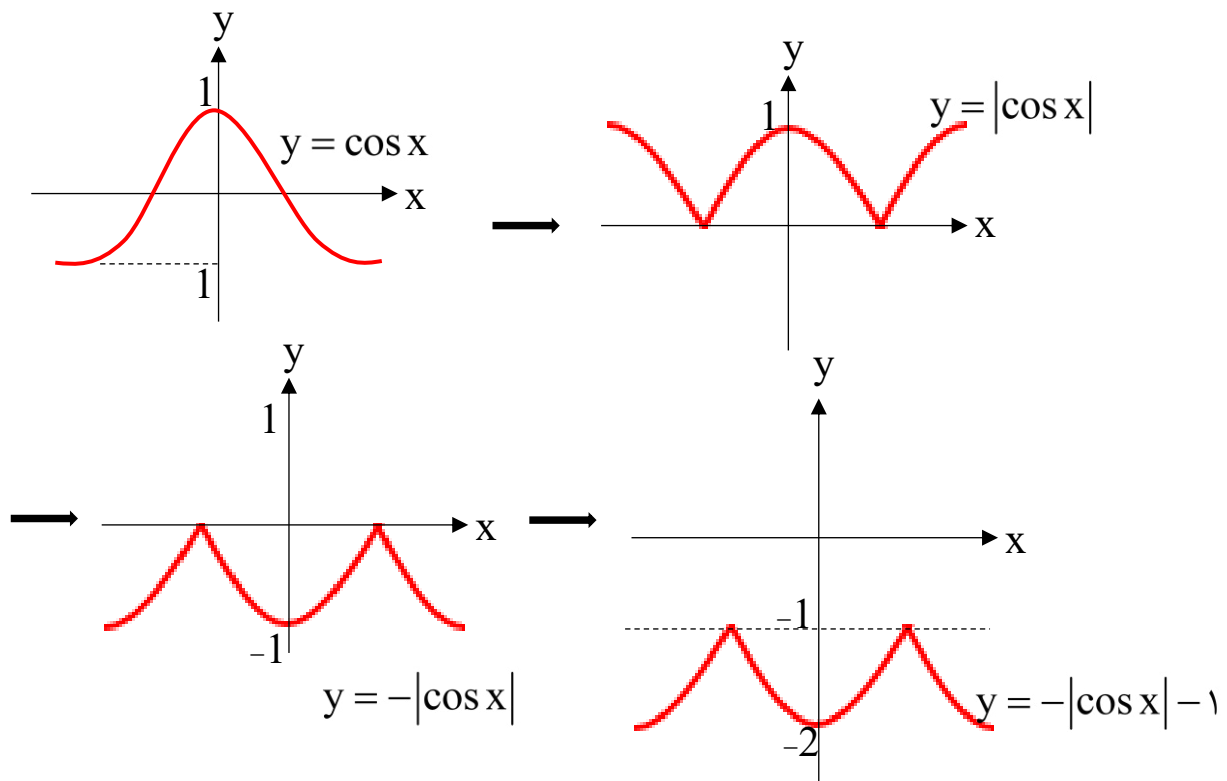
$$\alpha + \theta = 270^\circ \Rightarrow \theta = 270^\circ - \alpha$$

$$\tan \theta = \tan(270^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -2 \rightarrow \tan \theta = -2$$

توابع مثلثاتی

سوال ۶۶ اگر برد تابع  $y = -|\cos x| - 1$  به صورت  $[a, b]$  باشد، حاصل  $b - a$  کدام است؟

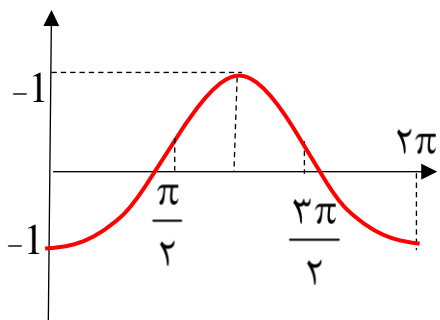
حل: به کمک رسم نمودار برد تابع را پیدا می‌کنیم.



بنابراین برد این تابع  $[-2, -1]$  است لذا داریم:  $b - a = -1 - (-2) = 1$

سوال ۶۷ نمودار تابع  $y = -2\cos x + 1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  کدام است؟

حل: تابع را در بازه داده شده قرار می‌دهیم:



x	y
0	-1
$\frac{\pi}{2}$	1
$\pi$	3
$\frac{3\pi}{2}$	1
$2\pi$	-1

$$x = 0 \rightarrow -2\cos(0) + 1 = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} \rightarrow -2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 = 1$$

$$x = \pi \rightarrow -2\cos(\pi) + 1 = 3$$

$$x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow -2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 = 1$$

$$x = 2\pi \rightarrow -2\cos(2\pi) + 1 = -1$$



سوال ۶۸ اگر تابع زیر در  $x = \frac{\pi}{2}$  پیوسته باشد،  $a$  را محاسبه کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin^2 x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ a \cos \frac{4x}{3} + 1 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

اتحاد چاق و لاغر:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

حل:

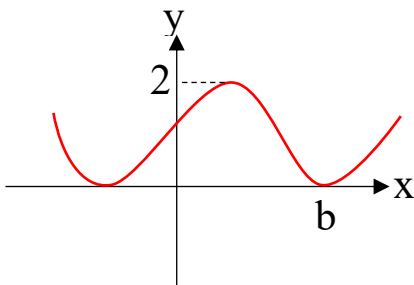
$$\text{ضابطه بالا: } f(x) = \frac{1 - \sin^3 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} =$$

$$\frac{1 + \sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x} \quad x \approx \frac{\pi}{2} \quad \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ضابطه پایین: } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 1 = a \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 1 = \boxed{-\frac{1}{2}a + 1}$$

$$-\frac{1}{2}a + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{a = -1}$$

برای پیوستگی مقدار تابع با حد آن برابر باشد:



سوال ۶۹ بخشی از نمودار تابع  $f(x) = a - \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$  به-

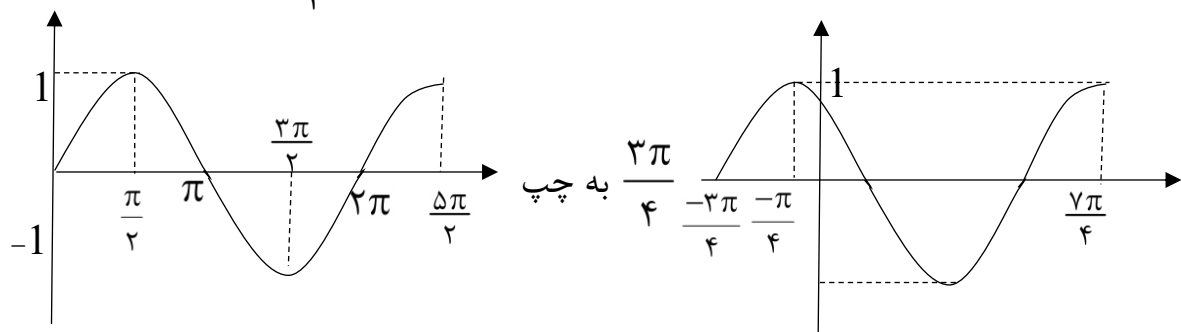
صورت زیر داده شده است. مقدار  $a \times b$  را به دست آورید.

حل: بیشترین مقدار تابع برابر 2 است. پس داریم:

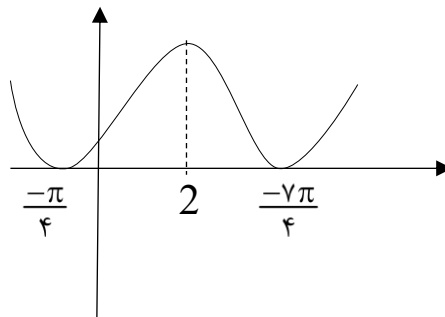
$$y = -\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{ماکزیمم تابع} = |-1| = 1$$

$$y = a - \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow \text{ماکزیمم تابع} = a + 1 \Rightarrow a + 1 = 2 \Rightarrow \boxed{a = 1} \quad (1)$$

حال نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم.  $f(x) = 1 - \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$



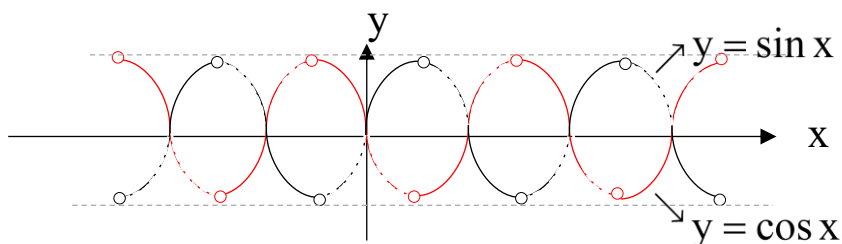
بالا





سوال ۷۰ نمودار تابع  $f(x) = \cos x |\tan x|$  را رسم کنید؟

$$f(x) = \cos x \frac{|\sin x|}{|\cos x|} = \begin{cases} \sin x & ; \tan x \geq 0 \\ -\sin x & ; \tan x < 0 \end{cases}$$

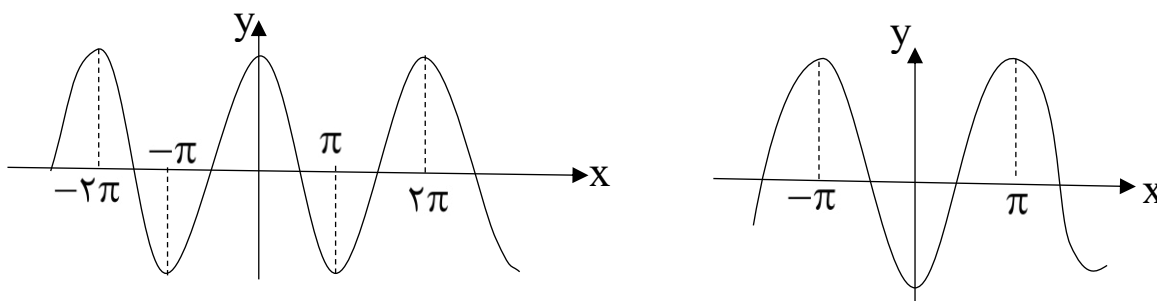


در ربع‌های اول و سوم تنازانت مثبت و ربع‌های دوم و چهارم منفی است.

سوال ۷۱ مقدار ماکزیمم تابع  $f(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  در نقاطی با کدام طول رخ می‌دهد.

**حل:** ابتدا تابع را ساده می‌کنیم.  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x$

حال نمودار  $y = -\cos x$  را رسم می‌کنیم و طول نقاط ماکزیمم تابع را مشخص می‌کنیم.



پس مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول‌های  $-\pi, \pi, 3\pi, \dots$  رخ می‌دهد که به صورت  $x = 2k\pi + \pi$  می‌توان

نوشت.

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

سوال ۷۲ مقدار  $\frac{1 - \cos 40^\circ}{2} + \cos^2 20^\circ$  کدام است؟

حل:  $\frac{1 - \cos 2a}{2} = \sin^2 a, \sin^2 a + \cos^2 a = 1$

$\frac{1 - \cos 40^\circ}{2} = \sin^2 20^\circ$        $\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$

سوال ۷۳ حاصل  $2\sin^2 15^\circ - 1$  کدام است؟

حل:  $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \xrightarrow{a=15^\circ} \cos 30^\circ = 1 - 2\sin^2 15^\circ$

$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - 2\sin^2 15^\circ \Rightarrow 2\sin^2 15^\circ - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

سوال ۷۴ حاصل عبارت  $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$  کدام است؟

حل: تذکر:  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x / 1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$

$\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cancel{\sin x} \sin x}{\cancel{\sin x} \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$



سوال ۷۵ حاصل  $\frac{1}{\sin x} - \frac{\sqrt{3}}{\cos x}$  عبارت به ازای  $x = 10^\circ$  چقدر است؟

حل:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{\sqrt{3}}{\cos x} = \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{\sin x \cos x} \stackrel{\text{طرفین ضربدر } (\frac{1}{2})}{=} \frac{\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x}{\frac{1}{2} \sin 2x}$$

$$= \frac{2(\sin \frac{\pi}{6} \cos x - \cos \frac{\pi}{6} \sin x)}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 4 \frac{\sin(30^\circ - x)}{\sin 2x} \xrightarrow{x=10^\circ} \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4$$

سوال ۷۶ اگر  $\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{3}$  باشد، آنگاه حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار

$$A = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 \text{ کدام است؟}$$

حل:

$$A = (\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x$$

$$\frac{\pi}{12} \leq x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \leq 2x < \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{\text{از طرفین } \sin} \frac{1}{2} \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 \sin x \leq 2$$

بنابراین حاصل ضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت A برابر  $2 = 2 \times 1$  می‌باشد.

سوال ۷۷ ساده شده عبارت  $\tan 20^\circ + \frac{\sin^2 35^\circ}{\sin 70^\circ}$  کدام است؟

حل:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + \frac{\sin^2 35^\circ}{2 \sin 35^\circ \cos 35^\circ} &= \frac{\cos 70^\circ}{\sin 70^\circ} + \frac{\sin 35^\circ}{2 \cos 35^\circ} = \frac{\cos^2 35^\circ - \sin^2 35^\circ}{2 \sin 35^\circ \cos 35^\circ} + \frac{1}{2} \tan 35^\circ \\ \frac{\cos 35^\circ}{2 \sin 35^\circ} - \frac{\sin 35^\circ}{2 \cos 35^\circ} + \frac{1}{2} \tan 35^\circ &= \frac{1}{2} \cot 35^\circ - \frac{1}{2} \tan 35^\circ + \frac{1}{2} \tan 35^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cot 35^\circ = \frac{1}{2} \tan 55^\circ \end{aligned}$$

سوال ۷۸ اگر  $f(x) = (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x - 1)$  باشد، مقدار  $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  کدام است؟

حل:

$$\begin{aligned} f(x) &= (\sin x + \cos x - 1)(\sin x + \cos x - 1) = (\sin x + \cos x)^2 - 1 \\ &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 1 = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \end{aligned}$$

$$f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin 2x = \sin\left(2 \times \frac{7\pi}{12}\right) = \sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

سوال ۷۹ اگر  $x - y = \frac{5\pi}{4}$  و  $\tan(x + y) = 4$  باشد، حاصل ضرب عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{\sin^2 x \sin^2 y - \cos^2 x \cos^2 y}{\sin^2 x \cos^2 y - \sin^2 y \cos^2 x}$$

حل:

$$A = \frac{(\sin x \sin y - \cos x \cos y)(\sin x \sin y + \cos x \cos y)}{(\sin x \cos y - \sin y \cos x)(\sin x \cos y + \sin y \cos x)} = \frac{-\cos(x+y) \cos(x-y)}{\sin(x+y) \sin(x-y)}$$

$$A = -\cot(x-y) \cot(x+y) = -\cot\left(\frac{\Delta\pi}{4}\right) \times \frac{1}{\tan(x+y)} \Rightarrow A = -(1) \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

### حد و پیوستگی

- مفهوم حد و فرآیندهای حدی

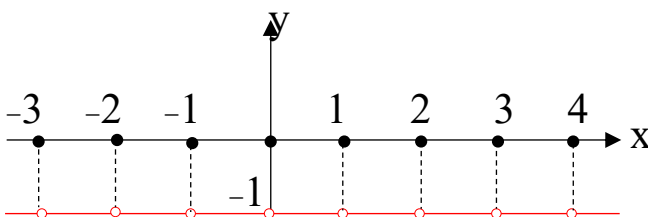
سوال ۸۰ اگر  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ، آنگاه همواره تابع  $f$  حداقل در یک همسایگی محذوف ۲ چگونه است؟

حل: با توجه به اینکه تابع در نقطه‌ی ۲، حدی برابر ۱ دارد. پس حداقل در یک همسایگی محذوف ۲ مثبت و تعریف شده است.

سوال ۸۱ با توجه به نمودار تابع  $f(x) = [x] + [-x]$ ، حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x)$  کدام است؟ حل:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ می‌دانیم}$$

و نمودار آن به صورت زیر است:



حد این تابع در تمام نقاط -1 است پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} f(x) = -1 + 2(-1) = -3$$

سوال ۸۲ اگر بازه  $(2x - 1, \frac{x+5}{x+1})$  یک همسایگی  $\frac{1}{2}$  باشد، حدود  $x$  کدام است؟

حل: باید  $\frac{1}{2} \in (2x - 1, \frac{x+5}{x+1})$  یعنی:  $2x - 1 < \frac{1}{2} < \frac{x+5}{x+1}$

$$2x - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow x < \frac{3}{4} \quad (1) \quad / \quad \frac{1}{2} < \frac{x+5}{x+1} \Rightarrow 0 < \frac{x+5}{x+1} - \frac{1}{2} = \frac{x+9}{2(x+1)}$$

$x$	$-9$	$-1$	
$\frac{x+9}{2(x+1)}$	+	-	تن +

$\Rightarrow (-\infty, -9) \cup (-1, \frac{3}{4}) \quad (2)$

$\xrightarrow{(1),(2)} x \in (-\infty, -9) \cup (-1, \frac{3}{4})$

سوال ۸۳ اگر  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ ، آن‌گاه حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})} f(x)$  کدام است؟

حل: وقتی  $x \rightarrow 1$  میل می‌کند، مقدار  $x$  با مقادیر کمتر یا بیشتر از 1 به عدد 1 نزدیک می‌شود. در نتیجه:

در نتیجه داریم:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$  ،  $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})} f(x) = -1$  عبارت  $-1 - 1 = -2$

سوال ۸۴ اگر  $f(x) = \frac{2x^2 + ax - 1}{x^2 + 4}$  و  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$  باشد، ثابت  $a$  را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax - 1}{x^2 + 4} = \frac{8 + 2a - 1}{4 + 4} = \frac{7 + 2a}{8} = 1 \rightarrow 7 + 2a = 8 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$



سوال ۸۵ به ازای کدام مقدار  $a$  تابع

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-a[-x^2]}{x+2} & x < 1 \\ \frac{1}{2}[2x]+1 & x > 1 \end{cases}$$

در  $x=1$  دارد.

حل: شرط وجود حد داشتن حد چپ و راست و مقدار تابع است.

وقتی که  $x \rightarrow 1^-$ ،  $x < 1$  است پس  $x^2 < 1$  در نتیجه  $-x^2 > -1$  است. پس  $[-x^2] = -1$  می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-a[-x^2]}{x+2} = \frac{2-a[(-1)^+]}{3} = \frac{2+a}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{2}[2x]+1\right) = \frac{1}{2}[2^+]+1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \Rightarrow \frac{2+a}{3} = 2 \Rightarrow 2+a = 6 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

سوال ۸۶ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-[x]}{x+[x]}$  کدام است؟

حل: وقتی  $x \rightarrow 2^-$  آنگاه  $1 < x < 2$  که در این صورت  $[x] = 1$ ، بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-[x]}{x+[x]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

سوال ۸۷ اگر

$$f(x) = \begin{cases} \tan \frac{\pi x}{8} & ; |x| \leq 2 \\ 1 - \frac{x^2}{2} & ; |x| > 2 \end{cases}$$

باشد، حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  کدام است؟

حل:

$$f(x) = \begin{cases} \tan \frac{\pi x}{8} + 1 & ; -1 \leq x \leq 2 \\ 1 - \frac{x^2}{2} & ; x > 2 \end{cases}$$

برای پیدا کردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x)$  باید از ضابطه پایینی استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = 1 - \frac{(-2)^2}{2} = 1 - 2 = -1$$

برای پیدا کردن حاصل  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  باید از ضابطه بالایی استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left( \tan \frac{\pi x}{8} + 1 \right) = \tan^2 \frac{\pi}{8} + 1 = \tan \frac{\pi}{4} + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 - 2 = -3$$



سوال ۸۸ حاصل  $\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \frac{[\sin x] + 2}{\cos 2x - 1}$  کدام است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5\pi}{4}} \frac{[\sin x] + 2}{\cos 2x - 1} = \frac{\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\right] + 2}{0 - 1} = \frac{-1 + 2}{-1} = -1$$

حل:

سوال ۸۹ دو تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x + b & x \geq 1 \\ x + a & x < 1 \end{cases}$  و  $g(x) = \begin{cases} 1 - 3x^2 & x \geq 1 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$  در نظر بگیرید اگر حد تابع

$f + g$  در نقطه  $x = 1$  برابر 3 باشد مقدار  $a$  کدام است؟

حل: ابتدا حد تابع  $x \rightarrow 1$  را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - 3x^2) = -2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2$$

پس  $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = -2$  می‌باشد از طرفی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} ((f + g)(x)) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + (-2) = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

بنابراین حاصل حد چپ و راست تابع  $f$  در  $x = 1$  برابر 5 است.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x + a) = 5 \rightarrow 1 + a = 5 \rightarrow \boxed{a = 4}$$

سوال ۹۰ حاصل  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x([x] + [-x]) + 1}{x^3 - 1}$  کدام است؟

حل: می‌دانیم  $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ . با توجه به اینکه حد داریم یعنی مقدار صحیح نیست پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} ([x] + [-x]) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + 1}{x^3 - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{3}$$

سوال ۹۱ اگر  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4x} = \frac{3}{4}$  باشد، مقدار  $a + b$  کدام است؟

حل: چون که یه حد داریم که جواب دارد و با توجه به اینکه مخرج صفر می‌شود پس صورت نیز صفر است و جواب  $\frac{3}{4}$

حد پس از رفع ابهام است. (حتماً  $(x - 4)$  عامل صفر است)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 4x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+m)}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+m}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\rightarrow m = \frac{3}{4}x - x = -\frac{1}{4}x \xrightarrow{x=4} \boxed{m = -1}$$

$$x^2 + ax + b = (x-4)(x-1) \Rightarrow x^2 + ax + b = x^2 - 5x + 4$$

$$\rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 4 \end{cases} \rightarrow \boxed{a + b = -1}$$

سوال ۹۲ حاصل حد عبارت  $\frac{3x - 2\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$  وقتی  $x \rightarrow 1$  کدام است؟



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} = \frac{3x - 3\sqrt{x} + \sqrt{x} - 1}{(x-1)(x+1)} = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-1) + (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)(x+1)}$$

حل:

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\cancel{\sqrt{x}-1})[(3\sqrt{x}+1)]}{(\cancel{\sqrt{x}-1})(\sqrt{x}+1)(x+1)} = \frac{4}{2 \times 2} = 1$$

از  $(\sqrt{x}-1)$  فاکتور می‌گیریم:

سوال ۹۳ حاصل حد  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x - 10}{x^2 - 4}$  را بیابید.

حل:  $(x-2)$  خب حاصل صفر است و مخرج را بر این عبارت تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 5}{x+2} = \frac{13}{4}$$

$$\begin{array}{r} x^3 + x - 10 \quad | \quad x - 2 \\ -x^3 + 2x^2 \quad \quad \quad x^2 + 2x + 5 \\ \hline 2x^2 + x \\ -2x^2 + 4x \\ \hline 5x - 10 \\ -5x + 10 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$$

سوال ۹۴ اگر تابع  $f$  در نقطه‌ای  $X = 1$  دارای حد باشد  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 5$  باشد آنگاه  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  کدام است؟

حل: باید  $f(x)$  را به دست بیاوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{f(x) + 1} = 5 \rightarrow 2f(x) - 1 = 5f(x) + 5 \rightarrow 3f(x) = -6 \rightarrow \boxed{f(x) = -2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} = f(x) = -2 \rightarrow \text{پیوستگی}$$

سوال ۹۵ مقدار  $a$  کدام باشد تا تابع  $f(x) = \begin{cases} 2x + a & x > 1 \\ 3 & x = 1 \\ x^2 - b & x < 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوستگی راست داشته باشد.

حل: شرط اینکه یک تابع پیوستگی راست داشته باشد این است که حد راست و نمودار تابع برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = 2(1) + a = 2 + a, f(1) = 3 \Rightarrow 2 + a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

سوال ۹۶ اگر تابع  $f(x) = a[x + 1] + [x] + 2$  در  $x = 4$  پیوسته باشد،  $a$  کدام است؟

حل: باید مقدار تابع در  $x = 4$  با حدهای چپ و راست تابع در این نقطه برابر باشد.

$$f(4) = a[4 + 1] + [4] + 2 = 5a + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} (a[x + 1] + [x] + 2) = 5a + 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} (a[x + 1] + [x] + 2) = 4a + 5$$

$$5a + 6 = 4a + 5 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

سوال ۹۷ به ازای کدام مقدار  $a$ ،  $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \leq 2 \\ a|x - 1| & x > 2 \end{cases}$  تابع همواره پیوسته است.

حل: تابع مربوطه به هر دو ضابطه در دامنه‌شان پیوسته هستند. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} a|x - 1| \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 1 = 3 \end{array} \right\} a = 3 \rightarrow \boxed{f(2) = 3}$$



سوال ۹۸ اگر تابع

$$f(x) = \begin{cases} a[1-2x] & x < 2 \\ bx = 2 & \\ \frac{x^2 - 4}{|x^2 - 5x + 6|} & x > 2 \end{cases}$$

در  $x = 2$  پیوسته باشد حاصل  $b - 3a$  کدام است؟

حل: وقتی که سؤال گفته شده پیوسته است یعنی  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} a[1-2x] - \lim_{x \rightarrow 2^-} a[-3^+] = -3a$$

بنابراین :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|(x-2)(x-3)|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{-(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{-(x-3)} = \frac{4}{1} = 4$$

$$\Rightarrow -3a = b = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ a = \frac{-4}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{b - 3a = 8}$$

سوال ۹۹ به ازای کدام مقدار  $a$  تابع  $f(x) = (x+a)[2x-5]$  در  $x = 2$  پیوسته است.

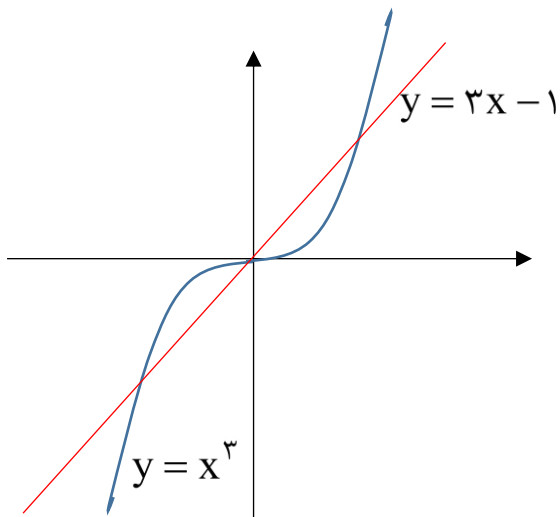
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a)[2x-5] = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+a)(-1) = -(2+a) \quad \text{حل:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+a)[2x-5] = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x+a)(-2) = -2(2+a)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \rightarrow -4 - 2a = -a - 2 \rightarrow \boxed{a = -2}$$

سوال ۱۰۰ تابع  $f(x) = \begin{cases} x^3 & ; x^3 \geq 3x - 1 \\ 3x - 1 & ; x^3 < 3x - 1 \end{cases}$  چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

حل: به کمک نمودار توابع  $y = x^3$  و  $y = 3x - 1$  نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل واضح است که تابع در تمام  $\mathbb{R}$  پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

سوال ۱۰۱ اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 2x}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} & x \neq \frac{\pi}{4} \\ k & x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$  در نقطه‌ی  $x = \frac{\pi}{4}$  پیوسته باشد، مقدار  $f(\frac{\pi}{4})$  چقدر است؟

حل: شرط پیوستگی:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = k = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2}(\cos x - \sin x)} = \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \sqrt{2} \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = k = 2$$