



بیستوفیل

حسابان یازدهم-فصل ۲
ریاضی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیکانام جهرمی



دور رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی



رتبه ۲۰
سینا راضی



رتبه ۱۶
آریا قهرمانی



رتبه ۱۴
امیرمحمد کیانی



رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی



رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی



رتبه ۶۱
بهار هلالی



رتبه ۵۹
ایمان انفرادی



رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی



سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی



رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه



رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری



رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری



رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصران



رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی



رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری



رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی



رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی



رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی



رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا



رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری



رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسوند



رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبدالله آبادی



رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد



رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری



رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده



رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد



رتبه ۵۵۷
محمد صالح زارعی



رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی



رتبه ۷۸۱
احسان قنبری



رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان



رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی



رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی



رتبه ۷۸۶
نیما غفاری



رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی



رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی



رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی



رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر



رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی



رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی



رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده



رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر



رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار



رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی



رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی



رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده



رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری



رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی



رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی



رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده



رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده



رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی



رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی



رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری



رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی



رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی



رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند



رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی



رتبه ۱۷۳۱
محمد رضا محسنی



رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه



رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد




رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم



رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی



رتبه ۲۶۲۵
زهرا جمعی



رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی




رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی



رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی



رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی



رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی



رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی



رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی



رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی



رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی





مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل

۲ یازدهم

سال یازدهم

ریاضی



فهرست

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

۱..... یادآوری تابع، ضابطه تابع، تساوی دو تابع

درس دوم : انواع توابع

۲..... توابع گویا و دامنه آن ها

۲..... توابع رادیکالی و دامنه آن ها

۳..... تابع پله ای - تابع جزء صحیح

درس سوم : وارون تابع

۳..... توابع یک به یک

۴..... وارون یک تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

۵..... چهار عمل اصلی روی توابع

۶..... ترکیب توابع



درس اول : آشنایی بیشتر با تابع



یادآوری تابع، ضابطه تابع، تساوی دو تابع

۱ درستی و نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

الف) معادله خط گذرا از دو نقطه $A(-2, -2)$ و $B(-2, 2)$ یک تابع است.

ب) نمودار هر تابع درجه دو (با دامنه \mathbb{R})، محور عرضها (y ها) را قطع می‌کند.

ج) در تابع $f: A \rightarrow B$ همواره تعداد اعضای دامنه تابع بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد تابع است.

د) هر دو تابع که دامنه و بردشان برابر باشند، با هم مساوی‌اند.

۲ دو تابع $g(x) = x + c$ ، $f(x) = \begin{cases} a & x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - b} & x \neq 2 \end{cases}$ برابرند. مقادیر a, b, c را به دست آورید.

۳ نشان دهید رابطه $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ تابع است.

۴ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) در معادله $|y| = x + 1$ ، y تابعی از x نیست.

۵ نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:

الف) دامنه آن $[-4, 5]$ باشد،

ب) به هر عدد کمتر از صفر، قدرمطلق آن را نسبت دهد،

پ) به هر عدد در بازه $[0, 1]$ ، مربع آن را نسبت دهد،

ت) در سایر نقاط دامنه ثابت باشد و $f(5) = 2$

۶ نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:

الف) $f(0) = 2$ ، $f(-2) = 5$

ب) تابع در بازه $(-\infty, -2]$ ثابت است،

پ) تابع در بازه $(-2, 0]$ خطی است و موازی خط $y + x = 5$ است.

ت) تابع به هر عدد مثبت، جذر آن را نسبت می‌دهد.

۷ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

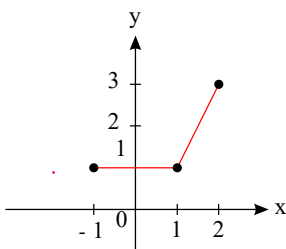
الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۸ ضابطه‌ی تابع f که نمودار آن در زیر آمده است را بیابید.



۹ نمودار تابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$





کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟
 ۱۰ برای تابع $f: [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = -2x^2 + 3$

الف) $f: [-2, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$
 $f(x) = -2x^2 + 3$ ب) $f: (-2, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$
 $f(x) = -2x^2 + 3$ ج) $f: [-2, +\infty) \rightarrow (-\infty, 4)$
 $f(x) = -2x^2 + 3$

درس دوم: انواع توابع

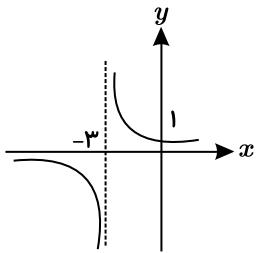
توابع گویا و دامنه آن‌ها

۱۱

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) نمودار تابع $f(x) = \frac{k}{x+m}$ شکل مقابل است. $k+m$ کدام است؟

۴ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)



ب) دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

ج) دو خط $0 = 2x + ky - 5$ و $0 = (k+1)x - y + 3$ برهم عمودند. k کدام است؟

۱ (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴)

۱۲ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری رودخانه‌ای به وسیله تابع $f(x) = \frac{520x}{200-2x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد

آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۶۰ درصد از آلودگی این رودخانه را حساب کنید.

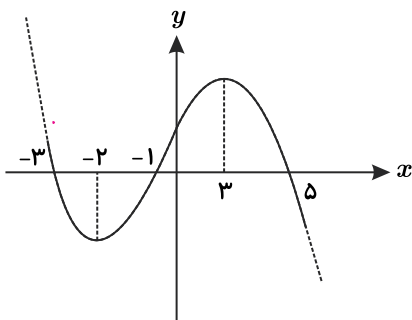
ب) دامنه این تابع در حالت واقعی را به کمک یک بازه نمایش دهید.

۱۳ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2+3}{ax^2+bx+18}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-3\}$ باشد، a و b را بیابید.

توابع رادیکالی و دامنه آن‌ها

۱۴ به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

۱۵ با توجه به نمودار تابع $f(x)$ دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ را به دست آورید.





۱۶ جاهای خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید.

الف) فاصله نقطه $A(2, -4)$ از خط $y = 0$ برابر است.

ب) دو خط $1 - 3y = x$ و $y = 3x + 1$ با هم موازی است.

ج) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ برابر است.

د) نمودار تابع $y = \sqrt{2 - x} - 2$ از ناحیه صفحه مختصات نمی‌گذرد.

۱۷ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -\sqrt{x+2} + 3$ را رسم نموده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{\sqrt{x + |x|}}$$

۱۹ تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-3} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$$

تابع پله‌ای - تابع جزء صحیح

۲۰ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند، f را رسم و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(4) = 4$ ، $f(-1) = 5$

ب) در بازه $[-1, 4]$ ثابت است.

ج) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۴، دو برابر جذر آن عدد به علاوه یک واحد را نسبت می‌دهد.

د) تابع f برای اعداد کوچک‌تر از ۱- به هر عدد، تفاضل جزء صحیح عدد از خود عدد را نسبت می‌دهد.

۲۱ نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در بازه $[-4, 4]$ رسم کنید.

۲۲ نمودار تابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن را بنویسید. ([] نماد جزء صحیح است)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & -2 \leq x < 0 \\ [x] & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

۲۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه $[-2, 4]$ با ارائه راه‌حل رسم کنید. ([] نماد جزء صحیح است)



درس سوم : وارون تابع



توابع یک به یک

۲۴ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) اگر جای مؤلفه‌های اول و دوم را در تمام زوج‌های مرتب یک رابطه جابه‌جا کنیم رابطه به‌دست آمده را وارون آن رابطه می‌گویند.

ب) در رابطه $|y - 1| = x + 1$ ، y تابعی از x نیست.

ج) دو تابع $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ ، $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1 - x}$ با هم برابر نیستند.

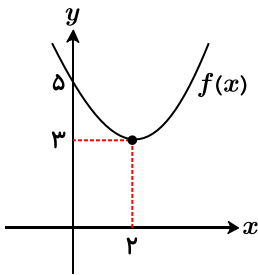
د) شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f وارون پذیر باشد، آن است که f تابعی یک‌به‌یک باشد.

۲۵ ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ یک به یک است.





۲۶ تابع وارون تابع شکل مقابل را در محدوده x های قبل از رأس سهمی به دست آورید.



۲۷ اگر وارون تابع $f(x) = 7 + \sqrt{x+2}$ تابع $f^{-1}(x) = x^2 + ax + c$ با دامنه $x \geq 7$ باشد، ابتدا دامنه تابع f و سپس، حاصل عبارت

$$\frac{c+2}{a+7}$$

را به دست آورید.

۲۸ ابتدا مشخص کنید کدام یک از توابع زیر یک به یک است، سپس ضابطه وارون آن را بنویسید.

الف) $f(x) = (x-3)^2 \quad x \geq 0$

ب) $g(x) = |x-1| + 2 \quad x \geq 1$

۲۹ اگر $f(x) = x^3 - 1$ مقدار $f^{-1}(7)$ را به دست آورید.

۳۰ اگر $f = \{(1, 5), (-1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ و $g = \{(3, 5), (4, 4), (5, 6), (2, 0)\}$ توابع زیر را به دست آورید:

الف

$$g^{-1}$$

ب

$$\frac{f}{g}$$

پ

$$f \circ g^{-1}$$

۳۱ معکوس پذیری تابع زیر را بررسی کنید و تابع وارون آن را بیابید.

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3}$$

۳۲ در هر یک از حالت های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = x^3 - 5$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

ب) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

۳۳ تابع معکوس تابع زیر را در صورت امکان به دست آورده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$$f(x) = -|x-1| + 1 \quad x \geq 1$$

۳۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می آید.

الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به دست آورید.

۳۵ اگر $f(x) = 2 - 3x$ و $(f \circ g^{-1})(x) = 5x - 6$ ، ضابطه تابع g را بیابید.

۳۶ تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}$, $x < 0$ را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.



۳۷ تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x-2} & x \geq 2 \\ x^3 - 12 & x < 2 \end{cases}$ را در صورت وجود بیابید.

درس چهارم : اعمال روی توابع

چهار عمل اصلی روی توابع

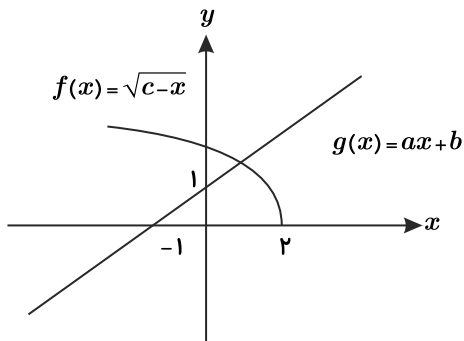
۳۸ توابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $(f-g)(4)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $f \circ g$ را بیابید.

۳۹ برای دو تابع $f = \{(0, 1), (1, 4), (2, -6), (3, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(0, -1), (1, -2), (2, 3), (3, 0)\}$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f + g)(x) =$	
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) =$	

۴۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارتهای داده شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



الف) $(\frac{f}{g})(0)$

ب) $(f + g)(-2)$

ج) $f(-g(3))$

د) $g \circ f(1) + f \circ g(1)$

۴۱ گزینه درست را تعیین کنید.

الف) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{x-2}{x+5}$ باشد، در این صورت دامنه تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[1, +\infty) - \{2\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{2, -5\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{5\}$

ب) شرط تشکیل تابع $g \circ f$ کدام گزینه است؟

- (۱) اشتراک دامنه f و برد g تهی نباشد. (۲) اشتراک دامنه های f, g تهی نباشد.
(۳) اشتراک بردهای f, g تهی نباشد. (۴) اشتراک دامنه g و برد f تهی نباشد.

ج) اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \sqrt{a-x} + b$ باشد و بدانیم $D_{f \circ g} = [3, 5]$ و $(f + g)(4) = 7$ ، آنگاه مقدار b کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۲ اگر $f = \{(2, 4), (-2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, -2), (1, 7), (3, 0)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

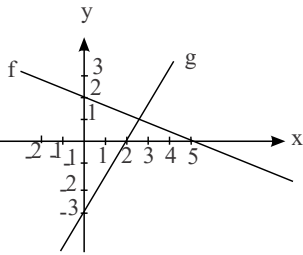
۴۳ اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (2, 5)\}$ و $g = \{(1, 0), (4, 0), (2, 3)\}$ باشد، تابع $f + g$ را بنویسید.

الف) تابع $f + g$ را بنویسید.



ب دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۴۴ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ را محاسبه کنید.



ترکیب توابع

۴۵ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ را از راه تعریف به دست آورید.

۴۶ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقدار a برابر است.

ب) در نامعادله $|x + 2| < 3$ ، مجموعه جواب بازه است.

ج) برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ دامنه تابع $f \circ g$ برابر است.

د) اگر $0 < a < 1$ با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع $f(x) = a^{-x}$ می‌یابند.

۴۷ اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = x^2 - 3$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

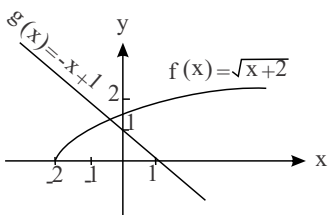
۴۸ فرض کنیم $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = x^2 + 3$

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

۴۹ اگر $f(x) = 2x + a$ و $f \circ f(x) = bx + 6$ باشد حاصل $a + b$ را به دست آورید.

۵۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارتهای داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



$(f + g)(2)$

$(f + g)(-3)$

$(fg)(\frac{1}{3})$

$(f \circ g)(-4)$

الف

ب


پ

ت



$$\frac{f}{g}(o)$$



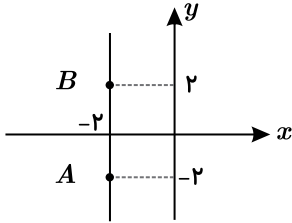

$$(gof)(-1)$$





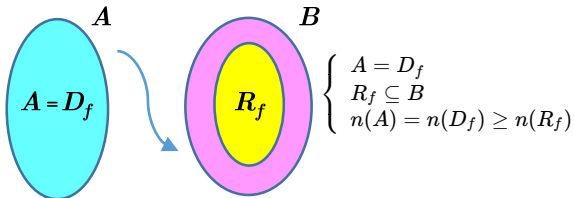
پاسخنامه تشریحی

۱ الف) نادرست: زیرا نقاط A, B روی خطی قائم به معادله $x = -2$ قرار دارند. این خط یک تابع نیست. چون بی‌شمار نقطه با طول $x = -2$ و عرض‌های حقیقی روی این خط قرار دارند.



ب) درست: زیرا هر سهمی با معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نقطه $M(0, c)$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c$$



ج) درست: زیرا در تابع $f: A \rightarrow B$ همواره داریم:

د) نادرست: برای تساوی دو تابع، دامنهٔ توابع باید با هم برابر باشند. (شرط لازم) و علاوه بر آن باید داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

بنابراین در دو تابع مساوی، دامنه و برد آنها یکسان است ولی عکس این مطلب صحیح نیست یعنی ممکن است دامنه و برد دو تابع یکسان باشند ولی دو تابع برابر نباشند، مانند:

$$\begin{cases} f = \{(2, 4), (3, 5), (1, 7)\} \\ g = \{(2, 5), (3, 7), (1, 4)\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = \{1, 2, 3\}, R_f = R_g = \{4, 5, 7\}$$

توابع f, g برابر نیستند.

(صفحه ۳۹، ۳۸، ۴۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) نادرست (۲۵، نمره)

ب) درست (۲۵، نمره)

ج) درست (۲۵، نمره)

د) نادرست (۲۵، نمره)

۲ نقطهٔ مرزی دامنهٔ تابع $f, x = 2$ است، پس این نقطه ریشهٔ معادلهٔ کسری تابع f است. در نتیجه:

$$x - b = 0 \xrightarrow{x=2} 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

باید ضابطهٔ دو تابع با هم برابر شوند. تابع f را ساده کرده مساوی تابع g قرار می‌دهیم.

$$x \neq 2: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2 \xrightarrow{f(x)=g(x)} x + 2 = x + c \Rightarrow c = 2$$

از طرفی:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow a = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a = 4$$

(صفحه ۴۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

نقطهٔ مرزی دامنهٔ تابع $f, x = 2$ است، پس این نقطه ریشهٔ معادلهٔ کسری تابع f است. در نتیجه:

$$x - b = 0 \xrightarrow{x=2} 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2 \quad (\text{نمره } 5)$$

$$x \neq 2: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2 \xrightarrow{f(x)=g(x)} x + 2 = x + c \Rightarrow c = 2 \quad (\text{نمره } 5)$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2 + 2 = 4 \Rightarrow a = 4 \quad (\text{نمره } 25)$$

۳ یک رابطه، تابع است. هرگاه از $x_1 = x_2$ بتوان ثابت کرد $y_1 = y_2$.

اول رابطه را بازنویسی می‌کنیم. برای هر $x \geq 0$ یک مقدار منحصر به فرد برای y داریم: توجه کنید که مقادیر زیر رادیکال نمی‌توانند منفی باشند، بنابراین همواره $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow -\sqrt{x_1} = -\sqrt{x_2} \Rightarrow 1 - \sqrt{x_1} = 1 - \sqrt{x_2} \Rightarrow (1 - \sqrt{x_1})^2 = (1 - \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

بنابراین رابطه داده شده تابع است.

(صفحه ۳۸، ۴۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

اول رابطه را بازنویسی می‌کنیم. برای هر $x \geq 0$ یک مقدار منحصر به فرد برای y داریم:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 \quad (\text{نمره ۲۵})$$

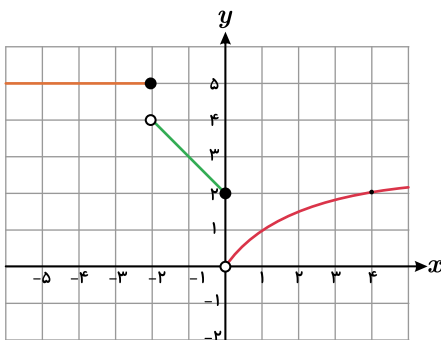
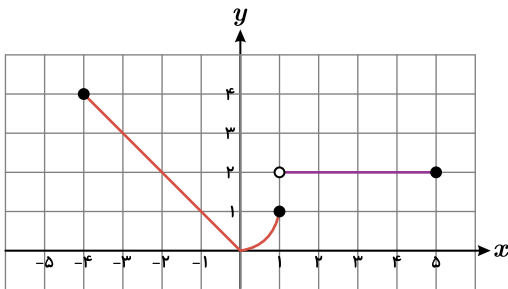
$$x_1 = x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow (1 - \sqrt{x_1})^2 = (1 - \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow y_1 = y_2 \quad (\text{نمره ۵})$$

۴

الف

درست

۵

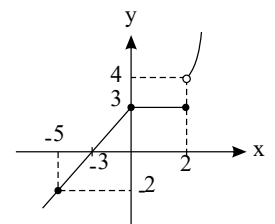


۶

۷

$$f(-5) = -2 \quad D_f = R \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{c} -3 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} -5 \\ -2 \end{array} \Rightarrow m = \frac{-2-0}{-5+3} = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} y-0 = 1(x+3) \\ y = x+3 \end{array}$$

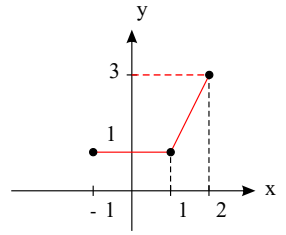


۸ تابع $f(x)$ یک تابع دو ضابطه‌ای است که در بازه $[-1, 1]$ ثابت است و در بازه $[1, 2]$ یک تابع خطی است که از نقاط $(1, 1)$ و $(2, 3)$ گذشته است.



$$f(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

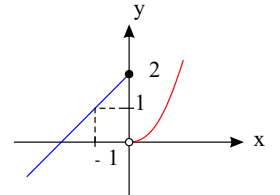
$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2+x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$D = R$$

$$R = R$$



مورد (ب) غیر قابل قبول است. زیرا دامنه تابع تغییر کرده است و با تغییر دامنه، تابع عوض می‌شود. حال باید برد تابع را بیابیم.

$$x \geq -2 \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow -2x^2 + 3 \leq 3 \rightarrow f(x) \leq 3$$

$$R_f = (-\infty, 3]$$

مورد (الف) غیر قابل قبول است زیرا برد تابع زیرمجموعه هم‌دامنه نمی‌باشد. مورد (ج) قابل قبول است. زیرا برد تابع زیرمجموعه هم‌دامنه است.

$$(-\infty, 3] \not\subset [3, +\infty) \rightarrow \text{(الف) غیر قابل قبول}$$

$$(-\infty, 3] \subset (-\infty, 4) \rightarrow \text{(ج) قابل قبول}$$

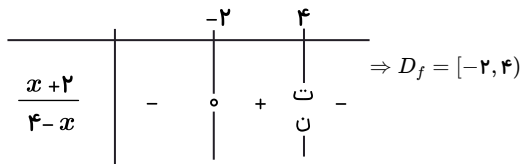
الف) $x = -3$ متعلق به دامنه تابع نیست پس ریشه مخرج کسر است و عرض از مبدأ تابع هم 1 است پس داریم:

$$f(x) = \frac{k}{x+m} \Rightarrow x+m = 0 \xrightarrow{x=-3} -3+m = 0 \Rightarrow m = 3, f(0) = \frac{k}{0+3} = 1 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow k+m = 6$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

(ب)

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}} \Rightarrow \frac{x+2}{4-x} \geq 0$$



در نتیجه اعداد صحیح در این فاصله مجموعه $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد، بنابراین گزینه ۴ درست است.

(ج) دو خط وقتی بر هم عمودند که شیب‌های آنها عکس و قرینه هم باشند. $(m_1 \times m_2 = -1)$ پس:

$$2x + ky - 5 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{-2}{k} \quad (1)$$

$$(k+1)x - y + 3 = 0 \Rightarrow m_2 = k+1 \quad (2)$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{-2k-2}{k} = -1 \Rightarrow 2k+2 = k \Rightarrow k = -2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

(صفحه ۴۵، ۴۷، ۳۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(۳) گزینه ۳ (۵ نمره)

(۲) گزینه ۴ (۵ نمره)

(۱) گزینه ۲ (۵ نمره)

(۱۲) الف

$$f(x) = \frac{520x}{200-2x} \Rightarrow f(60) = \frac{520(60)}{200-2(60)} = \frac{31200}{80} = 390 \text{ میلیون تومان}$$

(ب)

$$f(x) = \frac{520x}{200-2x} \Rightarrow 200-2x = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow D_f = (0, 100)$$

درصد آلودگی صفر شدنی نیست و از طرفی میزان درصد آلودگی ۱۰۰ درصد هم نمی‌شود.

(صفحة ۵۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(الف)

$$f(x) = \frac{520x}{200 - 2x} \Rightarrow f(60) = \frac{520(60)}{200 - 2(60)} = \frac{31200}{80} = 390 \text{ میلیون تومان (نمره ۵)}$$

(ب)

$$f(x) = \frac{520x}{200 - 2x} \Rightarrow 200 - 2x = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow D_f = (0, 100) \text{ (نمره ۵)}$$

درصد آلودگی صفر شدنی نیست و از طرفی میزان درصد آلودگی ۱۰۰ درصد هم نمی‌شود.

۱۳ با توجه به دامنه داده شده، $x = -3$ تنها ریشهٔ مخرج است. پس دو حالت زیر را داریم:

$$ax^2 + bx + 18 = 0$$

$$\text{حالت ۱ } a = 0 \Rightarrow bx + 18 = 0 \xrightarrow{x=-3} -3b + 18 = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$\text{حالت ۲ } a \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + 18 = a(x+3)^2 = a(x^2 + 6x + 9)$$

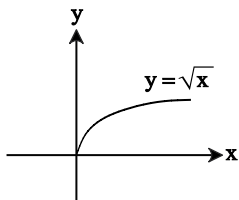
$$\Rightarrow ax^2 + bx + 18 = ax^2 + 6ax + 9a$$

$$\Rightarrow 9a = 18 \Rightarrow a = 2, \quad b = 6a = 6 \times 2 = 12$$

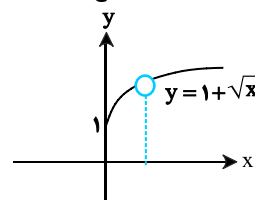
۱۴ $x = 1$ ریشهٔ مخرج است پس دامنهٔ تابع $D_f = R - \{1\}$ است. تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x}$$

تابع در $x = 1$ تعریف نشده است چون ریشهٔ مخرج کسر است. رسم حفره تابع نمره دارد.



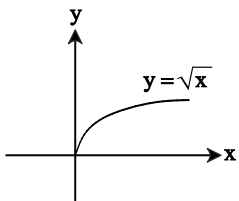
نمودار \sqrt{x} را یک واحد بالا می‌بریم



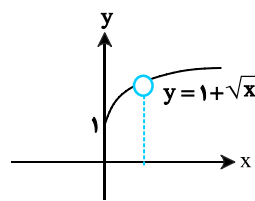
(صفحة ۴۶ تا ۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \text{ (نمره ۲۵)}$$



نمودار \sqrt{x} را یک واحد بالا می‌بریم



تابع در $x = 1$ تعریف نشده است چون ریشهٔ مخرج کسر است. رسم حفره تابع نمره دارد.

۱۵ زیر رادیکال فرجه همواره باید نامنفی باشد، یعنی $xf(x) \geq 0$. به عبارت دیگر بازه‌هایی که همزمان x ، $f(x)$ هم علامت باشند، جزو دامنهٔ تابع اند:

$$\forall x \in [-3, -1] \Rightarrow x \leq 0, f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [0, 5] \Rightarrow x \geq 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$



	-۳	-۱	۰	۵	
x	-	-	-	+	+
$f(x)$	+	۰	-	+	۰
$xf(x)$	-	۰	+	۰	-
		جواب		جواب	

$\Rightarrow D_g = [-۳, -۱] \cup [۰, ۵]$

(صفحه ۴۶ تا ۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

باید $xf(x) \geq 0$ باشد، یعنی بازه‌هایی که همزمان x و $f(x)$ هم علامت باشند، جزء دامنه تابع اند.

$$\forall x \in [-۳, -۱] \Rightarrow x \leq 0, f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0 \text{ (نمره ۲,۵)} \Rightarrow D_g = [-۳, -۱] \cup [۰, ۵] \text{ (نمره ۲,۵)}$$

$$\forall x \in [۰, ۵] \Rightarrow x \geq 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0 \text{ (نمره ۲,۵)}$$

۱۶ الف روش اول:

فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط $Ax + By + C = 0$

$$\Rightarrow h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow h = \frac{|0 \times (۲) + 1 \times (-۴) + 0|}{\sqrt{1}} = \frac{۴}{1} = ۴$$

روش دوم: $y = 0$ معادله محور x هاست و فاصله هر نقطه از محور طولها برابر قدرمطلق عرض آن نقطه است.

$$A(a, b) \Rightarrow \text{فاصله نقطه } A \text{ تا محور } x \text{ ها} = |b| \Rightarrow y = 0 \text{ از خط } A(۲, -۴) \text{ فاصله نقطه} = |-۴| = ۴$$

(ب) شرط موازی بودن دو خط با شیب‌های m_1, m_2 آن است که: $m_1 = m_2$

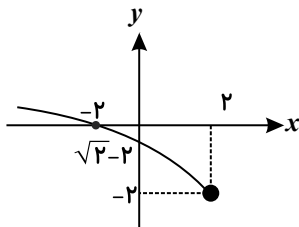
$$\begin{cases} x = ۳y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{۳}x + \frac{1}{۳} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{۳} \\ y = ۳x + 1 \Rightarrow m_2 = ۳ \end{cases}$$

حال $m_1 \neq m_2, m_2 = ۳, m_1 = \frac{1}{۳}$ بنابراین دو خط باهم موازی نیستند.

(ج) عبارت زیر رادیکال فرجه زوج باید همواره نامنفی باشد.

$$۴ - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_f = [-۲, ۲]$$

(د) مطابق شکل مقابل، منحنی نمودار تابع $y = \sqrt{۲-x} - ۲$ فقط از ناحیه اول نمی‌گذرد.



(صفحه ۳۴, ۳۱, ۴۷, ۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) ۴ (نمره ۲,۵)

ب) نیستند (نمره ۲,۵)

ج) $[-۲, ۲]$ (نمره ۲,۵)

د) اول (نمره ۲,۵)

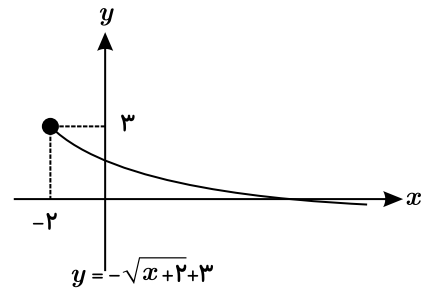
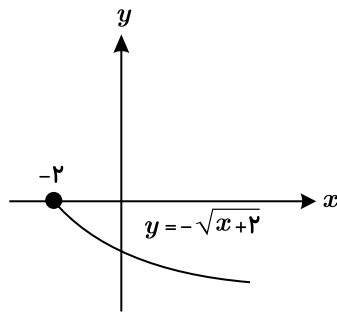
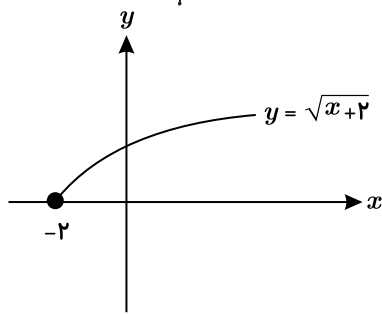
۱۷ برای تعیین دامنه، چون تابع رادیکالی با فرجه دو است، پس زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$f(x) = -\sqrt{x+۲} + ۳ \Rightarrow x+۲ \geq 0 \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_f = [-۲, +\infty)$$

برای تعیین برد می‌دانیم: $(\sqrt[n]{u(x)} \geq 0)$ در نتیجه خواهیم داشت:

$$\sqrt{x+۲} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+۲} \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+۲} + ۳ \leq ۳ \Rightarrow R_f = (-\infty, ۳]$$

نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{x+۲} + ۳$ به صورت زیر است.

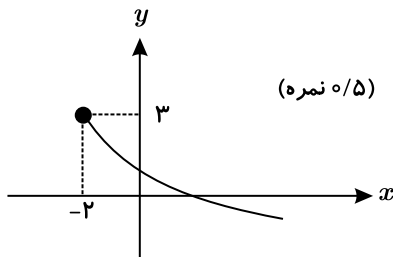


(صفحة ۴۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = -\sqrt{x+2}+3 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty) \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+2} \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+2}+3 \leq 3 \Rightarrow R_f = (-\infty, 3] \quad (\text{نمره } ۰/۵)$$



(نمره ۰/۵)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{x+|x|}}$$

$$(I) \quad x+|x| > 0 \Rightarrow |x| > -x \Rightarrow x > 0 \quad \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline x \cdot (x^2-1) \geq 0 & - & + & - \end{array}$$

$$(II) \quad x(x^2-1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \cup x \geq 1$$

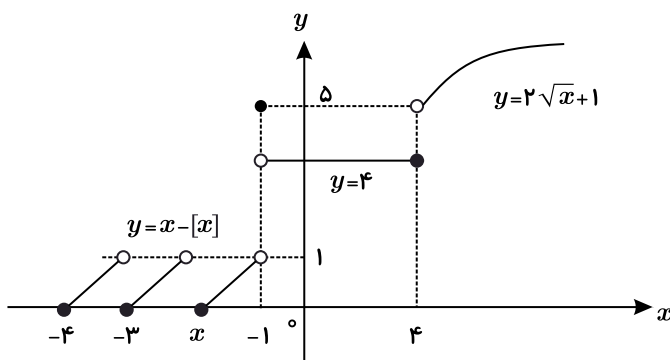
$$(I) \cap (II) = [1, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-3} \quad g(x) = \sqrt{x^2-3x}$$

$$D_f = x \geq 0 \cap x \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$$

$$D_g = x(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \cup x \leq 0$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$



در بازه $x < -1$ ضابطه تابع $f(x) = x - [x]$ است.

در نقطه $x = -1$ مقدار تابع $f(-1) = 5$ و در بازه $[-1, 4]$ تابعی ثابت و نمودار آن خطی

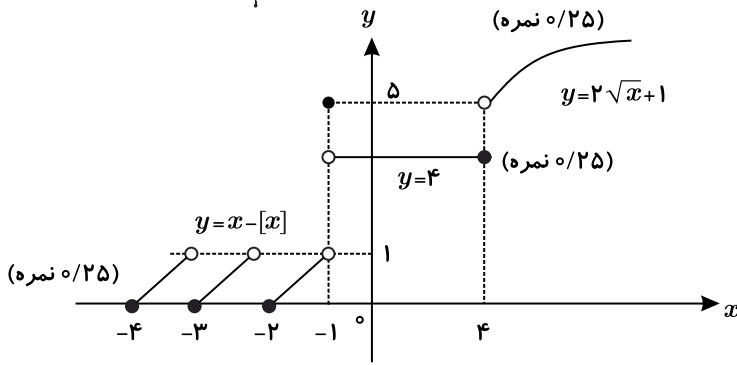
افقی $y = 4$ است: برای $x > 4$ تابع $f(x) = 2\sqrt{x+1}$ را داریم.

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & x < -1 \\ 5 & x = -1 \\ 4 & -1 < x \leq 4 \\ 2\sqrt{x+1} & x > 4 \end{cases}$$

۲۰

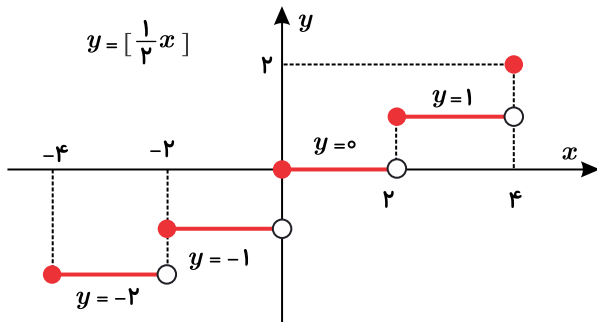
(صفحة ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



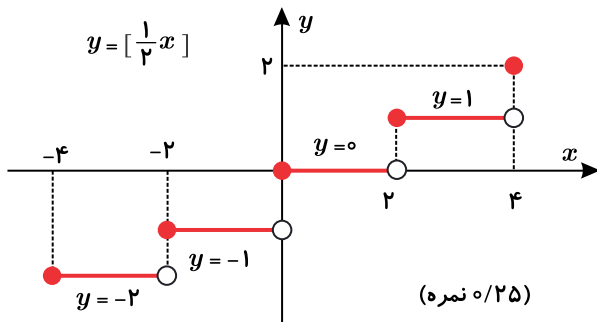
$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & x < -1 \\ 5 & x = -1 \\ 4 & -1 < x \leq 4 \\ 2\sqrt{x+1} & x > 4 \end{cases} \quad (\text{نمره } ۰/۲۵)$$

۲۱ برای رسم نمودارهای شامل جزء صحیح، اصلی‌ترین کار، افراز دامنه به زیر بازه‌هایی است که در این بازه‌ها برای جزء صحیح بتوانیم عدد صحیح متناسب با آن را قرار دهیم. در این سؤال ضرب x به $\frac{1}{4}$ است در نتیجه دامنه را به بازه‌های ۲ واحدی تقسیم می‌کنیم.



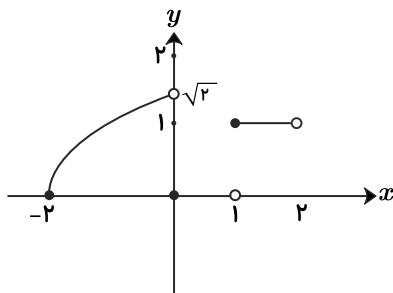
$$\begin{aligned} -4 \leq x < -2 &\Rightarrow -2 \leq \frac{x}{4} < -1 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{4}x\right] = -2 \\ -2 \leq x < 0 &\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{4} < 0 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{4}x\right] = -1 \\ 0 \leq x < 2 &\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{4} < 1 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{4}x\right] = 0 \\ 2 \leq x < 4 &\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{4} < 2 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{4}x\right] = 1 \\ x = 4 &\Rightarrow f(x) = 2 \end{aligned}$$

(صفحه ۵۲ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:



$$\begin{aligned} -4 \leq x < -2 &\Rightarrow -2 \leq \frac{x}{4} < -1 \Rightarrow f(x) = -2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ -2 \leq x < 0 &\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{4} < 0 \Rightarrow f(x) = -1 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ 0 \leq x < 2 &\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{4} < 1 \Rightarrow f(x) = 0 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ 2 \leq x < 4 &\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{4} < 2 \Rightarrow f(x) = 1 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \\ x = 4 &\Rightarrow f(x) = 2 \quad (\text{نمره } ۰/۲۵) \end{aligned}$$

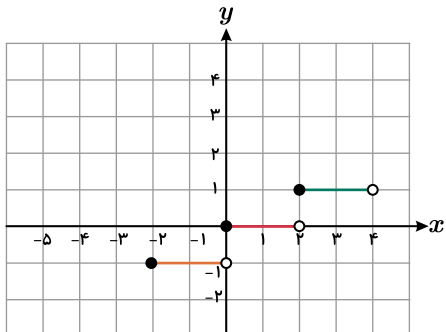
۲۲



$$\begin{aligned} D_f &= [-2, 2) \\ R_f &= [0, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

۲۳

$-1 \leq \frac{x}{2} < 0$	$0 \leq \frac{x}{2} < 1$	$1 \leq \frac{x}{2} < 2$
$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$
$f(x) = -1$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$



۲۴ الف) درست؛ متن کتاب درسی صفحه ۵۴

ب) درست؛ برای مثال، به ازای $x = 0$ دو مقدار برای y داریم:

$$|y - 1| = x + 1 \xrightarrow{x=0} |y - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \\ y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

پس این رابطه تابع نیست.

ج) نادرست؛ دامنه‌ها و ضابطه‌های دو تابع برابر هستند و توابع مساوی‌اند.

$$D_f = D_g = [0, 1], \quad f = \sqrt{x - x^2} = \sqrt{x(1 - x)} \stackrel{0 \leq x \leq 1}{=} \sqrt{x} \times \sqrt{1 - x} = g$$

د) درست؛ متن کتاب درسی صفحه ۵۵

(صفحه ۶۳ تا ۷۰، ۳۸ تا ۴۳، ۵۴ و ۵۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست (۲۵، نمره)

ب) درست (۲۵، نمره)

ج) نادرست (۲۵، نمره)

د) درست (۲۵، نمره)

۲۵

$$f(x) = \frac{x - 1}{x}$$

برای یک به یک بودن باید:

$$\frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2 - 1}{x_2} = 0 \Rightarrow \frac{x_1 x_2 - x_2 - x_1 + 1}{x_1 x_2} = 0 \Rightarrow -x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

۲۶ رأس سهمی برابر با $S = (2, 3)$ است؛ بنابراین:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 3 \Rightarrow f(0) = a(0 - 2)^2 + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3 \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2(y - 3)$$

$$\Rightarrow |x - 2| = \sqrt{2(y - 3)} \xrightarrow{x < 2} -x + 2 = \sqrt{2(y - 3)} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2(y - 3)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2(x - 3)}$$

(صفحه ۶۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 3 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$f(0) = a(0 - 2)^2 + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2(y - 3)$$

$$\Rightarrow |x - 2| = \sqrt{2(y - 3)} \text{ (نمره ۲۵)} \xrightarrow{x < 2} -x + 2 = \sqrt{2(y - 3)} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow x = 2 - \sqrt{2(y - 3)} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2(x - 3)} \text{ (نمره ۵)}$$

۲۷



$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

$D_f = [-2, +\infty)$, $f(x)$ دامنه تابع $D_{f^{-1}} = [7, +\infty)$ است.

سپس ضابطه تابع وارون f را به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} y &= 7 + \sqrt{x+2} \Rightarrow y - 7 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (y-7)^2 = x+2 \Rightarrow (y-7)^2 - 2 = x \xrightarrow{\text{جابجایی کردن } y \text{ و } x} \\ y &= x^2 - 14x + 47 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 14x + 47 \Rightarrow a = -14, c = 47 \\ \Rightarrow \frac{c+2}{a+7} &= \frac{47+2}{-14+7} = -7 \end{aligned}$$

(صفحه ۶۰، ۶۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$D_f = [-2, +\infty) \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$y - 7 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (y-7)^2 = x+2 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow x = (y-7)^2 - 2 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 14x + 47 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow \frac{c+2}{a+7} = \frac{47+2}{-14+7} = -7 \text{ (نمره ۵)}$$

۲۸ f یک به یک نیست؛ زیرا برای مثال $f(0) = f(6) = 9$.

g یک به یک است.

$$g(x) = |x-1| + 2 \xrightarrow{x \geq 1} y = x-1+2 \Rightarrow y = x+1 \Rightarrow y-1 = x \Rightarrow g^{-1}(x) = x-1$$

$$f^{-1}(7) = a \Rightarrow f(a) = 7 \Rightarrow a^2 - 1 = 7 \Rightarrow a = 2$$

$$g^{-1} = \{(5, 3), (4, 4), (6, 5), (0, 2)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(3, \frac{4}{5})\}$$

$$f \circ g^{-1} = \{(5, 4), (0, 4)\}$$

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3} \Rightarrow (\sqrt{x-3} + 1)^2 + 2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (\sqrt{x_1-3} + 1)^2 + 2 = (\sqrt{x_2-3} + 1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1-3} + 1 = \sqrt{x_2-3} + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ یک به یک است.}$$

$$y = (\sqrt{x-3} + 1)^2 + 2 \quad (x \geq 3) \Rightarrow y \geq 3$$

$$y - 2 = (\sqrt{x-3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y-2} = \sqrt{x-3} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-2} - 1 = \sqrt{x-3} \Rightarrow 2 \text{ توان } \Rightarrow (\sqrt{y-2} - 1)^2 + 3 = x \xrightarrow{y \rightarrow x} y = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + 3$$

$$\begin{cases} f^{-1}: [3, +\infty) \Rightarrow [3, +\infty) \\ f^{-1}(x) = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + 3 \end{cases}$$

۳۲

$$f(x) = x^2 - 5 = y \Rightarrow x = \sqrt{y+5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+5} = g(x)$$

$$\text{الف) } g(x) = \sqrt{x+5} = y \Rightarrow x+5 = y^2 \Rightarrow x = y^2 - 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 - 5 = f(x)$$



$$f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2, y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = y \Rightarrow x = y^2 + 2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2, x \geq 0, y \geq 2$$

$$g(x) = x^2 + 2, x \geq 0 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 = y \Rightarrow x^2 = y - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y-2}$$

ب) $\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x-2} = f(x)$

۳۳

$$x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1 \Rightarrow f(x) = -(x-1) + 1 = -x + 2$$

$$x \geq 1 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow -x + 2 \leq -1 + 2 \Rightarrow y \leq 1$$

$$f(x) = -x + 2 \quad D_f = [1, +\infty), R_f = (-\infty, 1]$$

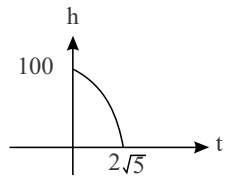
تابع یک به یک است. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1 + 2 = -x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$$y = -x + 2 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2 - x, D_{f^{-1}} = (-\infty, 1], R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

۳۴ الف) برد تابع h همان ارتفاع ۱۰۰ متر است یعنی بازه بسته $[0, 100]$ و برای یافتن دامنه تابع h باید مدت زمان رسیدن به زمین را بیابیم یعنی باید معادله $h = 0$ را حل کنیم.

$$h = 0 \Rightarrow 100 - \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = 100 \Rightarrow t^2 = \frac{100}{\Delta} = 20 \Rightarrow t = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 0 \leq t \leq 2\sqrt{5} \Rightarrow D_h = [0, 2\sqrt{5}], R_h = [0, 100]$$



ب) نمودار تابع h بر حسب t به صورت مقابل است. از نمودار واضح است که تابع h تابعی یک به یک است.

۳۵

$$h = 100 - \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = 100 - h \Rightarrow t^2 = 20 - \frac{1}{\Delta}h$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{20 - \frac{1}{\Delta}h} \Rightarrow h^{-1}(t) = \sqrt{20 - \frac{1}{\Delta}t} \quad 0 \leq t \leq 100$$

۳۵

$$f(x) = 2 - 3x$$

$$(f \circ g^{-1})(x) = \Delta x - 6 \Rightarrow f(g^{-1}(x)) = \Delta x - 6$$

یعنی در تابع f به جای x ، $g^{-1}(x)$ را قرار دهیم، پس داریم:

$$2 - 3g^{-1}(x) = \Delta x - 6 \Rightarrow -3g^{-1}(x) = \Delta x - 8 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(8 - \Delta x)$$

$$y = \frac{1}{3}(8 - \Delta x) \Rightarrow 3y = 8 - \Delta x \Rightarrow \Delta x = 8 - 3y \Rightarrow x = \frac{8}{\Delta} - \frac{3}{\Delta}y \Rightarrow y = g(x) = \frac{8}{\Delta} - \frac{3}{\Delta}x$$

۳۶

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}, x < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3} = y \Rightarrow x^2 - 1 = 2x^2y + 3y$$

$$\Rightarrow x^2(1 - 2y) = 1 + 3y \Rightarrow x^2 = \frac{1 + 3y}{1 - 2y}$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1 + 3y}{1 - 2y} > 0 \Rightarrow \frac{y}{1-2y} \Big| \begin{matrix} -\infty & -\frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & +\infty \\ - & 0 & + & 0 & - \end{matrix} \Rightarrow -\frac{1}{3} < y < \frac{1}{2}$$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}} \xrightarrow{x < 0} -x = \sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1 + 3x}{1 - 2x}}, D_{f^{-1}} = R_f = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

۳۷



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{5x-2}, & x \geq 2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[5]{5x_1-2} = \sqrt[5]{5x_2-2} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ x^3 - 12, & x < 2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 - 12 = x_2^3 - 12 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow 5x - 2 \geq 8 \Rightarrow \sqrt[5]{5x-2} \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 \quad (1)$$

$$x < 2 \Rightarrow x^3 < 8 \Rightarrow x^3 - 12 < 8 - 12 \Rightarrow y < -4 \quad (2)$$

چون اشتراک (1) و (2) تهی است، پس تابع f یک به یک و وارون پذیر است.

$$y = \sqrt[5]{5x-2} \Rightarrow 5x - 2 = y^5 \Rightarrow x = \frac{1}{5}(y^5 + 2) \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \frac{1}{5}(x^5 + 2)$$

$$y = x^3 - 12 \Rightarrow x^3 = y + 12 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+12} \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x+12}$$

با توجه به اینکه دامنه تابع وارون برابر با برد تابع اصلی است داریم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x^5 + 2), & x \geq 2 \\ \sqrt[3]{x+12}, & x < -4 \end{cases}$$

۳۸

$$\text{الف) } (f-g)(4) = 3 \left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3} \right) = -2$$

$$\text{ب) } D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [3, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 4\} \\ = [3, +\infty) - \{4\}$$

(صفحة ۶۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{الف) } (f-g)(4) = 3 \left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3} \right) \text{ (نمره ۲۵, ۲۵)} = -2$$

$$\text{ب) } D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [3, +\infty) \text{ (نمره ۲۵, ۲۵)}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 4\} \\ = [3, +\infty) - \{4\} \text{ (نمره ۲۵, ۲۵)}$$

۳۹ در نمایش توابع به صورت زوج‌های مرتب، وقتی مؤلفه‌های اول دو زوج از دو تابع یکسان بودند برای اعمال جبری، زوج مرتبی می‌نویسیم و مؤلفه اول را قرار داده و برای تعیین مؤلفه دوم نگاه می‌کنیم چه عملی باید انجام داد، آن عمل را روی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب انجام می‌دهیم.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \{(0, 0), (1, 2), (2, -3), (3, 3)\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \{(0, -1), (1, -2), (2, -2)\}$	$\{0, 1, 2\}$

(صفحة ۶۴ تا ۶۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$(f+g)(x) = \{(0, 0), (1, 2), (2, -3), (3, 3)\} \quad \{0, 1, 2, 3\} \text{ (نمره ۵)}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \{(0, -1), (1, -2), (2, -2)\} \quad \{0, 1, 2\} \text{ (نمره ۷۵)}$$

۴۰ تابع $g(x)$ خط گذرا از دو نقطه $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ است؛ بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} g(-1) = -a + b = 0 \\ g(0) = b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow g(x) = x + 1$$

از طرفی برای تابع $f(x)$ داریم:

(صفحة ۶۳ تا ۷۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = \sqrt{c-x} \Rightarrow f(2) = \sqrt{c-2} = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{2-x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 2 + (-1) = 1$$

$$f(-g(3)) = f(-(-4)) = \sqrt{6}$$

$$\frac{f(1)=1}{g(1)=2} \rightarrow gof(1) + fog(1) = g(1) + f(2) = 2 + 0 = 2$$

$$\xrightarrow{(0,1),(-1,0)} g(x) = x + 1 \quad (\text{نمره } 25)$$

$$\xrightarrow{c=2} f(x) = \sqrt{2-x} \quad (\text{نمره } 25)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 25)$$

$$(f+g)(-2) = 1 \quad (\text{نمره } 25)$$

$$f(-g(3)) = f(-(-4)) = \sqrt{6} \quad (\text{نمره } 25)$$

$$gof(1) + fog(1) = g(1) + f(2) = 2 + 0 = 2 \quad (\text{نمره } 25)$$

الف گزینه ۲:

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [1, +\infty) \cap (\mathbb{R} - \{-5\}) - \left\{x \mid \frac{x-2}{x+5} = 0\right\} = [1, +\infty) - \{2\}$$

(ب) گزینه ۴: شرط تشکیل تابع gof آن است که مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند، به عبارت دیگر اشتراک دامنه g و برد f تهی نباشد.

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

ج) گزینه ۱:

$$f(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{a-x} + b \Rightarrow D_g = (-\infty, a]$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [3, a] = [3, 5] \Rightarrow a = 5$$

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \sqrt{4-3} + \sqrt{5-4} + b = 2 \Rightarrow b = 5$$

(صفحة ۶۳ تا ۷۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۲ (۵ نمره) (ب) گزینه ۴ (۵ نمره) (ج) گزینه ۱ (۵ نمره)

۴۲

$$\frac{f}{g} = \{(2, -2)\}$$

۴۳

الف

$$f+g = \{(1, 2), (2, 8)\}$$

ب

$$D_{\frac{f}{g}} = 2$$

۴۴) تابع f تابع خطی است که از نقاط $(0, 2)$ و $(5, 0)$ می‌گذرد پس داریم:

$$m = \frac{2-0}{0-5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow y-2 = -\frac{2}{5}(x-0) \Rightarrow y = f(x) = -\frac{2}{5}x + 2, D_f = \mathbb{R}$$

تابع g تابع خطی است که از نقاط $(0, -3)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$m = \frac{-3-0}{0-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y - (-3) = \frac{3}{2}(x-0) \Rightarrow y = g(x) = \frac{3}{2}x - 3, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \frac{11}{10}x - 1$$



$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = -\frac{19}{10}x + 5, D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 3x - 6$$

$$(f \cdot g)(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - 6, D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$$

۴۵ (۱) ابتدا دامنه دو تابع را به دست آورید.

(۲) فرمول دامنه ترکیب را بنویسید.

(۳) با استفاده از فرمول و محدودیت‌های هر دامنه، دامنه تابع مرکب را حساب کنید.

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \left\{ x \in \mathbb{R} | \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \neq 0, 4 \right\} = (0, +\infty) - \{4\}$$

(صفحه ۶۸، ۶۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ و } D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)} = \left\{ x \in \mathbb{R} | \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \neq 0, 4 \right\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)}$$

$$= (0, +\infty) - \{4\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)}$$

۴۶ الف ۲:

$$f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\} \xrightarrow{(m, 3) = (-1, 3)} m = -1 \xrightarrow{(2m, a) = (-2, 2)} a = 2$$

ب) $(-5, 1)$:

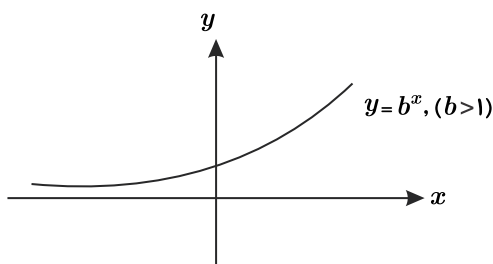
$$|x+2| < 3 \Rightarrow -3 < x+2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1 \Rightarrow x \in (-5, 1)$$

ج) $\mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$:

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}, D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g = \mathbb{R} - \{0\}, \frac{f}{x} \neq 3\} = \mathbb{R} - \{0, \frac{f}{3}\}$$

د) افزایش:

$$f(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \xrightarrow{0 < a < 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} > 1} y = b^x$$



(صفحه ۵۵ و ۲۳ تا ۲۸ و ۷۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) ۲ (نمره ۰, ۲۵)

ب) $(-5, 1)$ (نمره ۰, ۲۵)

ج) $\mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$ (نمره ۰, ۲۵)

د) افزایش (نمره ۰, ۲۵)

۴۷

$$D_f = (-\infty, 1] \text{ یا } x \leq 1 \text{ و } D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$$

۴۸



الف

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = (-\infty, 4] \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^2 + 3}_{*} \in (-\infty, 4]\} = [-1, 1]$$

$$* : x^2 + 3 \leq 4 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{4 - (x^2 + 3)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(x) = 2x + a \xrightarrow{x = f(x)} f(f(x)) = 2f(x) + a$$

$$bx + 6 = 2f(x) + a \xrightarrow{f(x) = 2x + a} bx + 6 = 2(2x + a) + a \Rightarrow bx + 6 = 4x + 3a \Rightarrow 4 = b$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 6$$

ب

٤٩

٥٠

الف

$$f(x) = \sqrt{x + 2}, D_f = [-2, +\infty)$$

$$g(x) = -x + 1, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = [-2, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = [-2, +\infty)$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{4} + (-2 + 1) = 2 + (-1) = 1$$

$$-3 \notin [-2, +\infty) \Rightarrow (f+g)(-3) = \text{تعريف نشده}$$

$$(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} \times \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(4) = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(\sqrt{-1 + 2}) = g(1) = -1 + 1 = 0$$

ب

ب

ن

ث

ج