



گروه آموزشی مشاوره‌های نوتروفیل



درس

حسابان یازدهم - فصل ۱

نوتروپیست





نوترفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوترفیل

رتبه ۸
ایمان نیکانام جهرمی

دور رتبه های نوترفیل

رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴
امیرمحمد کیانی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رتبه و چهار رتبه های نوترفیل

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصران

رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمدصالح زارعی

رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷
صفورا بقاءئی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴
هللیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱
محمدرضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵
زهرا جمعی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴
هللیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی

فصل ۱: جبر و معادله

□ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی:

سوال ۱ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = n(7n - 3)$ به دست می‌آید. مجموع جملات دهم و یازدهم این دنباله کدام است؟

حل: مجموع جملات دهم و یازدهم برابر است با: $S_{11} - S_9$

$$\left. \begin{array}{l} S_{11} = 11(7(11) - 3) = 11 \times 74 = 814 \\ S_9 = 9(7(9) - 3) = 9 \times 60 = 540 \end{array} \right\} S_{11} - S_9 = 814 - 540 = 274$$

سوال ۲ در یک دنباله‌ی حسابی مجموع ۵ جمله‌ی اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله‌ی آخر ۲۱۵ و مجموع همه‌ی جملات ۳۵۱ است. جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

حل: $t_1 + \underbrace{(t_1 + d)}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \underbrace{(t_1 + 2d)}_{\text{جمله‌ی سوم}} + \underbrace{(t_1 + 3d)}_{\text{جمله‌ی چهارم}} + \underbrace{(t_1 + 4d)}_{\text{جمله‌ی پنجم}} = 55$: مجموع ۵ جمله‌ی اول

مجموع ۵ جمله‌ی آخر: $t_n + \underbrace{(t_n - d)}_{\text{دو جمله‌ی آخر}} + (t_n - 2d) + (t_n - 3d) + \underbrace{(t_1 + 4d)}_{\text{پنج جمله‌ی آخر}} = 215$

دو معادله را با هم جمع می‌کنیم (d ها (قدرنسبت‌ها) از هم کم شوند از بین می‌روند)

$$(t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) = 270$$

$$\Rightarrow 5(t_1 + t_n) = 270 \Rightarrow \boxed{t_1 + t_n = 54}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1 + t_n] \xrightarrow[S_n=351]{\text{طبق گفته‌ی سؤال}} 351 = \frac{n}{2}[54] \Rightarrow \boxed{n = 13}$$

$$\begin{cases} S_5 = 55 \Rightarrow \frac{5}{2}[2t_1 + 4d] = 55 \\ S_8 = 351 - 215 \Rightarrow \frac{8}{2}[2t_1 + 7d] = 136 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1 + 2d = 11 \xrightarrow{\times(-2)} \\ 2t_1 + 7d = 34 \xrightarrow{\text{خودش}} \end{cases} \begin{cases} -t_1 - 4d = -22 \\ 2t_1 + 7d = 34 \end{cases} \rightarrow 3d = 12 \rightarrow \boxed{d = 4}, \boxed{t_1 = 3}$$



وقتی که جمله‌ی اول رو از ما می‌خواهند باید با پیدا کردن تمامی مجهولات ابتدا از n سپس به d و بعد t را پیدا

نکنه

کنیم.

سوال ۳ اگر مجموع n جمله‌ی نخست از یک دنباله‌ی هندسی به صورت $S_n = 3(1 - 2^n)$ باشد، قدرنسبت این دنباله را

به دست آورید.

$$S_n = a_1 + a_2 \xrightarrow{n=2} a_1 + a_2 = 3 \underbrace{(1 - 2^{-2})}_{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

$$S_1 = a_1 \xrightarrow{n=1} a_1 = 3 \underbrace{(1 - 2^{-1})}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

برای پیدا کردن قدرنسبت در دنباله‌های هندسی کفایت متوجه شویم هر جمله به ازای چه مقدار جمله‌ی بعد

نکنه

آن به دست می‌آید.

$$a_1 + a_2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{a_1 = \frac{3}{2}} \frac{3}{2} + a_2 = \frac{9}{4} \rightarrow \boxed{a_2 = \frac{3}{4}} \rightarrow \text{قدرنسبت } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$$

یعنی تصاعد به ازای ضرب در $\frac{1}{2}$ جملات بعدی آن به دست می‌آید.

سوال ۴ در یک دنباله‌ی هندسی که جملات آن یکی در میان منفی است، جمله‌ی سوم برابر 5 و جمله‌ی هفتم برابر 80 است،

مجموع شش جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

$$\text{حل: } \frac{t_7}{t_3} = \frac{t_1 q^6}{t_1 q^2} = q^4$$

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{80}{5} = q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \rightarrow \boxed{q = \pm 2} \xrightarrow[\text{پس قابل قبوله}]{\text{جملات یکی در میان منفی}} \boxed{q = -2}$$

$$\frac{t_3}{t_1} = q^2 \Rightarrow \frac{5}{t_1} = 4 \rightarrow \boxed{t_1 = \frac{5}{4}} \rightarrow S_6 = \frac{5}{4} \frac{(63)}{-3} = \frac{-105}{4}$$

وقتی که می‌گه جملات یکی در میان منفی است پس قدرنسبت حتماً یک عدد منفی است از طریق جملات سوم و هفتم قدرنسبت را حساب می‌کنیم و سپس از طریق مجموع جملات S_6 را محاسبه می‌کنیم.

نکته

سوال ۵ اگر مجموع جملات پنجم، دهم، بیستم یک دنباله‌ی حسابی با جملات متمایز به ترتیب جملات اول تا سوم یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی پنجم 16 باشند، مجموع 10 جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟

حل: فرض کنیم جمله‌ی پنجم a_5 و جمله‌ی دهم a_{10} و جمله‌ی بیستم a_{20} ؛ یعنی a_5 و a_{10} و a_{20} این جملات قراره جملات اول تا سوم دنباله‌ی هندسی باشند. طبق مفهوم به حل می‌پردازیم:

a, b, c

$$b^2 = ac \quad a_{10}^2 = a_5 \times a_{20}$$

$$(a_1 + 9d)^2 = (a_1 + 4d)(a_1 + 19d)$$

$$a_1^2 + 18a_1d + 81d^2 = a_1^2 + 23a_1d + 76d^2 \rightarrow \boxed{5a_1d = 5d^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} d = 0 \rightarrow \text{غقق} \\ d = a_1 \end{cases}$$

$$a_5 = a_1 + 4d \xrightarrow{a_1=d} \boxed{a_5 = 5d} \rightarrow \boxed{a_{10} = 10d} \rightarrow \boxed{a_{20} = 20d}$$

سه جمله‌ی اول یک دنباله هندسی‌اند.

$$t_5 = t_1 q^4 \Rightarrow 16 = t_1 \times (2)^4 \rightarrow \boxed{t_1 = 1}$$

$$S_n = \frac{t_1(1 - q^n)}{1 - q} \rightarrow S_{10} = \frac{1 \times (1 - 2^{10})}{1 - 2} = 1023$$

توضیح: ابتدا باید ارتباط بین جملات را به دست می‌آوردیم و سپس با پیدا کردن جمله‌ی اول مجموع جملات را حساب می‌کردیم.

سوال ۶ در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول 136 و مجموع شش جمله‌ی اول آن 153 است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟



حل: خب طبق اینکه در هر دنباله‌ی هندسی $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ بنابراین:

$$\begin{cases} S_3 = 136 \\ S_6 = 153 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S_3 = a_1 \times \frac{1-q^3}{1-q} = 136 \\ S_6 = a_1 \times \frac{1-q^6}{1-q} = 153 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{S_6} = \frac{136}{153}$$

$$\rightarrow \frac{S_3}{S_6} = \frac{1-q^3}{1-q^6} = \frac{1-q^3}{(1-q^3)(1+q^3)} = \frac{8}{9} \rightarrow \frac{1}{1+q^3} = \frac{8}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته‌ی سؤال}} \frac{a_1}{a_5} = \frac{a_1}{a_1 q^4} = \frac{1}{q^4} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = 16 \quad q^3 = \frac{1}{8} \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

معادلات درجه دوم

سوال ۷ اگر جواب معادله‌ی $x^2 + bx + c = 0$ از مربع جـواب‌های معادله‌ی

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \text{یک واحد بیشتر باشند، } b \text{ کدام است؟}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = -b \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} = c \end{cases}$$

حل:

$$x^2 + 6x + 1 = 0 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = -6 \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

جواب‌های معادله $x^2 + bx + c = 0$ را x_1 و x_2 و جواب‌های معادله $x^2 + 6x + 1 = 0$ را α, β

نکته

در نظر می‌گیریم.

چون گفته مربع معادله اول یک واحد بیشتر است داریم:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha^2 + 1 \\ x_2 = \beta^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + 2 = 36 \\ \Rightarrow x_1 + x_2 = 36 = -b \Rightarrow \boxed{b = -36} \end{cases}$$

سوال ۸ اگر α و β جواب‌های معادله درجه دوم $3x^2 + x - 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{3\alpha^2 + \alpha - 5}{6\beta^2 + 2\beta - 4}$ کدام است؟

حل: چون که α و β صفرهای معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند. بنابراین داریم:

$$3\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را با } (-4) \text{ جمع می‌کنیم}} 3\alpha^2 + \alpha - 1 - 4 = -4$$

$$\boxed{\rightarrow 3\alpha^2 + \alpha - 5 = -4}$$

از معادله داده شده به کمک α و β صورت و مخرج کسر را می‌سازیم.

$$3\beta^2 + \beta - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله } (2) \times} 6\beta^2 + 2\beta - 2 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را با } (-2) \text{ جمع می‌کنیم}}$$

$$6\beta^2 + 2\beta - 2 - 2 = -2 \rightarrow 6\beta^2 + 2\beta - 4 = -2 \xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} \frac{3\alpha^2 + \alpha - 5}{6\beta^2 + 2\beta - 4}$$

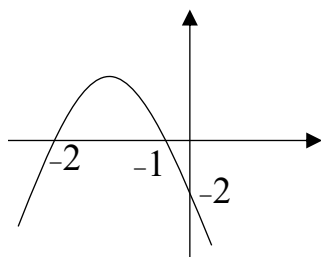
$$= \frac{-4}{-2} = 2$$

سوال ۹ نمودار $y = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل است. مقدار $a - 2b + c$ کدام است؟

در واقع نقاط عرض از مبدأ را برای به دست آوردن a به ما داده که بتوانیم بفهمیم سهمی روبه بالاست یا پایین.

حل: صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -1$ و $x = -2$

-2 پس می‌توان معادله را به این صورت دید:



$$y = a(x + 1)(x + 2)$$

همچنین تابع از نقاط $(0, -2)$ می‌گذرد. پس این مختصات در تابع صدق می‌کند، یعنی: $y = a(x + 1)(x + 2)$

$$2) \xrightarrow{\substack{y=-2 \\ x=0}} a(0 + 1)(0 + 2) = -2 \rightarrow \boxed{a = -1}$$

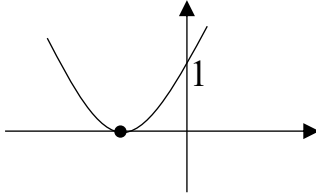
$$\rightarrow y = -(x + 1)(x + 2) = -x^2 - 3x - 2 \rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} a - 2b + c = -1 - 2(-3) + (-2) = -1 + 6 - 2 = 3$$



سوال ۱۰ اگر نمودار سهمی $f(x) = 2x^2 + ax + b - 1$ به صورت مقابل باشد، حاصل $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

حل: ۱) طبق نمودار، سهمی از نقطه‌ی $(0, 1)$ می‌گذرد. پس داریم:



$$1 = 2(0)^2 + a(0) + b - 1 \rightarrow \boxed{b = 2}$$

۲) طبق نمودار سهمی، معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد. پس $\Delta = 0$ است و داریم:

$$\xrightarrow{\Delta=0} a^2 - 8 = 0 \rightarrow a = \pm 2\sqrt{2}$$

۳) از طرفی چون که طول رأس سهمی منفی است پس $-\frac{a}{4} < 0$ و داریم $a > 0$ و در نتیجه $a = \pm 2\sqrt{2}$

$$f(x) = 2x^2 + 2\sqrt{2} + 1 \xrightarrow{f(\sqrt{2})} 4 + 4 + 1 = 9$$

سوال ۱۱ اگر حاصل ضرب ریشه‌های معادله $(m-1)x^2 + 6x + 4 = m$ برابر ۲ باشد، آنگاه مجموع مربعات این ریشه‌ها را به دست آورید.

خود سؤال گفته حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ آن را حساب می‌کنیم تا m به دست آید.

$$\text{حل: } (m-1)x^2 + 6x + 4 - m = 0 \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{c}{a}} \frac{4-m}{m-1} = 2$$

$$\rightarrow 4 - m = 2m - 2 \Rightarrow 3m - 6 = 0 \rightarrow \boxed{m = 2}$$

با قرار دادن m معادله به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 8 > 0 \rightarrow 28 > 0 \rightarrow \text{پس دو ریشه داریم}$$

مجموع مربعات ریشه‌ها یعنی اگر α و β ریشه باشند توان ۲ باشند و جمع شده یعنی:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P \quad \begin{matrix} S = -\frac{b}{a} = -6 \\ P = \frac{c}{a} = 2 \end{matrix} \quad 36 - 4 = 32$$

سوال ۱۲ ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 + ax + b = 0$ قرینه و معکوس ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ هستند. حاصل $a + b$ کدام است؟

حل: α و β را ریشه‌های معادله $x^2 - 2x - 2 = 0$ فرض کنیم.

در این صورت ریشه‌های معادله $2x^2 + ax + b = 0$ باید قرینه و معکوس α و β شود، یعنی به صورت: $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ پس داریم:

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 2 \\ P = \alpha\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow S' = -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = -\left(\frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}\right) = -\left(\frac{2}{-2}\right) = 1$$

$$P' = \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \rightarrow x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow$$

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = 0 \xrightarrow{\times(2)} 2x^2 - 2x - 1 = 0 \rightarrow a + b = -2 - 1 = -3$$

□ معادلات گویا و گنگ

سوال ۱۳ مجموعه جواب‌های معادله $3x - 2x^2 = \sqrt{6x - 4x^2 - 1}$ کدام است؟

برای حل معادلات گنگ باید رادیکال را یک طرف معادله قرار دهیم و بقیه عبارت را سمت دیگر و با به توان رساندن رادیکال آن را از بین ببریم.

برای حل معادلات گویا ابتدا باید سعی کنیم مخرج کسرها را از بین

می‌توان

$3x - 2x^2$ را به t تبدیل کرد. در عبارت زیر رادیکال اگر از 2 فاکتور بگیریم همان $3x - 2x^2$ داریم:

$$3x - 2x^2 = \sqrt{2(3x - 2x^2) - 1} \xrightarrow{3x-2x^2=t} t = \sqrt{2t - 1} \xrightarrow{2} t^2 = 2t - 1$$

$$\rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \rightarrow (t - 1)^2 = 0 \rightarrow t = 1 \xrightarrow{t=3x-2x^2} 3x - 2x^2 = 1$$

$$3x - 2x^2 - 1 = 0 \xrightarrow{\times(-1)} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow (x - 1)(2x - 1) = 0$$

$$\rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{مجموع جواب‌ها} : 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



سوال ۱۴ حاصل ضرب ریشه‌های معادله $\sqrt{36x^2 - 24x + 4} = 2x + 4$ کدام است؟

حل:

$$\sqrt{36x^2 - 24x + 4} = 2x + 4 \rightarrow \sqrt{4 \frac{(9x^2 - 6x + 1)}{(3x-1)^2}} = 2x + 4$$

$$\rightarrow -2\sqrt{(3x-1)^2} = 2(x+2) \rightarrow |3x-1| = x+2 \xrightarrow[u=\pm a]{|u|=a}$$

$$\begin{cases} 3x-1 = x+2 \\ 3x-1 = -(x+2) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 4x = -1 \rightarrow x = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{8}$$

سوال ۱۵ مجموع جواب‌های معادله $x = \sqrt{3x-2}$ کدام است؟

حل:

$$x = \sqrt{3x-2} \xrightarrow{\text{توان 2}} x^2 = 3x-2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ مجموع جواب‌ها } 1+2 = 3$$

سوال ۱۶ تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+4x+3} = 0$ کدام است؟

$$x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \rightarrow (x+1)(x+3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

پس تنها $x = -3$ می‌تواند جواب معادله باشد.

مجموع دو عبارت رادیکالی با فرجه زوج صفر است. پس معادله زمانی جواب دارد که هر دو رادیکال هم‌زمان صفر شوند.

سوال ۱۷ اگر معادله $\frac{m-3}{x} = \frac{x-4}{x^2+3x}$ فاقد جواب حقیقی باشد m کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{m-3}{x} = \frac{x-4}{x^2+3x} \rightarrow mx^2 + 3mx - 3x^2 - 9x = x^2 - 4x$$

$$\rightarrow (m-4)x^2 + (3m-5)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{-3m+5}{m-4} \end{cases}$$

دامنه معادلات گویا برابر $\mathbb{R} - \{0, -3\}$ است.
 {ریشه‌های مخرج}

دامنه این معادله $\mathbb{R} - \{0, -3\}$ است و از طرفی دیگر چون معادله هیچ جوابی ندارد، $x = \frac{-3m+5}{m-4}$ باید برابر با -3 یا 0 باشد.

$$\frac{-3m+5}{m-4} = -3 \rightarrow -3m+5 = -3m+12 \rightarrow \text{جواب ندارد}$$

$$\frac{-3m+5}{m-4} = 0 \rightarrow -3m+5 = 0 \rightarrow \boxed{m = \frac{5}{3}}$$

همین‌طور اگر $m-4 = 0$ باشد یعنی $m = 4$ پس معادله جواب حقیقی ندارد.

❑ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

سوال ۱۸ مجموعه جواب معادله $|2+x-x^2| + |x+2| = x^2$ با شرط $x < 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

اگر $|2+x-x^2| = a$ و $|x+2| = b$ باشد

آن‌گاه $a+b = \underbrace{x^2}_{\text{همواره مثبت}}$ در نتیجه:

$$\underbrace{|x^2-x-2|}_a + \underbrace{|x+2|}_b = \underbrace{|x^2-x-2+x+2|}_{a+b} = x^2$$

$$\xrightarrow{ab \geq 0} (x^2-x-2)(x+2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)(x+2) \geq 0$$

$$\xrightarrow{x < 1} (x+1)(x+2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq -1$$

شرط سؤال

می‌دانیم $|a| = |-a|$
 $\leftarrow |a| + |b| = |a+b|$
 این تساوی زمانی برقرار است که $ab \geq 0$

پس مجموعه جواب شامل ۲ عدد صحیح است.

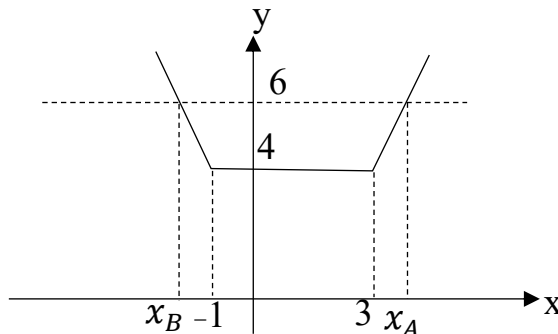


سوال ۱۹ مساحت محدود بین نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| + |x + 1|$ و

$g(x) = 6$ را بیابید.

حل: یادآوری: $|x - a| + |x - b| = k$ فرمول تابع گلدانی است.

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 + x + 1 & ; x \geq 3 \\ -x + 3 + x + 1 & ; -1 < x < 3 \\ -x + 3 - x - 1 & ; x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 3 \\ 4 & 1 < x < 3 \\ -2x + 2 & x \leq -1 \end{cases}$$



$$2x - 2 = 6 \Rightarrow x_A = 4$$

$$-2x + 2 = 6 \Rightarrow x_B = -2$$

$$S = \frac{(4 + 6) \times 2}{2} = 10$$

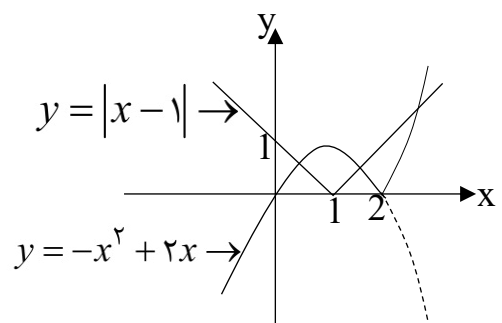
$$\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده} \\ \text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\quad}{2}$$

سوال ۲۰ معادله $|x - 2| = |x - 1|$ چند ریشه مثبت دارد؟

حل: از روش هندسی استفاده می‌کنیم (روش هندسی برای زمانی است که تعداد ریشه‌ها را از ما بخواهند می‌توانیم استفاده

کنیم.)

$$y = x|x - 2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$



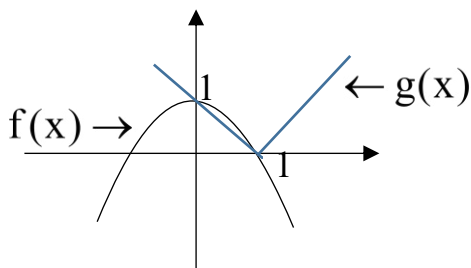
سه ریشه دارد و هر سه ریشه مثبت هستند.

چون که قدرمطلق داره تصویر قرینه همیشه بالا

سوال ۲۱ معادله $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + x^2 = 1$ چند جواب دارد.

حل: عبارت $\sqrt{x^2 - 2x + 1}$ یک عبارت مربع است.

$$\sqrt{(x-1)^2} + x^2 = 1 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2} = 1 - x^2 \rightarrow |x-1| = 1 - x^2$$



نمودار دو تابع $g(x) = |x-1|$ و $f(x) = 1 - x^2$ را

رسم می‌کنیم. (روش هندسی)

f و g در دو نقطه به طول‌های $x=1$ و $x=0$

مقاطعند پس معادله دو جواب دارد.

سوال ۲۲ فاصله‌ی دو نقطه روی محور yها از خط $y + 3x = 5$ برابر $3\sqrt{10}$ است. طول پاره‌خطی که این دو نقطه

را به هم وصل می‌کند کدام است؟

حل: طول پاره‌خط از فرمول مقابل محاسبه می‌شود: $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$

و فرمول نقطه از خط از فرمول مقابل: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ مختصات مورد نظر را به صورت $A(0, \alpha)$ در نظر

می‌گیریم کفایست فاصله‌ی این نقطه تا خط $y + 3x - 5 = 0$ را برابر $3\sqrt{10}$ قرار دهیم. بنابراین:

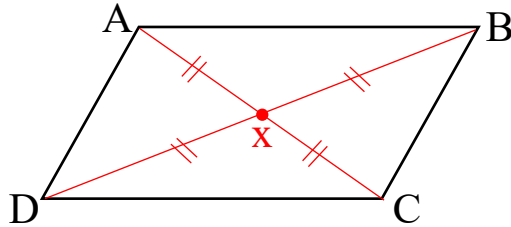
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(0) + \alpha(1) - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{|\alpha - 5|}{\sqrt{10}}$$

$$d = 3\sqrt{10} = \frac{\alpha - 5}{\sqrt{10}} \Rightarrow 30 = |\alpha - 5| \rightarrow \begin{cases} \alpha - 5 = 30 \\ \alpha - 5 = -30 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 35 \\ \alpha_2 = -25 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} A(0, 35) \\ B(0, -25) \end{matrix}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{0^2 + (35 + 25)^2} = 60$$



سوال ۲۳ اگر $C(2, -1), B(-1, 3), A(1, 2)$ باشد، مختصات نقطه‌ی D کدام باشد تا چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع باشند.



حل: قطرهای متوازی الاضلاع منصف یکدیگرند یعنی وسط پاره خط

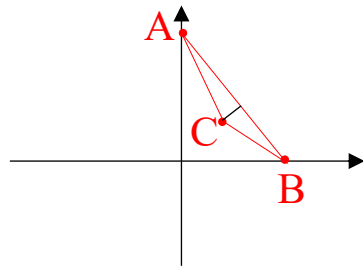
AC وسط پاره خط BD نیز هست.

$$\text{مختصات وسط پاره خط: } \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + 2 = -1 + x_D \\ 2 + (-1) = 3 + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = -2 \end{cases} \Rightarrow D(4, -2)$$

سوال ۲۴ نقاط $A(0, 3), B(2, 0), C(1, 1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

حل: ابتدا با توجه به نقاط شکل را رسم می‌کنیم.



با توجه به شکل نقاط AB را می‌یابیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی C را از آن به دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} A(0, 3) \\ B(2, 0) \end{cases} \Rightarrow \text{معادله‌ی خط } AB :$$

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{0 - 2}(x - 2) \rightarrow y = -\frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow \boxed{2y = -3x + 6}$$

فاصله‌ی رأس C را از این ضلع می‌یابیم $2y + 3x - 6 = 0$ معادله AB و $C(1, 1)$

$$CH = \frac{|2(1) + 3(1) - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$