



بیستوفیل

حسابان یازدهم-فصل ۳
ریاضی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیکانام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴
امیرمحمد کیانی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصران

رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی

رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبدالله آبادی

رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمد صالح زارعی

رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی

رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی

رتبه ۱۷۳۱
محمد رضا محسنی

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی

رتبه ۲۶۲۵
زهرا جمعی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۳

یازدهم

سال یازدهم

ریاضی

فهرست

_____ درس اول : تابع نمایی _____

۱..... تابع نمایی، معادلات و نامعادلات نمایی

_____ درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم _____

۲..... تابع لگاریتمی، تعریف لگاریتم و شرایط آن

_____ درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادله های لگاریتمی _____

۳..... ویژگی های لگاریتم

۴..... معادلات و نامعادلات لگاریتمی و مسائل کاربردی



درس اول : تابع نمایی



تابع نمایی، معادلات و نامعادلات نمایی

۱ نیمه عمر یک ماده هسته ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده، ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می ماند را محاسبه کنید.

۲ تحت شرایط ایده آل جرم یک توده معین از باکتری‌ها، در هر ساعت ۳ برابر می شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود دارد.

الف جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب جرم توده را پس از ۱۰ ساعت، برآورد کنید.

پ جرم توده پس از چند ساعت، ۲۴۳۰۰ میلی گرم خواهد شد؟

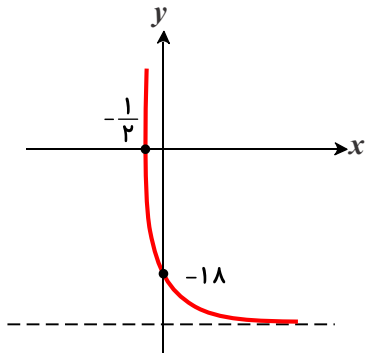
۳ تابع $f(x) = 3^x$ را در نظر بگیرید.

الف برد تابع را بنویسید.

ب وارون تابع $f(x)$ چیست؟

۴ خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.7)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می کند؟ (راه حل نوشته شود)

۵ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(-1)$ کدام است؟



۶ اگر $f(x) = 2^{x+1} - 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ بیابید.

۷ نیمه عمر عنصری ۵۰ سال است. اگر جرم اولیه آن ۴۸ میلی گرم باشد، بعد از ۲۵ سال جرم این عنصر چقدر خواهد بود؟

۸ یکی از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} \quad \text{و} \quad ۲) 4^{3x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$$

۹ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) هر تابع با ضابطه $f(x) = ka^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ و $k \neq 0$ رفتار نمایی دارد.

ب) نمودار تابع $y = 3^x$ همواره بالای نمودار تابع $y = 2^x$ قرار دارد.

ج) دو تابع $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = -\log_2 x$ وارون یکدیگرند.

د) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

ه) دامنه تابع‌های $f(x) = \log_2 x$ و $g(x) = 2^x$ برابر است.





۱۰ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = A$ باشد، آنگاه مقدار A برابر است با

ب) دامنه تابع $y = \log_3(1 - x^2)$ برابر است.

ج) تابع $y = -2^x + 2$ تابعی است. (صعودی، نزولی)

د) خط $y = 81$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در نقطه قطع می کند.

ه) نمودار دو تابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = x^2$ در نقطه همدیگر را قطع می کنند.

۱۱ نقطه تلاقی تابع $f(x) = 9 - 3^{2x+1}$ با محور x ها را بیابید.

۱۲ نمودار تابع نمایی $f(x) = -2 - 3^x$ را رسم کنید.

۱۳ ضابطه وارون تابع $f(x) = 3^{x+2}$ را به دست آورید.

۱۴ اگر نمودار تابع نمایی $y = 2^x$ خط $y = \frac{13}{4}$ را قطع کند. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۵ اخیراً داروی مسکن جدیدی به بازار عرضه شده است که هر قرص آن شامل ۳۰۰ میلی گرم از ترکیبات دارویی فعالی است که با گذشت

هر یک ساعت از زمان مصرف، مقدار آن در خون بیمار نصف می شود.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار داروی باقی مانده (میلی گرم)	۳۰۰	۱۵۰

ب) فرمولی بنویسید که مقدار دارو را در خون بیمار پس از گذشت t ساعت نشان دهد.

۱۶ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$9^x - 7 \times 3^x = 18$$

۱۷ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 5^x - 2$ ب) $y = 5^x + 1$

۱۸ دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 3^{x+2y} = 1 \end{cases}$$



درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم



تابع لگاریتمی، تعریف لگاریتم و شرایط آن

۱۹ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \log(4-x)$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف توابع f و g .

۲۰ حدود t را چنان بیابید که تابع $y = \left(\frac{3}{4} - t\right)^x$ یک تابع نمایی باشد.

۲۱ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$2 \log_7 8 - 3 \log_5 \sqrt[3]{5} + 2^{\log_2 3}$$

ب

$$3 \log_{10} 1000 + \log \sqrt[3]{100} + \log_5 \frac{1}{25}$$



پ

$$\log_2 22 + \log_{\frac{1}{2}} 81 + \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$$

ت

$$2 \log_7 5 - \log_7 3$$

ث

$$\log_{\sqrt{5}} 8 + 5^{(1+\log_5 4)}$$

ج

$$\log_5 \sqrt{125} + \log_7 2 + \log_{0.1}$$

ح

$$\log_3 (\log_3 (\log_5 125))$$

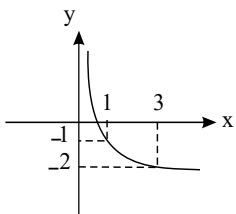
خ

$$\log_6 5 \times \log_7 6 \times \log_8 7 \times \dots \times \log_{24} 24$$

$$\frac{1}{\log_2 24} + \frac{1}{\log_3 24} + \frac{1}{\log_4 24}$$

۲۲ دامنه تابع $f(x) = \log_{1-x} \left(\frac{x+1}{x} \right)$ را بیابید.

۲۳ اگر نمودار تابع $y = a + \log_b^x$ بصورت مقابل باشد، ضابطه‌ی تابع را بیابید.



درس سوم : ویژگی های لگاریتم و

حل معادله های لگاریتمی

ویژگی های لگاریتم

۲۴ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log \sqrt{0.75}$ را بر حسب a و b به دست آورید.

۲۵ حاصل عبارت $\log_7 \sqrt[3]{49^2}$ کدام گزینه است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

۲۶ اگر $f(x) = \log_3 (7x^2 - 1)$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

۲۷ با فرض $\log 2 = 0.3$ ، مقدار $\log_2 25$ را به دست آورید.

۲۸ حاصل عبارت $\log_{10} 5\sqrt{2} + \log_{10} 2\sqrt{5}$ را به دست آورید.

۲۹ حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{32} - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$$

۳۰ اگر $f(x) = 3 - 2 \log_3 \left(\frac{x}{4} + 2 \right)$ ، مقدار $f(28)$ را به دست آورید.





۳۱ اگر $\log 2 = 0,3$ و $\log 3 = 0,4$ باشد، حاصل $\sqrt[3]{45}$ را به دست آورید.

۳۲ نشان دهید اگر $c > 0$ و a و b و $c \neq 1$ آنگاه: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

۳۳ اگر نمودار تابع $f(x) = 2 + \log_a^x$ از نقطه $(\frac{1}{3}, -2)$ عبور کند، آنگاه مقدار a را به دست آورید.

۳۴ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \log_3 \left(\frac{9}{\sqrt[3]{27}} \right) + \log_{0,001}$$

۳۵ اگر $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب a , b و c بیابید.

الف) $\log \sqrt[3]{0,084}$ ب) $\log \frac{1}{2100}$

معادلات و نامعادلات لگاریتمی و مسائل کاربردی

۳۶ معادله لگاریتمی $\log_2(x+7) - \log_2(x-2) = 2$ را محاسبه کنید.

۳۷ معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log(x-1) + \log\left(\frac{x}{3} + 1\right) = \log 18 - \log 2$$

۳۸ نیمه عمر عنصری ۲۵ سال است. اگر جرم اولیه آن ۲۴ میلی گرم باشد، بعد از ۴۰ سال جرم این عنصر چقدر خواهد بود؟ $2^{-1,6} \approx 0,32$

۳۹ معادله لگاریتمی مقابل را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

$$\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2$$

۴۰ معادله لگاریتمی $\log(x+3) + \log(x-3) - \log x = 3 \log 2$ را حل کنید.

۴۱ نیمه عمر یک ماده ۴۸ ساعت است. اگر ۲۵۶ گرم از این ماده را در اختیار داشته باشیم، جرمی که پس از ۹۶ ساعت باقی می‌ماند، چقدر است؟

۴۲ معادله زیر را حل کنید.

$$3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 2x = 1$$

۴۳ معادله لگاریتمی $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x+3)$ را حل کنید.

۴۴ معادله لگاریتمی $\log x + \log(x-1) + 3 \log 2 = 1 + \log 3$ را حل کنید.

۴۵ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_2 x^2 + \log_2(2-x) = 0$

ب) $\log_x(x+1) + \log_x(2x+1) = \log_x 6$

۴۶ نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۲۴ میلی گرم باشد، به کمک تابع نمایی:

الف) جرم باقیمانده این ماده پس از ۵۰ سال را بیابید.

ب) بعد از چند سال جرم باقیمانده برابر ۳ میلی گرم می‌شود.

۴۷ در آبان‌ماه ۱۳۹۶ زلزله‌ای با قدرت ۷٫۳ ریشتر شهرستان کرمانشاه را لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ را به دست آورید.

۴۸ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(3, -\frac{1}{3})$ عبور کند، مقدار a چقدر است؟

۴۹ مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3x-9}) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-4)$ را به دست آورید.

۵۰ معادله $\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2$ را حل کنید.



پاسخنامه تشریحی



$$m(t) = m_0 \times 2^{\frac{-t}{n}} \rightarrow m(t) = 128 \times 2^{\frac{-t}{30}} \rightarrow m(300) = 128 \times 2^{\frac{-300}{30}} = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$f(t) = 100 \times (3)^t$$

$$f(10) = 100 \times 3^{10} \Rightarrow f(10) = 5904900$$

$$f(t) = 24300 = 100 \times (3)^t \Rightarrow t = 5$$

$$R = (0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

$$10 = (0.01)^x \Rightarrow 10 = (10^{-2})^x \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

۵ با توجه به شکل، مختصات دو نقطه $A(0, -18)$ و $B(-\frac{1}{3}, 0)$ واقع بر منحنی را در ضابطه تابع جای گذاری می‌کنیم:

$$f(0) = -27 + (\frac{1}{3})^b = -18 \Rightarrow 3^{-b} = 3^2 \Rightarrow b = -2$$

$$f(-\frac{1}{3}) = -27 + (\frac{1}{3})^{\frac{a}{3}-2} = 0 \Rightarrow 3^{\frac{a}{3}+2} = 3^3 \Rightarrow \frac{a}{3} + 2 = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = -27 + (\frac{1}{3})^{x-2} \Rightarrow f(-1) = -27 + 3^4 = -27 + 81 = 54$$

(صفحه ۴۷ تا ۷۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(0) = -27 + (\frac{1}{3})^b = -18 \Rightarrow 3^{-b} = 3^2 \Rightarrow b = -2 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$f(-\frac{1}{3}) = -27 + (\frac{1}{3})^{\frac{a}{3}-2} = 0 \Rightarrow 3^{\frac{a}{3}+2} = 3^3 \Rightarrow \frac{a}{3} + 2 = 3 \Rightarrow a = 3 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$f(x) = -27 + (\frac{1}{3})^{x-2} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow f(-1) = -27 + 3^4 = -27 + 81 = 54 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$f^{-1}(27) = a \rightarrow f(a) = 27$$

$$2^{a+1} - 5 = 27 \rightarrow 2^{a+1} = 32 = 2^5 \rightarrow a + 1 = 5 \rightarrow a = 4$$

۷ اگر مقدار یا جمعیت با گذشت h ساعت (دقیقه یا سال) k برابر شود. مقدار یا جمعیت در ساعت at به صورت $A(t) = A_0 k^{\frac{t}{a}}$ خواهد بود.
 A_0 : مقدار اولیه

t : زمانی است که می‌خواهیم میزان رشد یا زوال را طی آن مدت اندازه‌گیری کنیم.

h : دوره زمانی است که در آن A_0 , k برابر می‌شود.

$$A(t) = A_0 (\frac{1}{3})^{\frac{t}{5}} = 48 (\frac{1}{3})^{\frac{25}{5}} \Rightarrow A(25) = 48 (\frac{1}{3})^5 = 48 (\sqrt{\frac{1}{3}}) = 48 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = 24\sqrt{2}$$

(صفحه ۷۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{t}{5}} = 48 \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{25}{5}} \quad (\text{نمره } 25, 25) \Rightarrow A(25) = 48 \left(\frac{1}{p}\right)^5 \quad (\text{نمره } 25, 25)$$

$$= 48 \left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right) = 48 \times \frac{\sqrt{2}}{p} = 24\sqrt{2} \quad (\text{نمره } 25, 25)$$

۸

ابتدا سعی می‌کنیم با ساده و یکسان نمودن پایه‌ها معادله‌ای به صورت $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a \neq 1, a > 0$) داشته باشیم. سپس ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

$$4^{3x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x \Rightarrow 4^{3x+2} = (4)^{-3x} \Rightarrow 3x+2 = -3x \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

(صفحه ۷۹، ۷۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

حل یک معادله به دلخواه کافی است.

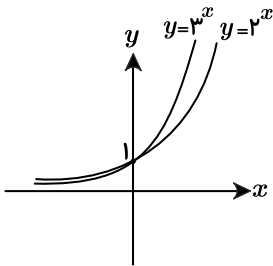
$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \quad (\text{نمره } 5, 25) \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3 \quad (\text{نمره } 5, 25)$$

$$4^{3x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x \Rightarrow 4^{3x+2} = (4)^{-3x} \quad (\text{نمره } 5, 25) \Rightarrow 3x+2 = -3x \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \quad (\text{نمره } 25, 25)$$

۹

الف) بنابر تعریف درست است.

ب) نادرست؛ برای $x < 0$ نمودار 3^x زیر نمودار 2^x قرار دارد.



$$y = 2^{-x} \rightarrow \log_2 y = \log_2 2^{-x} = -x$$

ج) درست؛ زیرا $x = -\log_2 y \rightarrow f^{-1}(x) = -\log_2 x$

د) نادرست؛ مثال نقض $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

ه) نادرست؛ $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = (0, +\infty)$

راهنمای تصحیح:

ج) درست (۲۵، نمره)

ب) نادرست (۲۵، نمره)

الف) درست (۲۵، نمره)

ه) نادرست (۲۵، نمره)

د) نادرست (۲۵، نمره)

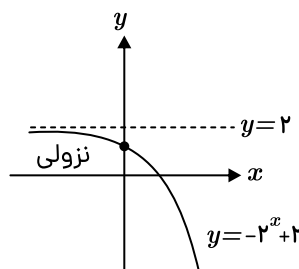
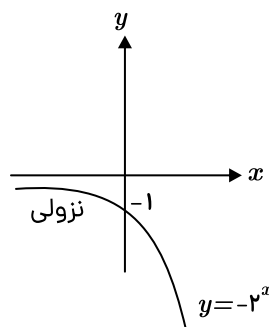
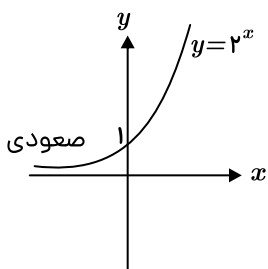
۱۰ الف)

$$A = \log_2 \frac{1}{27} = \log_2 27^{-1} = -\log_2 3^3 = -3 \log_2 3 = -3$$

ب)

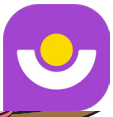
$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad \text{یا } x \in (-1, 1)$$

ج)

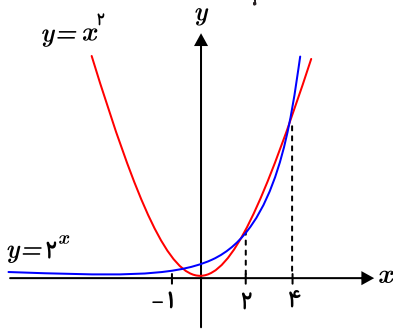


د)

$$\begin{cases} y = 3^x \\ y = 81 \end{cases} \rightarrow 81 = 3^x \Rightarrow 3^4 = 3^x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 81)$$



هـ) ۳ نقطه:



راهنمای تصحیح:

الف) ۳- (نمره ۰,۲۵)

د) (۴ و ۸۱) (نمره ۰,۲۵)

ب) (۱ و -۱) (نمره ۰,۲۵)

هـ) ۳ (نمره ۰,۲۵)

ج) نزولی (نمره ۰,۲۵)

۱۱

(صفحة ۷۵ کتاب درسی)

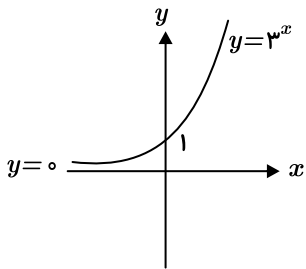
راهنمای تصحیح:

$$y = 0 \Rightarrow 9 - 3^{2x+1} = 0 \Rightarrow 3^{2x+1} = 9 = 3^2 \Rightarrow 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

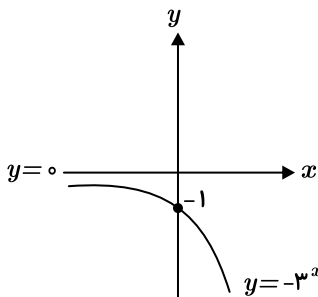
$$y = 0 \Rightarrow 3^{2x+1} = 9 \text{ (نمره ۰,۲۵)} \rightarrow 3^{2x+1} = 3^2 \Rightarrow 2x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (نمره ۰,۲۵)} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

۱۲

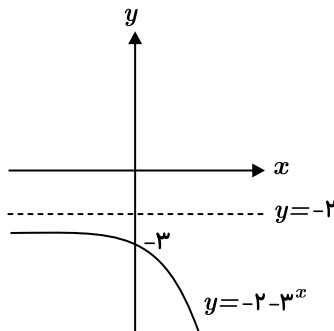
گام ۱) ابتدا نمودار $y = 3^x$ را رسم می‌کنیم.



گام ۲) نمودار $y = 3^{-x}$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

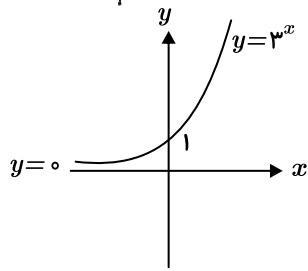


گام ۳) نمودار $y = -3^{-x}$ را در راستای محور عرض‌ها، به اندازه ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

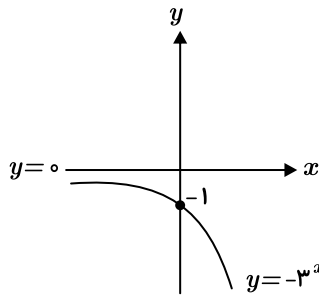


(صفحة ۷۸ کتاب درسی)

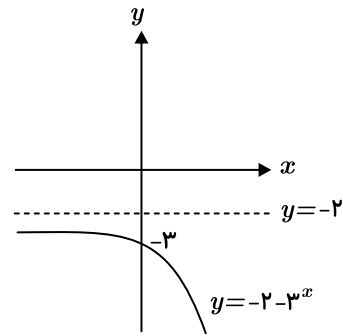
راهنمای تصحیح:



(نمره ۰,۲۵)



(نمره ۰,۲۵)



(نمره ۰,۲۵)

$$y = 3^{x+2} \Rightarrow y = 3^{x+2} \Rightarrow \log_3 3^{x+2} = \log_3 (y) \Rightarrow x + 2 = \log_3 (y)$$

$$\Rightarrow x = -2 + \log_3 (y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -2 + \log_3 (x)$$

۱۳

(صفحة ۸۱ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:

$$\displaystyle f^{-1}(x) = -2 + \log_3 (x) \Rightarrow x + 2 = \log_3 (y) \Rightarrow x = \log_3 (x) - 2 \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = -2 + \log_3 (x)$$

۱۴

$$\begin{cases} -11y = 2^x \\ y = \frac{13}{3} = 6,5 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} 2^x = 6,5 \Rightarrow \text{قراردار می‌دهیم}$$

$$4 < 6,5 < 8 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3$$

$$\Rightarrow 2 < x < 3$$

$$\Rightarrow x \in (2, 3)$$

(صفحة ۷۹ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:

$$2^x = \frac{13}{3} = 6,5 \Rightarrow 4 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 2 < x < 3$$

۱۵

الف

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار داروی باقی‌مانده (میلی‌گرم)	۳۰۰	۱۵۰	۷۵	$\frac{۷۵}{۲}$	$\frac{۷۵}{۴}$	$\frac{۷۵}{۸}$	$\frac{۷۵}{۱۶}$

چون زمان‌های سپری شده دنباله حسابی و مقدار داروهای باقی‌مانده، دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس ضابطه تابع فوق، نمایی است و می‌توان نوشت:

$$f(t) = ab^t$$

باتوجه به جدول داریم: $f(0) = 300$ و $f(1) = 150$ ، پس:

$$300 = ab^0 \Rightarrow a = 300$$

$$150 = ab^1 \Rightarrow 150 = 300 \cdot b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) = 300 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

۱۶

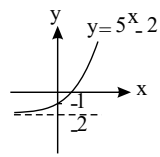
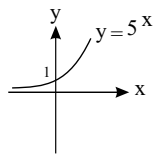
$$9^x - 7 \times 3^x - 18 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 7 \times 3^x - 18 = 0$$

با فرض $3^x = t$ داریم:

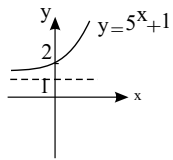
$$t^2 - 7t - 18 = 0 \Rightarrow (t-9)(t+2) = 0 \Rightarrow t = 9, t = -2$$

$$3^x = -2 \text{ غ قی } 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

۱۷



(الف)



(ب)

$$\begin{aligned} 2^{2x-y} = 3^2 = 2^5 &\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4x - 2y = 10 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\ 3^{x+2y} = 1 = 3^0 &\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Delta x = 10 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

$$x + 2y = 0 \Rightarrow 2 + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$D_f : x \geq 2 \quad D_g : 4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [2, 4) - \{3\}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \log(4 - x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$D_{gof} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x | x \geq 2, \sqrt{x-2} < 4\} = [2, 18)$$

$$\sqrt{x-2} < 4 \Rightarrow x-2 < 16 \Rightarrow x < 18$$

۱۸

۱۹

۲۰

طبق تعریف تابع نمایی به صورت $y = a^x$ باید a مثبت و مخالف یک باشد:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - t \neq 1 &\Rightarrow t \neq \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow t \neq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - t > 0 &\Rightarrow t < \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{اشتراک} \Rightarrow (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = (-\infty, \frac{3}{2}) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} 1) \frac{3}{2} - t \neq 1 &\Rightarrow t \neq \frac{1}{2} \text{ (نمره ۰٫۵)} \\ 2) \frac{3}{2} - t > 0 &\Rightarrow t < \frac{3}{2} \text{ (نمره ۰٫۵)} \end{aligned} \Rightarrow (-\infty, \frac{3}{2}) - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ یا } (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

۲۱

الف

$$2 \log_2 2^3 - 3 \log_5 5^{\frac{1}{3}} + 3 = 6 \log_2 2 - 3 \times \frac{1}{3} \log_5 5 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8$$

$$3 \log 10^{-3} + \log 10^{\frac{1}{3}} + \log_5 5^{-2} = -9 + \frac{1}{3} - 2 = -\frac{31}{3}$$

$$\log_2 2^5 + \log_{2^{-1}} 2^6 + \log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 5 - 6 + \log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1 \times 2}{1} = \frac{17}{3}$$

$$2^{\log_2 \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}$$

$$\log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^3 + 5^{(\log_5 5 + \log_5 4)} = \frac{3}{\frac{1}{3}} + 5^{\log_5 20} = 9 + 20 = 29$$

ب

پ

ت

ث



ج

$$\log_5 5^{\frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} 2 + \log 1 \circ^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\log_r(\log_r(\log_5 5^r)) = \log_r(\log_r(r)) = \log_r(1) = 0$$

$$\frac{\log 5}{\log 6} \times \frac{\log 6}{\log 7} \times \frac{\log 7}{\log 8} \times \dots \times \frac{\log 24}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log 5^2} = \frac{\log 5}{2 \log 5} = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \log_{\sqrt[4]{2}} 4 = \log_{\sqrt{2}} 2 \times 3 \times 4 = \log_{\sqrt{2}} 24 = 1$$

۲۲ با در نظر گرفتن شرایط معنی دار بودن لگاریتم داریم:

$$\frac{x+1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x}{x-1} \begin{matrix} -\infty & -1 & 0 & +\infty \\ + & 0 & - & + \end{matrix} \begin{matrix} x < -1 \\ x > 0 \end{matrix} \quad (1)$$

$$1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \quad (2)$$

$$1-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) : x < -1 \vee 0 < x < 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

$$(1, -1) \rightarrow y = a + \log_b^x \Rightarrow -1 = a + \log_b^1 \Rightarrow -1 = a + 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$(3, -2) \rightarrow y = -1 + \log_b^x \Rightarrow -2 = -1 + \log_b^3 \Rightarrow \log_b^3 = -1 \Rightarrow b^{-1} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = 3 \rightarrow b = \frac{1}{3} \rightarrow y = -1 + \log_{\frac{1}{3}}^x$$

$$\log \sqrt{0.75} = \log \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (\log 3 - \log 4) = \frac{1}{2} (\log 3 - 2 \log 2) = \frac{1}{2} (b - 2a) = \frac{1}{2} b - a$$

در نتیجه:

۲۳

۲۴

گزینه ۲

۲۵

۲۶

$$f^{-1}(3) = x \Rightarrow f(x) = \log_p(\sqrt{x^2 - 1}) = 3$$

$$(\sqrt{x^2 - 1}) = 27 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_r 2}{\log_r 10} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{1}{\log_r 10} \Rightarrow \log_r 10 = \frac{10}{3}$$

$$\log_r 25 = \log_r 5^2 = 2 \log_r 5 = 2 \log_r \frac{10}{2} = 2(\log_r 10 - \log_r 2) = 2\left(\frac{10}{3} - 1\right) = 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

(صفحه ۸۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_r 2}{\log_r 10} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{1}{\log_r 10} \Rightarrow \log_r 10 = \frac{10}{3} \quad (\text{نمره } ۲۵)$$

$$\log_r 25 = \log_r 5^2 = 2 \log_r 5 = 2 \log_r \frac{10}{2} = 2(\log_r 10 - \log_r 2) = 2\left(\frac{10}{3} - 1\right) = 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3} \quad (\text{نمره } ۲۵)$$

(نمره ۲۵)

(نمره ۲۵)

۲۸

$$\log_{10} 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} = \log_{10} 10\sqrt{10} = \log_{10} 10 \times 10^{\frac{1}{2}} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 10 = \frac{3}{2}$$

(صفحه ۸۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log_{10} 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} (\text{نمره } ۲۵) = \log_{10} 10 \times 10^{\frac{1}{2}} (\text{نمره } ۲۵) = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} (\text{نمره } ۲۵) = \frac{3}{2} (\text{نمره } ۲۵)$$

۲۹

$$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a, \log_{b^m} a = \frac{1}{m} \log_b a, \log_b a^n = n \log_b a$$

$$\log_{\sqrt[5]{7}} \sqrt{32} = \log_{\sqrt[5]{7}} \sqrt{2^5} = \log_{\sqrt[5]{7}} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} \log_7 2 = \frac{25}{2}$$

$$\log_{\sqrt[5]{7}} \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = \log_{\sqrt[5]{7}} 7^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} \log_7 7 = -\frac{2}{15} \Rightarrow \frac{25}{2} - (-\frac{2}{15}) = \frac{25}{2} + \frac{2}{15} = \frac{25 \times 15 + 2 \times 2}{30} = \frac{377}{30}$$

(صفحة ۸۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(۵،نمره)

$$\log_{\sqrt[5]{7}} \sqrt{32} = \log_{\sqrt[5]{7}} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{25}{2}; \log_{\sqrt[5]{7}} \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = \log_{\sqrt[5]{7}} 7^{-\frac{2}{3}} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = -\frac{2}{15} \text{ (نمره ۵، ۹)}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{2} + \frac{2}{15} = \frac{377}{30} \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)}$$

۳۰

$$f(28) = 3 - 2 \log_7 \left(\frac{28}{7} + 2 \right) = 3 - 2 \log_7 (4 + 2) = 3 - 2 \log_7 6$$

$$= 3 - 2 \log_7 3^2 = 3 - 2 \times 2 \log_7 3 = 3 - 4 = -1$$

(صفحة ۸۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\displaystyle f(28) = 3 - 2 \log_7 (4 + 2) \text{ (نمره ۵، ۹)} = 3 - 2 \log_7 3^2 \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)}$$

$$= 3 - 2(2) = -1 \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)}$$

۳۱

$$\log \sqrt[5]{45} = \log 45^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log 45 = \frac{1}{5} \log (3^2 \times 5) = \frac{1}{5} (\log 3^2 + \log 5) = \frac{1}{5} (2 \log 3 + 1 - \log 2)$$

$$= \frac{1}{5} (2(0,4) + 1 - 0,3) = \frac{1}{5} (0,8 + 0,7) = \frac{1}{5} \times 1,5 = 0,3$$

(صفحة ۸۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(۵،نمره)

$$\log (3^2 \times 5)^{\frac{1}{5}} \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)} = \frac{1}{5} (2 \log 3 + \log 5) = \frac{1}{5} (2 \log 3 + 1 - \log 2) \text{ (نمره ۵، ۹)}$$

$$= \frac{1}{5} (2(0,4) + 1 - 0,3) \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)} = 0,3 \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)}$$

۳۲ فرض کنیم $M = \log_c a$ و $N = \log_c b$ ؛ پس طبق تعریف $a = c^M$ و $b = c^N$ از این رو $\frac{a}{b} = \frac{c^M}{c^N} = c^{M-N}$ مطابق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c \frac{a}{b} = M - N$

$$\text{نتیجه: } \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} \log_c a = M \Rightarrow a = c^M \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)} \\ \log_c b = N \Rightarrow b = c^N \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = c^{M-N} \text{ (نمره ۵، ۹)}$$

$$\Rightarrow \log_c \frac{a}{b} = M - N \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)} \Rightarrow \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)}$$

$$\text{۳۳} \xrightarrow{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} -2 = 2 + \log_a \frac{1}{3} \Rightarrow \log_a \frac{1}{3} = -4 \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \sqrt[4]{3}$$

$$\frac{9}{\sqrt[3]{27}} = \frac{3^2}{3^{\frac{3}{3}}} = 3^{\frac{6}{3}}$$

$$A = \log_3 \frac{9}{\sqrt[3]{27}} + \log_{0,001} 1 = \frac{6}{3} + (-3) = -\frac{1}{3}$$

۳۴

۳۵

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \log_b^{(\frac{a}{c})} = \log_b^a - \log_b^c, \log_b^{\frac{a^n}{m}} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\text{الف) } \log \sqrt[3]{0,084} = \frac{1}{3} \log \frac{84}{1000} = \frac{1}{3} (\log 84 - \log 1000) = \frac{1}{3} (\log(2^2 \times 3 \times 7) - \log 10^3)$$



$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} \log 2^r + \frac{1}{\frac{1}{3}} \log 3 + \frac{1}{\frac{1}{3}} \log 7 - \frac{1}{\frac{1}{3}} \times 3 \log 10$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{3}} \log 2 + \frac{3}{\frac{1}{3}} \log 3 + \frac{3}{\frac{1}{3}} \log 7 - 1 = \frac{3}{\frac{1}{3}} a + \frac{3}{\frac{1}{3}} b + \frac{3}{\frac{1}{3}} c - 1$$

ب) $\log(2100)^{-1} = -\log(3 \times 7 \times 10^2) = -\log 3 - \log 7 - \log 10^2$

$$= -\log 3 - \log 7 - 2 \log 10 = -b - c - 2$$

۳۶

$$\log_r(x+7) - \log_r(x-2) = 2 \rightarrow \log_r\left(\frac{x+7}{x-2}\right) = 2 \rightarrow \frac{x+7}{x-2} = 2^2 \rightarrow x+7 = 4x-8 \rightarrow x=5$$

$$\log(x-1) + \log\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \log 18 - \log 2 \Rightarrow \log(x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \log \frac{18}{2}$$

$$\Rightarrow (x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) = 0$$

$$x = -5 \quad \text{غ ق ک} \quad x = 4$$

$$m(40) = 24(2^{-\frac{40}{24}}) = 24 \times 0,32 = 7,68$$

$$\log_r(x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2 \Rightarrow (x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 9 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0$$

$$x = -5, \quad x = 4 \quad \text{مجموعه جواب} = \{4\}$$

$$\log(x+3) + \log(x-3) - \log x = 3 \log 2$$

$$\log \frac{(x+3)(x-3)}{x} = \log 2^3 \rightarrow \frac{x^2-9}{x} = 8 \rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases}$$

جواب $x = -1$ غیر قابل قبول است.

$$m(96) = 256\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{96}{256}} = 2^8 \times 2^{-2} = 2^6 = 64$$

۴۲ برای حل معادله فوق به شکل زیر عمل می‌کنیم:

الف) با در نظر گرفتن دامنه، در صورت امکان لگاریتم‌ها را ساده کرده یا از بین می‌بریم. (گاهی لازم است ابتدا لگاریتم با مبنای مساوی ایجاد کنیم.)

ب) سپس معادله حاصل را حل کرده و جواب‌های حاصل را با دامنه چک می‌کنیم. در پاره‌ای از سوالات هم باید تغییر متغیر داد و معادله حاصل را حل کرد.

$$3\sqrt{\log_r x} - \log_r 2x = 1 \Rightarrow 3\sqrt{\log_r x} - (\log_r 2 + \log_r x) = 1 \xrightarrow{\sqrt{\log_r x} = u} 3u - (1 + u^2) = 1$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{\log_r x} = 1 \Rightarrow \log_r x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ u = \sqrt{\log_r x} = 2 \Rightarrow \log_r x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$$

(صفحه ۸۷ و ۸۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$3\sqrt{\log_r x} - \log_r 2x = 1 \Rightarrow 3\sqrt{\log_r x} - (\log_r 2 + \log_r x) = 1 \quad (\text{نمره } 2,5)$$

$$\sqrt{\log_r x} = u \Rightarrow 3u - (1 + u^2) = 1 \quad (\text{نمره } 2,5)$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \quad (\text{نمره } 2,5) \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{\log_r x} = 1 \Rightarrow \log_r x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ u = \sqrt{\log_r x} = 2 \Rightarrow \log_r x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases} \quad (\text{نمره } 2,5)$$

$$\log_r(x^r - 1) = 1 + \log_r(x+3) \rightarrow \log_r(x^r - 1) - \log_r(x+3) = 1$$

$$\log_r \frac{(x^r - 1)}{(x+3)} = 1 \rightarrow \frac{(x^r - 1)}{(x+3)} = 3 \rightarrow x^r - 3x - 10 = 0$$

$$x = 5, x = -2$$

هر دو جواب قابل قبول است.

۴۴



$$\log x(x-1) + \log 8 = \log 10 + \log 3 = \log 30$$

$$\Rightarrow \log 8x(x-1) = \log 30$$

$$\Rightarrow 8x(x-1) = 30$$

$$\Rightarrow 4x(x-1) = 15$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 16(15) = 16 \times 16 = 256$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 16}{8} \begin{cases} x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \text{ جواب} \\ x = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \text{ در دامنه قرار ندارد} \end{cases}$$

(صفحة ۸۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log 8x(x-1) \text{ (نمره ۲۵)} = \log 30 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0 \text{ (نمره ۵)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \text{ جواب (نمره ۲۵)} \\ x = \frac{-3}{2} \text{ غقی (نمره ۲۵)} \end{cases}$$

۴۵

$$\text{الف) } \log_{\sqrt{2}} x^2 + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x(2-x) = \log_{\sqrt{2}} 1$$

$$\Rightarrow 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{ب) } \log_x (x+1)(2x+1) = \log_x 6 \Rightarrow (x+1)(2x+1) = 6 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+7}{4} = 1 \text{ غقی ق} \\ x = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2} \text{ غقی ق} \end{cases}$$

چون مبنای log باید مثبت و مخالف ۱ باشد؛ پس معادله جواب ندارد.

(صفحة ۸۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{الف) } \log_{\sqrt{2}} x^2 + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x(2-x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 2x - x^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\text{ب) } \log_x (x+1)(2x+1) = \log_x 6 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ غقی ق} \\ x = -\frac{5}{2} \text{ غقی ق (نمره ۲۵)} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد (نمره ۲۵)}$$

۴۶

$$\text{الف) } m(t) = B\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ نیم عمر ماده } B \text{ و جرم اولیه ماده } A$$

$$m(t) = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow m(50) = 24 \times 2^{-\frac{1}{20}} = 24 \times 2^{-2} = 24 \times \frac{1}{4} = 6 \Rightarrow m(50) = 6 \text{ میلی گرم}$$

$$\text{ب) } m(t) = B\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 3 = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{3}{24} = 2^{-\frac{1}{20}} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-\frac{1}{20}} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-\frac{1}{20}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{25} = 3 \Rightarrow t = 75 \text{ سال}$$

(صفحة ۸۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{الف) } m(t) = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (نمره ۵)} \Rightarrow m(50) = 24\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow m(50) = \frac{24}{4} = 6 \text{ میلی گرم}$$

$$\text{ب) } 3 = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-\frac{1}{20}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-\frac{1}{20}} \Rightarrow \frac{t}{25} = 3 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow t = 75 \text{ سال (نمره ۲۵)}$$

۴۷

$$\log E = 11.8 + 1.5M \Rightarrow \log E = 11.8 + 1.5(7.3) \Rightarrow \log E = 11.8 + 10.95 = 22.75 \Rightarrow E = 10^{22.75} \text{ Erg}$$

(صفحة ۸۹ کتاب درسی)



راهنمای تصحیح:

$$\log E = 11,8 + 1,5M \text{ (نمره, ۲۵)} \Rightarrow \log E = ۲۲,۷۵ \text{ (نمره, ۵)} \Rightarrow E = ۱۰^{۲۲,۷۵} \text{ (نمره, ۲۵)}$$

۴۸

$$y = \log_a x \xrightarrow{(-۳)} -۳ = \log_a \frac{1}{۳} \rightarrow a^{-۳} = \frac{1}{۳} \rightarrow \frac{1}{a^۳} = \frac{1}{۳} \rightarrow a^۳ = ۳ \rightarrow a = \sqrt[۳]{۳}$$

(صفحة ۸۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$-۳ = \log_a \frac{1}{۳} \xrightarrow{\text{(نمره, ۲۵)}} a^{-۳} = \frac{1}{۳} \rightarrow a^۳ = ۳ \xrightarrow{\text{(نمره, ۲۵)}} a = \sqrt[۳]{۳} \text{ (نمره, ۲۵)}$$

۴۹ ۱. عبارت درون هر لگاریتم باید مثبت باشد.

۲. در توابع لگاریتمی که پایه آنها کمتر از یک باشد جهت نامعادله پس از ساده کردن log از دو طرف عوض می‌شود.

$$\log_{\frac{1}{۲}}(۳x - ۹) > \log_{\frac{1}{۲}}(۲x - ۴) \Rightarrow \sqrt[۲]{\log_{\frac{1}{۲}}(۳x - ۹)} > \sqrt[۲]{\log_{\frac{1}{۲}}(۲x - ۴)}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{۲}}(۳x - ۹) > \log_{\frac{1}{۲}}(۲x - ۴)$$

تابع نزولی است (پایه لگاریتم کوچک‌تر از یک است)، بنابراین در حل نامعادله باید جهت نامساوی را عوض کرد.

$$\left. \begin{array}{l} ۳x - ۹ < ۲x - ۴ \Rightarrow x < ۵ \\ ۳x - ۹ > ۰ \Rightarrow x > ۳ \\ ۲x - ۴ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \end{array} \right\} \Rightarrow (۳, ۵)$$

(صفحة ۸۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log_{\frac{1}{۲}} \sqrt{۳x - ۹} > \log_{\frac{1}{۲}}(۲x - ۴) \Rightarrow \log_{\frac{1}{۲}}(۳x - ۹) > \log_{\frac{1}{۲}}(۲x - ۴) \text{ (نمره, ۵)}$$

$$\left. \begin{array}{l} ۳x - ۹ < ۲x - ۴ \Rightarrow x < ۵ \text{ (نمره, ۲۵)} \\ ۳x - ۹ > ۰ \Rightarrow x > ۳ \text{ (نمره, ۲۵)} \\ ۲x - ۴ > ۰ \Rightarrow x > ۲ \text{ (نمره, ۲۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow (۳, ۵) \text{ (نمره, ۲۵)}$$

۵۰

$$\log_r(x - 1) + \log_r\left(\frac{x}{r} + 1\right) = ۲ \rightarrow (x - 1)\left(\frac{x}{r} + 1\right) = r^۲$$

$$\rightarrow \frac{x^r}{r} + \frac{x}{r} - 1 = ۹ \rightarrow x^r + x - ۲۰ = ۰ \rightarrow x = ۴ \text{ ق ق } , x = -۵ \text{ ق ق}$$