بیستوفیل

حسابان یازدهم-فصل ۱

ریاضی

نوتروفیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۴

تک رقمی نوتروفیل

- رتبه ۸ — ایمان نیک‌نام جهرمی

دو رقمی های نوتروفیل

- رتبه ۱۴ — امیرمحمدکیانی
- رتبه ۱۶ — آریا قهرمانی
- رتبه ۲۰ — سینا راضی
- رتبه ۳۲ — امیرمحمد رضائی
- رتبه ۵۵ — مهسا سیاوشی
- رتبه ۵۹ — ایمان انفرادی
- رتبه ۶۱ — بهار هلالی
- رتبه ۷۵ — محمدصالح عارفی
- رتبه ۸۰ — محمدمهدی شریفی

سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل

- رتبه ۱۴۷ — محدثه حیدری
- رتبه ۱۶۰ — اشکان کوثری
- رتبه ۱۶۹ — هانیه خواجه
- رتبه ۲۲۲ — امیرمحمد شکوهی
- رتبه ۲۵۹ — ابوالفضل ناصریان
- رتبه ۲۷۱ — فاطمه سادات موسوی
- رتبه ۳۰۸ — سید علی اکرمی
- رتبه ۳۴۱ — حمیدرضا بشیری
- رتبه ۴۳۲ — سید محمدصادق حسینی
- رتبه ۴۷۳ — زهرا بابائی
- رتبه ۵۱۴ — محمدپارسا عبداله آبادی
- رتبه ۵۳۲ — فاطمه شاهسوند
- رتبه ۵۳۷ — ریحانه حیدری
- رتبه ۵۳۹ — نجمه کیخا
- رتبه ۵۴۶ — حسین تفضلی نژاد
- رتبه ۵۵۷ — محمدصالح زارعی
- رتبه ۵۷۰ — زهرا ولی نژاد
- رتبه ۶۰۶ — سجاد محمودی زاده
- رتبه ۶۶۱ — فاطمه اصغری
- رتبه ۶۶۷ — سیاوش مصطفایی
- رتبه ۶۷۲ — محمدماهان عنبرستانی
- رتبه ۶۹۱ — بهار ضرغامی
- رتبه ۷۱۴ — محمد یزدیان
- رتبه ۷۸۱ — احسان قنبری
- رتبه ۷۸۶ — نیما غفاری
- رتبه ۸۰۳ — مائده رنجبر
- رتبه ۸۰۴ — آرمین رضایی
- رتبه ۸۹۳ — فاطمه مشاوری نجف آبادی
- رتبه ۹۰۹ — کیمیا فدائی
- رتبه ۹۴۷ — صفورا بقائی
- رتبه ۱۰۵۲ — پویان فریور افشار
- رتبه ۱۰۵۸ — الینا جلالی فر
- رتبه ۱۱۲۲ — علی طاهر زاده
- رتبه ۱۱۲۷ — زهرا بابائی
- رتبه ۱۲۳۴ — مطهره توحیدی
- رتبه ۱۲۳۶ — مبینا ایزدی
- رتبه ۱۲۸۴ — بهار امیری
- رتبه ۱۲۸۴ — فاطمه معین زاده
- رتبه ۱۳۵۰ — علی زینلی
- رتبه ۱۳۷۲ — پارسا رضایی
- رتبه ۱۴۲۴ — سید امیرحسین حسینی
- رتبه ۱۴۸۳ — سینا خاوری خراسانی
- رتبه ۱۴۹۳ — محمد مهدی خرم زاده
- رتبه ۱۵۰۳ — فاطمه رحیم زاده
- رتبه ۱۵۳۴ — فاطیما عبیری
- رتبه ۱۶۲۸ — امیرمحمد فکور حقیقی
- رتبه ۱۶۳۹ — ابوالفضل نیرومند
- رتبه ۱۶۷۸ — سجاد ینکی
- رتبه ۱۶۹۶ — ندا ملکشاهی
- رتبه ۱۷۳۱ — محمدرضا محسنی
- رتبه ۱۷۵۴ — هلیا حاجیلوئی
- رتبه ۱۹۶۶ — مهسا رضایی مقدم
- رتبه ۲۰۱۵ — علی شیرزاد
- رتبه ۲۵۵۹ — سارا حمزه
- رتبه ۲۶۲۵ — زهره مجمعی
- رتبه ۲۷۱۱ — محمد غلامی
- رتبه ۲۷۵۱ — فهیمه سیدآبادی
- رتبه ۲۷۸۱ — سعید شبانی
- رتبه ۲۷۹۴ — مریم بادلی
- رتبه ۲۸۱۰ — هدیه رحیمی
- رتبه ۲۸۸۱ — پارسا جمال امیدی
- رتبه ۳۱۳۳ — صبا شایع ثانی
- رتبه ۳۲۴۴ — هلیا سجادی
- رتبه ۳۳۴۳ — سینا ارزمانی

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۱ یازدهم

سال یازدهم

ریاضی

فهرست

درس اول : مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

۱ در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدر نسبت ۸، حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود؟

۲ مجموع همهٔ اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ را بنویسید. (از فرمول مجموع جملات دنباله استفاده کنید.)

۳ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف مجموع جملات دنبالهٔ حسابی $۱, ۳, ۵, ۷, \cdots, ۱۹۹$ برابر .... است.

ب فاصله دو خط موازی $۳x - ۴y + ۵ = ۰$ و $-۳x + ۴y + ۱۰ = ۰$ برابر .... است.

۴ مجموع چند جمله از دنباله حسابی $x, ۷, ۱۲, \cdots$ برابر ۶۰ است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۵ مجموع ۲۰ جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی $\frac{۱}{۱-\sqrt{۷}}, \frac{-۱}{۶}, \frac{۱}{۱+\sqrt{۷}}, \cdots$ را به دست آورید.

۶ مجموع تمام اعداد دو رقمی مضرب ۳ را به دست آورید.

۷ در یک دنبالهٔ حسابی، جملهٔ هفتم دنباله، نصف جملهٔ سوم است. مجموع چند جملهٔ اول از این دنباله، صفر می‌شود؟

دنباله هندسی

۸ جملهٔ ششم یک دنبالهٔ هندسی ۸۱ و حاصل ضرب پنج جملهٔ اول دنباله ۲۴۳ است. مجموع شش جملهٔ اول دنباله را به دست آورید.

۹ در یک دنباله هندسی، مجموع شش جملهٔ اول دنباله، ۹ برابر مجموع سه جملهٔ اول آن است. مجموع ده جملهٔ اول این دنباله چند برابر مجموع پنج جملهٔ اول آن است؟

۱۰ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به‌همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست‌کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۱۱ توپی را در اختیار داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از برخورد با زمین به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ ارتفاع اولیهٔ خود بالا می‌رود، فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۱۵ متری برسد، این توپ تا هنگام ۴اُمین برخورد با زمین، چه مسافتی را طی کرده است؟

درس دوم : معادلات درجه دوم

یادآوری معادله درجه دوم و حالات مختلف ریشه های آن و مسائل کاربردی معادله درجه دوم

۱۲ درستی و نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

الف) معادلهٔ خط گذرا از دو نقطهٔ $A(-۲, -۲)$ و $B(-۲, ۲)$ یک تابع است.

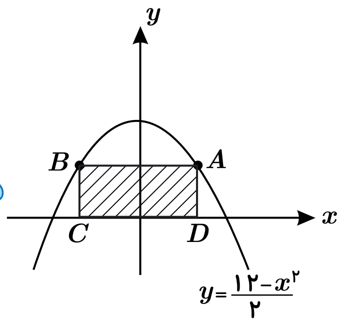
ب) نمودار هر تابع درجه دو (با دامنهٔ $\mathbb{R}$)، محور عرض‌ها (y ها) را قطع می‌کند.

ج) در تابع $f : A \to B$ همواره تعداد اعضای دامنهٔ تابع بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد تابع است.

د) هر دو تابع که دامنه و بردشان برابر باشند، با هم مساوی‌اند.

۱۳ مطابق شکل روبه‌رو، نقاط B, A روی منحنی به معادلهٔ $y = \frac{۱۲ - x^۲}{۲}$ قرار دارند.

مساحت مستطیل هاشور خورده $ABCD$ را برحسب متغیر x (طول نقطهٔ A) به صورت یک تابع بنویسید.

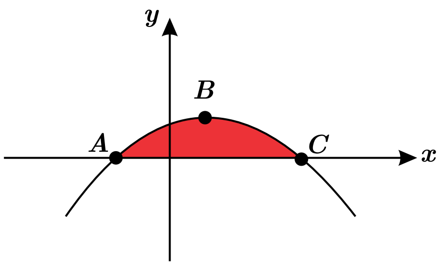


۱۴ شکل مقابل نمای جانبی عدسی محدبی است که از منحنی سهمی به معادلهٔ $f(x) = -x^۲ + ۴x + ۱۲$ مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط C, B, A را به دست آورید. (B ماکزیمم سهمی است.)

ب) محیط مثلث ABC را به دست آورید.

ج) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد، بیشترین ضخامت عدسی را به دست آورید.



روابط بین ضرایب و ریشه های معادله (مسائل s و p)

۱۵ α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x - ۲ = ۰$ هستند. اگر $\beta > \alpha$، حاصل عبارت $A = ۴\beta^۲ + ۲\alpha^۲$ را به دست آورید.

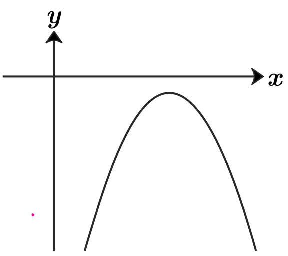
۱۶ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۴x + ۱ = ۰$ باشد حاصل $\frac{\beta^۲}{\alpha} + \frac{\alpha^۲}{\beta}$ را به دست آورید.

تشکیل معادله درجه دوم

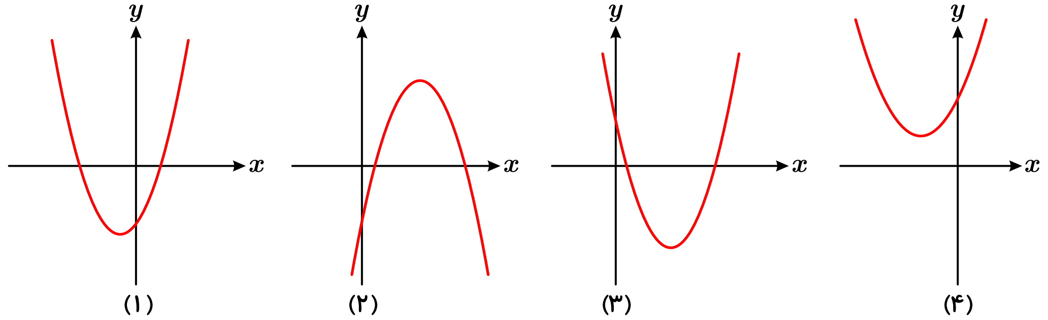
۱۷ معادلهٔ $-۲x^۲ + x + ۵ = ۰$ مفروض است معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های معادله مفروض یک واحد کمتر باشد.

منحنی درجه دوم و صفر های تابع درجه دوم

۱۸ شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ می‌باشد، علامت ضرایب b و c را تعیین کنید.

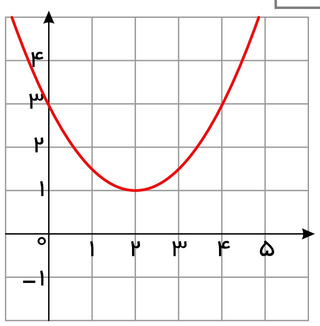


۱۹ با توجه به تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$، نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های جدول زیر را مشخص کنید.



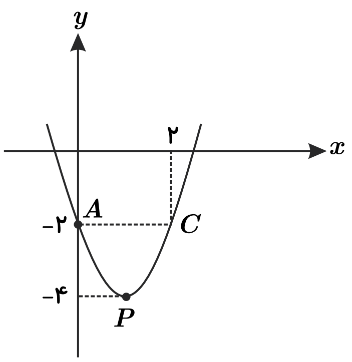
ویژگی	شماره نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است	....
دارای مینیمم است و ریشه ندارد	....
علامت c منفی است	....

۲۰ در شکل زیر نمودار سهمی $p(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.

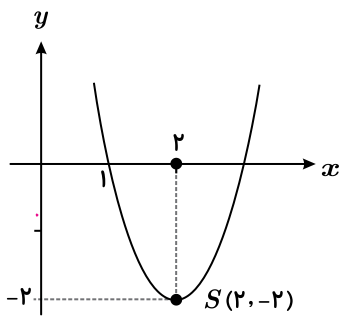


۲۱ مقدار m را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^۳ + mx^۲ - x - ۲$ برابر -۱ باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

۲۲ نمودار تابع درجه دوم $y = f(x)$ شکل مقابل است. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = ۰$ باشند، حاصل $\alpha^۲\beta + \beta^۲\alpha$ را به دست آورید.



۲۳ معادلهٔ سهمی شکل مقابل را بنویسید.



۲۴ مقدار m را طوری بیابید که یکی از صفرهای $f(x) = x^۳ + (m-۱)x^۲ - x - ۳$ برابر با $x = -۳$ باشد. سپس سایر صفرهای آن را تعیین کنید.

روش هندسی حل معادلات

۲۵ معادلهٔ $\sqrt{x+1} - x^2 = 2x + 1$ را به روش هندسی حل کرده و جواب آن را در صورت وجود به دست آورید.

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارات گویا

۲۶ اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت، چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، ماشین سریع‌تر در چند ساعت می‌تواند کار را به‌تنهایی انجام دهد؟

۲۷ اگر دو نقاش ساختمان با هم کار کنند نقاشی یک خانه را در ۶ ساعت انجام می‌دهند. اگر کارگر اول به تنهایی کار کند ۵ ساعت زودتر از کارگر دوم کار را تمام می‌کند. مشخص کنید هر کدام به تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کنند.

۲۸ طول خط یک متروی تهران ۶۰ کیلومتر است. برای انجام آزمایشی، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر بدانیم در مسیر جنوب به شمال سرعت قطار ۱۵ کیلومتر بر ساعت کمتر از سرعت آن در مسیر رفت و همچنین زمان بازگشت ۴۰ دقیقه طولانی‌تر از زمان رفت باشد، مجموع طول زمان رفت و برگشت این قطار چند ساعت است؟

معادلات شامل عبارات گنگ

۲۹ معادلهٔ $\sqrt{x+1} = x - 5$ را حل کنید.

۳۰ معادله $2 + \sqrt{1+x} = x - 3$ را حل کنید.

۳۱ معادلهٔ زیر را به روش جبری حل کنید.

$$1 + \sqrt{x+2} = x - 3$$

۳۲ جواب‌های معادلهٔ $x - 16 = x(\sqrt{x} - 4)$ را تعیین کنید.

۳۳ معادلهٔ رادیکالی $\sqrt{3p+2} + 3 = \sqrt{3 - 3p}$ را حل کنید.

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

رسم نمودار توابع قدر مطلقی

۳۴ نمودار تابع $f(x) = ||x| - 3|$ را رسم کنید و به‌کمک آن معادله $f(x) = 2$ را حل کنید.

۳۵ تابع $f(x) = |x+1| + |x-2|$ را بدون استفاده از قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

معادلات و نامعادلات قدر مطلقی

۳۶ معادله قدرمطلقی $||x| - 1| = 2$ را به روش جبری حل کنید.

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

فاصله دو نقطه در صفحه مختصات و مختصات نقطه وسط پاره خط

۳۷ نقاط $A\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $C\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ سه راس مثلث ABC هستند. طول میانهٔ AM را بیابید.

۳۸ نقاط $A(2,3), B(-1,0), C(1,-2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را به دست آورده و فاصلهٔ آن رأس را تا مبدا مختصات تعیین کنید.

۳۹ مختصات نقطه‌ای روی خط $y-2x=1$ را به دست آورید که از دو نقطهٔ $B\left|\begin{matrix}3\\1\end{matrix}\right.$, $A\left|\begin{matrix}-1\\-1\end{matrix}\right.$ به یک فاصله باشد.

۴۰ نقطه‌ای روی خط $y+2x-1=0$ بیابید که از دو نقطهٔ $A(-3,0), B(1,0)$ به یک فاصله باشد.

خطوط موازی و عمود بر هم و وضعیت دو خط نسبت به هم

۴۱ نقاط $A\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}, B\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, C\begin{bmatrix}k\\-k\end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر مثلث در رأس B قائمه باشد، مقدار k را بیابید.

۴۲ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) فاصلهٔ دو خط به معادلات $ax+by+c=0$ و $ax+by+c'=0$ برابر است با ....

ب) حاصل $\log_{100} 0/001+\log_2 2\sqrt{2}$ برابر است با ....

ج) حاصل $\sqrt{19-8\sqrt{3}}$ برابر است با ....

د) حاصل $\left[\lim_{x\to 3^-} x^3\right]-\lim_{x\to 3^-}[x^3]$ برابر است با ....

۴۳ مثلث با راس‌های $A(1,2), B(2,5), C(4,1)$ مفروض است.

الف) طول میانهٔ AM را بیابید.

ب) معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خط BC را بیابید.

ج) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۴۴ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}, AC: y=2x+5, BC: y+\frac{3}{2}x=3$ می‌باشند. معادلهٔ ارتفاع AH را بیابید.

فاصله نقطه از خط و مسائل آن

۴۵ فاصلهٔ نقطهٔ $A(-2,4)$ از خط $4x-3y+12=0$ را به کمک فرمول فاصلهٔ نقطه از خط به دست آورید.

۴۶ یکی از اضلاع مربعی بر خط $y=2x-1$ واقع است. اگر $(3,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.

۴۷ دو خط $3x-2y=2$ و $2x+3y=1$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطه $A(1,3)$ یک رأس مستطیل است. مساحت این مستطیل چقدر است؟

۴۸ یکی از اضلاع مربعی بر خط $y-x-2=0$ واقع است. اگر $M(2,0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.

۴۹ معادلهٔ دو ضلع مربعی به صورت $3y-2x-1=0, 6y-4x+3=0$ است، مساحت مربع را به دست آورید.

۵۰ چند نقطه روی خط $x-2y=1$ وجود دارند که فاصلهٔ آنها از خط $3x+4y=3$، برابر ۴ باشد؟ مختصات آن نقاط را به دست آورید.

پاسخنامه تشریحی

۱

$$S_n > ۴۰۰ \to \frac{n}{۲}[۲\times ۴+(n-۱)\times ۸] > ۴۰۰ \to \frac{n}{۲}(۸+۸n-۸) > ۴۰۰$$
$$\frac{n}{۲}(۸n) > ۴۰۰ \to ۴n^۲ > ۴۰۰ \to n^۲ > ۱۰۰ \to n > ۱۰$$

۲

$۱۲, ۱۸, \cdots, ۹۶ \to d = ۶$ دنباله حسابی

$$n = \frac{a_n - a_۱}{d} + ۱ = \frac{۹۶-۱۲}{۶} + ۱ = ۱۵ \quad \text{یا} \quad a_n = a_۱ + (n-۱)d \to ۹۶ = ۱۲ + ۶(n-۱)$$
$$\to \frac{۸۴}{۶} = n-۱ \to n-۱ = ۱۴ \to n = ۱۵$$
$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) = \frac{۱۵}{۲}(۱۲+۹۶) = \frac{۱۵}{۲}(۱۰۸) = ۸۱۰$$
$$\text{یا}\ \ S_n = \frac{n}{۲}[۲a + (n-۱)d] = \frac{۱۵}{۲}[۲(۱۲)+۶(۱۵-۱)] = \frac{۱۵}{۲}(۱۰۸) = ۸۱۰$$

۳

الف

۱۰۰۰۰

ب

۳

۴ گزینهٔ ۳

۵

$$a_۱ = \frac{۱}{۱+\sqrt{۷}},\ a_۲ = \frac{-۱}{۶},\ a_۳ = \frac{۱}{۱-\sqrt{۷}} \Rightarrow$$
$$۲d = a_۳ - a_۱ = \frac{۱}{۱-\sqrt{۷}} - \frac{۱}{۱+\sqrt{۷}} = \frac{۱+\sqrt{۷}-۱+\sqrt{۷}}{۱-۷} = \frac{\sqrt{۷}}{-۳} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{۷}}{-۶}$$
$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d) \Rightarrow S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(\frac{۱}{۱+\sqrt{۷}}) + ۱۹(\frac{\sqrt{۷}}{-۶}))$$
$$= ۱۰(\frac{۲(۱-\sqrt{۷})}{۱-۷} + ۱۹(\frac{\sqrt{۷}}{-۶})) = ۱۰(\frac{۲+۱۷\sqrt{۷}}{-۶}) = \frac{-۵}{۳}(۲+۱۷\sqrt{۷})$$

(صفحهٔ ۳ و ۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$a_۱ = \frac{۱}{۱+\sqrt{۷}},\ a_۲ = \frac{-۱}{۶},\ a_۳ = \frac{۱}{۱-\sqrt{۷}}$$
$$\Rightarrow ۲d = a_۳ - a_۱ = \frac{۱}{۱-\sqrt{۷}} - \frac{۱}{۱+\sqrt{۷}} = \frac{۱+\sqrt{۷}-۱+\sqrt{۷}}{۱-۷} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{۷}}{-۶}\ (\text{۰٫۲۵ نمره})$$
$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_۱ + (n-۱)d)\ (\text{۰٫۲۵ نمره}) \Rightarrow S_{۲۰} = \frac{۲۰}{۲}(۲(\frac{۱}{۱+\sqrt{۷}}) + ۱۹(\frac{\sqrt{۷}}{-۶}))\ (\text{۰٫۲۵ نمره})$$
$$= ۱۰(\frac{۲(۱-\sqrt{۷})}{۱-۷} + ۱۹(\frac{\sqrt{۷}}{-۶})) = ۱۰(\frac{۲+۱۷\sqrt{۷}}{-۶}) = \frac{-۵}{۳}(۲+۱۷\sqrt{۷})\ (\text{۰٫۲۵ نمره})$$

۶

دنباله : $۱۲, ۱۵, \cdots\cdots, ۹۹$

$$\begin{cases} a_۱ = ۱۲ \\ d = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_۱ + (n-۱)d \\ ۹۹ = ۱۲ + (n-۱)۳ \end{cases} \Rightarrow n-۱ = \frac{۹۹-۱۲}{۳} = ۲۹ \Rightarrow n = ۳۰$$
$$S_n = \frac{n}{۲}(a_۱ + a_n) \Rightarrow S_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}(۱۲+۹۹) = ۱۶۶۵$$

(صفحهٔ ۲ تا ۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

دنباله : $۱۲, ۱۵, \cdots\cdots\cdots, ۹۹$ (۰٫۲۵نمره)

$$\begin{cases} a_1 = ۱۲ \\ d = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + (n-۱)d \\ ۹۹ = ۱۲ + (n-۱)۳ \end{cases} \text{(۰٫۲۵نمره)} \Rightarrow n - ۱ = \frac{۹۹ - ۱۲}{۳} = ۲۹ \Rightarrow n = ۳۰ \text{ (۰٫۲۵نمره)}$$

$$\Rightarrow S_{۳۰} = \frac{۳۰}{۲}(۱۲ + ۹۹) = ۱۶۶۵ \text{ (۰٫۲۵نمره)}$$

۷ دنبالهٔ حسابی دنباله‌ای از اعداد است، که تفاضل هر دو جملهٔ متوالی آن مقدار ثابتی باشد.

$$a_1$$
$$a_۲ = a_1 + d$$
$$a_۳ = a_1 + ۲d$$
$$\vdots$$
$$a_n = a_1 + (n-۱)d$$

d قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است $(d \neq ۰)$ این دنباله را می‌توان به‌صورت بازگشتی $a_{n+1} = a_n + d$ هم نوشت.

مجموع n جملهٔ اول یک دنبالهٔ حسابی

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-۱)d) = \frac{n}{۲}(a_1 + (a_1 + (n-۱)d)) = S_n = \frac{n}{۲}(a_1 + a_n)$$

اول روابط داده‌شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$a_۷ = \frac{۱}{۲}a_۳ \Rightarrow a_1 + ۶d = \frac{۱}{۲}(a_1 + ۲d) \Rightarrow ۲a_1 + ۱۲d = a_1 + ۲d \Rightarrow a_1 + ۱۰d = ۰ \Rightarrow a_1 = -۱۰d$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-۱)d) = ۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}(-۲۰d + (n-۱)d) = ۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}((n-۲۱)d) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} n = ۰ \\ d = ۰ \\ n = ۲۱ \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

(صفحهٔ ۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$a_۷ = \frac{۱}{۲}a_۳ \Rightarrow \underbrace{a_1 + ۶d = \frac{۱}{۲}(a_1 + ۲d) \Rightarrow ۲a_1 + ۱۲d = a_1 + ۲d}_{\text{(۰٫۲۵نمره)}} \Rightarrow a_1 + ۱۰d = ۰ \Rightarrow \underbrace{a_1 = -۱۰d}_{\text{(۰٫۲۵نمره)}}$$

$$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-۱)d) = ۰ \Rightarrow \underbrace{\frac{n}{۲}(-۲۰d + (n-۱)d) = ۰ \Rightarrow \frac{n}{۲}((n-۲۱)d) = ۰}_{\text{(۰٫۵نمره)}} \Rightarrow \begin{cases} n = ۰ \\ d = ۰ \\ n = ۲۱ \text{ قابل قبول} \end{cases} \text{(۰٫۲۵نمره)}$$

۸ اول داده‌های مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم. سپس جملهٔ اول و قدرنسبت را به دست آورده و فرمول مجموع n جمله دنباله هندسی را می‌نویسیم و جایگذاری می‌کنیم.

$$a_۶ = a_1 q^۵ \;(۱)\;,\; a_1 \times a_۲ \times \cdots \times a_۵ = ۲۴۳ \Rightarrow a_1(a_1 q)(a_1 q^۲)(a_1 q^۳)(a_1 q^۴) = ۲۴۳$$

$$\Rightarrow a_1^۵ q^{۱۰} = ۲۴۳ \Rightarrow (a_1 q^۲)^۵ = ۳^۵ \Rightarrow a_1 q^۲ = ۳ \;(۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{a_1 q^۵}{a_1 q^۲} = q^۳ = \frac{۸۱}{۳} = ۲۷ \Rightarrow q = ۳ \Rightarrow a_1 = \frac{۱}{۳}$$

$$S_n = \frac{a_1(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow S_۶ = \frac{\frac{۱}{۳}(۱ - ۳^۶)}{۱ - ۳} = \frac{\frac{۱}{۳}(۱ - ۷۲۹)}{-۲} = \frac{۳۶۴}{۳}$$

راهنمای تصحیح:

$$a_۶ = a_1 q^۵ \;(۱)\;,\; a_1 \times a_۲ \times \cdots \times a_۵ = ۲۴۳ \text{ (۰٫۲۵نمره)} \Rightarrow a_1(a_1 q)(a_1 q^۲)(a_1 q^۳)(a_1 q^۴) = ۲۴۳$$

$$\Rightarrow a_1^۵ q^{۱۰} = ۲۴۳ \Rightarrow (a_1 q^۲)^۵ = ۳^۵ \text{ (۰٫۲۵نمره)} \Rightarrow a_1 q^۲ = ۳ \;(۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{a_1 q^۵}{a_1 q^۲} = q^۳ = \frac{۸۱}{۳} = ۲۷ \text{ (۰٫۲۵نمره)}$$

$$\Rightarrow q = ۳ \Rightarrow a_1 = \frac{۱}{۳}$$

$$S_n = \frac{a_1(۱ - q^n)}{۱ - q} \Rightarrow S_۶ = \frac{\frac{۱}{۳}(۱ - ۳^۶)}{۱ - ۳} = \frac{\frac{۱}{۳}(۱ - ۷۲۹)}{-۲} = \frac{۳۶۴}{۳} \text{ (۰٫۲۵نمره)}$$

۹

$$\frac{S_۶}{S_۳} = ۱ + q^۳ = ۹ \Rightarrow q = ۲ \Rightarrow \frac{S_{۱۰}}{S_۵} = ۱ + q^۵ = ۳۳$$

۱۰

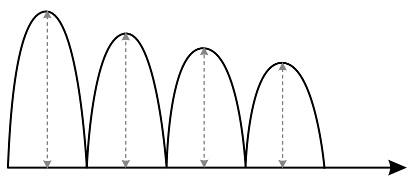
$$\frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸} \qquad S_n \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times \frac{۱ - (\frac{۱}{۲})^n}{۱ - \frac{۱}{۲}} \geq \frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\Rightarrow ۱ - (\frac{۱}{۲})^n \geq \frac{۹۹}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰۰} \geq (\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow ۲^n \geq ۱۰۰ \Rightarrow n = ۷$$

۱۱ ۱) فرمول مجموع را حتماً بنویسید.

۲) قدرنسبت و جملهٔ اول دنباله را تعیین کنید.

۳) اگر قدرنسبت q بود، در فرمول $S_n = \dfrac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q}$ جایگذاری کنید و جواب نهایی را به دست آورید.



مسیرهای رفت و برگشت توپ:

$$B_۱ = ۳۰\ ,\ B_۲ = \frac{۳۰}{۳}\ ,\ B_۳ = \frac{۳۰}{۹}\ ,\ \cdots ,B_n = \frac{۳۰}{۳^{n-۱}},\cdots$$

$$a_۱ = ۳۰\ ,\ q = \frac{۱}{۳}\ ,\ S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \Rightarrow S_۴ = \frac{۳۰(۱-(\frac{۱}{۳})^۴)}{۱-\frac{۱}{۳}} = \frac{۹۰}{۲}(۱-(\frac{۱}{۳})^۴) = ۴۴/۴۴$$

(صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

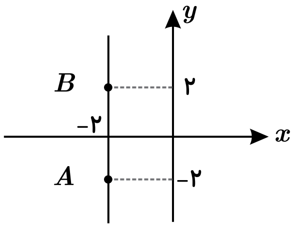
راهنمای تصحیح:

مسیرهای رفت و برگشت توپ:

$$\underbrace{B_۱ = ۳۰\ ,\ B_۲ = \frac{۳۰}{۳}\ ,\ B_۳ = \frac{۳۰}{۹}\ ,\ \cdots ,B_n = \frac{۳۰}{۳^{n-۱}},\cdots}_{(۰/۵\text{نمره})}$$

$$\underbrace{a_۱ = ۳۰\ ,\ q = \frac{۱}{۳}}_{۰/۲۵\text{نمره}}\ ,\ S_n = \frac{a_۱(۱-q^n)}{۱-q} \Rightarrow \underbrace{S_۴ = \frac{۳۰(۱-(\frac{۱}{۳})^۴)}{۱-\frac{۱}{۳}}}_{(۰/۵\text{نمره})} = \frac{۹۰}{۲}(۱-(\frac{۱}{۳})^۴) = ۴۴/۴۴\quad (۰/۲۵\text{نمره})$$

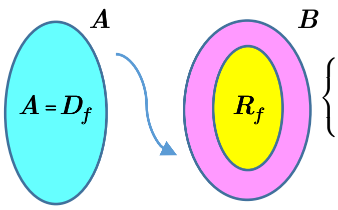
۱۲ الف) نادرست: زیرا نقاط B, A روی خطی قائم به معادلهٔ $x = -۲$ قرار دارند. این خط یک تابع نیست. چون بی‌شمار نقطه با طول $x = -۲$ و عرض‌های حقیقی روی این خط قرار دارند.



ب) درست: زیرا هر سهمی با معادلهٔ $f(x) = ax^۲ + bx + c$ در نقطهٔ $M(۰, c)$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

$$f(x) = ax^۲ + bx + c \xrightarrow{x=۰} f(۰) = c$$

ج) درست: زیرا در تابع $f : A \to B$ همواره داریم:



$$\begin{cases} A = D_f \\ R_f \subseteq B \\ n(A) = n(D_f) \geq n(R_f) \end{cases}$$

د) نادرست: برای تساوی دو تابع، دامنهٔ توابع باید با هم برابر باشند. (شرط لازم) و علاوه بر آن باید داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

بنابراین در دو تابع مساوی، دامنه و برد آنها یکسان است ولی عکس این مطلب صحیح نیست یعنی ممکن است دامنه و برد دو تابع یکسان باشند ولی دو تابع برابر نباشند، مانند:

$$\begin{cases} f = \{(۲,۴),(۳,۵),(۱,۷)\} \\ g = \{(۲,۵),(۳,۷),(۱,۴)\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = \{۱,۲,۳\}, R_f = R_g = \{۴,۵,۷\}$$

توابع g, f برابر نیستند.

(صفحهٔ ۴۱، ۳۸، ۳۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) نادرست (۰٫۲۵نمره)

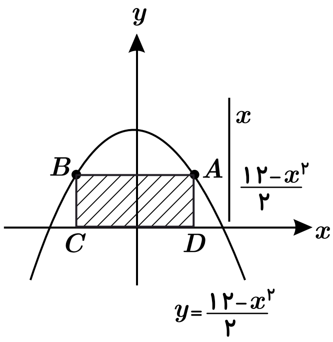
ب) درست (۰٫۲۵نمره)

ج) درست (۰٫۲۵نمره)

د) نادرست (۰٫۲۵نمره)

۱۳

مطابق شکل مساحت مستطیل، حاصل‌ضرب طول در عرض مستطیل است.



نقطهٔ A روی تابع f قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $A(x, \dfrac{۱۲-x^۲}{۲})$ است.

دو نقطهٔ D, A، هم‌طول‌اند. از آنجایی که تابع نسبت به محور y متقارن است، C نیز قرینهٔ D است. پس:

$$\text{طول مستطیل} = |x_D - x_C| = |x-(-x)| = ۲x \qquad \text{عرض مستطیل} = |AD| = y_A = \frac{۱۲-x^۲}{۲}$$

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} = (۲x)\times(y) = ۲x\frac{(۱۲-x^۲)}{۲} = ۱۲x - x^۳$$

(صفحهٔ ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\left.\begin{array}{l} \text{طول مستطیل} = |x_D - x_C| = |x-(-x)| = ۲x \\ \text{عرض مستطیل} = |AD| = y_A = \dfrac{۱۲-x^۲}{۲} \end{array}\right\} \text{(۰٫۲۵نمره)}$$

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} = (۲x)\times(y) \quad \text{(۰٫۲۵نمره)} = ۲x\frac{(۱۲-x^۲)}{۲} = ۱۲x - x^۳ \quad \text{(۰٫۵نمره)}$$

۱۴ طول نقاط $C(۶, ۰), A(-۲, ۰)$ محل برخورد سهمی با محور طول‌ها است.

$$f(x) = -x^۲ + ۴x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow -(x+۲)(x-۶) = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -۲ \\ x = ۶ \end{array}\right.$$

مختصات رأس سهمی:

$$B \left| \begin{array}{l} \dfrac{-b}{۲a} = \dfrac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \\ f(۲) = ۱۶ \end{array}\right.$$

$$|AB| = \sqrt{(-۲-۲)^۲ + (۱۶-۰)^۲} = ۴\sqrt{۱۷}$$

$$|BC| = \sqrt{(۶-۲)^۲ + (۱۶-۰)^۲} = ۴\sqrt{۱۷}$$

$$|AC| = |۶-(-۲)| = ۸$$

$$P = |AB| + |AC| + |BC| = ۸\sqrt{۱۷} + ۸$$

$$y_{max} = y_B = f(۲) = ۱۶$$

(صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

طول نقاط C, A محل برخورد سهمی با محور طول‌ها

$$f(x) = -x^۲ + ۴x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow -(x+۲)(x-۶) = ۰ \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -۲ \\ x = ۶ \end{array}\right. \quad \text{(۰٫۲۵نمره)}$$

$$A \left| \begin{array}{l} -۲ \\ ۰ \end{array}\right. , \; C \left| \begin{array}{l} ۶ \\ ۰ \end{array}\right.$$

مختصات رأس سهمی:

$B \left| \begin{array}{l} \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲ \\ f(۲) = ۱۶ \end{array} \right.$ (۰٫۲۵ نمره)

$|AB| = \sqrt{(-۲-۲)^۲ + (۱۶-۰)^۲} = ۴\sqrt{۱۷}$ (۰٫۲۵ نمره)

$|BC| = \sqrt{(۶-۲)^۲ + (۱۶-۰)^۲} = ۴\sqrt{۱۷}$ (۰٫۲۵ نمره)

$|AC| = |۶-(-۲)| = ۸$ (۰٫۲۵ نمره)

$P = |AB| + |AC| + |BC| = ۸\sqrt{۱۷} + ۸$ (۰٫۲۵ نمره)

$y_{max} = y_B = f(۲) = ۱۶$ (۰٫۲۵ نمره)

۱۵

$x^۲ - ۴x - ۲ = ۰\ ,\ S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۴,\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۲$

$\xrightarrow{(\beta > \alpha)} \beta - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$

$A = ۴\beta^۲ + ۲\alpha^۲ = ۳(\beta^۲ + \alpha^۲) + (\beta^۲ - \alpha^۲) = ۳((\beta+\alpha)^۲ - ۲\alpha\beta)) + (\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$

$= ۳(S^۲ - ۲P) + S \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = ۳(۴^۲ - ۲(-۲)) + ۴ \times ۲\sqrt{۶} = ۶۰ + ۸\sqrt{۶}$

راه دوم:

$x^۲ - ۴x - ۲ = ۰ \Rightarrow \beta = ۲ + \sqrt{۶}\ , \alpha = ۲ - \sqrt{۶}$

$\rightarrow A = ۴\beta^۲ + ۲\alpha^۲ = ۴(۴\beta + ۲) + ۲(۴\alpha + ۲) = ۸(۲\beta + \alpha) + ۱۲$

$= ۸(۲(۲+\sqrt{۶}) + ۲ - \sqrt{۶}) + ۱۲ = ۶۰ + ۸\sqrt{۶}$

(صفحهٔ ۸ و ۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$x^۲ - ۴x - ۲ = ۰\ ,\ S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۴,\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -۲$ (۰٫۲۵ نمره)

$\xrightarrow{(\beta > \alpha)} \beta - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{۲۴} = ۲\sqrt{۶}$

$A = ۴\beta^۲ + ۲\alpha^۲ = ۳(\beta^۲ + \alpha^۲) + (\beta^۲ - \alpha^۲)$ (۰٫۲۵ نمره)

$= ۳((\beta+\alpha)^۲ - ۲\alpha\beta)) + (\beta+\alpha)(\beta-\alpha)$ (۰٫۲۵ نمره)

$= ۳(S^۲ - ۲P) + S \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$ (۰٫۲۵ نمره) $= ۳(۴^۲ - ۲(-۲)) + ۴ \times ۲\sqrt{۶} = ۶۰ + ۸\sqrt{۶}$ (۰٫۲۵ نمره)

راه دوم:

$x^۲ - ۴x - ۲ = ۰ \Rightarrow \beta = ۲ + \sqrt{۶}$ (۰٫۲۵ نمره) $, \alpha = ۲ - \sqrt{۶}$ (۰٫۲۵ نمره)

$\rightarrow A = ۴\beta^۲ + ۲\alpha^۲ = ۴(۴\beta + ۲) + ۲(۴\alpha + ۲)$ (۰٫۵ نمره)

$= ۸(۲\beta + \alpha) + ۱۲ = ۸(۲(۲+\sqrt{۶}) + ۲ - \sqrt{۶}) + ۱۲ = ۶۰ + ۸\sqrt{۶}$ (۰٫۲۵ نمره)

۱۶ اول S و P معادله را تعیین نموده سپس عبارت داده‌شده را تا جای ممکن ساده نموده و برحسب S و P می‌نویسیم و جایگذاری می‌کنیم:

$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۴\ ,\ \ P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = ۱$

$a^۳ + b^۳ = (a+b)(a^۲ - ab + b^۲)\quad ,\quad a^۳ + b^۳ = (a+b)^۳ - ۳(ab)(a+b)$

می‌دانیم:

$$\frac{\alpha^۲}{\beta} + \frac{\beta^۲}{\alpha} = \frac{\alpha^۳ + \beta^۳}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)^۳ - ۳(\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{(S^۳ - ۳PS)}{P} = \frac{۴^۳ - ۳(۱)(۴)}{۱} = ۵۲$$

(صفحه‌های ۸, ۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = ۴\ ,\ \ P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = ۱$ (۰٫۵ نمره)

$$\underbrace{\frac{\alpha^۲}{\beta} + \frac{\beta^۲}{\alpha} = \frac{\alpha^۳ + \beta^۳}{\alpha\beta}}_{\text{(۰٫۲۵ نمره)}} = \underbrace{\frac{(\alpha+\beta)^۳ - ۳(\alpha\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} = \frac{(S^۳ - ۳PS)}{P}}_{\text{(۰٫۵ نمره)}} = \frac{۴^۳ - ۳(۱)(۴)}{۱} = ۵۲ \quad \text{(۰٫۲۵ نمره)}$$

۱۷ معادلهٔ درجه دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد را می‌توان به‌صورت $x^۲ - Sx + P = ۰$ نوشت.

اگر معادله درجه دومی بدهند، و از ما معادلهٔ درجه دومی دیگری بخواهند که ریشه‌هایش با ریشه‌های معادلهٔ اول رابطهٔ مشخصی داشته باشد، کافی است، ریشه‌های معادلهٔ اول را x و معادلهٔ

دوم را X بنامیم و ارتباط x و X را با استفاده از صورت سوال بنویسیم و با توجه به X، P و S جدید را نوشته و معادلهٔ جدید را بر حسب آن بنویسیم.

$$x_۱ + x_۲ = S = \frac{۱}{۲}\ ,\ x_۱ \times x_۲ = P = \frac{-۵}{۲} \Rightarrow X_۱ = ۲x_۱ - ۱\ ,\ X_۲ = ۲x_۲ - ۱$$

$$\Rightarrow S' = X_۱ + X_۲ = ۲(x_۱ + x_۲) - ۲ = ۲(\frac{۱}{۲}) - ۲ = -۱$$

$$P' = X_۱ \times X_۲ = ۴x_۱x_۲ - ۲(x_۱ + x_۲) + ۱ = ۴(\frac{-۵}{۲}) - ۲(\frac{۱}{۲}) + ۱ = -۱۰$$

$$X^۲ - S'X + P' = ۰ \Rightarrow X^۲ + X - ۱۰ = ۰$$

(صفحهٔ ۸ تا ۱۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$x_۱ + x_۲ = S = \frac{۱}{۲}\ ,\ x_۱ \times x_۲ = P = \frac{-۵}{۲}(\text{۰٫۲۵ نمره}) \Rightarrow X_۱ = ۲x_۱ - ۱\ ,\ X_۲ = ۲x_۲ - ۱$$

$$S' = X_۱ + X_۲ = ۲(x_۱ + x_۲) - ۲ = ۲(\frac{۱}{۲}) - ۲ = -۱\ (\text{۰٫۲۵ نمره}),$$

$$P' = X_۱ \times X_۲ = ۴x_۱x_۲ - ۲(x_۱ + x_۲) + ۱ = ۴(\frac{-۵}{۲}) - ۲(\frac{۱}{۲}) + ۱ = -۱۰\ (\text{۰٫۲۵ نمره})$$

$$X^۲ - SX + P = ۰ \Rightarrow X^۲ + X - ۱۰ = ۰\ (\text{۰٫۲۵ نمره})$$

۱۸

$c < ۰$ (منفی) و $b > ۰$ (مثبت)

۱۹

ویژگی	شمارهٔ نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است	(۳)
دارای مینیمم است و ریشه ندارد	(۴)
علامت c منفی است	(۱) و (۲)

۲۰ تابع صفری ندارد.

$$y = a(x-۲)^۲ + ۱ \Rightarrow ۳ = a(۰-۲)^۲ + ۱$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱}{۲} \Rightarrow y = \frac{۱}{۲}(x-۲)^۲ + ۱$$

۲۱

$$f(-۱) = ۰ \to -۱ + m + ۱ - ۲ = ۰ \to m = ۲$$

$$f(x) = x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲ = (x-۱)(x+۱)(x+۲)$$

$$f(x) = ۰ \to \begin{cases} x - ۱ = ۰ \to x = ۱ \\ x + ۲ = ۰ \to x = -۲ \\ x + ۱ = ۰ \to x = -۱ \end{cases}$$

۲۲ مطابق شکل نقاط C, A هم‌عرض هستند، بنابراین داریم:

$$x_p = \frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{۲ + ۰}{۲} = ۱ \Rightarrow P(۱, -۴)$$

چون مختصات رأس سهمی را داریم، معادلهٔ آن را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = a(x-۱)^۲ - ۴ \Rightarrow f(۰) = a - ۴ = -۲ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲x^۲ - ۴x - ۲$$

رابطهٔ داده‌شده را برحسب S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل‌ضرب ریشه‌ها) و با توجه به معادلهٔ $Ax^۲ + Bx + C = ۰$ می‌نویسیم:

$$\alpha^۲\beta + \beta^۲\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \times S = \frac{C}{A} \times \frac{-B}{A} = \frac{-۲}{۲} \times (\frac{۴}{۲}) = -۲$$

(صفحهٔ ۸ تا ۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$x_p = \frac{x_A + x_C}{۲} = \frac{۲ + ۰}{۲} = ۱ \Rightarrow P(۱, -۴)\ \ (\text{۰٫۵ نمره})$$

$$f(x) = a(x-۱)^۲ - ۴ \Rightarrow f(۰) = a - ۴ = -۲ \Rightarrow a = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲x^۲ - ۴x - ۲\ \ (\text{۰٫۵ نمره})$$

$$\alpha^۲\beta + \beta^۲\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \times S = \frac{C}{A} \times \frac{-B}{A} = \frac{-۲}{۲} \times (\frac{۴}{۲}) = -۲\ \ (\text{۰٫۵ نمره})$$

۲۳ ابتدا یک تابع درجه ۲ را به‌شکل $f(x) = ax^۲ + bx + c$ در نظر می‌گیریم و با توجه به معلومات مسئله پارامترهای c, b, a را تعیین می‌کنیم. در این سؤال چون مختصات رأس داده شده است، از رابطهٔ $f(x) = a(x - x_s)^۲ + y_s = a(x-۲)^۲ - ۲$ استفاده کردیم و مختصات نقطهٔ محل برخورد تابع با محور xها $(x = ۱)$ را در تابع جایگذاری نموده و

پارامترها را به دست می‌آوریم.

$$f(x)=a(x-x_s)^۲+y_s=a(x-۲)^۲-۲\Rightarrow f(۱)=a(۱-۲)^۲-۲=۰\Rightarrow a=۲$$
$$\Rightarrow f(x)=۲(x-۲)^۲-۲=۲x^۲-۸x+۶$$

(صفحهٔ ۱۰ تا ۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\underbrace{f(x)=a(x-x_s)^۲+y_s=a(x-۲)^۲-۲}_{(۰٫۵\text{نمره})}\Rightarrow \underbrace{f(۱)=a(۱-۲)^۲-۲=۰}_{(۰٫۵\text{نمره})}\Rightarrow a=۲$$
$$f(x)=۲(x-۲)^۲-۲=۲x^۲-۸x+۶\quad(۰٫۵\text{نمره})$$

۲۴ راه حل اول:

$x=-۳$ ریشهٔ تابع $f(x)$ (یا صفر آن) است یعنی: $f(-۳)=۰$ در نتیجه با جایگذاری $x=-۳$ در تابع، مقدار m به دست می‌آید.

$$f(-۳)=-۲۷+(m-۱)۹+۳-۳=۰\Rightarrow m-۱=۳\Rightarrow m=۴$$

حال با تقسیم $f(x)$ بر عامل $x+۳$ عامل‌های دیگر تابع را به دست می‌آوریم.

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۳x^۲-x-۳ & x+۳ \\ \underline{-(x^۳+۳x^۲)} & x^۲-۱ \\ -x-۳ & \\ \underline{-(-x-۳)} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+۳)(x^۲-۱)\Rightarrow f(x)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۳\\ x=-۱\\ x=۱\end{cases}$$

راه حل دوم:

$$x^۳+۳x^۲-x-۳=۰\Rightarrow x^۲(x+۳)-(x+۳)=۰$$
$$\Rightarrow (x+۳)(x^۲-۱)=۰\Rightarrow (x+۳)(x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۳\\ x=۱\\ x=-۱\end{cases}$$

(صفحهٔ ۱۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

راه حل اول:

$$f(-۳)=-۲۷+(m-۱)۹+۳-۳=۰\Rightarrow m-۱=۳\Rightarrow m=۴\quad(۰٫۵\text{نمره})$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳+۳x^۲-x-۳ & x+۳ \\ \underline{-(x^۳+۳x^۲)} & x^۲-۱ \\ -x-۳ & \\ \underline{-(-x-۳)} & \\ ۰ & \end{array}\quad(۰٫۵\text{نمره})$$

$$\Rightarrow f(x)=(x+۳)(x^۲-۱)\Rightarrow f(x)=۰\underset{(۰٫۲۵\text{نمره})}{\Rightarrow}\begin{cases} x=-۳\\ x=-۱\\ x=۱\end{cases}\quad(۰٫۲۵\text{نمره})$$

راه حل دوم: (به راه‌حل دوم استفاده از تجزیه، نمرهٔ کامل داده شود)

$$x^۳+۳x^۲-x-۳=۰\Rightarrow x^۲(x+۳)-(x+۳)=۰$$
$$\Rightarrow (x+۳)(x^۲-۱)=۰\Rightarrow (x+۳)(x-۱)(x+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=-۳\\ x=۱\\ x=-۱\end{cases}$$

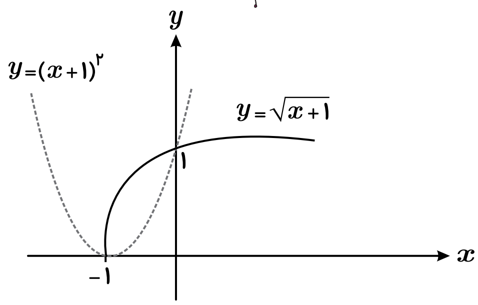
۲۵ ۱) اول معادله یا نامعادله را به‌صورت $f(x)=g(x)$ یا $f(x)\le g(x)$ می‌نویسیم که در آن $g(x), f(x)$ به سادگی قابل رسم باشند.

۲) $f(x)$ و $g(x)$ را با دقت در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

۳) محل تلاقی نمودارها را مشخص می‌کنیم.

۴) نقاط به‌دست‌آمده را به صورت مجموعه و یا ناحیهٔ مورد نظر را به صورت بازه می‌نویسیم.

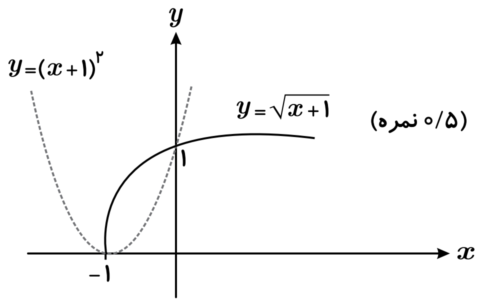
معادله را به صورت $\sqrt{x+۱}=x^۲+۲x+۱=(x+۱)^۲$ می‌نویسیم. نمودار هر دو طرف معادله را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. نمودار این دو تابع، در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ بنابراین، معادله ۲ ریشه دارد: $x=-۱, x=۰$



(صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

معادله را به صورت $\sqrt{x+۱} = x^۲ + ۲x + ۱ = (x+۱)^۲$ می‌نویسیم.(۰٫۵نمره) نمودار هر دو طرف معادله را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم نمودار این دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند: بنابراین، معادله ۲ ریشه دارد: $x = -۱, x = ۰$ (۰٫۵نمره)



(۰/۵ نمره)

۲۶

$$\frac{۱}{t} + \frac{۱}{۲t} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۲t} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow t = ۶$$

۲۷ وقتی یک نفر کاری را در x واحد زمانی انجام می‌دهد همیشه نتیجه می‌گیریم که در یک واحد زمانی $\frac{۱}{x}$ کار را انجام می‌دهد. حالا اگر شخص دیگر همین کار را در y ساعت انجام دهد می‌توان نتیجه گرفت اگر این دو نفر با هم کار کنند در هر ساعت $\frac{۱}{y} + \frac{۱}{x}$ کار را انجام خواهند داد. بنابراین اگر کارگر اول در x ساعت کار را انجام دهد، کارگر دوم در $y = x + ۵$ ساعت تمام می‌کند. از طرفی این دو در یک ساعت $\frac{۱}{۱۵}$ کار را انجام می‌دهند، در نتیجه داریم:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۵} = \frac{۱}{۱۵} \Rightarrow \frac{x+۵+x}{x(x+۵)} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۶(۲x+۵) = x^۲ + ۵x$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۷x - ۳۰ = ۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۱۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۱۰ \end{cases}$$

کارگر اول در ۱۰ ساعت و کارگر دوم در ۱۵ ساعت به تنهایی کار را تمام می‌کنند.

راهنمای تصحیح:

$$\frac{۱}{x} + \frac{۱}{x+۵} = \frac{۱}{۶} \quad (\text{۰٫۵نمره}) \Rightarrow \frac{x+۵+x}{x(x+۵)} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۶(۲x+۵) = x^۲ + ۵x \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

$$\Rightarrow x^۲ - ۷x - ۳۰ = ۰ \Rightarrow (x+۳)(x-۱۰) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۳ \\ x = ۱۰ \end{cases} \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

کارگر اول در ۱۰ ساعت و کارگر دوم در ۱۵ ساعت به تنهایی کار را تمام می‌کنند. (۰٫۲۵ نمره)

۲۸ ابتدا زمان رفت و برگشت را بر اساس سرعت رفت و برگشت می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{v} \Rightarrow t_R = \frac{۶۰}{v} \ , \ t_B = \frac{۶۰}{v - ۱۵}$$

حال معادله گویا این مسئله را می‌سازیم و حل می‌کنیم:

$$t_R = \frac{۶۰}{v} \ , \ t_B = \frac{۶۰}{v-۱۵} \Rightarrow \frac{۶۰}{v-۱۵} = \frac{۶۰}{v} + \frac{۲}{۳} \Rightarrow ۶۰(۳)(v) = ۶۰(۳)(v-۱۵) + ۲(v)(v-۱۵)$$

$$\Rightarrow ۲v^۲ - ۳۰v - ۲۷۰۰ = ۰$$

$$v = \frac{۳۰ \pm \sqrt{۹۰۰ + ۴ \times ۲ \times ۲۷۰۰}}{۴} = \frac{۳۰ \pm ۱۵۰}{۴} \Rightarrow v = ۴۵$$

$$\Rightarrow t_R + t_B = \frac{۶۰}{۴۵} + \frac{۶۰}{۳۰} = \frac{۱۰}{۳} = \text{۳ساعت و ۲۰دقیقه}$$

(صفحهٔ ۱۷ تا ۱۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$t_R = \frac{۶۰}{v}\ ,\ t_B = \frac{۶۰}{v-۱۵}$ (۰٫۲۵نمره) $\Rightarrow \frac{۶۰}{v-۱۵} = \frac{۶۰}{v} + \frac{۲}{۳}$ (۰٫۲۵نمره)

$\Rightarrow ۶۰(۳)(v) = ۶۰(۳)(v-۱۵) + ۲(v)(v-۱۵) \Rightarrow ۲v^۲ - ۳۰v - ۲۷۰۰ = ۰$ (۰٫۲۵نمره)

$v = \frac{۳۰ \pm \sqrt{۹۰۰ + ۴ \times ۲ \times ۲۷۰۰}}{۴}$ (۰٫۲۵نمره) $= \frac{۳۰ \pm ۱۵۰}{۴} \Rightarrow v = ۴۵$

$\Rightarrow t_R + t_B = \frac{۶۰}{۴۵} + \frac{۶۰}{۳۰} = \frac{۱۰}{۳} =$ ۳ساعت و ۲۰دقیقه (۰٫۲۵نمره)

۲۹

$\sqrt{x+۱} = x - ۵ \to x + ۱ = (x-۵)^۲ \to x + ۱ = x^۲ - ۱۰x + ۲۵ \to x^۲ - ۱۱x + ۲۴ = ۰ \to (x-۳)(x-۸) = ۰$

$\to x = ۳$ (غ ق ق) $\qquad x = ۸$ (ق ق)

۳۰

$۲ + \sqrt{۱+x} = x - ۳ \to \sqrt{۱+x} = x - ۳ - ۲ = x - ۵$

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$۱ + x = x^۲ - ۱۰x + ۲۵ \to x^۲ - ۱۱x + ۲۴ = ۰$

$$\begin{cases} x = ۸ \\ x = ۳ \end{cases}$$

جواب $x = ۳$ غیر قابل قبول است.

۳۱

$\sqrt{x+۲} = x - ۴ \Rightarrow x + ۲ = x^۲ - ۸x + ۱۶ \Rightarrow x^۲ - ۹x + ۱۴ = ۰ \Rightarrow (x-۷)(x-۲) = ۰$

$x = ۲$ غ ق ق

$x = ۷$

۳۲

$x - ۱۶ = x(\sqrt{x} - ۴) \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x}+۴)(\sqrt{x}-۴) = x(\sqrt{x}-۴)$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{x}+۴)(\sqrt{x}-۴) - x(\sqrt{x}-۴) = ۰ \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x}-۴)(\sqrt{x}+۴-x) = ۰$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۱۶ \\ \sqrt{x} = x - ۴ \xrightarrow{x \geq ۴} x^۲ - ۹x + ۱۶ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۹ \pm \sqrt{۸۱-۶۴}}{۲} \xrightarrow{x\geq ۴} x = \frac{۹+\sqrt{۱۷}}{۲} \end{cases}$$

(صفحهٔ ۲۱ و ۲۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$x - ۱۶ = x(\sqrt{x} - ۴) \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x}+۴)(\sqrt{x}-۴) = x(\sqrt{x}-۴)$

$\Rightarrow \quad (\sqrt{x}+۴)(\sqrt{x}-۴) - x(\sqrt{x}-۴) = ۰ \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{x}-۴)(\sqrt{x}+۴-x) = ۰$ (۰٫۲۵نمره)

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-۴) = ۰ \Rightarrow x = ۱۶ \text{ (۰٫۲۵نمره)} \\ \sqrt{x} = x - ۴ \xrightarrow{x \geq ۴} x^۲ - ۹x + ۱۶ = ۰ \text{ (۰٫۲۵نمره)} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \frac{۹ \pm \sqrt{۸۱-۶۴}}{۲} \xrightarrow{x\geq ۴} x = \frac{۹+\sqrt{۱۷}}{۲}$ (۰٫۲۵نمره)

۳۳ برای حل این معادلات باید عبارت رادیکال را در یک طرف تساوی و عبارت‌های دیگر را در طرف دیگر ببریم و طرفین را به توان برسانیم و معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. جواب‌هایی از این معادله که در معادلهٔ اصلی صدق کند، جواب معادله می‌باشد. (یعنی ممکن است با به توان رساندن جواب‌های اضافی تولید شود.)

$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = (g(x))^۲$

به یاد داشته باشید قبل از هر اقدامی دامنهٔ تابع را بررسی کنید. عملاً جواب‌های حاصل نباید زیر رادیکال را منفی کند و همچنین جواب به‌دست‌آمده نباید $g(x)$ را منفی کند.

راه حل اول:

دامنهٔ این معادله بازهٔ $[\frac{-۲}{۳}, ۱]$ است چون:

$۳ - ۳p \geq ۰\ ,\ ۳p + ۲ \geq ۰ \Rightarrow p \leq ۱\ ,\ p \geq \frac{-۲}{۳} \Rightarrow p \in [\frac{-۲}{۳}, ۱]$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$۳ - ۳p = ۹ + ۳p + ۲ + ۶\sqrt{۳p+۲} \Rightarrow -۸ - ۶p = ۶\sqrt{۳p+۲} \Rightarrow -(۴+۳p) = ۳\sqrt{۳p+۲}$

$$۱۶ + ۹p^۲ + ۲۴p = ۹(۳p+۲) \Rightarrow ۹p^۲ - ۳p - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{۲}{۳} & \text{غقق} \\ p = \frac{-۱}{۳} & \text{غقق} \end{cases}$$

جواب‌های به‌دست‌آمده در دامنهٔ معادله قرار دارد ولی در خود معادله صدق نمی‌کند.

راه حل دوم:

در مرحلهٔ $۲\sqrt{۳p+۲} = ۳ -(۴+۳p)$ دوباره دامنه را تعیین می‌کنیم:

$$-۴-۳p \geq ۰ \Rightarrow p \leq -\frac{۴}{۳}$$

دامنهٔ جدید با بازهٔ $[-\frac{۲}{۳}, ۱]$ اشتراکی ندارد، پس معادله فاقد جواب است.

(صفحهٔ ۲۰ تا ۲۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

دامنهٔ این معادله بازهٔ $[\frac{-۲}{۳}, ۱]$ است چون:

$$۳-۳p \geq ۰ \,,\, ۳p+۲ \geq ۰ \Rightarrow p \leq ۱ \,,\, p \geq \frac{-۲}{۳} \Rightarrow p \in [\frac{-۲}{۳}, ۱] \quad (\text{۰٫۲۵ نمره})$$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۳-۳p = ۹+۳p+۲+۶\sqrt{۳p+۲} \quad (\text{۰٫۵ نمره}) \Rightarrow -۸-۶p = ۶\sqrt{۳p+۲} \Rightarrow -(۴+۳p) = ۳\sqrt{۳p+۲} \quad (\text{۰٫۲۵ نمره})$$

$$۱۶+۹p^۲+۲۴p = ۹(۳p+۲) \quad (\text{۰٫۲۵ نمره}) \Rightarrow ۹p^۲-۳p-۲=۰ \xRightarrow{(\text{۰٫۲۵ نمره})} \begin{cases} p=\frac{۲}{۳} & \text{غ‌ق‌ق} \quad (\text{۰٫۲۵ نمره}) \\ p=\frac{-۱}{۳} & \text{غ‌ق‌ق} \quad (\text{۰٫۲۵ نمره}) \end{cases}$$

جواب‌های به‌دست‌آمده در دامنهٔ معادله قرار دارد ولی در خود معادله صدق نمی‌کند.

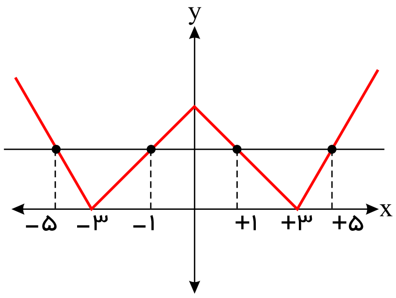
راه حل دوم:

در مرحلهٔ $۲\sqrt{۳p+۲} = ۳ -(۴+۳p)$ دوباره دامنه را تعیین می‌کنیم:

$$-۴-۳p \geq ۰ \Rightarrow p \leq -\frac{۴}{۳}$$

دامنهٔ جدید با بازهٔ $[-\frac{۲}{۳}, ۱]$ اشتراکی ندارد، پس معادله فاقد جواب است.

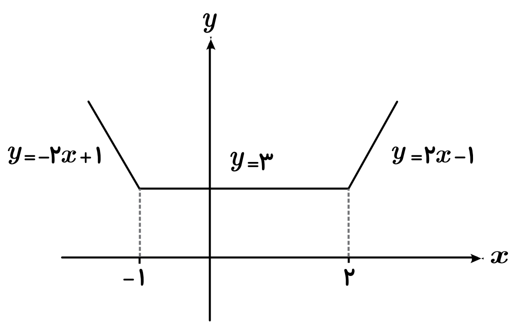
۳۴ جواب‌های معادله $x = \pm ۱$ و $x = \pm ۵$ هستند.



۳۵

تابع f یک تابع گلدانی است با توجه به اینکه هر قدرمطلق یک ریشه دارد دامنه تابع عملاً سه قسمت می‌شود و یک تابع سه‌ضابطه‌ای داریم: ابتدا یک نیم‌خط با شیب منفی ۲ داریم، سپس یک پاره‌خط ثابت داریم و در نهایت یک نیم‌خط با شیب ۲.

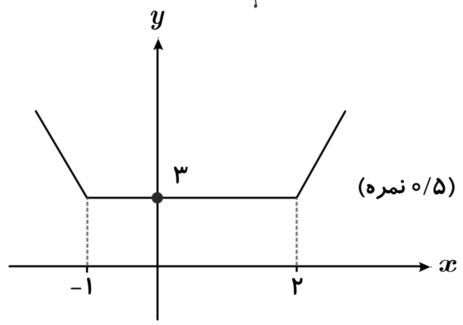
$$f(x) = |x+۱| + |x-۲| = \begin{cases} -۲x+۱ & x < -۱ \\ ۳ & -۱ \leq x \leq ۲ \\ ۲x-۱ & x > ۲ \end{cases}$$



(صفحهٔ ۲۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = |x+۱| + |x-۲| = \begin{cases} -۲x+۱ & x < -۱ & (\text{۰٫۲۵ نمره}) \\ ۳ & -۱ \leq x \leq ۲ & (\text{۰٫۲۵ نمره}) \\ ۲x-۱ & x > ۲ & (\text{۰٫۲۵ نمره}) \end{cases}$$



(۰/۵ نمره)

۳۶

$$||x|-۱|=۲ \to |x|-۱=\pm ۲ \to |x|=\pm ۲+۱ \to$$
$$\begin{cases} |x|=۳ \to x=\pm ۳ \\ |x|=-۱ \to \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

۳۷

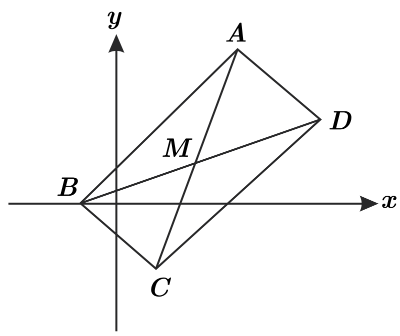
مختصات نقطه M وسط ضلع BC: $\begin{bmatrix} \frac{۱+۳}{۲}=۲ \\ \frac{۴+۰}{۲}=۲ \end{bmatrix}$

$$AM=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۴+۱}=\sqrt{۵}$$

۳۸

می‌دانیم در هر مستطیل قطرها منصف یکدیگرند، یعنی:

$$M=\frac{A+C}{۲}=\frac{B+D}{۲} \Rightarrow A+C=B+D$$
$$\Rightarrow (۲,۳)+(۱,-۲)=(-۱,۰)+(x_D,y_D) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_D=۴ \\ y_D=۱ \end{array} \right.$$
$$|OD|=\sqrt{۴^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۷}$$



(صفحهٔ ۲۹ تا ۳۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$M=\frac{A+C}{۲}=\frac{B+D}{۲} \Rightarrow A+C=B+D \Rightarrow (۲,۳)+(۱,-۲)=(-۱,۰)+(x_D,y_D) \ (\text{۰٫۲۵نمره})$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} x_D=۴ \\ y_D=۱ \end{array} \right. \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$
$$|OD|=\sqrt{۴^۲+۱^۲}=\sqrt{۱۷} \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

۳۹ نقطه‌ای که روی خط $y-۲x=۱$ قرار دارد مختصاتش به صورت $M(x,۲x+۱)$ است، بنابراین اگر $|AM|=|MB|$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sqrt{(x-(-۱))^۲+(۲x+۱-(-۱))^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+(۲x+۱-۱)^۲} \Rightarrow (x+۱)^۲+(۲x+۲)^۲=(x-۳)^۲+(۲x)^۲$$
$$x^۲+۲x+۱+۴x^۲+۸x+۴=x^۲-۶x+۹+۴x^۲ \Rightarrow ۱۰x+۵=-۶x+۹ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲} \Rightarrow M(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲})$$

(صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\sqrt{(x-(-۱))^۲+(۲x+۱-(-۱))^۲} \ (\text{۰٫۲۵نمره}) = (x+۱)^۲+(۲x+۲)^۲=(x-۳)^۲+(۲x)^۲ \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$
$$۱۰x+۵=-۶x+۹ \Rightarrow x=\frac{۱}{۴} \ (\text{۰٫۲۵نمره}) \Rightarrow y=\frac{۳}{۲} \Rightarrow M(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲}) \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

۴۰ نقاط روی خط $y=۱-۲x$ به صورت $M(x,۱-۲x)$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$|AM|=|MB| \Rightarrow \sqrt{(x+۳)^۲+(۱-۲x-۰)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+(۱-۲x-۰)^۲}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$(x+۳)^۲+(۱-۲x-۰)^۲=(x-۱)^۲+(۱-۲x-۰)^۲ \Rightarrow x^۲+۶x+۹=x^۲-۲x+۱ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow M \left| \begin{array}{l} -۱ \\ ۳ \end{array} \right.$$

(صفحهٔ ۳۰، ۳۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$|AM|=|MB| \Rightarrow \sqrt{(x+۳)^۲+(۱-۲x-۰)^۲}=\sqrt{(x-۱)^۲+(۱-۲x-۰)^۲}\text{(۰٫۵نمره)}$$

$$(x+۳)^۲+(۱-۲x-۰)^۲=(x-۱)^۲+(۱-۲x-۰)^۲ \quad \text{(۰٫۲۵نمره)} \Rightarrow x^۲+۶x+۹=x^۲-۲x+۱$$

$$\Rightarrow x=-۱ \Rightarrow M \left| \begin{matrix} -۱ \\ ۳ \end{matrix} \right. \quad \text{(۰٫۲۵نمره)}$$

۴۱ چون مثلث در رأس B قائمه است، پس دو ضلع BC, BA بر هم عمود هستند.

$$m_{BC}=\frac{-k}{k-۱} \quad , \quad m_{BA}=\frac{۲-۰}{۴-۱}=\frac{۲}{۳} \rightarrow \frac{۲}{۳}\times\frac{-k}{k-۱}=-۱$$

$$-۲k=-(۳k-۳) \rightarrow -۲k+۳k=۳ \rightarrow k=۳$$

۴۲ الف) فاصلهٔ دو خط موازی:

$$\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ ax+by+c'=۰ \end{cases} \Rightarrow h=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

(صفحهٔ ۳۵ کتاب درسی)

ب)

$$\log_{۱۰۰} ۰/۰۰۱+\log_۲ ۲\sqrt{۲}=\log_{۱۰^۲} ۱۰^{-۳}+\log_۲ ۲^{\frac{۳}{۲}}=\frac{-۳}{۲}+\frac{۳}{۲}=۰$$

(صفحهٔ ۸۵ کتاب درسی)

ج)

$$\sqrt{۱۹-۸\sqrt{۳}}=\sqrt{۱۶-۸\sqrt{۳}+۳}=\sqrt{(۴-\sqrt{۳})^۲}=|۴-\sqrt{۳}|=۴-\sqrt{۳}$$

(صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

د)

$$\lim_{x\to۳^-}[x^۳]-\left[\lim_{x\to۳^-}x^۳\right]=[۲۷^-]-[۲۷]=۲۶-۲۷=-۱$$

(صفحهٔ ۱۲۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) $\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ ب) صفر ج) $۴-\sqrt{۳}$ د) -۱

(هر مورد ۰٫۲۵ نمره)

۴۳ ابتدا مختصات وسط پاره‌خط BC را تعیین می‌کنیم:

الف)

$$M(\frac{۴+۲}{۲}=۳,\frac{۱+۵}{۲}=۳) \Rightarrow \begin{cases} A(۱,۲) \\ M(۳,۳) \end{cases} \Rightarrow |AM|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۳-۲)^۲}=\sqrt{۵}$$

ب) شیب خط BC را به دست آورده و آن را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب عمودمنصف را به دست آوریم.

$$m_{BC}=\frac{۱-۵}{۴-۲}=-۲\ ,\ M(۳,۳) \Rightarrow m_L=\frac{۱}{۲}\ ,\ M(۳,۳)$$

$$\Rightarrow L: y-۳=\frac{۱}{۲}(x-۳) \Rightarrow ۲y-۶=x-۳ \Rightarrow ۲y-x=۳$$

ج) حال اندازهٔ سه ضلع را از فرمول $|AB|=\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}$ به دست می‌آوریم:

$$|AB|=\sqrt{(۵-۲)^۲+(۲-۱)^۲}=\sqrt{۱۰}\ ,\ |AC|=\sqrt{(۴-۱)^۲+(۱-۲)^۲}=\sqrt{۱۰}\ ,$$

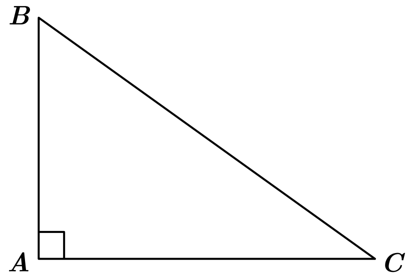
$$|BC|=\sqrt{(۴-۲)^۲+(۱-۵)^۲}=\sqrt{۲۰}$$

دو ضلع AB, AC باهم برابرند و اندازهٔ این سه ضلع در قضیه فیثاغورس صدق می‌کند.

$$(\sqrt{۲۰})^۲=(\sqrt{۱۰})^۲+(\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow BC^۲=AB^۲+AC^۲ \Rightarrow \hat{A}=۹۰^\circ$$

مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است بنابراین داریم:

$$S=\frac{|AB|\times|AC|}{۲}=\frac{\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}}{۲}=۵$$



(صفحهٔ ۳۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف)

$$M(\frac{۴+۲}{۲}=۳, \frac{۱+۵}{۲}=۳) \Rightarrow \begin{cases} A(۱,۲) \\ M(۳,۳) \end{cases} \Rightarrow |AM| = \sqrt{(۳-۱)^۲+(۳-۲)^۲} = \sqrt{۵} \quad (\text{۰٫۵نمره})$$

ب)

$$m_{BC} = \frac{۱-۵}{۴-۲} = -۲ \xrightarrow{(\text{۰٫۲۵نمره})} m_L = \frac{۱}{۲} \Rightarrow L: y-۳ = \frac{۱}{۲}(x-۳) \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

ج)

$$|AB| = \sqrt{(۵-۲)^۲+(۲-۱)^۲} = \sqrt{۱۰}\,,\ |AC| = \sqrt{(۴-۱)^۲+(۱-۲)^۲} = \sqrt{۱۰}\,,$$
$$|BC| = \sqrt{(۴-۲)^۲+(۱-۵)^۲} = \sqrt{۲۰} (\text{۰٫۵نمره})$$
$$(\sqrt{۲۰})^۲ = (\sqrt{۱۰})^۲ + (\sqrt{۱۰})^۲ \Rightarrow BC^۲ = AB^۲ + AC^۲ \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

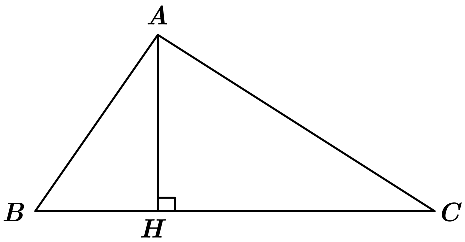
مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است بنابراین داریم:

$$S = \frac{|AB| \times |AC|}{۲} = \frac{\sqrt{۱۰}\times\sqrt{۱۰}}{۲} = ۵ \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

۴۴ اول رأس A، محل تلاقی AB, AC را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} AB:\ ۲y - x = ۳ \\ AC:\ y - ۲x = ۵ \end{cases} \Rightarrow A(\frac{-۷}{۳}, \frac{۱}{۳})$$

ارتفاع AH از رأس A بر ضلع BC عمود می‌شود. در نتیجه شیب آن عکس و قرینهٔ شیب BC است.



$$m_{BC} = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow m_{AH} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین معادلهٔ ارتفاع AH به صورت مقابل است:

$$L: y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow AH: y - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}(x - (\frac{-۷}{۳}))$$
$$y - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}x + \frac{۱۴}{۹} \xrightarrow{\times ۹} ۹y - ۳ = ۶x + ۱۴ \Rightarrow ۹y - ۶x = ۱۷$$

(صفحهٔ ۳۴, ۳۵, ۳۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} AB:\ ۲y - x = ۳ \\ AC:\ y - ۲x = ۵ \end{cases} \Rightarrow A\left|\begin{matrix} \frac{-۷}{۳} \\ \frac{۱}{۳} \end{matrix}\right. \quad (\text{۰٫۵نمره})$$

$$m_{BC} = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow m_{AH} = \frac{۲}{۳} \quad (\text{۰٫۵نمره})$$

بنابراین معادلهٔ ارتفاع AH به صورت مقابل است:

$$AH: y - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}(x - (\frac{-۷}{۳})) \quad (\text{۰٫۲۵نمره})$$

۴۵

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۴(-۲)-۳(۴)+۱۲|}{\sqrt{(۴)^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۸|}{\sqrt{۲۵}}=\frac{۸}{۵}$$

۴۶

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|۲\times ۳-۰-۱|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}\Rightarrow S=۵$$

۴۷ دو خط بر هم عمودند و نقطهٔ A روی این دو خط قرار ندارد، برای به دست آوردن طول و عرض مستطیل کافیست فاصله نقطه A را از این دو خط به دست آوریم:

$$AH=\frac{|۲\times ۱+۳\times ۳-۱|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\text{مساحت مستطیل}=\frac{۱۰}{\sqrt{۱۳}}\times\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}=\frac{۵۰}{۱۳}$$

$$AH=\frac{|۳\times ۱-۲\times ۳-۲|}{\sqrt{۲^۲+۳^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۱۳}}$$

۴۸ با توجه به اینکه نقطهٔ داده شده روی خط داده شده قرار ندارد، ابتدا فاصلهٔ این رأس را تا ضلع داده شده با استفاده از رابطهٔ فاصلهٔ نقطه از خط، حساب می‌کنیم و طول ضلع مربع را به‌دست می‌آوریم.

$$h=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Rightarrow h=\frac{|۰-۲-۲|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=\text{طول ضلع مربع}\Rightarrow S=h^۲=(\frac{۴}{\sqrt{۲}})^۲=۸$$

(صفحهٔ ۳۳ تا ۳۵ کتاب درسی)

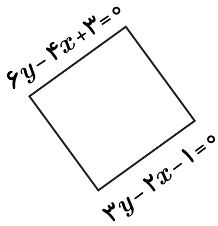
راهنمای تصحیح:

$$h=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\ (\text{۰٫۲۵ نمره})\Rightarrow h=\frac{|۰-۲-۲|}{\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}\ (\text{۰٫۲۵ نمره})\Rightarrow S=h^۲=(\frac{۴}{\sqrt{۲}})^۲=۸\ (\text{۰٫۵ نمره})$$

۴۹ فاصلهٔ دو خط موازی $\begin{cases} ax+by+c=۰ \\ ax+by+c'=۰\end{cases}$ برابر است با: $h=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$. ضرایب x, y در معادلهٔ دو خط باید باهم برابر باشند تا از فرمول بالا استفاده کنیم.

فاصلهٔ دو ضلع موازی برابر با ضلع مربع است:

$$\begin{cases} ۶y-۴x+۳=۰ \\ ۳y-۲x-۱=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۳y-۲x+\frac{۳}{۲}=۰ \\ ۳y-۲x-۱=۰\end{cases}\Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|\frac{۳}{۲}+۱|}{\sqrt{۹+۴}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۱۳}}S=d^۲=\frac{۲۵}{۵۲}$$



(صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} ۶y-۴x+۳=۰ \\ ۳y-۲x-۱=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} ۳y-۲x+\frac{۳}{۲}=۰ \\ ۳y-۲x-۱=۰\end{cases}\ (\text{۰٫۲۵ نمره})\Rightarrow d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}=\frac{|\frac{۳}{۲}+۱|}{\sqrt{۹+۴}}=\frac{۵}{۲\sqrt{۱۳}}\ (\text{۰٫۵ نمره})\Rightarrow$$

$$S=d^۲=\frac{۲۵}{۵۲}\ (\text{۰٫۲۵ نمره})$$

۵۰ نقاط روی خط $y=\frac{x-۱}{۲}$ مختصاتشان به صورت $M(x,\frac{x-۱}{۲})$ است. حال فاصلهٔ این نقاط از $۳x+۴y-۳=۰$ را حساب کرده و برابر ۴ می‌گذاریم.

$$h=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Rightarrow h=\frac{|۳x+۴(\frac{x-۱}{۲})-۳|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۴\Rightarrow|۵x-۵|=۲۰\Rightarrow|x-۱|=۴\Rightarrow\left|\begin{array}{l} x=-۳ \\ x=۵\end{array}\right.$$

معادله دو جواب دارد بنابراین دو نقطه روی $x-۲y=۱$ خط اول وجود دارد که فاصلهٔ آنها از خط $۳x+۴y-۳=۰$ برابر ۴ است.

کافی است طول نقاط به‌دست‌آمده را در معادلهٔ خط $y=\frac{x-۱}{۲}$ قرار دهیم و مختصات دو نقطه را به دست آوریم:

$$B(۵,۲), A(-۳,-۲)$$

(صفحهٔ ۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$h=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}\Rightarrow h=\frac{|۳x+۴(\frac{x-۱}{۲})-۳|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۴\ (\text{۰٫۵ نمره})\Rightarrow|۵x-۵|=۲۰\Rightarrow|x-۱|=۴\Rightarrow\left|\begin{array}{l} x=-۳ \\ x=۵\end{array}\right.\ (\text{۰٫۵})$$

بنابراین دو نقطه روی خط $x-۲y=۱$ وجود دارد که فاصلهٔ آنها از $۳x+۴y=۳$ برابر ۴ است.

(۰٫۲۵نمره) $B(۵,۲), A(-۳,-۲)$