



بیستوفیل

حسابان یازدهم
ریاضی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیکانام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴
امیرمحمد کیانی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصران

رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱
محمد رضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵
زهرا جمعی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۱

یازدهم

سال یازدهم

ریاضی

فهرست

درس اول : مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

- دنباله حسابی ۱
- دنباله هندسی ۱

درس دوم : معادلات درجه دوم

- یادآوری معادله درجه دوم و حالات مختلف ریشه های آن و مسائل کاربردی معادله درجه دوم ۱
- روابط بین ضرایب و ریشه های معادله (مسائل s و p) ۲
- تشکیل معادله درجه دوم ۲
- منحنی درجه دوم و صفر های تابع درجه دوم ۲
- روش هندسی حل معادلات ۴

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

- معادلات شامل عبارات گویا ۴
- معادلات شامل عبارات گنگ ۴

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

- رسم نمودار توابع قدر مطلق ۴
- معادلات و نامعادلات قدر مطلق ۴

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

- فاصله دو نقطه در صفحه مختصات و مختصات نقطه وسط پاره خط ۴
- خطوط موازی و عمود بر هم و وضعیت دو خط نسبت به هم ۵
- فاصله نقطه از خط و مسائل آن ۵



درس اول : مجموع جملات دنباله های

حسابی و هندسی

دنباله حسابی

- ۱ در دنباله حسابی با جمله اول ۴ و قدر نسبت ۸، حداقل چند جمله را با هم جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود؟
- ۲ مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۶ را بنویسید. (از فرمول مجموع جملات دنباله استفاده کنید).
- ۳ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.
- الف مجموع جملات دنباله حسابی ۱۹۹، ۷، ۵، ۳، ۱ برابر است.
- ب فاصله دو خط موازی $3x - 4y + 5 = 0$ و $3x + 4y + 10 = 0$ برابر است.
- ۴ مجموع چند جمله از دنباله حسابی ۱۲، ۷، x برابر ۶۰ است؟

۳ (۱)	۴ (۲)	۵ (۳)	۶ (۴)
-------	-------	-------	-------
- ۵ مجموع ۲۰ جمله اول دنباله حسابی $\frac{1}{1+\sqrt{7}}$ ، $\frac{-1}{6}$ ، $\frac{1}{1-\sqrt{7}}$ را به دست آورید.
- ۶ مجموع تمام اعداد دو رقمی مضرب ۳ را به دست آورید.
- ۷ در یک دنباله حسابی، جمله هفتم دنباله، نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله، صفر می شود؟

دنباله هندسی

- ۸ جمله ششم یک دنباله هندسی ۸۱ و حاصل ضرب پنج جمله اول دنباله ۲۴۳ است. مجموع شش جمله اول دنباله را به دست آورید.
- ۹ در یک دنباله هندسی، مجموع شش جمله اول دنباله، ۹ برابر مجموع سه جمله اول آن است. مجموع ده جمله اول این دنباله چند برابر مجموع پنج جمله اول آن است؟
- ۱۰ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت آن را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟
- ۱۱ تویی را در اختیار داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از برخورد با زمین به اندازه $\frac{1}{3}$ ارتفاع اولیه خود بالا می رود، فرض کنید این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده ایم تا به ارتفاع ۱۵ متری برسد، این توپ تا هنگام ۴مین برخورد با زمین، چه مسافتی را طی کرده است؟



درس دوم : معادلات درجه دوم

یادآوری معادله درجه دوم و حالات مختلف ریشه های آن و مسائل کاربردی معادله درجه دوم

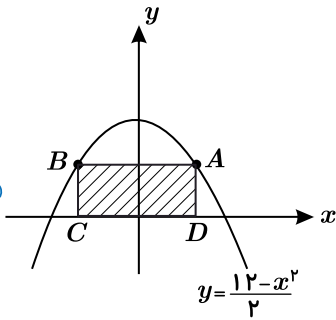
- ۱۲ درستی و نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.
 - الف) معادله خط گذرا از دو نقطه $A(-2, -2)$ و $B(-2, 2)$ یک تابع است.
 - ب) نمودار هر تابع درجه دو (با دامنه \mathbb{R})، محور عرض ها (y) را قطع می کند.
 - ج) در تابع $f: A \rightarrow B$ همواره تعداد اعضای دامنه تابع بزرگ تر یا مساوی تعداد اعضای برد تابع است.
 - د) هر دو تابع که دامنه و بردشان برابر باشند، با هم مساوی اند.





مطابق شکل روبه‌رو، نقاط B, A روی منحنی به معادله $y = \frac{12 - x^2}{3}$ قرار دارند.

مساحت مستطیل هاشور خورده $ABCD$ را برحسب متغیر x (طول نقطه A) به صورت یک تابع بنویسید.

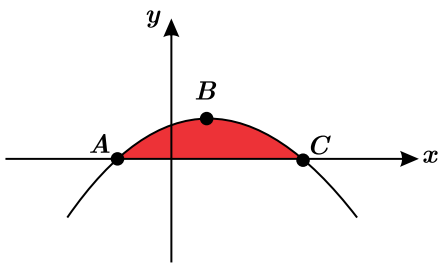


۱۴ شکل مقابل نمای جانبی عدسی محدب است که از منحنی سهمی به معادله $f(x) = -x^2 + 4x + 12$ مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط A, B, C را به دست آورید. (B ماکزیمم سهمی است.)

ب) محیط مثلث ABC را به دست آورید.

ج) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد، بیشترین ضخامت عدسی را به دست آورید.



روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادله (مسائل p و s)

۱۵ α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ هستند. اگر $\beta > \alpha$ ، حاصل عبارت $A = 4\beta^2 + 2\alpha^2$ را به دست آورید.

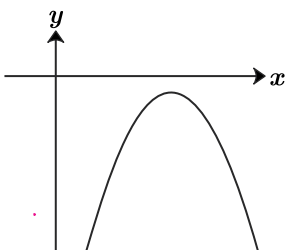
۱۶ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشد حاصل $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را به دست آورید.

تشکیل معادله درجه دوم

۱۷ معادله $-2x^2 + x + 5 = 0$ مفروض است معادله‌ای بنویسید که ریشه‌هایش از دو برابر ریشه‌های معادله مفروض یک واحد کمتر باشد.

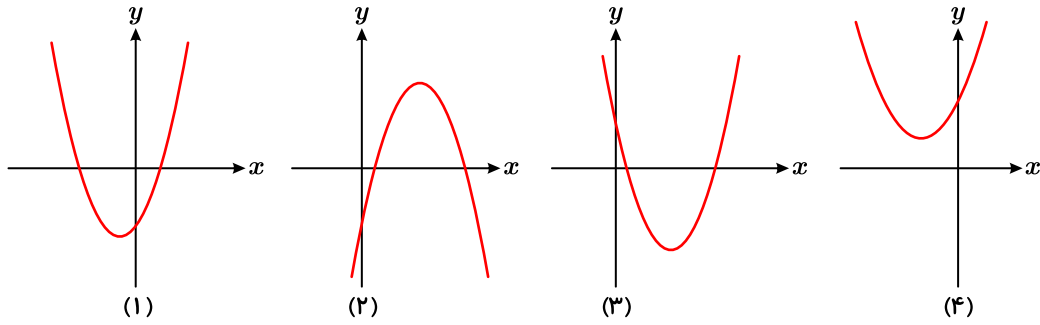
منحنی درجه دوم و صفرهای تابع درجه دوم

۱۸ شکل روبه‌رو نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می‌باشد، علامت ضرایب b و c را تعیین کنید.

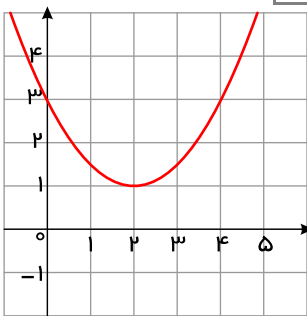




۱۹ با توجه به تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های جدول زیر را مشخص کنید.



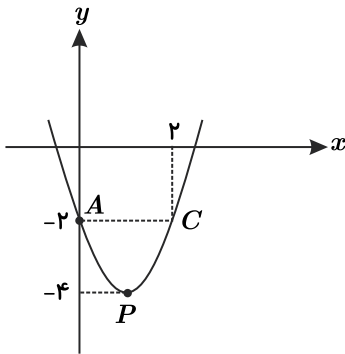
ویژگی	شماره نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است
دارای مینیمم است و ریشه ندارد
علامت c منفی است



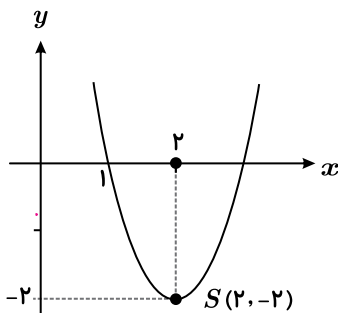
۲۰ در شکل زیر نمودار سهمی $p(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به دست آورید و ضابطه تابع را مشخص کنید.

۲۱ مقدار m را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + mx^2 - x - 2$ برابر -1 باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به دست آورید.

۲۲ نمودار تابع درجه دوم $y = f(x)$ شکل مقابل است. اگر α و β ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2\beta + \beta^2\alpha$ را به دست آورید.



۲۳ معادله سهمی شکل مقابل را بنویسید.



۲۴ مقدار m را طوری بیابید که یکی از صفرهای $f(x) = x^3 + (m-1)x^2 - x - 3$ برابر با $x = -3$ باشد. سپس سایر صفرهای آن را تعیین کنید.



روش هندسی حل معادلات

۲۵ معادله $\sqrt{x+1} - x^2 = 2x + 1$ را به روش هندسی حل کرده و جواب آن را در صورت وجود به دست آورید.

درس سوم : معادلات گویا و گنگ

معادلات شامل عبارات گویا

۲۶ اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت، چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، ماشین سریع‌تر در چند ساعت می‌تواند کار را به‌تنهایی انجام دهد؟

۲۷ اگر دو نقاش ساختمان با هم کار کنند نقاشی یک خانه را در ۶ ساعت انجام می‌دهند. اگر کارگر اول به‌تنهایی کار کند ۵ ساعت زودتر از کارگر دوم کار را تمام می‌کند. مشخص کنید هر کدام به‌تنهایی در چند ساعت کار را تمام می‌کنند.

۲۸ طول خط یک متروی تهران ۶۰ کیلومتر است. برای انجام آزمایشی، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر بدانیم در مسیر جنوب به شمال سرعت قطار ۱۵ کیلومتر بر ساعت کمتر از سرعت آن در مسیر رفت و همچنین زمان بازگشت ۴۰ دقیقه طولانی‌تر از زمان رفت باشد، مجموع طول زمان رفت و برگشت این قطار چند ساعت است؟

معادلات شامل عبارات گنگ

۲۹ معادله $\sqrt{x+1} = x - 5$ را حل کنید.

۳۰ معادله $\sqrt{1+x} = x - 3$ را حل کنید.

۳۱ معادله زیر را به روش جبری حل کنید.

$$1 + \sqrt{x+2} = x - 3$$

۳۲ جواب‌های معادله $x(\sqrt{x} - 4) = x - 16$ را تعیین کنید.

۳۳ معادله رادیکالی $\sqrt{3-3p} = 3 + \sqrt{3p+2}$ را حل کنید.

درس چهارم : قدر مطلق و ویژگی های آن

رسم نمودار توابع قدر مطلق

۳۴ نمودار تابع $f(x) = ||x| - 3|$ را رسم کنید و به‌کمک آن معادله $f(x) = 2$ را حل کنید.

۳۵ تابع $f(x) = |x+1| + |x-2|$ را بدون استفاده از قدرمطلق به صورت چندضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

معادلات و نامعادلات قدر مطلق

۳۶ معادله قدرمطلق $||x| - 1| = 2$ را به روش جبری حل کنید.

درس پنجم : آشنایی با هندسه تحلیلی

فاصله دو نقطه در صفحه مختصات و مختصات نقطه وسط پاره خط

۳۷ نقاط $A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $C \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC هستند. طول میانه AM را بیابید.



۳۸ نقاط $A(2, 3), B(-1, 0), C(1, -2)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را به دست آورده و فاصله آن رأس را تا مبدا مختصات تعیین کنید.

۳۹ مختصات نقطه‌ای روی خط $y - 2x = 1$ را به دست آورید که از دو نقطه $A \left| \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \right|$, $B \left| \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \right|$ به یک فاصله باشد.

۴۰ نقطه‌ای روی خط $y + 2x - 1 = 0$ بیابید که از دو نقطه $A(-3, 0), B(1, 0)$ به یک فاصله باشد.

خطوط موازی و عمود بر هم و وضعیت دو خط نسبت به هم

۴۱ نقاط $C \left[\begin{matrix} k \\ -k \end{matrix} \right], B \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right], A \left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right]$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر مثلث در رأس B قائمه باشد، مقدار k را بیابید.

۴۲ جاهای خالی را با عبارتهای مناسب کامل کنید.

الف) فاصله دو خط به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با

ب) حاصل $\log_{10} 2\sqrt{2} + \log_{10} 100$ برابر است با

ج) حاصل $\sqrt{19 - 8\sqrt{3}}$ برابر است با

د) حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^-} [x^3] - \left[\lim_{x \rightarrow 3^-} x^3 \right]$ برابر است با

۴۳ مثلث با راس‌های $A(1, 2), B(2, 5), C(4, 1)$ مفروض است.

الف) طول میانه AM را بیابید.

ب) معادله عمودمنصف پاره خط BC را بیابید.

ج) مساحت مثلث ABC را به دست آورید.

۴۴ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB : y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, AC : y = 2x + 5, BC : y + \frac{3}{4}x = 3$ می‌باشند. معادله ارتفاع AH را

بیابید.

فاصله نقطه از خط و مسائل آن

۴۵ فاصله نقطه $A(-2, 4)$ از خط $4x - 3y + 12 = 0$ را به کمک فرمول فاصله نقطه از خط به دست آورید.

۴۶ یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.

۴۷ دو خط $3x - 2y = 2$ و $2x + 3y = 1$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطه $A(1, 3)$ یک رأس مستطیل است. مساحت این

مستطیل چقدر است؟

۴۸ یکی از اضلاع مربعی بر خط $y - x - 2 = 0$ واقع است. اگر یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را محاسبه کنید.

۴۹ معادله دو ضلع مربعی به صورت $3y - 2x - 1 = 0, 6y - 4x + 3 = 0$ است، مساحت مربع را به دست آورید.

۵۰ چند نقطه روی خط $x - 2y = 1$ وجود دارند که فاصله آنها از خط $3x + 4y = 3$ برابر ۴ باشد؟ مختصات آن نقاط را به دست آورید.





پاسخنامه تشریحی

$$S_n > 400 \rightarrow \frac{n}{2}[2 \times 4 + (n-1) \times 8] > 400 \rightarrow \frac{n}{2}(8 + 8n - 8) > 400$$

$$\frac{n}{2}(8n) > 400 \rightarrow 4n^2 > 400 \rightarrow n^2 > 100 \rightarrow n > 10$$

۲

دنباله حسابی $12, 18, \dots, 96 \rightarrow d = 6$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{96 - 12}{6} + 1 = 15 \quad \text{یا} \quad a_n = a_1 + (n-1)d \rightarrow 96 = 12 + 6(n-1)$$

$$\rightarrow \frac{84}{6} = n - 1 \rightarrow n - 1 = 14 \rightarrow n = 15$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{15}{2}(12 + 96) = \frac{15}{2}(108) = 810$$

$$\text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{15}{2}[2(12) + 6(15-1)] = \frac{15}{2}(108) = 810$$

۱۰۰۰۰

۳

$$a_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{3}}, \quad a_2 = \frac{-1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$2d = a_2 - a_1 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{-6}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}\left(2\left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}}\right) + 19\left(\frac{\sqrt{3}}{-6}\right)\right)$$

$$= 10\left(\frac{2(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} + 19\left(\frac{\sqrt{3}}{-6}\right)\right) = 10\left(\frac{2 + 19\sqrt{3}}{-6}\right) = \frac{-5}{3}(2 + 19\sqrt{3})$$

(صفحه ۳ و ۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$a_1 = \frac{1}{1 + \sqrt{3}}, \quad a_2 = \frac{-1}{6}, \quad a_3 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 2d = a_2 - a_1 = \frac{1}{1 - \sqrt{3}} - \frac{1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}}{1 - 3} \Rightarrow d = \frac{\sqrt{3}}{-6} \quad (\text{نمره } 25)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \quad (\text{نمره } 25) \Rightarrow S_{20} = \frac{20}{2}\left(2\left(\frac{1}{1 + \sqrt{3}}\right) + 19\left(\frac{\sqrt{3}}{-6}\right)\right) \quad (\text{نمره } 25)$$

$$= 10\left(\frac{2(1 - \sqrt{3})}{1 - 3} + 19\left(\frac{\sqrt{3}}{-6}\right)\right) = 10\left(\frac{2 + 19\sqrt{3}}{-6}\right) = \frac{-5}{3}(2 + 19\sqrt{3}) \quad (\text{نمره } 25)$$

دنباله: $12, 15, \dots, 99$

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ 99 = 12 + (n-1)3 \end{cases} \Rightarrow n - 1 = \frac{99 - 12}{3} = 29 \Rightarrow n = 30$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}(12 + 99) = 1665$$

(صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

دنباله (نمره ۲۵): ۱۲, ۱۵, , ۹۹

$$\begin{cases} a_1 = 12 \\ d = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d \\ 99 = 12 + (n-1)3 \end{cases} \quad (\text{نمره ۲۵}) \Rightarrow n-1 = \frac{99-12}{3} = 29 \Rightarrow n = 30 \quad (\text{نمره ۲۵})$$

$$\Rightarrow S_{30} = \frac{30}{2}(12+99) = 1665 \quad (\text{نمره ۲۵})$$

۷ دنباله حسابی دنباله‌ای از اعداد است، که تفاضل هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی باشد.

$$\begin{aligned} a_1 \\ a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

d قدرنسبت دنباله حسابی است ($d \neq 0$) این دنباله را می‌توان به صورت بازگشتی $a_{n+1} = a_n + d$ هم نوشت.

مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + (a_1 + (n-1)d)) = S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

اول روابط داده شده را به زبان ریاضی می‌نویسیم.

$$a_2 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 + 2d = \frac{1}{2}(a_1 + 3d) \Rightarrow 2a_1 + 4d = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 + d = 0 \Rightarrow a_1 = -1 \cdot d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(-2d + (n-1)d) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}((n-2)d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ d = 0 \\ n = 21 \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

(صفحه ۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$a_2 = \frac{1}{2}a_3 \Rightarrow a_1 + 2d = \frac{1}{2}(a_1 + 3d) \Rightarrow 2a_1 + 4d = a_1 + 3d \Rightarrow a_1 + d = 0 \Rightarrow \underbrace{a_1 = -1 \cdot d}_{(\text{نمره ۲۵})}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}(-2d + (n-1)d) = 0 \Rightarrow \frac{n}{2}((n-2)d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ d = 0 \\ n = 21 \text{ قابل قبول} \end{cases} \quad (\text{نمره ۲۵})$$

۸ اول داده‌های مسئله را به زبان ریاضی می‌نویسیم. سپس جمله اول و قدرنسبت را به دست آورده و فرمول مجموع n جمله دنباله هندسی را می‌نویسیم و جایگذاری می‌کنیم.

$$a_6 = a_1 q^5 \quad (1), \quad a_1 \times a_2 \times \dots \times a_6 = 243 \Rightarrow a_1(a_1 q)(a_1 q^2)(a_1 q^3)(a_1 q^4)(a_1 q^5) = 243$$

$$\Rightarrow a_1^6 q^{15} = 243 \Rightarrow (a_1 q^3)^6 = 3^5 \Rightarrow a_1 q^3 = 3 \quad (2) \xrightarrow{(1),(2)} \frac{a_1 q^5}{a_1 q^3} = q^2 = \frac{11}{3} = 27 \Rightarrow q = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{\frac{1}{3}(1-3^6)}{1-3} = \frac{\frac{1}{3}(1-729)}{-2} = \frac{364}{3}$$

راهنمای تصحیح:

$$a_6 = a_1 q^5 \quad (1), \quad a_1 \times a_2 \times \dots \times a_6 = 243 \quad (\text{نمره ۲۵}) \Rightarrow a_1(a_1 q)(a_1 q^2)(a_1 q^3)(a_1 q^4)(a_1 q^5) = 243$$

$$\Rightarrow a_1^6 q^{15} = 243 \Rightarrow (a_1 q^3)^6 = 3^5 \quad (\text{نمره ۲۵}) \Rightarrow a_1 q^3 = 3 \quad (2) \xrightarrow{(1),(2)} \frac{a_1 q^5}{a_1 q^3} = q^2 = \frac{11}{3} = 27 \quad (\text{نمره ۲۵})$$

$$\Rightarrow q = 3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_6 = \frac{\frac{1}{3}(1-3^6)}{1-3} = \frac{\frac{1}{3}(1-729)}{-2} = \frac{364}{3} \quad (\text{نمره ۲۵})$$

$$\frac{S_6}{S_3} = 1 + q^3 = 9 \Rightarrow q = 2 \Rightarrow \frac{S_{10}}{S_5} = 1 + q^5 = 33$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8} \quad S_n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{99}{100}$$

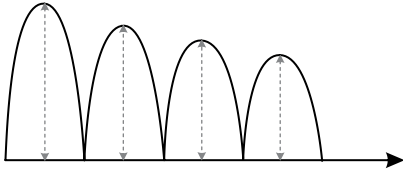
$$\Rightarrow 1 - (\frac{1}{2})^n \geq \frac{99}{100} \Rightarrow \frac{1}{100} \geq (\frac{1}{2})^n \Rightarrow 2^n \geq 100 \Rightarrow n = 7$$

۱۱ (۱) فرمول مجموع را حتماً بنویسید.



۲) قدرنسبت و جمله اول دنباله را تعیین کنید.

۳) اگر قدرنسبت q بود، در فرمول $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ جایگذاری کنید و جواب نهایی را به دست آورید.



مسیرهای رفت و برگشت توپ:

$$B_1 = 30, B_2 = \frac{30}{3}, B_3 = \frac{30}{9}, \dots, B_n = \frac{30}{3^{n-1}}, \dots$$

$$a_1 = 30, q = \frac{1}{3}, S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{30(1-(\frac{1}{3})^\infty)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{30}{\frac{2}{3}} = 45$$

(صفحه ۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

مسیرهای رفت و برگشت توپ:

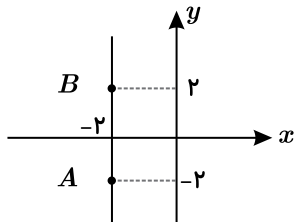
$$B_1 = 30, B_2 = \frac{30}{3}, B_3 = \frac{30}{9}, \dots, B_n = \frac{30}{3^{n-1}}, \dots$$

(نمره ۵)

$$a_1 = 30, q = \frac{1}{3}, S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_\infty = \frac{30(1-(\frac{1}{3})^\infty)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{30}{\frac{2}{3}} = 45 \quad (\text{نمره ۲۵})$$

(نمره ۵)

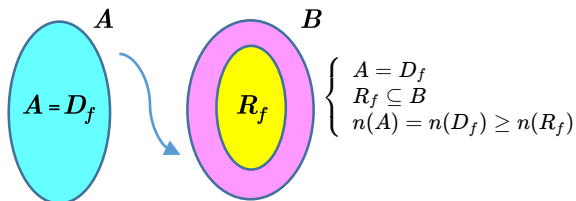
۱۲ الف) نادرست: زیرا نقاط A, B روی خطی قائم به معادله $x = -2$ قرار دارند. این خط یک تابع نیست. چون بی‌شمار نقطه با طول $x = -2$ و عرض‌های حقیقی روی این خط قرار دارند.



ب) درست: زیرا هر سهمی با معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نقطه $M(0, c)$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c$$

ج) درست: زیرا در تابع $f: A \rightarrow B$ همواره داریم:



د) نادرست: برای تساوی دو تابع، دامنه توابع باید با هم برابر باشند. (شرط لازم) و علاوه بر آن باید داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

بنابراین در دو تابع مساوی، دامنه و برد آنها یکسان است ولی عکس این مطلب صحیح نیست یعنی ممکن است دامنه و برد دو تابع یکسان باشند ولی دو تابع برابر نباشند، مانند:

$$\begin{cases} f = \{(2, 4), (3, 5), (1, 7)\} \\ g = \{(2, 5), (3, 7), (1, 4)\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = \{1, 2, 3\}, R_f = R_g = \{4, 5, 7\}$$

توابع f, g برابر نیستند.

(صفحه ۳۹، ۳۸، ۴۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) نادرست (۲۵، نمره)

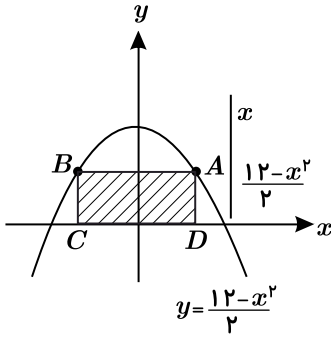
ب) درست (۲۵، نمره)

ج) درست (۲۵، نمره)

د) نادرست (۲۵، نمره)

۱۳

مطابق شکل مساحت مستطیل، حاصل ضرب طول در عرض مستطیل است.



نقطه A روی تابع f قرار دارد، پس مختصات آن به صورت $A(x, \frac{12-x^2}{2})$ است.

دو نقطه A, D ، هم طول اند. از آنجایی که تابع نسبت به محور y متقارن است، نیز قرینه D است. پس:

$$\text{طول مستطیل} = |x_D - x_C| = |x - (-x)| = 2x \quad \text{عرض مستطیل} = |AD| = y_A = \frac{12-x^2}{2}$$

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} = (2x) \times (y) = 2x \frac{(12-x^2)}{2} = 12x - x^3$$

(صفحة ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طول مستطیل} = |x_D - x_C| = |x - (-x)| = 2x \\ \text{عرض مستطیل} = |AD| = y_A = \frac{12-x^2}{2} \end{array} \right\} \text{(نمره ۲۵)}$$

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} = (2x) \times (y) \text{ (نمره ۲۵)} = 2x \frac{(12-x^2)}{2} = 12x - x^3 \text{ (نمره ۵)}$$

۱۴ طول نقاط $A(-2, 0), C(6, 0)$ محل برخورد سهمی با محور طولها است.

$$f(x) = -x^2 + 4x + 12 = 0 \Rightarrow -(x+2)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases}$$

مختصات رأس سهمی:

$$B \left| \begin{array}{l} -b \\ 2a \end{array} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \right. \\ \left. f(2) = 16 \right.$$

$$|AB| = \sqrt{(-2-2)^2 + (16-0)^2} = 4\sqrt{17}$$

$$|BC| = \sqrt{(6-2)^2 + (16-0)^2} = 4\sqrt{17}$$

$$|AC| = |6 - (-2)| = 8$$

$$P = |AB| + |AC| + |BC| = 8\sqrt{17} + 8$$

$$y_{max} = y_B = f(2) = 16$$

(صفحة ۳۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

طول نقاط A, C محل برخورد سهمی با محور طولها

$$f(x) = -x^2 + 4x + 12 = 0 \Rightarrow -(x+2)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$A \left| \begin{array}{l} -2 \\ 0 \end{array} \right., C \left| \begin{array}{l} 6 \\ 0 \end{array} \right.$$

مختصات رأس سهمی:



$$B \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 & (\text{نمره}, 2.5) \\ f(2) = 16 \end{cases}$$

$$|AB| = \sqrt{(-2-2)^2 + (16-0)^2} = 4\sqrt{17} \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$|BC| = \sqrt{(6-2)^2 + (16-0)^2} = 4\sqrt{17} \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$|AC| = |6 - (-2)| = 8 \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$P = |AB| + |AC| + |BC| = 8\sqrt{17} + 8 \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$y_{max} = y_B = f(2) = 16 \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

۱۵

$$x^2 - 4x - 2 = 0, S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2$$

$$\xrightarrow{(\beta > \alpha)} \beta - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} A &= 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 3(\beta^2 + \alpha^2) + (\beta^2 - \alpha^2) = 3((\beta + \alpha)^2 - 2\alpha\beta) + (\beta + \alpha)(\beta - \alpha) \\ &= 3(S^2 - 2P) + S \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = 3(4^2 - 2(-2)) + 4 \times 2\sqrt{6} = 60 + 8\sqrt{6} \end{aligned}$$

راه دوم:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2 + \sqrt{6}, \alpha = 2 - \sqrt{6}$$

$$\rightarrow A = 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 4(4\beta + 2) + 2(4\alpha + 2) = 8(2\beta + \alpha) + 12$$

$$= 8(2(2 + \sqrt{6}) + 2 - \sqrt{6}) + 12 = 60 + 8\sqrt{6}$$

(صفحة ۸ و ۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$x^2 - 4x - 2 = 0, S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -2 \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$\xrightarrow{(\beta > \alpha)} \beta - \alpha = \frac{\sqrt{\Delta}}{a} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$A = 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 3(\beta^2 + \alpha^2) + (\beta^2 - \alpha^2) \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$= 3((\beta + \alpha)^2 - 2\alpha\beta) + (\beta + \alpha)(\beta - \alpha) \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$= 3(S^2 - 2P) + S \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{a} \quad (\text{نمره}, 2.5) = 3(4^2 - 2(-2)) + 4 \times 2\sqrt{6} = 60 + 8\sqrt{6} \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

راه دوم:

$$x^2 - 4x - 2 = 0 \Rightarrow \beta = 2 + \sqrt{6} \quad (\text{نمره}, 2.5), \alpha = 2 - \sqrt{6} \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$\rightarrow A = 4\beta^2 + 2\alpha^2 = 4(4\beta + 2) + 2(4\alpha + 2) \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

$$= 8(2\beta + \alpha) + 12 = 8(2(2 + \sqrt{6}) + 2 - \sqrt{6}) + 12 = 60 + 8\sqrt{6} \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

۱۶ اول S و P معادله را تعیین نموده سپس عبارت داده شده را تا جای ممکن ساده نموده و بر حسب S و P می نویسیم و جایگذاری می کنیم:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4, P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = 1$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \quad a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3(ab)(a+b)$$

می دانیم:

$$\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha\beta)(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{(S^3 - 3PS)}{P} = \frac{4^3 - 3(1)(4)}{1} = 52$$

(صفحه های ۸، ۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 4, P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = 1 \quad (\text{نمره}, 5)$$

$$\frac{\alpha^3}{\beta} + \frac{\beta^3}{\alpha} = \frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3(\alpha\beta)(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = \frac{(S^3 - 3PS)}{P} = \frac{4^3 - 3(1)(4)}{1} = 52 \quad (\text{نمره}, 2.5)$$

۱۷ معادله درجه دومی که مجموع ریشه های آن S و حاصل ضرب ریشه های آن P باشد را می توان به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت.اگر معادله درجه دومی بدهند، و از ما معادله درجه دومی دیگری بخواهند که ریشه هایش با ریشه های معادله اول رابطه مشخصی داشته باشد، کافی است، ریشه های معادله اول را x و معادله



دوم را X بنامیم و ارتباط x و X را با استفاده از صورت سوال بنویسیم و با توجه به X ، P و S جدید را نوشته و معادله جدید را بر حسب آن بنویسیم.

$$x_1 + x_2 = S = \frac{1}{p}, \quad x_1 \times x_2 = P = \frac{-5}{p} \Rightarrow X_1 = 2x_1 - 1, \quad X_2 = 2x_2 - 1$$

$$\Rightarrow S' = X_1 + X_2 = 2(x_1 + x_2) - 2 = 2\left(\frac{1}{p}\right) - 2 = -1$$

$$P' = X_1 \times X_2 = 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 4\left(\frac{-5}{p}\right) - 2\left(\frac{1}{p}\right) + 1 = -10$$

$$X^2 - S'X + P' = 0 \Rightarrow X^2 + X - 10 = 0$$

(صفحة ۸ تا ۱۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$x_1 + x_2 = S = \frac{1}{p}, \quad x_1 \times x_2 = P = \frac{-5}{p} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow X_1 = 2x_1 - 1, \quad X_2 = 2x_2 - 1$$

$$S' = X_1 + X_2 = 2(x_1 + x_2) - 2 = 2\left(\frac{1}{p}\right) - 2 = -1 \text{ (نمره ۲۵)},$$

$$P' = X_1 \times X_2 = 4x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 1 = 4\left(\frac{-5}{p}\right) - 2\left(\frac{1}{p}\right) + 1 = -10 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$X^2 - SX + P = 0 \Rightarrow X^2 + X - 10 = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

۱۸

$b > 0$ و $c < 0$ (منفی) (مثبت)

۱۹

ویژگی	شماره نمودار (نمودارها)
علامت b منفی است	(۳)
دارای مینیمم است و ریشه ندارد	(۴)
علامت c منفی است	(۱) و (۲)

۲۰ تابع صفری ندارد.

$$y = a(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow 3 = a(0 - 2)^2 + 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 1$$

۲۱

$$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + m + 1 - 2 = 0 \Rightarrow m = 2$$

$$f(x) = x^2 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۲۲ مطابق شکل نقاط C ، A هم‌عرض هستند، بنابراین داریم:

$$x_p = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \Rightarrow P(1, -4)$$

چون مختصات رأس سهمی را داریم، معادله آن را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x) = a(x - 1)^2 - 4 \Rightarrow f(0) = a - 4 = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

رابطه داده شده را بر حسب S (مجموع ریشه‌ها) و P (حاصل ضرب ریشه‌ها) و با توجه به معادله $Ax^2 + Bx + C = 0$ می‌نویسیم:

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \times S = \frac{C}{A} \times \frac{-B}{A} = \frac{-2}{2} \times \left(\frac{4}{2}\right) = -2$$

(صفحة ۸ تا ۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$x_p = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \Rightarrow P(1, -4) \text{ (نمره ۵)}$$

$$f(x) = a(x - 1)^2 - 4 \Rightarrow f(0) = a - 4 = -2 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x - 2 \text{ (نمره ۵)}$$

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \times S = \frac{C}{A} \times \frac{-B}{A} = \frac{-2}{2} \times \left(\frac{4}{2}\right) = -2 \text{ (نمره ۵)}$$

۲۳ ابتدا یک تابع درجه ۲ را به شکل $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم و با توجه به معلومات مسئله پارامترهای a ، b ، c را تعیین می‌کنیم. در این سؤال چون مختصات رأس

داده شده است، از رابطه $2 - 2 = a(x - x_s)^2 + y_s = a(x - 2)^2 - 2$ استفاده کردیم و مختصات نقطه محل برخورد تابع با محور x ها ($x = 1$) را در تابع جایگذاری نموده و



پارامترها را به دست می آوریم.

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s = a(x - 2)^2 - 2 \Rightarrow f(1) = a(1 - 2)^2 - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = 2(x - 2)^2 - 2 = 2x^2 - 8x + 6$$

(صفحه ۱۰ تا ۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\underbrace{f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s = a(x - 2)^2 - 2}_{(5, \text{نمره})} \Rightarrow \underbrace{f(1) = a(1 - 2)^2 - 2 = 0}_{(5, \text{نمره})} \Rightarrow a = 2$$

$$f(x) = 2(x - 2)^2 - 2 = 2x^2 - 8x + 6 \quad (5, \text{نمره})$$

۲۴ راه حل اول:

$x = -3$ ریشه تابع $f(x)$ (یا صفر آن) است یعنی: $f(-3) = 0$ در نتیجه با جایگذاری $x = -3$ در تابع، مقدار m به دست می آید.

$$f(-3) = -27 + (m - 1)9 + 3 - 3 = 0 \Rightarrow m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4$$

حال با تقسیم $f(x)$ بر عامل $x + 3$ عامل $x + 3$ دیگر تابع را به دست می آوریم.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x^2 - x - 3 & x + 3 \\ -(x^2 + 3x^2) & x^2 - 1 \\ \hline -x - 3 & \\ -(-x - 3) & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow f(x) = (x + 3)(x^2 - 1) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

راه حل دوم:

$$x^2 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

(صفحه ۱۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

راه حل اول:

$$f(-3) = -27 + (m - 1)9 + 3 - 3 = 0 \Rightarrow m - 1 = 3 \Rightarrow m = 4 \quad (5, \text{نمره})$$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x^2 - x - 3 & x + 3 \\ -(x^2 + 3x^2) & x^2 - 1 \\ \hline -x - 3 & \\ -(-x - 3) & \\ \hline 0 & \end{array} \quad (5, \text{نمره})$$

$$\Rightarrow f(x) = (x + 3)(x^2 - 1) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \quad (5, 2, 5, \text{نمره})$$

راه حل دوم: (به راه حل دوم استفاده از تجزیه، نمره کامل داده شود)

$$x^2 + 3x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 3)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

۲۵ ۱) اول معادله یا نامعادله را به صورت $f(x) = g(x)$ یا $f(x) \leq g(x)$ می نویسیم که در آن $f(x)$ ، $g(x)$ به سادگی قابل رسم باشند.

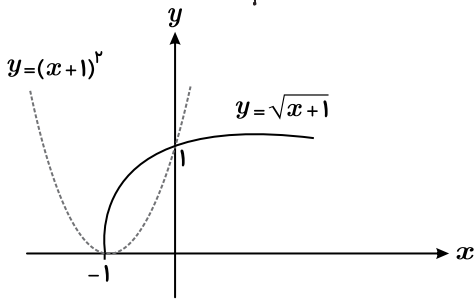
۲) $f(x)$ و $g(x)$ را با دقت در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم.

۳) محل تلاقی نمودارها را مشخص می کنیم.

۴) نقاط به دست آمده را به صورت مجموعه و یا ناحیه مورد نظر را به صورت بازه می نویسیم.

معادله را به صورت $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ می نویسیم. نمودار هر دو طرف معادله را در یک دستگاه مختصات رسم می کنیم. نمودار این دو تابع، در دو نقطه یکدیگر را

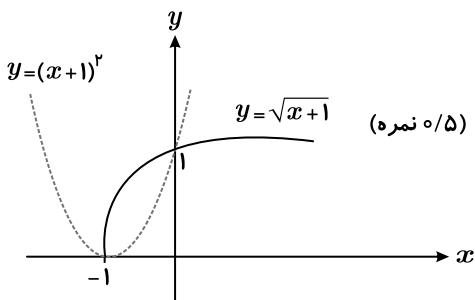
قطع می کنند؛ بنابراین، معادله ۲ ریشه دارد: $x = -1, x = 0$



(صفحة ۱۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

معادله را به صورت $\sqrt{x+1} = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ می‌نویسیم. (نمره ۵) نمودار هر دو طرف معادله را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم نمودار این دو تابع در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند: بنابراین، معادله ۲ ریشه دارد: $x = -1, x = 0$ (نمره ۵)



۲۶

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{2t} = \frac{1}{4} \Rightarrow t = 6$$

۲۷ وقتی یک نفر کاری را در x واحد زمانی انجام می‌دهد همیشه نتیجه می‌گیریم که در یک واحد زمانی $\frac{1}{x}$ کار را انجام می‌دهد. حالا اگر شخص دیگر همین کار را در y ساعت انجام

دهد می‌توان نتیجه گرفت اگر این دو نفر با هم کار کنند در هر ساعت $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ کار را انجام خواهند داد. بنابراین اگر کارگر اول در x ساعت کار را انجام دهد، کارگر دوم در $y = x + 5$ ساعت تمام می‌کند. از طرفی این دو در یک ساعت $\frac{1}{15}$ کار را انجام می‌دهند، در نتیجه داریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6(2x+5) = x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 10 \end{cases}$$

کارگر اول در ۱۰ ساعت و کارگر دوم در ۱۵ ساعت به تنهایی کار را تمام می‌کنند.

راهنمای تصحیح:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6} \quad (\text{نمره ۲۵}) \Rightarrow \frac{x+5+x}{x(x+5)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6(2x+5) = x^2 + 5x$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 10 \end{cases} \quad (\text{نمره ۲۵})$$

کارگر اول در ۱۰ ساعت و کارگر دوم در ۱۵ ساعت به تنهایی کار را تمام می‌کنند. (نمره ۲۵)

۲۸ ابتدا زمان رفت و برگشت را بر اساس سرعت رفت و برگشت می‌نویسیم. می‌دانیم:

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow t = \frac{x}{v} \Rightarrow t_R = \frac{60}{v}, t_B = \frac{60}{v-15}$$

حال معادله گویا این مسئله را می‌سازیم و حل می‌کنیم:

$$t_R = \frac{60}{v}, t_B = \frac{60}{v-15} \Rightarrow \frac{60}{v-15} = \frac{60}{v} + \frac{2}{3} \Rightarrow 60(3)(v) = 60(3)(v-15) + 2(v)(v-15)$$

$$\Rightarrow 2v^2 - 30v - 2700 = 0$$

$$v = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 4 \times 2 \times 2700}}{4} = \frac{30 \pm 150}{4} \Rightarrow v = 45$$

$$\Rightarrow t_R + t_B = \frac{60}{45} + \frac{60}{30} = \frac{10}{3} = 3 \text{ ساعت و } 20 \text{ دقیقه}$$

(صفحة ۱۷ تا ۱۹ کتاب درسی)



راهنمای تصحیح:

$$t_R = \frac{60}{v}, t_B = \frac{60}{v-15} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \frac{60}{v-15} = \frac{60}{v} + \frac{2}{3} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow 60(3)(v) = 60(3)(v-15) + 2(v)(v-15) \Rightarrow 2v^2 - 30v - 2700 = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$v = \frac{30 \pm \sqrt{900 + 4 \times 2 \times 2700}}{4} \text{ (نمره ۲۵)} = \frac{30 \pm 150}{4} \Rightarrow v = 45$$

$$\Rightarrow t_R + t_B = \frac{60}{45} + \frac{60}{30} = \frac{10}{3} = 3 \text{ ساعت و } 20 \text{ دقیقه (نمره ۲۵)}$$

۲۹

$$\sqrt{x+1} = x-5 \rightarrow x+1 = (x-5)^2 \rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \rightarrow (x-3)(x-8) = 0$$

$$\rightarrow x = 3 \text{ (غ ق)} \quad x = 8 \text{ (ق ق)}$$

۳۰

$$2 + \sqrt{1+x} = x-3 \rightarrow \sqrt{1+x} = x-3-2 = x-5$$

دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$1+x = x^2 - 10x + 25 \rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\begin{cases} x = 8 \\ x = 3 \end{cases}$$

جواب $x = 3$ غیر قابل قبول است.

۳۱

$$\sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow (x-7)(x-2) = 0$$

$$x = 2 \text{ غ ق ق}$$

$$x = 7$$

۳۲

$$x-16 = x(\sqrt{x}-4) \Rightarrow (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4) = x(\sqrt{x}-4)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4) - x(\sqrt{x}-4) = 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4-x) = 0$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-4) = 0 \Rightarrow x = 16 \\ \sqrt{x} = x-4 \xrightarrow{x \geq 4} x^2 - 9x + 16 = 0 \Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-64}}{2} \xrightarrow{x \geq 4} x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

(صفحه ۲۱ و ۲۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$x-16 = x(\sqrt{x}-4) \Rightarrow (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4) = x(\sqrt{x}-4)$$

$$\Rightarrow (\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4) - x(\sqrt{x}-4) = 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4-x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\begin{cases} (\sqrt{x}-4) = 0 \Rightarrow x = 16 \text{ (نمره ۲۵)} \\ \sqrt{x} = x-4 \xrightarrow{x \geq 4} x^2 - 9x + 16 = 0 \text{ (نمره ۲۵)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81-64}}{2} \xrightarrow{x \geq 4} x = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۳۳ برای حل این معادلات باید عبارت رادیکال را در یک طرف تساوی و عبارتهای دیگر را در طرف دیگر ببریم و طرفین را به توان برسانیم و معادله حاصل را حل می‌کنیم. جوابهایی از این معادله که در معادله اصلی صدق کند، جواب معادله می‌باشد. (یعنی ممکن است با به توان رساندن جوابهای اضافی تولید شود).

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = (g(x))^2$$

به یاد داشته باشید قبل از هر اقدامی دامنه تابع را بررسی کنید. عملاً جوابهای حاصل نباید زیر رادیکال را منفی کند و همچنین جواب به دست آمده نباید $g(x)$ را منفی کند. راه حل اول:

دامنه این معادله بازه $[\frac{-2}{3}, 1]$ است چون:

$$3-3p \geq 0, 3p+2 \geq 0 \Rightarrow p \leq 1, p \geq \frac{-2}{3} \Rightarrow p \in [\frac{-2}{3}, 1]$$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$3-3p = 9 + 3p + 2 + 6\sqrt{3p+2} \Rightarrow -8-6p = 6\sqrt{3p+2} \Rightarrow -(4+3p) = 3\sqrt{3p+2}$$

$$16 + 9p^2 + 24p = 9(3p+2) \Rightarrow 9p^2 - 3p - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{2}{3} \text{ غ ق ق} \\ p = \frac{-1}{3} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

جوابهای به دست آمده در دامنه معادله قرار دارد ولی در خود معادله صدق نمی‌کند.

راه حل دوم:

در مرحله $-(4+3p) = 3\sqrt{3p+2}$ دوباره دامنه را تعیین می‌کنیم:

$$-4 - 3p \geq 0 \Rightarrow p \leq -\frac{4}{3}$$

دامنه جدید با بازه $[-\frac{2}{3}, 1]$ اشتراکی ندارد، پس معادله فاقد جواب است.

(صفحه ۲۰ تا ۲۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

دامنه این معادله بازه $[-\frac{2}{3}, 1]$ است چون:

$$3 - 3p \geq 0, 3p + 2 \geq 0 \Rightarrow p \leq 1, p \geq -\frac{2}{3} \Rightarrow p \in [-\frac{2}{3}, 1] \text{ (نمره ۲۵)}$$

حال طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$3 - 3p = 9 + 3p + 2 + 6\sqrt{3p+2} \text{ (نمره ۵)} \Rightarrow -8 - 6p = 6\sqrt{3p+2} \Rightarrow -(4+3p) = 3\sqrt{3p+2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$16 + 9p^2 + 24p = 9(3p+2) \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 9p^2 - 3p - 2 = 0 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{2}{3} & \text{غقیق (نمره ۲۵)} \\ p = -\frac{1}{3} & \text{غقیق (نمره ۲۵)} \end{cases}$$

جواب‌های به دست آمده در دامنه معادله قرار دارد ولی در خود معادله صدق نمی‌کند.

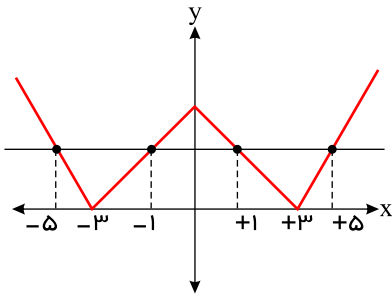
راه حل دوم:

در مرحله $-(4+3p) = 3\sqrt{3p+2}$ دوباره دامنه را تعیین می‌کنیم:

$$-4 - 3p \geq 0 \Rightarrow p \leq -\frac{4}{3}$$

دامنه جدید با بازه $[-\frac{2}{3}, 1]$ اشتراکی ندارد، پس معادله فاقد جواب است.

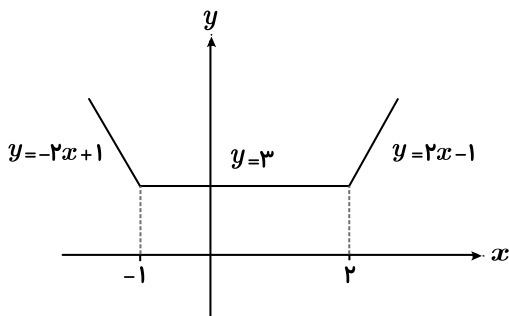
جواب‌های معادله $x = \pm 5$ و $x = \pm 1$ هستند. ۳۴



۳۵

تابع f یک تابع گلدانی است با توجه به اینکه هر قدرمطلق یک ریشه دارد دامنه تابع عملاً سه قسمت می‌شود و یک تابع سه ضابطه‌ای داریم: ابتدا یک نیم خط با شیب منفی ۲ داریم، سپس یک پاره خط ثابت داریم و در نهایت یک نیم خط با شیب ۲.

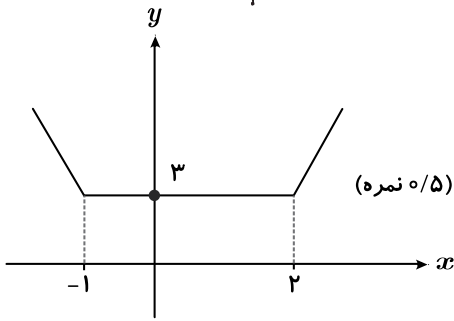
$$f(x) = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+1 & x < -1 \\ 3 & -1 \leq x \leq 2 \\ 2x-1 & x > 2 \end{cases}$$



(صفحه ۲۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = |x+1| + |x-2| = \begin{cases} -2x+1 & x < -1 & \text{(نمره ۲۵)} \\ 3 & -1 \leq x \leq 2 & \text{(نمره ۲۵)} \\ 2x-1 & x > 2 & \text{(نمره ۲۵)} \end{cases}$$

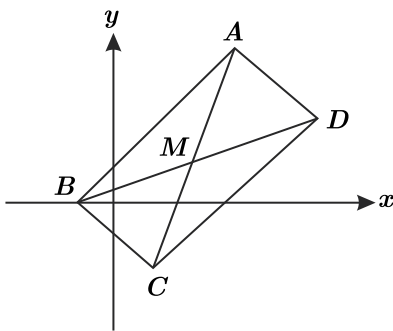


$$||x| - 1| = 2 \rightarrow |x| - 1 = \pm 2 \rightarrow |x| = \pm 2 + 1 \rightarrow$$

$$\begin{cases} |x| = 3 \rightarrow x = \pm 3 \\ |x| = -1 \rightarrow \text{جواب ندارد.} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{2+0}{2} = 2 \end{array} \right] : \text{مختصات نقطه } M \text{ وسط ضلع } BC$$

$$AM = \sqrt{(0-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$



$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Rightarrow A+C = B+D$$

$$\Rightarrow (2, 3) + (1, -2) = (-1, 0) + (x_D, y_D) \Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 1 \end{cases}$$

$$|OD| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

(صفحة ۲۹ تا ۳۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$M = \frac{A+C}{2} = \frac{B+D}{2} \Rightarrow A+C = B+D \Rightarrow (2, 3) + (1, -2) = (-1, 0) + (x_D, y_D) \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 1 \end{cases} \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

$$|OD| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

نقطه‌ای که روی خط $y - 2x = 1$ قرار دارد مختصاتش به صورت $M(x, 2x + 1)$ است، بنابراین اگر $|AM| = |MB|$ باشد، آنگاه داریم:

$$\sqrt{(x - (-1))^2 + (2x + 1 - (-1))^2} = \sqrt{(x - 3)^2 + (2x + 1 - 1)^2} \Rightarrow (x + 1)^2 + (2x + 2)^2 = (x - 3)^2 + (2x)^2$$

$$x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 8x + 4 = x^2 - 6x + 9 + 4x^2 \Rightarrow 10x + 5 = -6x + 9 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

(صفحة ۳۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\sqrt{(x - (-1))^2 + (2x + 1 - (-1))^2} \text{ (نمره ۰,۲۵)} = (x + 1)^2 + (2x + 2)^2 = (x - 3)^2 + (2x)^2 \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

$$10x + 5 = -6x + 9 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ (نمره ۰,۲۵)} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

نقاط روی خط $y = 1 - 2x$ به صورت $M(x, 1 - 2x)$ می‌باشند. بنابراین داریم:

$$|AM| = |MB| \Rightarrow \sqrt{(x + 3)^2 + (1 - 2x - 0)^2} = \sqrt{(x - 1)^2 + (1 - 2x - 0)^2}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و ساده می‌کنیم:

$$(x + 3)^2 + (1 - 2x - 0)^2 = (x - 1)^2 + (1 - 2x - 0)^2 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow M \left| \begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right.$$

(صفحة ۳۱، ۳۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$|AM| = |MB| \Rightarrow \sqrt{(x+3)^2 + (1-2x-0)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (1-2x-0)^2} \quad (\text{نمره } 5)$$

$$(x+3)^2 + (1-2x-0)^2 = (x-1)^2 + (1-2x-0)^2 \quad (\text{نمره } 25) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 2x + 1$$

$$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow M \left| \begin{matrix} -1 \\ 3 \end{matrix} \right. \quad (\text{نمره } 25)$$

۴۱ چون مثلث در رأس B قائمه است، پس دو ضلع BA, BC بر هم عمود هستند.

$$m_{BC} = \frac{-k}{k-1}, \quad m_{BA} = \frac{2-0}{4-1} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} \times \frac{-k}{k-1} = -1$$

$$-2k = -(3k-3) \rightarrow -2k + 3k = 3 \rightarrow k = 3$$

۴۲ الف) فاصله دو خط موازی:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \end{cases} \Rightarrow h = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(صفحه ۳۵ کتاب درسی)

(ب)

$$\log_{10} 0.001 + \log_2 2\sqrt{2} = \log_{10} 10^{-3} + \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{-3}{1} + \frac{5}{2} = 0$$

(صفحه ۸۵ کتاب درسی)

(ج)

$$\sqrt{19 - 8\sqrt{3}} = \sqrt{16 - 8\sqrt{3} + 3} = \sqrt{(4 - \sqrt{3})^2} = |4 - \sqrt{3}| = 4 - \sqrt{3}$$

(صفحه ۲۳ کتاب درسی)

(د)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [x^2] - \left[\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 \right] = [27^-] - [27] = 26 - 27 = -1$$

(صفحه ۱۲۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (ب) صفر (ج) $4 - \sqrt{3}$ (د) -۱

(هر مورد ۲۵، ۵ نمره)

۴۳ ابتدا مختصات وسط پاره خط BC را تعیین می‌کنیم:

(الف)

$$M\left(\frac{4+2}{2} = 3, \frac{1+5}{2} = 3\right) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} A(1, 2) \\ M(3, 3) \end{matrix} \right. \Rightarrow |AM| = \sqrt{(3-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$$

(ب) شیب خط BC را به دست آورده و آن را عکس و قرینه می‌کنیم تا شیب عمودمنصف را به دست آوریم.

$$m_{BC} = \frac{1-5}{4-2} = -2, \quad M(3, 3) \Rightarrow m_L = \frac{1}{2}, \quad M(3, 3)$$

$$\Rightarrow L: y - 3 = \frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y - 6 = x - 3 \Rightarrow 2y - x = 3$$

(ج) حال اندازه سه ضلع را از فرمول: $|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ به دست می‌آوریم:

$$|AB| = \sqrt{(5-2)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{10}, \quad |AC| = \sqrt{(4-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{10},$$

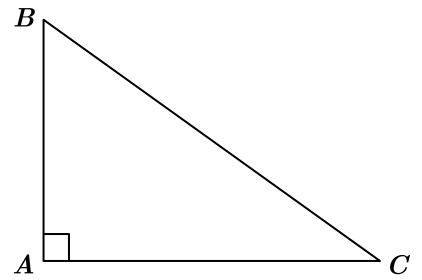
$$|BC| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$$

دو ضلع AB, AC باهم برابرند و اندازه این سه ضلع در قضیه فیثاغورس صدق می‌کند.

$$(\sqrt{20})^2 = (\sqrt{10})^2 + (\sqrt{10})^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$$

مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه متساوی‌الساقین است بنابراین داریم:

$$S = \frac{|AB| \times |AC|}{2} = \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}{2} = 5$$



(صفحة ۳۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(الف)

$$M\left(\frac{۴+۲}{۲} = ۳, \frac{۱+۵}{۲} = ۳\right) \Rightarrow \begin{cases} A(۱, ۲) \\ M(۳, ۳) \end{cases} \Rightarrow |AM| = \sqrt{(۳-۱)^2 + (۳-۲)^2} = \sqrt{۵} \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

(ب)

$$m_{BC} = \frac{۱-۵}{۴-۲} = -۲ \xrightarrow{(\text{نمره } ۲,۵)} m_L = \frac{۱}{۲} \Rightarrow L: y - ۳ = \frac{۱}{۲}(x - ۳) \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

(ج)

$$|AB| = \sqrt{(۵-۲)^2 + (۲-۱)^2} = \sqrt{۱۰}, |AC| = \sqrt{(۴-۱)^2 + (۱-۲)^2} = \sqrt{۱۰}, \\ |BC| = \sqrt{(۴-۲)^2 + (۱-۵)^2} = \sqrt{۲۰} \quad (\text{نمره } ۲,۵) \\ (\sqrt{۲۰})^2 = (\sqrt{۱۰})^2 + (\sqrt{۱۰})^2 \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

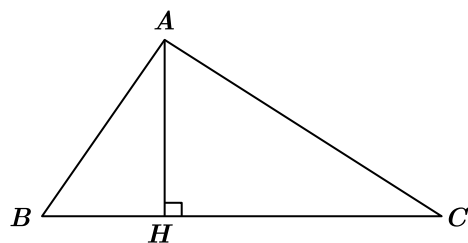
مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین است بنابراین داریم:

$$S = \frac{|AB| \times |AC|}{۲} = \frac{\sqrt{۱۰} \times \sqrt{۱۰}}{۲} = ۵ \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

۴۴ اول رأس A محل تلاقی AB, AC را به دست می آوریم:

$$\begin{cases} AB: ۲y - x = ۳ \\ AC: y - ۲x = ۵ \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{-۷}{۳}, \frac{۱}{۳}\right)$$

ارتفاع AH از رأس A بر ضلع BC عمود می شود. در نتیجه شیب آن عکس و قرینه شیب BC است.



$$m_{BC} = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow m_{AH} = \frac{۲}{۳}$$

بنابراین معادله ارتفاع AH به صورت مقابل است:

$$L: y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow AH: y - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}\left(x - \left(\frac{-۷}{۳}\right)\right)$$

$$y - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}x + \frac{۱۴}{۹} \xrightarrow{\times ۹} ۹y - ۳ = ۶x + ۱۴ \Rightarrow ۹y - ۶x = ۱۷$$

(صفحة ۳۶, ۳۵, ۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} AB: ۲y - x = ۳ \\ AC: y - ۲x = ۵ \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{-۷}{۳}, \frac{۱}{۳}\right) \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

$$m_{BC} = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow m_{AH} = \frac{۲}{۳} \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

بنابراین معادله ارتفاع AH به صورت مقابل است:

$$AH: y - \frac{۱}{۳} = \frac{۲}{۳}\left(x - \left(\frac{-۷}{۳}\right)\right) \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

۴۵

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(-2) - 3(4) + 12|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5}$$

۴۶

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times 3 - 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow S = 5$$

۴۷ دو خط بر هم عمودند و نقطه A روی این دو خط قرار ندارد، برای به دست آوردن طول و عرض مستطیل کافیست فاصله نقطه A را از این دو خط به دست آوریم:

$$AH = \frac{|2 \times 1 + 3 \times 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{10}{\sqrt{13}} \times \frac{5}{\sqrt{13}} = \frac{50}{13}$$

$$AH = \frac{|3 \times 1 - 2 \times 3 - 2|}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{13}}$$

۴۸ با توجه به اینکه نقطه داده شده روی خط داده شده قرار ندارد، ابتدا فاصله این رأس را تا ضلع داده شده با استفاده از رابطه فاصله نقطه از خط، حساب می‌کنیم و طول ضلع مربع را به دست می‌آوریم.

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow h = \frac{|0 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \text{طول ضلع مربع} \Rightarrow S = h^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8$$

(صفحه ۳۳ تا ۳۵ کتاب درسی)

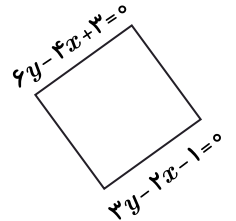
راهنمای تصحیح:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow h = \frac{|0 - 2 - 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow S = h^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2 = 8 \text{ (نمره ۵)}$$

۴۹ فاصله دو خط موازی $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ ax + by + c' = 0 \end{cases}$ برابر است با: $h = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ضرایب x, y در معادله دو خط باید باهم برابر باشند تا از فرمول بالا استفاده کنیم.

فاصله دو ضلع موازی برابر با ضلع مربع است:

$$\begin{cases} 6y - 4x + 3 = 0 \\ 3y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x + \frac{3}{2} = 0 \\ 3y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{3}{2} + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{5}{2\sqrt{13}} \Rightarrow S = d^2 = \frac{25}{52}$$



(صفحه ۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} 6y - 4x + 3 = 0 \\ 3y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2x + \frac{3}{2} = 0 \\ 3y - 2x - 1 = 0 \end{cases} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\frac{3}{2} + 1|}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{5}{2\sqrt{13}} \Rightarrow S = d^2 = \frac{25}{52} \text{ (نمره ۵)}$$

$$S = d^2 = \frac{25}{52} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۵۰ نقاط روی خط $y = \frac{x-1}{2}$ مختصاتشان به صورت $M(x, \frac{x-1}{2})$ است. حال فاصله این نقاط از $3x + 4y - 3 = 0$ را حساب کرده و برابر می‌گذاریم.

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow h = \frac{|3x + 4(\frac{x-1}{2}) - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = 4 \Rightarrow |5x - 5| = 20 \Rightarrow |x - 1| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases}$$

معادله دو جواب دارد بنابراین دو نقطه روی $x - 2y = 1$ خط اول وجود دارد که فاصله آنها از خط $3x + 4y - 3 = 0$ برابر ۴ است.

کافی است طول نقاط به دست آمده را در معادله خط $y = \frac{x-1}{2}$ قرار دهیم و مختصات دو نقطه را به دست آوریم:

$$B(5, 2), A(-3, -2)$$

(صفحه ۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$h = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow h = \frac{|3x + 4(\frac{x-1}{2}) - 3|}{\sqrt{9 + 16}} = 4 \text{ (نمره ۵)} \Rightarrow |5x - 5| = 20 \Rightarrow |x - 1| = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 5 \end{cases} \text{ (نمره ۵)}$$

بنابراین دو نقطه روی خط $x - 2y = 1$ وجود دارد که فاصله آنها از $3x + 4y - 3 = 0$ برابر ۴ است.



$B(5, 2), A(-3, -2)$ (نمبره، ۲۵)



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل

۲ یازدهم

سال یازدهم

ریاضی



فهرست

درس اول : آشنایی بیشتر با تابع

۱..... یادآوری تابع، ضابطه تابع، تساوی دو تابع

درس دوم : انواع توابع

۲..... توابع گویا و دامنه آن ها

۲..... توابع رادیکالی و دامنه آن ها

۳..... تابع پله ای - تابع جزء صحیح

درس سوم : وارون تابع

۳..... توابع یک به یک

۴..... وارون یک تابع

درس چهارم : اعمال روی توابع

۵..... چهار عمل اصلی روی توابع

۶..... ترکیب توابع



درس اول : آشنایی بیشتر با تابع



یادآوری تابع، ضابطه تابع، تساوی دو تابع

۱ درستی و نادرستی جملات زیر را تعیین کنید.

الف) معادله خط گذرا از دو نقطه $A(-2, -2)$ و $B(-2, 2)$ یک تابع است.

ب) نمودار هر تابع درجه دو (با دامنه \mathbb{R})، محور عرضها (y ها) را قطع می‌کند.

ج) در تابع $f: A \rightarrow B$ همواره تعداد اعضای دامنه تابع بزرگ‌تر یا مساوی تعداد اعضای برد تابع است.

د) هر دو تابع که دامنه و بردشان برابر باشند، با هم مساوی‌اند.

۲ دو تابع $g(x) = x + c$ ، $f(x) = \begin{cases} a & x = 2 \\ \frac{x^2 - 4}{x - b} & x \neq 2 \end{cases}$ برابرند. مقادیر a, b, c را به دست آورید.

۳ نشان دهید رابطه $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ تابع است.

۴ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) در معادله $|y| = x + 1$ ، y تابعی از x نیست.

۵ نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:

الف) دامنه آن $[-4, 5]$ باشد،

ب) به هر عدد کمتر از صفر، قدرمطلق آن را نسبت دهد،

پ) به هر عدد در بازه $[0, 1]$ ، مربع آن را نسبت دهد،

ت) در سایر نقاط دامنه ثابت باشد و $f(5) = 2$

۶ نمودار تابع f را چنان رسم کنید که همه شرایط زیر را داشته باشد:

الف) $f(0) = 2$ ، $f(-2) = 5$

ب) تابع در بازه $(-\infty, -2]$ ثابت است،

پ) تابع در بازه $(-2, 0]$ خطی است و موازی خط $y + x = 5$ است.

ت) تابع به هر عدد مثبت، جذر آن را نسبت می‌دهد.

۷ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

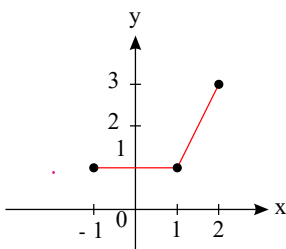
الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۸ ضابطه‌ی تابع f که نمودار آن در زیر آمده است را بیابید.



۹ نمودار تابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$$





۱۰ برای تابع $f : [-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = -2x^2 + 3$ کدام یک از نمایش‌های زیر قابل قبول است؟

- الف) $f : [-2, +\infty) \rightarrow [3, +\infty)$
 $f(x) = -2x^2 + 3$ ب) $f : (-2, +\infty) \rightarrow (-\infty, 3]$
 $f(x) = -2x^2 + 3$ ج) $f : [-2, +\infty) \rightarrow (-\infty, 4)$
 $f(x) = -2x^2 + 3$

درس دوم : انواع توابع

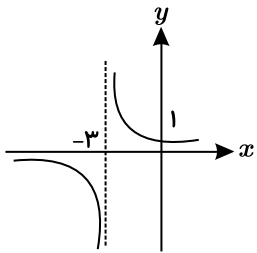
توابع گویا و دامنه آن‌ها

۱۱

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) نمودار تابع $f(x) = \frac{k}{x+m}$ شکل مقابل است. $k+m$ کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۳ (۳) -۳ (۴)



ب) دامنه تابع با ضابطه $y = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۴ (۱) ۵ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴)

ج) دو خط $0 = 2x + ky - 5$ و $0 = (k+1)x - y + 3$ برهم عمودند. k کدام است؟

- ۱ (۱) -۱ (۲) -۲ (۳) ۲ (۴)

۱۲ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری رودخانه‌ای به وسیله تابع $f(x) = \frac{520x}{200-2x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد

آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ۶۰ درصد از آلودگی این رودخانه را حساب کنید.

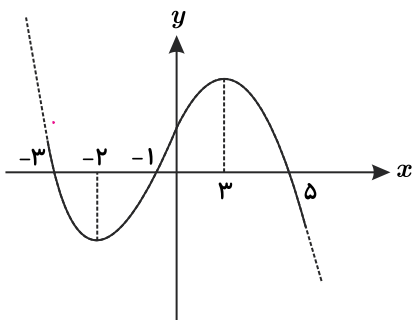
ب) دامنه این تابع در حالت واقعی را به کمک یک بازه نمایش دهید.

۱۳ اگر دامنه تابع $f(x) = \frac{x^2+3}{ax^2+bx+18}$ به صورت $\mathbb{R} - \{-3\}$ باشد، a و b را بیابید.

توابع رادیکالی و دامنه آن‌ها

۱۴ به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$ را رسم کنید.

۱۵ با توجه به نمودار تابع $f(x)$ دامنه تابع $g(x) = \sqrt{xf(x)}$ را به دست آورید.





۱۶ جاهای خالی را با کلمات و اعداد مناسب پر کنید.

الف) فاصله نقطه $A(2, -4)$ از خط $y = 0$ برابر است.

ب) دو خط $1 - 3y = x$ و $y = 3x + 1$ با هم موازی است.

ج) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ برابر است.

د) نمودار تابع $y = \sqrt{2 - x} - 2$ از ناحیه صفحه مختصات نمی‌گذرد.

۱۷ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = -\sqrt{x+2} + 3$ را رسم نموده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

۱۸ دامنه‌ی تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2 - 1)}}{\sqrt{x + |x|}}$$

۱۹ تساوی توابع زیر را بررسی کنید.

$$f(x) = \sqrt{x} \sqrt{x-3} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$$

تابع پله‌ای - تابع جزء صحیح

۲۰ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند، f را رسم و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(4) = 4$ ، $f(-1) = 5$

ب) در بازه $[-1, 4]$ ثابت است.

ج) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۴، دو برابر جذر آن عدد به علاوه یک واحد را نسبت می‌دهد.

د) تابع f برای اعداد کوچک‌تر از ۱- به هر عدد، تفاضل جزء صحیح عدد از خود عدد را نسبت می‌دهد.

۲۱ نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در بازه $[-4, 4]$ رسم کنید.

۲۲ نمودار تابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد آن را بنویسید. ([] نماد جزء صحیح است)

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & -2 \leq x < 0 \\ [x] & 0 \leq x < 2 \end{cases}$$

۲۳ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{x}{3}\right]$ را در بازه $[-2, 4]$ با ارائه راه‌حل رسم کنید. ([] نماد جزء صحیح است)



درس سوم : وارون تابع



توابع یک به یک

۲۴ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) اگر جای مؤلفه‌های اول و دوم را در تمام زوج‌های مرتب یک رابطه جابه‌جا کنیم رابطه به‌دست آمده را وارون آن رابطه می‌گویند.

ب) در رابطه $|y - 1| = x + 1$ ، y تابعی از x نیست.

ج) دو تابع $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ ، $g(x) = \sqrt{x} \times \sqrt{1 - x}$ با هم برابر نیستند.

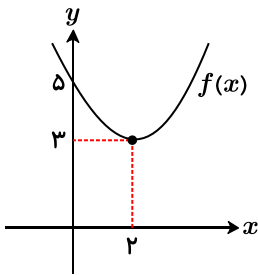
د) شرط لازم و کافی برای آنکه تابع f وارون پذیر باشد، آن است که f تابعی یک‌به‌یک باشد.

۲۵ ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{x-1}{x}$ یک به یک است.





۲۶ تابع وارون تابع شکل مقابل را در محدوده x های قبل از رأس سهمی به دست آورید.



۲۷ اگر وارون تابع $f(x) = 7 + \sqrt{x+2}$ تابع $f^{-1}(x) = x^2 + ax + c$ با دامنه $x \geq 7$ باشد، ابتدا دامنه تابع f و سپس، حاصل عبارت

را به دست آورید. $\frac{c+2}{a+7}$

۲۸ ابتدا مشخص کنید کدام یک از توابع زیر یک به یک است، سپس ضابطه وارون آن را بنویسید.

الف) $f(x) = (x-3)^2 \quad x \geq 0$

ب) $g(x) = |x-1| + 2 \quad x \geq 1$

۲۹ اگر $f(x) = x^3 - 1$ مقدار $f^{-1}(7)$ را به دست آورید.

۳۰ اگر $f = \{(1, 5), (-1, 3), (2, 4), (3, 4)\}$ و $g = \{(3, 5), (4, 4), (5, 6), (2, 0)\}$ توابع زیر را به دست آورید:

الف

g^{-1}

ب

$\frac{f}{g}$

پ

$f \circ g^{-1}$

۳۱ معکوس پذیری تابع زیر را بررسی کنید و تابع وارون آن را بیابید.

$f(x) = x + 2\sqrt{x-3}$

۳۲ در هر یک از حالت های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x) = x^3 - 5$, $g(x) = \sqrt{x+5}$

ب) $f(x) = \sqrt{x-2}$, $g(x) = x^2 + 2, x \geq 0$

۳۳ تابع معکوس تابع زیر را در صورت امکان به دست آورده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

$f(x) = -|x-1| + 1 \quad x \geq 1$

۳۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می آید.

الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به دست آورید.

۳۵ اگر $f(x) = 2 - 3x$ و $(f \circ g^{-1})(x) = 5x - 6$ ، ضابطه تابع g را بیابید.

۳۶ تابع وارون تابع $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}$, $x < 0$ را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.



۳۷ تابع وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5x-2} & x \geq 2 \\ x^3 - 12 & x < 2 \end{cases}$ را در صورت وجود بیابید.

درس چهارم : اعمال روی توابع

چهار عمل اصلی روی توابع

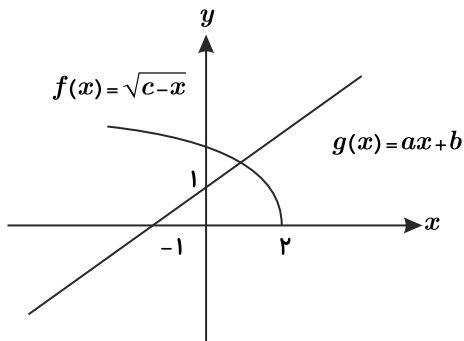
۳۸ توابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x-3}$ را در نظر بگیرید.

الف) مقدار $(f-g)(4)$ را به دست آورید. ب) دامنه تابع $f \circ g$ را بیابید.

۳۹ برای دو تابع $f = \{(0, 1), (1, 4), (2, -6), (3, 3), (4, -1)\}$ و $g = \{(0, -1), (1, -2), (2, 3), (3, 0)\}$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$f + g$	$(f + g)(x) =$	
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) =$	

۴۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارتهای داده شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



الف) $(\frac{f}{g})(0)$

ب) $(f + g)(-2)$

ج) $f(-g(3))$

د) $g \circ f(1) + f \circ g(1)$

۴۱ گزینه درست را تعیین کنید.

الف) اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{x-2}{x+5}$ باشد، در این صورت دامنه تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

- (۱) $[1, +\infty)$ (۲) $[1, +\infty) - \{2\}$ (۳) $\mathbb{R} - \{2, -5\}$ (۴) $\mathbb{R} - \{5\}$

ب) شرط تشکیل تابع $g \circ f$ کدام گزینه است؟

(۱) اشتراک دامنه f و برد g تهی نباشد. (۲) اشتراک دامنه های f, g تهی نباشد.

(۳) اشتراک بردهای f, g تهی نباشد. (۴) اشتراک دامنه g و برد f تهی نباشد.

ج) اگر $f(x) = \sqrt{x-3}$ و $g(x) = \sqrt{a-x} + b$ باشد و بدانیم $D_{f \circ g} = [3, 5]$ و $(f + g)(4) = 7$ ، آنگاه مقدار b کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) ۶ (۳) ۷ (۴) ۸

۴۲ اگر $f = \{(2, 4), (-2, 3), (3, 4)\}$ و $g = \{(2, -2), (1, 7), (3, 0)\}$ باشد، تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

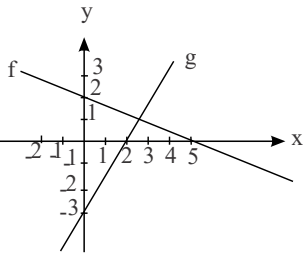
۴۳ اگر $f = \{(1, 2), (3, 4), (2, 5)\}$ و $g = \{(1, 0), (4, 0), (2, 3)\}$ باشد.

الف) تابع $f + g$ را بنویسید.



ب دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

۴۴ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f + g$ ، $f - g$ و $f \cdot g$ را محاسبه کنید.



ترکیب توابع

۴۵ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x}$ باشد، دامنه تابع $g \circ f$ را از راه تعریف به دست آورید.

۴۶ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\}$ تابعی یک به یک باشد، مقدار a برابر است.

ب) در نامعادله $|x + 2| < 3$ ، مجموعه جواب بازه است.

ج) برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ دامنه تابع $f \circ g$ برابر است.

د) اگر $0 < a < 1$ با افزایش مقدار x ، مقادیر تابع $f(x) = a^{-x}$ می‌یابند.

۴۷ اگر $f(x) = \sqrt{1-x}$ و $g(x) = x^2 - 3$ باشد، دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

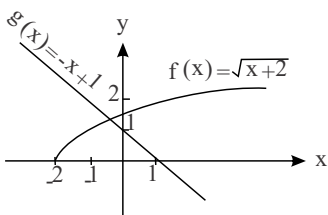
۴۸ فرض کنیم $f(x) = \sqrt{4-x}$ و $g(x) = x^2 + 3$

الف) دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع $f \circ g$ را به دست آورید.

۴۹ اگر $f(x) = 2x + a$ و $f \circ f(x) = bx + 6$ باشد حاصل $a + b$ را به دست آورید.

۵۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارتهای داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



$(f + g)(2)$

$(f + g)(-3)$

$(fg)(\frac{1}{3})$

$(f \circ g)(-4)$

الف

ب


پ

ت



$$\frac{f}{g}(o)$$



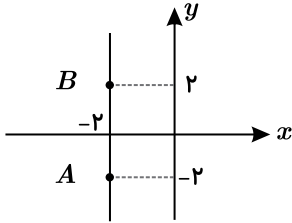

$$(gof)(-1)$$





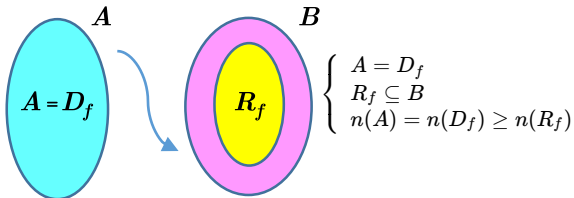
پاسخنامه تشریحی

الف) نادرست: زیرا نقاط A, B روی خطی قائم به معادله $x = -2$ قرار دارند. این خط یک تابع نیست. چون بی‌شمار نقطه با طول $x = -2$ و عرض‌های حقیقی روی این خط قرار دارند.



ب) درست: زیرا هر سهمی با معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نقطه $M(0, c)$ محور عرض‌ها را قطع می‌کند.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \xrightarrow{x=0} f(0) = c$$



ج) درست: زیرا در تابع $f: A \rightarrow B$ همواره داریم:

د) نادرست: برای تساوی دو تابع، دامنهٔ توابع باید با هم برابر باشند. (شرط لازم) و علاوه بر آن باید داشته باشیم:

$$\forall x \in D_f = D_g \Rightarrow f(x) = g(x)$$

بنابراین در دو تابع مساوی، دامنه و برد آنها یکسان است ولی عکس این مطلب صحیح نیست یعنی ممکن است دامنه و برد دو تابع یکسان باشند ولی دو تابع برابر نباشند، مانند:

$$\begin{cases} f = \{(2, 4), (3, 5), (1, 7)\} \\ g = \{(2, 5), (3, 7), (1, 4)\} \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g = \{1, 2, 3\}, R_f = R_g = \{4, 5, 7\}$$

توابع f, g برابر نیستند.

(صفحه ۳۹، ۳۸، ۴۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) نادرست (۲۵، نمره)

ب) درست (۲۵، نمره)

ج) درست (۲۵، نمره)

د) نادرست (۲۵، نمره)

۲) نقطهٔ مرزی دامنهٔ تابع $f, x = 2$ است، پس این نقطه ریشهٔ معادلهٔ کسری تابع f است. در نتیجه:

$$x - b = 0 \xrightarrow{x=2} 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2$$

باید ضابطهٔ دو تابع با هم برابر شوند. تابع f را ساده کرده مساوی تابع g قرار می‌دهیم.

$$x \neq 2: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2 \xrightarrow{f(x)=g(x)} x + 2 = x + c \Rightarrow c = 2$$

از طرفی:

$$f(2) = g(2) \Rightarrow a = 2 + 2 = 4 \Rightarrow a = 4$$

(صفحه ۴۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

نقطهٔ مرزی دامنهٔ تابع $f, x = 2$ است، پس این نقطه ریشهٔ معادلهٔ کسری تابع f است. در نتیجه:

$$x - b = 0 \xrightarrow{x=2} 2 - b = 0 \Rightarrow b = 2 \quad (\text{نمره } 5)$$

$$x \neq 2: f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2 \xrightarrow{f(x)=g(x)} x + 2 = x + c \Rightarrow c = 2 \quad (\text{نمره } 5)$$

$$f(2) = g(2) \Rightarrow 2 + 2 = 4 \Rightarrow a = 4 \quad (\text{نمره } 25)$$

۳ یک رابطه، تابع است. هرگاه از $x_1 = x_2$ بتوان ثابت کرد $y_1 = y_2$.

اول رابطه را بازنویسی می‌کنیم. برای هر $x \geq 0$ یک مقدار منحصر به فرد برای y داریم: توجه کنید که مقادیر زیر رادیکال نمی‌توانند منفی باشند، بنابراین همواره $x \geq 0$ و $y \geq 0$.

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow -\sqrt{x_1} = -\sqrt{x_2} \Rightarrow 1 - \sqrt{x_1} = 1 - \sqrt{x_2} \Rightarrow (1 - \sqrt{x_1})^2 = (1 - \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

بنابراین رابطه داده شده تابع است.

(صفحه ۳۸، ۴۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

اول رابطه را بازنویسی می‌کنیم. برای هر $x \geq 0$ یک مقدار منحصر به فرد برای y داریم:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \Rightarrow \sqrt{y} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow y = (1 - \sqrt{x})^2 \quad (\text{نمره ۲۵})$$

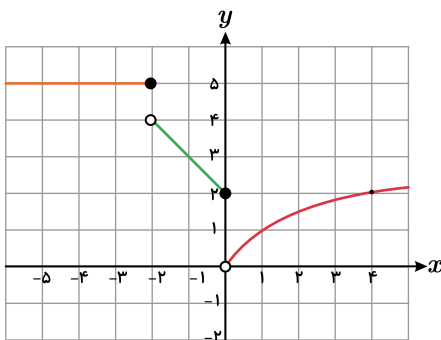
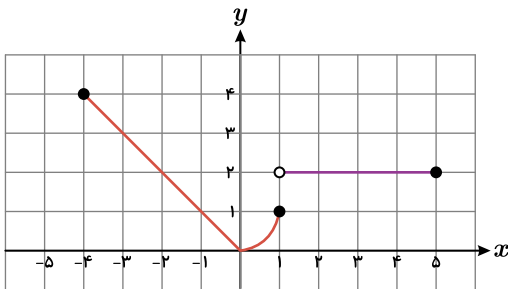
$$x_1 = x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} = \sqrt{x_2} \Rightarrow (1 - \sqrt{x_1})^2 = (1 - \sqrt{x_2})^2 \Rightarrow y_1 = y_2 \quad (\text{نمره ۵})$$

۴

الف

درست

۵

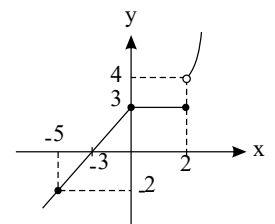


۶

۷

$$f(-5) = -2 \quad D_f = R \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x+3 & x < 0 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

$$\left| \begin{array}{c} -3 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{c} -5 \\ -2 \end{array} \Rightarrow m = \frac{-2-0}{-5+3} = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} y-0 = 1(x+3) \\ y = x+3 \end{array}$$

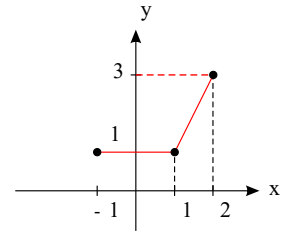


۸ تابع $f(x)$ یک تابع دو ضابطه‌ای است که در بازه $[-1, 1]$ ثابت است و در بازه $[1, 2]$ یک تابع خطی است که از نقاط $(1, 1)$ و $(2, 3)$ گذشته است.



$$f(x) = ax + b \rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(2) = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$$

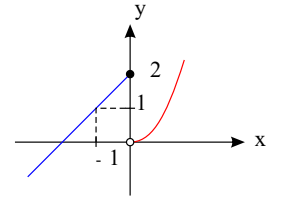
$$\rightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x - 1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} 2 + x & x \leq 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases} \rightarrow \frac{x}{y} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$D = R$$

$$R = R$$



مورد (ب) غیر قابل قبول است. زیرا دامنه تابع تغییر کرده است و با تغییر دامنه، تابع عوض می‌شود. حال باید برد تابع را بیابیم.

$$x \geq -2 \rightarrow x^2 \geq 0 \rightarrow -2x^2 + 3 \leq 3 \rightarrow f(x) \leq 3$$

$$R_f = (-\infty, 3]$$

مورد (الف) غیر قابل قبول است زیرا برد تابع زیرمجموعه هم‌دامنه نمی‌باشد. مورد (ج) قابل قبول است. زیرا برد تابع زیرمجموعه هم‌دامنه است.

$$(-\infty, 3] \not\subset [3, +\infty) \rightarrow \text{(الف) غیر قابل قبول}$$

$$(-\infty, 3] \subset (-\infty, 4) \rightarrow \text{(ج) قابل قبول}$$

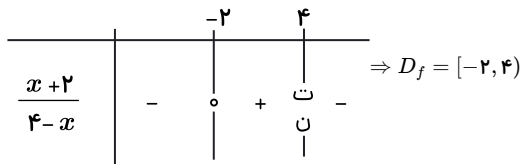
الف) $x = -3$ متعلق به دامنه تابع نیست پس ریشه مخرج کسر است و عرض از مبدا تابع هم 1 است پس داریم:

$$f(x) = \frac{k}{x+m} \Rightarrow x+m = 0 \xrightarrow{x=-3} -3+m = 0 \Rightarrow m = 3, f(0) = \frac{k}{0+3} = 1 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow k+m = 6$$

بنابراین گزینه ۲ صحیح می‌باشد.

(ب)

$$y = \sqrt{\frac{x+2}{4-x}} \Rightarrow \frac{x+2}{4-x} \geq 0$$



در نتیجه اعداد صحیح در این فاصله مجموعه $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ می‌باشد، بنابراین گزینه ۴ درست است.

(ج) دو خط وقتی بر هم عمودند که شیب‌های آنها عکس و قرینه هم باشند. $(m_1 \times m_2 = -1)$ پس:

$$2x + ky - 5 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{-2}{k} \quad (1)$$

$$(k+1)x - y + 3 = 0 \Rightarrow m_2 = k+1 \quad (2)$$

$$m_1 \times m_2 = -1 \xrightarrow{(1),(2)} \frac{-2k-2}{k} = -1 \Rightarrow 2k+2 = k \Rightarrow k = -2$$

بنابراین گزینه ۳ صحیح می‌باشد.

(صفحه ۴۵، ۴۷، ۳۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(۳) گزینه ۳ (۵ نمره)

(۲) گزینه ۴ (۵ نمره)

(۱) گزینه ۲ (۵ نمره)

(الف) ۱۲

$$f(x) = \frac{520x}{200-2x} \Rightarrow f(60) = \frac{520(60)}{200-2(60)} = \frac{31200}{80} = 390 \text{ میلیون تومان}$$

(ب)

$$f(x) = \frac{520x}{200-2x} \Rightarrow 200-2x = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow D_f = (0, 100)$$

درصد آلودگی صفر شدنی نیست و از طرفی میزان درصد آلودگی ۱۰۰ درصد هم نمی‌شود.

(صفحة ۵۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(الف)

$$f(x) = \frac{520x}{200 - 2x} \Rightarrow f(60) = \frac{520(60)}{200 - 2(60)} = \frac{31200}{80} = 390 \text{ میلیون تومان (نمره ۵)}$$

(ب)

$$f(x) = \frac{520x}{200 - 2x} \Rightarrow 200 - 2x = 0 \Rightarrow x = 100 \Rightarrow D_f = (0, 100) \text{ (نمره ۵)}$$

درصد آلودگی صفر شدنی نیست و از طرفی میزان درصد آلودگی ۱۰۰ درصد هم نمی‌شود.

۱۳ با توجه به دامنه داده شده، $x = -3$ تنها ریشهٔ مخرج است. پس دو حالت زیر را داریم:

$$ax^2 + bx + 18 = 0$$

$$\text{حالت ۱ } a = 0 \Rightarrow bx + 18 = 0 \xrightarrow{x=-3} -3b + 18 = 0 \Rightarrow b = 6$$

$$\text{حالت ۲ } a \neq 0 \Rightarrow ax^2 + bx + 18 = a(x+3)^2 = a(x^2 + 6x + 9)$$

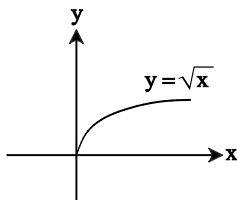
$$\Rightarrow ax^2 + bx + 18 = ax^2 + 6ax + 9a$$

$$\Rightarrow 9a = 18 \Rightarrow a = 2, \quad b = 6a = 6 \times 2 = 12$$

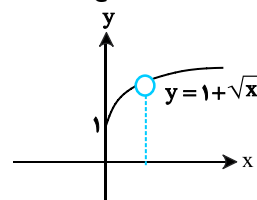
۱۴ $x = 1$ ریشهٔ مخرج است پس دامنهٔ تابع $D_f = R - \{1\}$ است. تابع را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x}$$

تابع در $x = 1$ تعریف نشده است چون ریشهٔ مخرج کسر است. رسم حفره تابع نمره دارد.



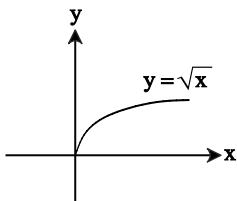
نمودار \sqrt{x} را یک واحد بالا می‌بریم



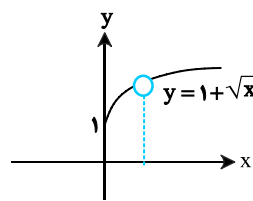
(صفحة ۴۶ تا ۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \text{ (نمره ۲۵)}$$



نمودار \sqrt{x} را یک واحد بالا می‌بریم



تابع در $x = 1$ تعریف نشده است چون ریشهٔ مخرج کسر است. رسم حفره تابع نمره دارد.

۱۵ زیر رادیکال فرجه همواره باید نامنفی باشد، یعنی $xf(x) \geq 0$. به عبارت دیگر بازه‌هایی که همزمان x ، $f(x)$ هم علامت باشند، جزو دامنهٔ تابع اند:

$$\forall x \in [-3, -1] \Rightarrow x \leq 0, f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$

$$\forall x \in [0, 5] \Rightarrow x \geq 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$$



	-۳	-۱	۰	۵	
x	-	-	-	+	+
$f(x)$	+	۰	-	+	۰
$xf(x)$	-	۰	+	۰	-
	جواب		جواب		

$\Rightarrow D_g = [-۳, -۱] \cup [۰, ۵]$

(صفحه ۴۶ تا ۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

باید $xf(x) \geq 0$ باشد، یعنی بازه‌هایی که همزمان x و $f(x)$ هم علامت باشند، جزء دامنه تابع اند.

$\forall x \in [-۳, -۱] \Rightarrow x \leq 0, f(x) \leq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$ (نمره ۲,۵)
 $\forall x \in [۰, ۵] \Rightarrow x \geq 0, f(x) \geq 0 \Rightarrow xf(x) \geq 0$ (نمره ۲,۵) $\Rightarrow D_g = [-۳, -۱] \cup [۰, ۵]$

۱۶ الف روش اول:

فاصله نقطه $M(x_0, y_0)$ از خط $Ax + By + C = 0$ $\rightarrow h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \Rightarrow h = \frac{|0 \times (۲) + 1 \times (-۴) + ۰|}{\sqrt{1}} = \frac{۴}{1} = ۴$

روش دوم: $y = 0$ معادله محور x هاست و فاصله هر نقطه از محور طولها برابر قدرمطلق عرض آن نقطه است.

$A(a, b) \Rightarrow$ فاصله نقطه A تا محور x ها $= |b| \Rightarrow y = 0$ از خط $A(۲, -۴)$ فاصله $= |-۴| = ۴$

(ب) شرط موازی بودن دو خط با شیب‌های m_1, m_2 آن است که: $m_1 = m_2$

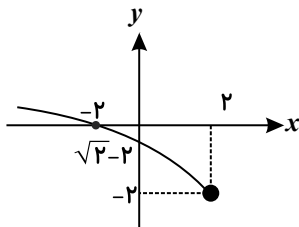
$$\begin{cases} x = ۳y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{۳}x + \frac{1}{۳} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{۳} \\ y = ۳x + 1 \Rightarrow m_2 = ۳ \end{cases}$$

حال $m_1 \neq m_2, m_2 = ۳, m_1 = \frac{1}{۳}$ بنابراین دو خط باهم موازی نیستند.

(ج) عبارت زیر رادیکال فرجه زوج باید همواره نامنفی باشد.

$۴ - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq ۴ \Rightarrow |x| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x \leq ۲ \Rightarrow D_f = [-۲, ۲]$

(د) مطابق شکل مقابل، منحنی نمودار تابع $y = \sqrt{۲-x} - ۲$ فقط از ناحیه اول نمی‌گذرد.



(صفحه ۳۴, ۳۱, ۴۷, ۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) ۴ (نمره ۲,۵)

ب) نیستند (نمره ۲,۵)

ج) $[-۲, ۲]$ (نمره ۲,۵)

د) اول (نمره ۲,۵)

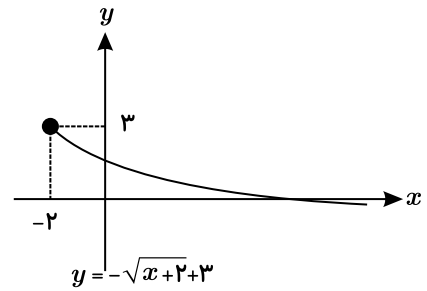
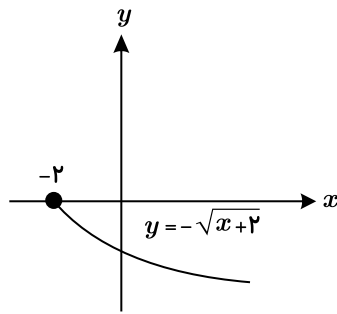
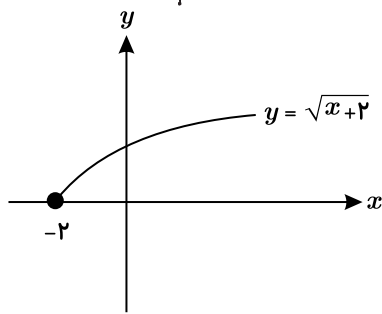
۱۷ برای تعیین دامنه، چون تابع رادیکالی با فرجه دو است، پس زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$f(x) = -\sqrt{x+۲} + ۳ \Rightarrow x+۲ \geq 0 \Rightarrow x \geq -۲ \Rightarrow D_f = [-۲, +\infty)$

برای تعیین برد می‌دانیم: $(\sqrt[n]{u(x)} \geq 0)$ در نتیجه خواهیم داشت:

$\sqrt{x+۲} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+۲} \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+۲} + ۳ \leq ۳ \Rightarrow R_f = (-\infty, ۳]$

نمودار تابع $f(x) = -\sqrt{x+۲} + ۳$ به صورت زیر است.

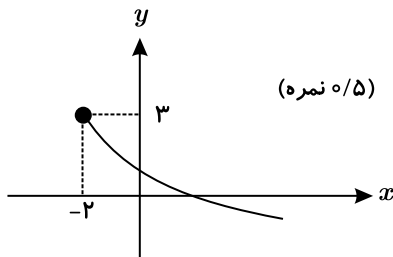


(صفحة ۴۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = -\sqrt{x+2}+3 \Rightarrow x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty) \quad (\text{نمره } ۵)$$

$$\sqrt{x+2} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+2} \leq 0 \Rightarrow -\sqrt{x+2}+3 \leq 3 \Rightarrow R_f = (-\infty, 3] \quad (\text{نمره } ۵)$$



۱۸

$$f(x) = \frac{\sqrt{x(x^2-1)}}{\sqrt{x+|x|}}$$

$$(I) \quad x+|x| > 0 \Rightarrow |x| > -x \Rightarrow x > 0 \quad \frac{x}{x \cdot (x^2-1)} \geq 0 \quad \begin{array}{c|ccc} & -1 & 0 & 1 \\ \hline & - & + & - & + \end{array}$$

$$(II) \quad x(x^2-1) \geq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \cup x \geq 1$$

$$(I) \cap (II) = [1, +\infty)$$

۱۹

$$f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-3} \quad g(x) = \sqrt{x^2-3x}$$

$$D_f = x \geq 0 \cap x \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$$

$$D_g = x(x-3) \geq 0 \Rightarrow x \geq 3 \cup x \leq 0$$

$$D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$$

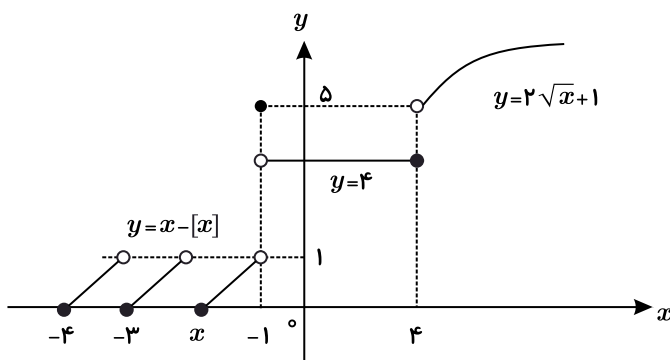
۲۰

در بازه $x < -1$ ضابطه تابع $f(x) = x - [x]$ است.

در نقطه $x = -1$ مقدار تابع $f(-1) = 5$ و در بازه $[-1, 4]$ تابعی ثابت و نمودار آن خطی

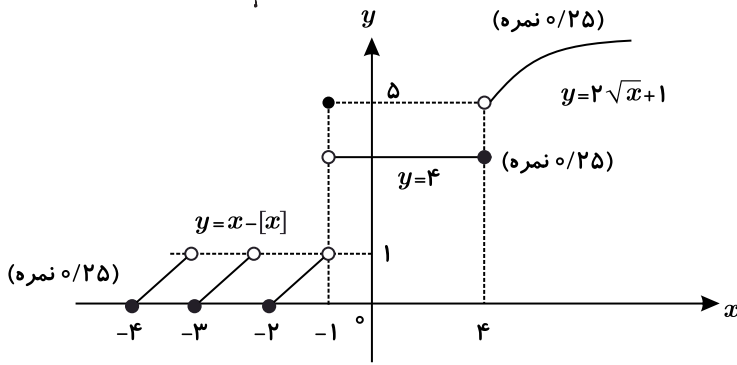
افقی $y = 4$ است: برای $x > 4$ تابع $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ را داریم.

$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & x < -1 \\ 5 & x = -1 \\ 4 & -1 < x \leq 4 \\ 2\sqrt{x} + 1 & x > 4 \end{cases}$$



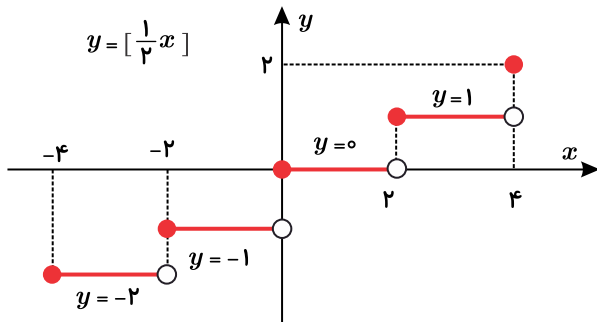
(صفحة ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



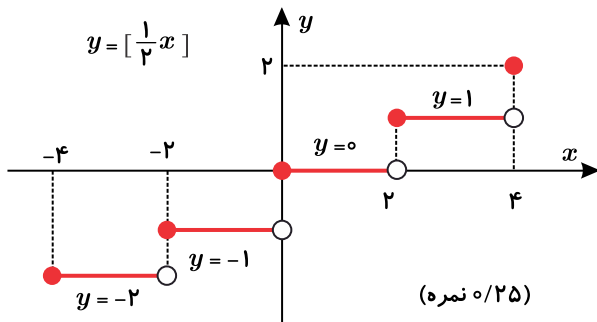
$$f(x) = \begin{cases} x - [x] & x < -1 \\ 2 & x = -1 \\ 4 & -1 < x \leq 4 \\ 2\sqrt{x+1} & x > 4 \end{cases} \quad (\text{نمره } 5)$$

۲۱ برای رسم نمودارهای شامل جزء صحیح، اصلی‌ترین کار، افراز دامنه به زیر بازه‌هایی است که در این بازه‌ها برای جزء صحیح بتوانیم عدد صحیح متناسب با آن را قرار دهیم. در این سؤال ضرب x با $\frac{1}{2}$ است در نتیجه دامنه را به بازه‌های ۲ واحدی تقسیم می‌کنیم.



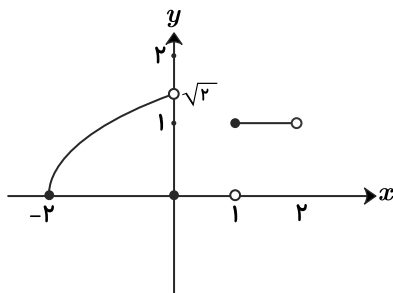
$$\begin{aligned} -4 \leq x < -2 &\Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] = -2 \\ -2 \leq x < 0 &\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] = -1 \\ 0 \leq x < 2 &\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] = 0 \\ 2 \leq x < 4 &\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow f(x) = \left[\frac{1}{2}x\right] = 1 \\ x = 4 &\Rightarrow f(x) = 2 \end{aligned}$$

(صفحه ۵۲ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:



$$\begin{aligned} -4 \leq x < -2 &\Rightarrow -2 \leq \frac{x}{2} < -1 \Rightarrow f(x) = -2 \quad (\text{نمره } 2.5) \\ -2 \leq x < 0 &\Rightarrow -1 \leq \frac{x}{2} < 0 \Rightarrow f(x) = -1 \quad (\text{نمره } 2.5) \\ 0 \leq x < 2 &\Rightarrow 0 \leq \frac{x}{2} < 1 \Rightarrow f(x) = 0 \quad (\text{نمره } 2.5) \\ 2 \leq x < 4 &\Rightarrow 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \Rightarrow f(x) = 1 \quad (\text{نمره } 2.5) \\ x = 4 &\Rightarrow f(x) = 2 \quad (\text{نمره } 2.5) \end{aligned}$$

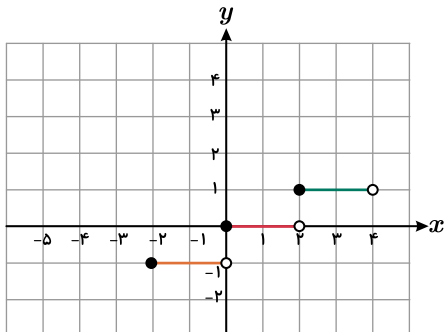
۲۲



$$\begin{aligned} D_f &= [-2, 2) \\ R_f &= [0, \sqrt{2}) \end{aligned}$$

۲۳

$-1 \leq \frac{x}{2} < 0$	$0 \leq \frac{x}{2} < 1$	$1 \leq \frac{x}{2} < 2$
$-2 \leq x < 0$	$0 \leq x < 2$	$2 \leq x < 4$
$f(x) = -1$	$f(x) = 0$	$f(x) = 1$



۲۴ الف) درست؛ متن کتاب درسی صفحه ۵۴

ب) درست؛ برای مثال، به ازای $x = 0$ دو مقدار برای y داریم:

$$|y - 1| = x + 1 \xrightarrow{x=0} |y - 1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y - 1 = 1 \Rightarrow y = 2 \\ y - 1 = -1 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

پس این رابطه تابع نیست.

ج) نادرست؛ دامنه‌ها و ضابطه‌های دو تابع برابر هستند و توابع مساوی‌اند.

$$D_f = D_g = [0, 1], \quad f = \sqrt{x - x^2} = \sqrt{x(1 - x)} \stackrel{0 \leq x \leq 1}{=} \sqrt{x} \times \sqrt{1 - x} = g$$

د) درست؛ متن کتاب درسی صفحه ۵۵

(صفحه ۶۳ تا ۷۰، ۳۸ تا ۴۳، ۵۴ و ۵۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست (۲۵، نمره)

ب) درست (۲۵، نمره)

ج) نادرست (۲۵، نمره)

د) درست (۲۵، نمره)

۲۵

$$f(x) = \frac{x - 1}{x}$$

برای یک به یک بودن باید:

$$\frac{x_1 - 1}{x_1} = \frac{x_2 - 1}{x_2} \Rightarrow \frac{x_1 - 1}{x_1} - \frac{x_2 - 1}{x_2} = 0 \Rightarrow \frac{x_1 x_2 - x_2 - x_1 + 1}{x_1 x_2} = 0 \Rightarrow -x_2 = -x_1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

۲۶ رأس سهمی برابر با $S = (2, 3)$ است؛ بنابراین:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 3 \Rightarrow f(0) = a(0 - 2)^2 + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3 \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2(y - 3)$$

$$\Rightarrow |x - 2| = \sqrt{2(y - 3)} \xrightarrow{x < 2} -x + 2 = \sqrt{2(y - 3)} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{2(y - 3)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2(x - 3)}$$

(صفحه ۶۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = a(x - x_s)^2 + y_s \Rightarrow f(x) = a(x - 2)^2 + 3 \text{ (نمره ۲۵)}$$

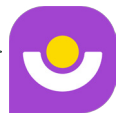
$$f(0) = a(0 - 2)^2 + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$y = \frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)^2 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2(y - 3)$$

$$\Rightarrow |x - 2| = \sqrt{2(y - 3)} \text{ (نمره ۲۵)} \xrightarrow{x < 2} -x + 2 = \sqrt{2(y - 3)} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow x = 2 - \sqrt{2(y - 3)} \Rightarrow f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{2(x - 3)} \text{ (نمره ۵)}$$

۲۷



$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow D_f = [-2, +\infty)$$

$D_f = [-2, +\infty)$, $f(x)$ دامنه تابع $D_{f^{-1}} = [7, +\infty)$ است.

سپس ضابطه تابع وارون f را به دست می آوریم:

$$y = 7 + \sqrt{x+2} \Rightarrow y - 7 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (y-7)^2 = x+2 \Rightarrow (y-7)^2 - 2 = x \xrightarrow{\text{جابجایی کردن } y \text{ و } x}$$

$$y = x^2 - 14x + 47 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 14x + 47 \Rightarrow a = -14, c = 47$$

$$\Rightarrow \frac{c+2}{a+7} = \frac{47+2}{-14+7} = -7$$

(صفحه ۶۱، ۶۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$D_f = [-2, +\infty) \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$y - 7 = \sqrt{x+2} \Rightarrow (y-7)^2 = x+2 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow x = (y-7)^2 - 2 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 14x + 47 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow \frac{c+2}{a+7} = \frac{47+2}{-14+7} = -7 \text{ (نمره ۵)}$$

۲۸ f یک به یک نیست؛ زیرا برای مثال $f(0) = f(6) = 9$.

g یک به یک است.

$$g(x) = |x-1| + 2 \xrightarrow{x \geq 1} y = x-1+2 \Rightarrow y = x+1 \Rightarrow y-1 = x \Rightarrow g^{-1}(x) = x-1$$

$$f^{-1}(7) = a \Rightarrow f(a) = 7 \Rightarrow a^2 - 1 = 7 \Rightarrow a = 2$$

$$g^{-1} = \{(5, 3), (4, 4), (6, 5), (0, 2)\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(3, \frac{4}{5})\}$$

$$f \circ g^{-1} = \{(5, 4), (0, 4)\}$$

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3} \Rightarrow (\sqrt{x-3} + 1)^2 + 2$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (\sqrt{x_1-3} + 1)^2 + 2 = (\sqrt{x_2-3} + 1)^2 + 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1-3} + 1 = \sqrt{x_2-3} + 1 \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ یک به یک است.}$$

$$y = (\sqrt{x-3} + 1)^2 + 2 \quad (x \geq 3) \Rightarrow y \geq 3$$

$$y - 2 = (\sqrt{x-3} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y-2} = \sqrt{x-3} + 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{y-2} - 1 = \sqrt{x-3} \Rightarrow 2 \text{ توان } \Rightarrow (\sqrt{y-2} - 1)^2 + 3 = x \xrightarrow{y \rightarrow x} y = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + 3$$

$$\begin{cases} f^{-1}: [3, +\infty) \Rightarrow [3, +\infty) \\ f^{-1}(x) = (\sqrt{x-2} - 1)^2 + 3 \end{cases}$$

۳۲

$$f(x) = x^2 - 5 = y \Rightarrow x = \sqrt{y+5} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+5} = g(x)$$

$$\text{الف) } g(x) = \sqrt{x+5} = y \Rightarrow x+5 = y^2 \Rightarrow x = y^2 - 5 \Rightarrow g^{-1}(x) = x^2 - 5 = f(x)$$



$$f(x) = \sqrt{x-2}, x \geq 2, y \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} = y \Rightarrow x = y^2 + 2 \rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 2, x \geq 0, y \geq 2$$

$$g(x) = x^2 + 2, x \geq 0 \Rightarrow y \geq 2 \Rightarrow x^2 + 2 = y \Rightarrow x^2 = y - 2 \xrightarrow{x \geq 0} x = \sqrt{y-2}$$

ب) $\Rightarrow g^{-1}(x) = \sqrt{x-2} = f(x)$

۳۳

$$x \geq 1 \Rightarrow |x-1| = x-1 \Rightarrow f(x) = -(x-1) + 1 = -x + 2$$

$$x \geq 1 \Rightarrow -x \leq -1 \Rightarrow -x + 2 \leq -1 + 2 \Rightarrow y \leq 1$$

$$f(x) = -x + 2 \quad D_f = [1, +\infty), R_f = (-\infty, 1]$$

تابع یک به یک است. $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -x_1 + 2 = -x_2 + 2 \Rightarrow x_1 = x_2$

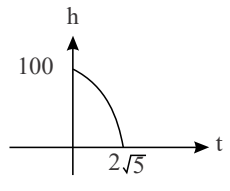
$$y = -x + 2 \Rightarrow x = 2 - y \Rightarrow y = f^{-1}(x) = 2 - x, D_{f^{-1}} = (-\infty, 1], R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$

۳۴ الف) برد تابع h همان ارتفاع ۱۰۰ متر است یعنی بازه بسته $[0, 100]$ و برای یافتن دامنه تابع h باید مدت زمان رسیدن به زمین را بیابیم یعنی باید معادله $h = 0$ را حل کنیم.

$$h = 0 \Rightarrow 100 - \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = 100 \Rightarrow t^2 = \frac{100}{\Delta} = 20 \Rightarrow t = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$\Rightarrow 0 \leq t \leq 2\sqrt{5} \Rightarrow D_h = [0, 2\sqrt{5}], R_h = [0, 100]$

ب) نمودار تابع h بر حسب t به صورت مقابل است. از نمودار واضح است که تابع h تابعی یک به یک است.



۳۵

$$h = 100 - \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = 100 - h \Rightarrow t^2 = 20 - \frac{1}{\Delta}h$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{20 - \frac{1}{\Delta}h} \Rightarrow h^{-1}(t) = \sqrt{20 - \frac{1}{\Delta}t} \quad 0 \leq t \leq 100$$

$$f(x) = 2 - 3x$$

$$(f \circ g^{-1})(x) = \Delta x - 6 \Rightarrow f(g^{-1}(x)) = \Delta x - 6$$

یعنی در تابع f به جای x ، $g^{-1}(x)$ را قرار دهیم، پس داریم:

$$2 - 3g^{-1}(x) = \Delta x - 6 \Rightarrow -3g^{-1}(x) = \Delta x - 8 \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{1}{3}(8 - \Delta x)$$

$$y = \frac{1}{3}(8 - \Delta x) \Rightarrow 3y = 8 - \Delta x \Rightarrow \Delta x = 8 - 3y \Rightarrow x = \frac{8}{\Delta} - \frac{3}{\Delta}y \Rightarrow y = g(x) = \frac{8}{\Delta} - \frac{3}{\Delta}x$$

۳۶

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}, x < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3} = y \Rightarrow x^2 - 1 = 2x^2y + 3y$$

$$\Rightarrow x^2(1 - 2y) = 1 + 3y \Rightarrow x^2 = \frac{1 + 3y}{1 - 2y}$$

$$x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1 + 3y}{1 - 2y} > 0 \Rightarrow \frac{y}{1-2y} \Big| \begin{array}{c} -\infty \quad -\frac{1}{3} \\ \hline - \quad 0 \quad + \quad \infty \\ \hline \end{array} \Rightarrow -\frac{1}{3} < y < \frac{1}{2}$$

$$(1) \Rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}} \Rightarrow |x| = \sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}} \xrightarrow{x < 0} -x = \sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}}$$

$$\Rightarrow x = -\sqrt{\frac{1 + 3y}{1 - 2y}} \Rightarrow y = f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1 + 3x}{1 - 2x}}, D_{f^{-1}} = R_f = \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{2}\right)$$

۳۷



$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{5x-2}, & x \geq 2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt[5]{5x_1-2} = \sqrt[5]{5x_2-2} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ x^3 - 12, & x < 2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 - 12 = x_2^3 - 12 \Rightarrow x_1^3 = x_2^3 \Rightarrow x_1 = x_2 \end{cases}$$

$$x \geq 2 \Rightarrow 5x \geq 10 \Rightarrow 5x - 2 \geq 8 \Rightarrow \sqrt[5]{5x-2} \geq 2 \Rightarrow y \geq 2 \quad (1)$$

$$x < 2 \Rightarrow x^3 < 8 \Rightarrow x^3 - 12 < 8 - 12 \Rightarrow y < -4 \quad (2)$$

چون اشتراک (1) و (2) تهی است، پس تابع f یک به یک و وارون پذیر است.

$$y = \sqrt[5]{5x-2} \Rightarrow 5x - 2 = y^5 \Rightarrow x = \frac{1}{5}(y^5 + 2) \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \frac{1}{5}(x^5 + 2)$$

$$y = x^3 - 12 \Rightarrow x^3 = y + 12 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y+12} \Rightarrow f^{-1}(x) = y = \sqrt[3]{x+12}$$

با توجه به اینکه دامنه تابع وارون برابر با برد تابع اصلی است داریم:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}(x^5 + 2), & x \geq 2 \\ \sqrt[3]{x+12}, & x < -4 \end{cases}$$

۳۸

$$\text{الف) } (f-g)(4) = 3 \left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3} \right) = -2$$

$$\text{ب) } D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [3, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 4\} \\ = [3, +\infty) - \{4\}$$

(صفحة ۶۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{الف) } (f-g)(4) = 3 \left(\frac{1}{4-1} - \sqrt{4-3} \right) \text{ (نمره ۲۵, ۲۵)} = -2$$

$$\text{ب) } D_f = \mathbb{R} - \{1\}, D_g = [3, +\infty) \text{ (نمره ۲۵, ۲۵)}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [3, +\infty) \mid \sqrt{x-3} \neq 1 \Rightarrow x \neq 4\} \\ = [3, +\infty) - \{4\} \text{ (نمره ۲۵, ۲۵)}$$

۳۹ در نمایش توابع به صورت زوج‌های مرتب، وقتی مؤلفه‌های اول دو زوج از دو تابع یکسان بودند برای اعمال جبری، زوج مرتبی می‌نویسیم و مؤلفه اول را قرار داده و برای تعیین مؤلفه دوم نگاه می‌کنیم چه عملی باید انجام داد، آن عمل را روی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب انجام می‌دهیم.

تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x) = \{(0, 0), (1, 2), (2, -3), (3, 3)\}$	$\{0, 1, 2, 3\}$
$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x) = \{(0, -1), (1, -2), (2, -2)\}$	$\{0, 1, 2\}$

(صفحة ۶۴ تا ۶۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$(f+g)(x) = \{(0, 0), (1, 2), (2, -3), (3, 3)\} \quad \{0, 1, 2, 3\} \text{ (نمره ۵)}$$

$$(\frac{f}{g})(x) = \{(0, -1), (1, -2), (2, -2)\} \quad \{0, 1, 2\} \text{ (نمره ۷۵)}$$

۴۰ تابع $g(x)$ خط گذرا از دو نقطه $(0, 1)$ و $(-1, 0)$ است؛ بنابراین معادله آن به صورت زیر است:

$$\begin{cases} g(-1) = -a + b = 0 \\ g(0) = b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow g(x) = x + 1$$

از طرفی برای تابع $f(x)$ داریم:

(صفحة ۶۳ تا ۷۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(x) = \sqrt{c-x} \Rightarrow f(2) = \sqrt{c-2} = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow f(x) = \sqrt{2-x}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$(f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = 2 + (-1) = 1$$

$$f(-g(3)) = f(-(-4)) = \sqrt{6}$$

$$\frac{f(1)=1}{g(1)=2} \rightarrow gof(1) + fog(1) = g(1) + f(2) = 2 + 0 = 2$$

$$\xrightarrow{(0,1),(-1,0)} g(x) = x + 1 \quad (\text{نمره } 25)$$

$$\xrightarrow{c=2} f(x) = \sqrt{2-x} \quad (\text{نمره } 25)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } 25)$$

$$(f+g)(-2) = 1 \quad (\text{نمره } 25)$$

$$f(-g(3)) = f(-(-4)) = \sqrt{6} \quad (\text{نمره } 25)$$

$$gof(1) + fog(1) = g(1) + f(2) = 2 + 0 = 2 \quad (\text{نمره } 25)$$

الف گزینه ۲:

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} \Rightarrow D_{\frac{f}{g}} = [1, +\infty) \cap (\mathbb{R} - \{-5\}) - \left\{x \mid \frac{x-2}{x+5} = 0\right\} = [1, +\infty) - \{2\}$$

ب) گزینه ۴: شرط تشکیل تابع gof آن است که مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند، به عبارت دیگر اشتراک دامنه g و برد f تهی نباشد.

$$R_f \cap D_g \neq \emptyset$$

ج) گزینه ۱:

$$f(x) = \sqrt{x-3} \Rightarrow D_f = [3, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{a-x} + b \Rightarrow D_g = (-\infty, a]$$

$$D_{f \times g} = D_f \cap D_g = [3, a] = [3, 5] \Rightarrow a = 5$$

$$(f+g)(4) = f(4) + g(4) = \sqrt{4-3} + \sqrt{5-4} + b = 2 \Rightarrow b = 5$$

(صفحة ۶۳ تا ۷۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۲ (۵ نمره) ب) گزینه ۴ (۵ نمره) ج) گزینه ۱ (۵ نمره)

۴۲

$$\frac{f}{g} = \{(2, -2)\}$$

۴۳

$$f+g = \{(1, 2), (2, 8)\}$$

الف

$$D_{\frac{f}{g}} = 2$$

ب

۴۴ تابع f تابع خطی است که از نقاط $(0, 2)$ و $(5, 0)$ می‌گذرد پس داریم:

$$m = \frac{2-0}{0-5} = -\frac{2}{5} \Rightarrow y-2 = -\frac{2}{5}(x-0) \Rightarrow y = f(x) = -\frac{2}{5}x + 2, D_f = \mathbb{R}$$

تابع g تابع خطی است که از نقاط $(0, -3)$ و $(2, 0)$ می‌گذرد، پس داریم:

$$m = \frac{-3-0}{0-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y - (-3) = \frac{3}{2}(x-0) \Rightarrow y = g(x) = \frac{3}{2}x - 3, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_{f+g} = \mathbb{R}, (f+g)(x) = f(x) + g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 + \frac{3}{2}x - 3$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \frac{11}{10}x - 1$$



$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = -\frac{2}{5}x + 2 - \frac{3}{2}x + 3 = -\frac{19}{10}x + 5, D_{f-g} = \mathbb{R}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \left(-\frac{2}{5}x + 2\right)\left(\frac{3}{2}x - 3\right) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{5}x + 3x - 6$$

$$(f \cdot g)(x) = -\frac{3}{5}x^2 + \frac{21}{5}x - 6, D_{f \cdot g} = \mathbb{R}$$

۴۵ (۱) ابتدا دامنه دو تابع را به دست آورید.

(۲) فرمول دامنه ترکیب را بنویسید.

(۳) با استفاده از فرمول و محدودیت‌های هر دامنه، دامنه تابع مرکب را حساب کنید.

$$f(x) = \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4x} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} = \left\{ x \in \mathbb{R} | \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \neq 0, 4 \right\} = (0, +\infty) - \{4\}$$

(صفحه ۶۸، ۶۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$D_f = \mathbb{R} \text{ و } D_g = \mathbb{R} - \{0, 4\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)} = \left\{ x \in \mathbb{R} | \sqrt{x+|x|} = \begin{cases} \sqrt{2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \neq 0, 4 \right\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)}$$

$$= (0, +\infty) - \{4\} \text{ (نمره ۰, ۲۵)}$$

۴۶ الف ۲:

$$f = \{(-2, 2), (m, 3), (-1, 3), (2m, a)\} \xrightarrow{(m, 3) = (-1, 3)} m = -1 \xrightarrow{(2m, a) = (-2, 2)} a = 2$$

ب) $(-5, 1)$:

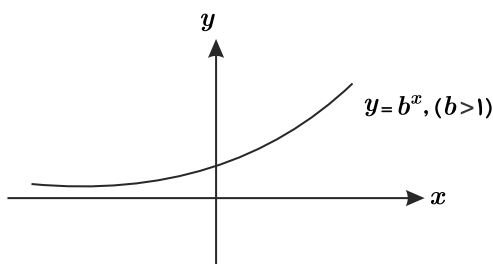
$$|x + 2| < 3 \Rightarrow -3 < x + 2 < 3 \Rightarrow -5 < x < 1 \Rightarrow x \in (-5, 1)$$

ج) $\mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$:

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}, D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_{f \circ g} = \{x | x \in D_g = \mathbb{R} - \{0\}, \frac{f}{x} \neq 3\} = \mathbb{R} - \{0, \frac{f}{3}\}$$

د) افزایش:

$$f(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \xrightarrow{0 < a < 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} > 1} y = b^x$$



(صفحه ۵۵ و ۲۳ تا ۲۸ و ۷۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف ۲ (نمره ۰, ۲۵)

ب) $(-5, 1)$ (نمره ۰, ۲۵)

ج) $\mathbb{R} - \{0, \frac{4}{3}\}$ (نمره ۰, ۲۵)

د) افزایش (نمره ۰, ۲۵)

۴۷

$$D_f = (-\infty, 1] \text{ یا } x \leq 1 \text{ و } D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 3 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$$

۴۸



الف

$$D_g = \mathbb{R}, D_f = (-\infty, 4] \rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{x^2 + 3}_{*} \in (-\infty, 4]\} = [-1, 1]$$

$$* : x^2 + 3 \leq 4 \rightarrow x^2 \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$f \circ g(x) = \sqrt{4 - (x^2 + 3)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(x) = 2x + a \xrightarrow{x = f(x)} f(f(x)) = 2f(x) + a$$

$$bx + 6 = 2f(x) + a \xrightarrow{f(x) = 2x + a} bx + 6 = 2(2x + a) + a \Rightarrow bx + 6 = 4x + 3a \Rightarrow 4 = b$$

$$3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a + b = 6$$

ب

٤٩

٥٠

الف

$$f(x) = \sqrt{x + 2}, D_f = [-2, +\infty)$$

$$g(x) = -x + 1, D_g = \mathbb{R}$$

$$D_f \cap D_g = [-2, +\infty) \Rightarrow D_{f+g} = [-2, +\infty)$$

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = \sqrt{4} + (-2 + 1) = 2 + (-1) = 1$$

$$-3 \notin [-2, +\infty) \Rightarrow (f+g)(-3) = \text{تعريف نشده}$$

$$(fg)\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)g\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + 2} \times \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \sqrt{\frac{5}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$(f \circ g)(-4) = f(g(-4)) = f(4) = \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$(g \circ f)(-1) = g(f(-1)) = g(\sqrt{-1 + 2}) = g(1) = -1 + 1 = 0$$

ب

پ

ن

ث

ج



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۳

یازدهم

سال یازدهم

ریاضی

فهرست

_____ درس اول : تابع نمایی _____

۱..... تابع نمایی، معادلات و نامعادلات نمایی

_____ درس دوم : تابع لگاریتمی و لگاریتم _____

۲..... تابع لگاریتمی، تعریف لگاریتم و شرایط آن

_____ درس سوم : ویژگی های لگاریتم و حل معادله های لگاریتمی _____

۳..... ویژگی های لگاریتم

۴..... معادلات و نامعادلات لگاریتمی و مسائل کاربردی



درس اول : تابع نمایی



تابع نمایی، معادلات و نامعادلات نمایی

۱ نیمه عمر یک ماده هسته ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده، ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می ماند را محاسبه کنید.

۲ تحت شرایط ایده آل جرم یک توده معین از باکتری‌ها، در هر ساعت ۳ برابر می شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی گرم باکتری وجود دارد.

الف جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب جرم توده را پس از ۱۰ ساعت، برآورد کنید.

پ جرم توده پس از چند ساعت، ۲۴۳۰۰ میلی گرم خواهد شد؟

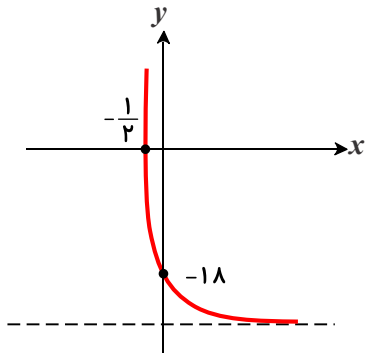
۳ تابع $f(x) = 3^x$ را در نظر بگیرید.

الف برد تابع را بنویسید.

ب وارون تابع $f(x)$ چیست؟

۴ خط $y = 10$ نمودار تابع $y = (0.7)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می کند؟ (راه حل نوشته شود)

۵ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = -27 + \left(\frac{1}{3}\right)^{ax+b}$ است. $f(-1)$ کدام است؟



۶ اگر $f(x) = 2^{x+1} - 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(27)$ بیابید.

۷ نیمه عمر عنصری ۵۰ سال است. اگر جرم اولیه آن ۴۸ میلی گرم باشد، بعد از ۲۵ سال جرم این عنصر چقدر خواهد بود؟

۸ یکی از معادلات زیر را حل کنید.

$$۱) \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} \quad \text{و} \quad ۲) 4^{3x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x$$

۹ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف هر تابع با ضابطه $f(x) = ka^x$ با شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ و $k \neq 0$ رفتار نمایی دارد.

ب نمودار تابع $y = 3^x$ همواره بالای نمودار تابع $y = 2^x$ قرار دارد.

ج دو تابع $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = -\log_2 x$ وارون یکدیگرند.

د لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

ه دامنه تابع های $f(x) = \log_2 x$ و $g(x) = 2^x$ برابر است.





۱۰ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $\frac{1}{\sqrt{7}} = \log_3 A$ باشد، آنگاه مقدار A برابر است با

ب) دامنه تابع $y = \log_3(1 - x^2)$ برابر است.

ج) تابع $y = -2^x + 2$ تابعی است. (صعودی، نزولی)

د) خط $y = 81$ نمودار تابع $y = 3^x$ را در نقطه قطع می کند.

ه) نمودار دو تابع $f(x) = 2^x$ و $g(x) = x^2$ در نقطه همدیگر را قطع می کنند.

۱۱ نقطه تلاقی تابع $f(x) = 9 - 3^{2x+1}$ با محور x ها را بیابید.

۱۲ نمودار تابع نمایی $f(x) = -2 - 3^x$ را رسم کنید.

۱۳ ضابطه وارون تابع $f(x) = 3^{x+2}$ را به دست آورید.

۱۴ اگر نمودار تابع نمایی $y = 2^x$ خط $y = \frac{13}{4}$ را قطع کند. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

۱۵ اخیراً داروی مسکن جدیدی به بازار عرضه شده است که هر قرص آن شامل ۳۰۰ میلی گرم از ترکیبات دارویی فعالی است که با گذشت هر یک ساعت از زمان مصرف، مقدار آن در خون بیمار نصف می شود.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار داروی باقی مانده (میلی گرم)	۳۰۰	۱۵۰

ب) فرمولی بنویسید که مقدار دارو را در خون بیمار پس از گذشت t ساعت نشان دهد.

۱۶ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$9^x - 7 \times 3^x = 18$$

۱۷ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 5^x - 2$ ب) $y = 5^x + 1$

۱۸ دستگاه مقابل را حل کنید.

$$\begin{cases} 2^{2x-y} = 32 \\ 3^{x+2y} = 1 \end{cases}$$



درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم



تابع لگاریتمی، تعریف لگاریتم و شرایط آن

۱۹ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ و $g(x) = \log(4-x)$ باشد، مطلوب است محاسبه‌ی دامنه‌ی تعریف توابع f و $g \circ f$.

۲۰ حدود t را چنان بیابید که تابع $y = \left(\frac{3}{4} - t\right)^x$ یک تابع نمایی باشد.

۲۱ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف

$$2 \log_7 8 - 3 \log_5 \sqrt[3]{5} + 2^{\log_2 3}$$

ب

$$3 \log_{10} 1000 + \log \sqrt[3]{100} + \log_5 \frac{1}{25}$$



پ

$$\log_2 22 + \log_{\frac{1}{2}} 81 + \log_{\sqrt{3}} 9\sqrt{3}$$

ت

$$2 \log_7 5 - \log_7 3$$

ث

$$\log_{\sqrt{5}} 8 + 5^{(1+\log_5 4)}$$

ج

$$\log_5 \sqrt{125} + \log_7 2 + \log_{0.1}$$

ح

$$\log_3 (\log_3 (\log_5 125))$$

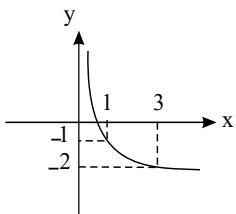
خ

$$\log_6 5 \times \log_7 6 \times \log_8 7 \times \dots \times \log_{24} 24$$

$$\frac{1}{\log_2 24} + \frac{1}{\log_3 24} + \frac{1}{\log_4 24}$$

۲۲ دامنه تابع $f(x) = \log_{1-x} \left(\frac{x+1}{x} \right)$ را بیابید.

۲۳ اگر نمودار تابع $y = a + \log_b^x$ بصورت مقابل باشد، ضابطه‌ی تابع را بیابید.



درس سوم : ویژگی های لگاریتم و

حل معادله های لگاریتمی

ویژگی های لگاریتم

۲۴ اگر $\log 2 = a$ و $\log 3 = b$ باشد، حاصل $\log \sqrt{0.75}$ را بر حسب a و b به دست آورید.

۲۵ حاصل عبارت $\log_7 \sqrt[3]{49^2}$ کدام گزینه است؟

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{1}{3} \quad (3)$$

$$\frac{4}{3} \quad (2)$$

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

۲۶ اگر $f(x) = \log_3 (7x^2 - 1)$ ، مقدار $f^{-1}(3)$ را به دست آورید. (راه حل نوشته شود)

۲۷ با فرض $\log 2 = 0.3$ ، مقدار $\log_2 25$ را به دست آورید.

۲۸ حاصل عبارت $\log_{10} 5\sqrt{2} + \log_{10} 2\sqrt{5}$ را به دست آورید.

۲۹ حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt{32} - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{27}$$

۳۰ اگر $f(x) = 3 - 2 \log_3 \left(\frac{x}{4} + 2 \right)$ ، مقدار $f(28)$ را به دست آورید.





۳۱ اگر $\log 2 = 0,3$ و $\log 3 = 0,4$ باشد، حاصل $\sqrt[3]{45}$ را به دست آورید.

۳۲ نشان دهید اگر $c > 0$ و a و b و $c \neq 1$ آنگاه: $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$

۳۳ اگر نمودار تابع $f(x) = 2 + \log_a^x$ از نقطه $(-2, \frac{1}{3})$ عبور کند، آنگاه مقدار a را به دست آورید.

۳۴ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$A = \log_3 \left(\frac{9}{\sqrt[3]{27}} \right) + \log_{0,001}$$

۳۵ اگر $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ و $\log 7 = c$ باشند، حاصل عبارت‌های زیر را بر حسب a , b و c بیابید.

الف) $\log \sqrt[3]{0,084}$ ب) $\log \frac{1}{2100}$

معادلات و نامعادلات لگاریتمی و مسائل کاربردی

۳۶ معادله لگاریتمی $\log_2(x+7) - \log_2(x-2) = 2$ را محاسبه کنید.

۳۷ معادله لگاریتمی زیر را حل کنید.

$$\log(x-1) + \log\left(\frac{x}{3} + 1\right) = \log 18 - \log 2$$

۳۸ نیمه عمر عنصری ۲۵ سال است. اگر جرم اولیه آن ۲۴ میلی گرم باشد، بعد از ۴۰ سال جرم این عنصر چقدر خواهد بود؟ $2^{-1,6} \approx 0,32$

۳۹ معادله لگاریتمی مقابل را حل کرده و مجموعه جواب را مشخص کنید.

$$\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2$$

۴۰ معادله لگاریتمی $\log(x+3) + \log(x-3) - \log x = 3 \log 2$ را حل کنید.

۴۱ نیمه عمر یک ماده ۴۸ ساعت است. اگر ۲۵۶ گرم از این ماده را در اختیار داشته باشیم، جرمی که پس از ۹۶ ساعت باقی می‌ماند، چقدر است؟

۴۲ معادله زیر را حل کنید.

$$3\sqrt{\log_2 x} - \log_2 2x = 1$$

۴۳ معادله لگاریتمی $\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$ را حل کنید.

۴۴ معادله لگاریتمی $\log x + \log(x-1) + 3 \log 2 = 1 + \log 3$ را حل کنید.

۴۵ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_2 x^2 + \log_2(2-x) = 0$

ب) $\log_x(x+1) + \log_x(2x+1) = \log_x 6$

۴۶ نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده ۲۴ میلی گرم باشد، به کمک تابع نمایی:

الف) جرم باقیمانده این ماده پس از ۵۰ سال را بیابید.

ب) بعد از چند سال جرم باقیمانده برابر ۳ میلی گرم می‌شود.

۴۷ در آبان‌ماه ۱۳۹۶ زلزله‌ای با قدرت ۷٫۳ ریشتر شهرستان کرمانشاه را لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ را به دست آورید.

۴۸ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(3, \frac{1}{3})$ و $(\frac{1}{3}, -3)$ عبور کند، مقدار a چقدر است؟

۴۹ مجموعه جواب نامعادله $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3x-9}) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-4)$ را به دست آورید.

۵۰ معادله $\log_3(x-1) + \log_3\left(\frac{x}{3} + 1\right) = 2$ را حل کنید.



پاسخنامه تشریحی



$$m(t) = m_0 \times 2^{\frac{-t}{n}} \rightarrow m(t) = 128 \times 2^{\frac{-t}{30}} \rightarrow m(300) = 128 \times 2^{\frac{-300}{30}} = 2^7 \times 2^{-10} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$f(t) = 100 \times (3)^t$$

$$f(10) = 100 \times 3^{10} \Rightarrow f(10) = 5904900$$

$$f(t) = 24300 = 100 \times (3)^t \Rightarrow t = 5$$

$$R = (0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \log_3 x$$

$$10 = (0.01)^x \Rightarrow 10 = (10^{-2})^x \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

۵ با توجه به شکل، مختصات دو نقطه $A(0, -18)$ و $B(-\frac{1}{3}, 0)$ واقع بر منحنی را در ضابطه تابع جای گذاری می‌کنیم:

$$f(0) = -27 + (\frac{1}{3})^b = -18 \Rightarrow 3^{-b} = 3^2 \Rightarrow b = -2$$

$$f(-\frac{1}{3}) = -27 + (\frac{1}{3})^{\frac{a}{3}-2} = 0 \Rightarrow 3^{\frac{a}{3}+2} = 3^3 \Rightarrow \frac{a}{3} + 2 = 3 \Rightarrow a = 3$$

$$f(x) = -27 + (\frac{1}{3})^{x-2} \Rightarrow f(-1) = -27 + 3^4 = -27 + 81 = 54$$

(صفحة ۴۷ تا ۷۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$f(0) = -27 + (\frac{1}{3})^b = -18 \Rightarrow 3^{-b} = 3^2 \Rightarrow b = -2 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$f(-\frac{1}{3}) = -27 + (\frac{1}{3})^{\frac{a}{3}-2} = 0 \Rightarrow 3^{\frac{a}{3}+2} = 3^3 \Rightarrow \frac{a}{3} + 2 = 3 \Rightarrow a = 3 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$f(x) = -27 + (\frac{1}{3})^{x-2} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow f(-1) = -27 + 3^4 = -27 + 81 = 54 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$f^{-1}(27) = a \rightarrow f(a) = 27$$

$$2^{a+1} - 5 = 27 \rightarrow 2^{a+1} = 32 = 2^5 \rightarrow a + 1 = 5 \rightarrow a = 4$$

۷ اگر مقدار یا جمعیت با گذشت h ساعت (دقیقه یا سال) k برابر شود. مقدار یا جمعیت در ساعت at به صورت $A(t) = A_0 k^{\frac{t}{a}}$ خواهد بود.

A_0 : مقدار اولیه

t : زمانی است که می‌خواهیم میزان رشد یا زوال را طی آن مدت اندازه‌گیری کنیم.

h : دوره زمانی است که در آن A_0 , k برابر می‌شود.

$$A(t) = A_0 (\frac{1}{3})^{\frac{t}{5}} = 48 (\frac{1}{3})^{\frac{25}{5}} \Rightarrow A(25) = 48 (\frac{1}{3})^5 = 48 (\sqrt{\frac{1}{3}}) = 48 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 24\sqrt{3}$$

(صفحة ۷۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$A(t) = A_0 \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{t}{5}} = 48 \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{25}{5}} \quad (\text{نمره } 25, 25) \Rightarrow A(25) = 48 \left(\frac{1}{p}\right)^5 \quad (\text{نمره } 25, 25)$$

$$= 48 \left(\sqrt{\frac{1}{p}}\right) = 48 \times \frac{\sqrt{p}}{p} = 24\sqrt{p} \quad (\text{نمره } 25, 25)$$

۸

ابتدا سعی می‌کنیم با ساده و یکسان نمودن پایه‌ها معادله‌ای به صورت $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a \neq 1, a > 0$) داشته باشیم. سپس ریشه‌های معادله $f(x) = g(x)$ را به دست می‌آوریم.

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3$$

$$4^{3x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x \Rightarrow 4^{3x+2} = (4)^{-3x} \Rightarrow 3x+2 = -3x \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

(صفحة ۷۹، ۷۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

حل یک معادله به دلخواه کافی است.

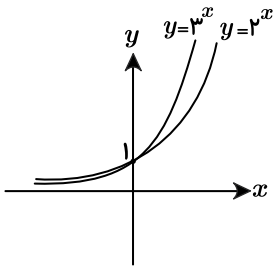
$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{25}{9} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \quad (\text{نمره } 5, 25) \Rightarrow x+1 = -2 \Rightarrow x = -3 \quad (\text{نمره } 5, 25)$$

$$4^{3x+2} = \left(\frac{1}{64}\right)^x \Rightarrow 4^{3x+2} = (4)^{-3x} \quad (\text{نمره } 5, 25) \Rightarrow 3x+2 = -3x \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \quad (\text{نمره } 25, 25)$$

۹

الف) بنابر تعریف درست است.

ب) نادرست؛ برای $x < 0$ نمودار 3^x زیر نمودار 2^x قرار دارد.



$$y = 2^{-x} \rightarrow \log_2 y = \log_2 2^{-x} = -x$$

ج) درست؛ زیرا $x = -\log_2 y \rightarrow f^{-1}(x) = -\log_2 x$

د) نادرست؛ مثال نقض $\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$

ه) نادرست؛ $D_g = \mathbb{R}$ و $D_f = (0, +\infty)$

راهنمای تصحیح:

ج) درست (۲۵، نمره)

ب) نادرست (۲۵، نمره)

الف) درست (۲۵، نمره)

ه) نادرست (۲۵، نمره)

د) نادرست (۲۵، نمره)

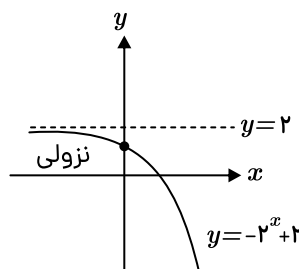
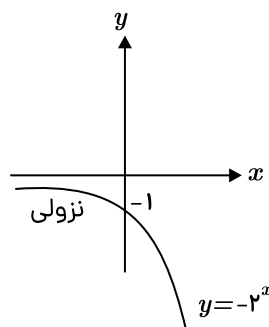
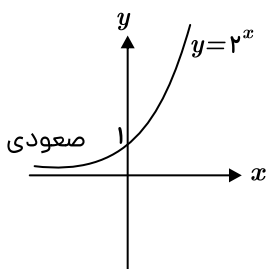
۱۰ الف)

$$A = \log_2 \frac{1}{27} = \log_2 27^{-1} = -\log_2 3^3 = -3 \log_2 3 = -3$$

ب)

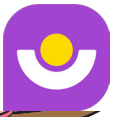
$$1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1 \quad \text{یا } x \in (-1, 1)$$

ج)

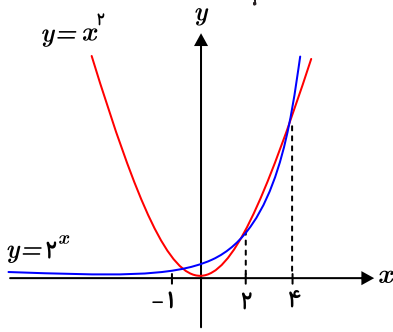


د)

$$\begin{cases} y = 3^x \\ y = 81 \end{cases} \rightarrow 81 = 3^x \Rightarrow 3^4 = 3^x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow (4, 81)$$



هـ) ۳ نقطه:



راهنمای تصحیح:

الف) ۳- (نمره ۰,۲۵)

د) (۴ و ۸۱) (نمره ۰,۲۵)

ب) (۱ و -۱) (نمره ۰,۲۵)

هـ) ۳ (نمره ۰,۲۵)

ج) نزولی (نمره ۰,۲۵)

۱۱

(صفحة ۷۵ کتاب درسی)

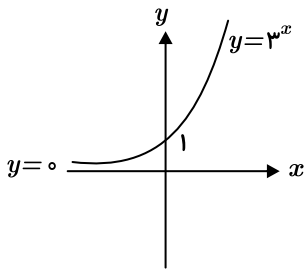
راهنمای تصحیح:

$$y = 0 \Rightarrow 9 - 3^{2x+1} = 0 \Rightarrow 3^{2x+1} = 9 = 3^2 \Rightarrow 2x + 1 = 2 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

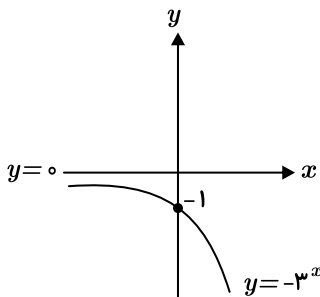
$$y = 0 \Rightarrow 3^{2x+1} = 9 \text{ (نمره ۰,۲۵)} \rightarrow 3^{2x+1} = 3^2 \Rightarrow 2x + 1 = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (نمره ۰,۲۵)} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, 0\right) \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

۱۲

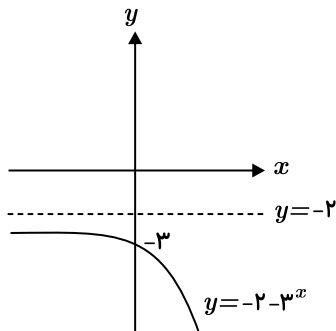
گام ۱) ابتدا نمودار $y = 3^x$ را رسم می‌کنیم.



گام ۲) نمودار $y = 3^{-x}$ را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.

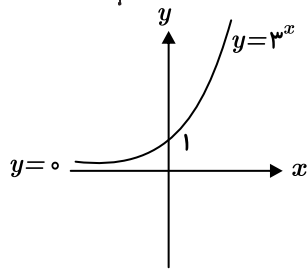


گام ۳) نمودار $y = -3^{-x}$ را در راستای محور عرض‌ها، به اندازه ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.

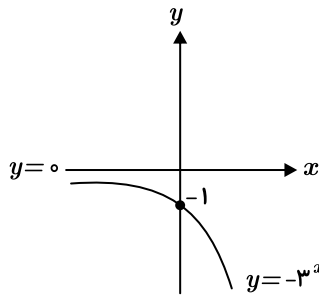


(صفحة ۷۸ کتاب درسی)

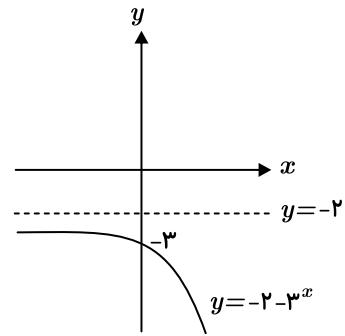
راهنمای تصحیح:



(نمره ۰,۲۵)



(نمره ۰,۲۵)



(نمره ۰,۲۵)

$$y = 3^{x+2} \Rightarrow y = 3^{x+2} \Rightarrow \log_3 3^{x+2} = \log_3 (y) \Rightarrow x + 2 = \log_3 (y)$$

$$\Rightarrow x = -2 + \log_3 (y)$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = -2 + \log_3 (x)$$

۱۳

(صفحة ۸۱ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:

$$\displaystyle f^{-1}(x) = -2 + \log_3 (x) \Rightarrow x + 2 = \log_3 (y) \Rightarrow x = \log_3 (x) - 2 \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = -2 + \log_3 (x)$$

۱۴

$$\begin{cases} -11y = 2^x \\ y = \frac{13}{3} = 6,5 \end{cases} \xrightarrow{\text{تقاطع}} 2^x = 6,5 \Rightarrow \text{قرار می‌دهیم} \Rightarrow 4 < 6,5 < 8 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3$$

$$\Rightarrow 2 < x < 3$$

$$\Rightarrow x \in (2, 3)$$

(صفحة ۷۹ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:

$$2^x = \frac{13}{3} = 6,5 \Rightarrow 4 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^2 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 2 < x < 3$$

۱۵

الف

زمان سپری شده (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مقدار داروی باقی‌مانده (میلی‌گرم)	۳۰۰	۱۵۰	۷۵	$\frac{۷۵}{۲}$	$\frac{۷۵}{۴}$	$\frac{۷۵}{۸}$	$\frac{۷۵}{۱۶}$

ب

چون زمان‌های سپری شده دنباله حسابی و مقدار داروهای باقی‌مانده، دنباله هندسی تشکیل می‌دهند، پس ضابطه تابع فوق، نمایی است و می‌توان نوشت:

$$f(t) = ab^t$$

باتوجه به جدول داریم: $f(0) = 300$ و $f(1) = 150$ ، پس:

$$300 = ab^0 \Rightarrow a = 300$$

$$150 = ab^1 \Rightarrow 150 = 300 \cdot b \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) = 300 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

۱۶

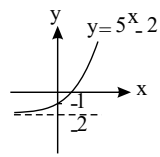
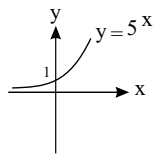
$$9^x - 7 \times 3^x - 18 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 7 \times 3^x - 18 = 0$$

با فرض $3^x = t$ داریم:

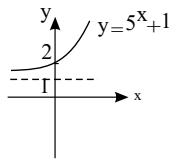
$$t^2 - 7t - 18 = 0 \Rightarrow (t-9)(t+2) = 0 \Rightarrow t = 9, t = -2$$

$$3^x = -2 \text{ غ ق ق } ۲, 3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

۱۷



(ف)



(ب)

$$\begin{aligned} 2^{2x-y} = 3^2 = 2^5 &\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \\ 3^{x+2y} = 1 = 3^0 &\Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \\ \Delta x = 10 &\Rightarrow \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

$$x + 2y = 0 \Rightarrow 2 + 2y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$D_f : x \geq 2 \quad D_g : 4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$$

$$D_{fg} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [2, 4) - \{3\}$$

$$g(x) = 0 \Rightarrow \log(4 - x) = 0 \Rightarrow 4 - x = 1 \Rightarrow x = 3$$

$$D_{gof} = \{x | x \in D_f, f(x) \in D_g\} = \{x | x \geq 2, \sqrt{x-2} < 4\} = [2, 18)$$

$$\sqrt{x-2} < 4 \Rightarrow x-2 < 16 \Rightarrow x < 18$$

۱۸

۱۹

۲۰

طبق تعریف تابع نمایی به صورت $y = a^x$ باید a مثبت و مخالف یک باشد:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} - t \neq 1 &\Rightarrow t \neq \frac{3}{2} - 1 \Rightarrow t \neq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} - t > 0 &\Rightarrow t < \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{اشتراک} \Rightarrow (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) = (-\infty, \frac{3}{2}) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} 1) \frac{3}{2} - t \neq 1 &\Rightarrow t \neq \frac{1}{2} \text{ (نمره } 0,5) \\ 2) \frac{3}{2} - t > 0 &\Rightarrow t < \frac{3}{2} \text{ (نمره } 0,5) \end{aligned} \Rightarrow (-\infty, \frac{3}{2}) - \left\{ \frac{1}{2} \right\} \text{ یا } (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$$

۲۱

الف

$$2 \log_2 2^3 - 3 \log_5 5^{\frac{1}{3}} + 3 = 6 \log_2 2 - 3 \times \frac{1}{3} \log_5 5 + 3 = 6 - 1 + 3 = 8$$

ب

$$3 \log 10^{-3} + \log 10^{\frac{1}{3}} + \log_5 5^{-2} = -9 + \frac{1}{3} - 2 = -\frac{31}{3}$$

پ

$$\log_2 2^5 + \log_{2^{-1}} 3^2 + \log_{2^{\frac{1}{3}}} 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 5 - 4 + \log_{2^{\frac{1}{3}}} 3^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{\frac{2}{3} \log 3}{\frac{1}{3} \log 2} = 1 + \frac{14}{3} = \frac{17}{3}$$

ت

$$2^{\log_2 \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

ث

$$\log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^3 + 5^{(\log_5 5 + \log_5 4)} = \frac{3}{\frac{1}{3}} + 5^{\log_5 20} = 9 + 20 = 29$$



ج

$$\log_5 5^{\frac{1}{2}} + \log_{\sqrt{2}} 2 + \log 1 \cdot 0^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$\log_r(\log_r(\log_5 5^r)) = \log_r(\log_r(r)) = \log_r(1) = 0$$

$$\frac{\log 5}{\log 6} \times \frac{\log 6}{\log 7} \times \frac{\log 7}{\log 8} \times \dots \times \frac{\log 24}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log 25} = \frac{\log 5}{\log 5^2} = \frac{\log 5}{2 \log 5} = \frac{1}{2}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt[3]{2}} 3 + \log_{\sqrt[4]{2}} 4 = \log_{\sqrt{2}} 2 \times 3 \times 4 = \log_{\sqrt{2}} 24 = 1$$

۲۲ با در نظر گرفتن شرایط معنی دار بودن لگاریتم داریم:

$$\frac{x+1}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x}{x-1} \begin{array}{c} -\infty \quad -1 \\ + \quad 0 \end{array} \begin{array}{c} 0 \quad +\infty \\ - \quad + \end{array} \begin{array}{c} \text{ن.ت.ن} \\ + \end{array} x < -1 \vee x > 0 \quad (1)$$

$$1-x > 0 \Rightarrow x < 1 \quad (2)$$

$$1-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \quad (3)$$

$$(1) \cap (2) \cap (3) : x < -1 \vee 0 < x < 1 \Rightarrow D_f = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$$

$$(1, -1) \rightarrow y = a + \log_b^x \Rightarrow -1 = a + \log_b^1 \Rightarrow -1 = a + 0 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$$(3, -2) \rightarrow y = -1 + \log_b^x \Rightarrow -2 = -1 + \log_b^3 \Rightarrow \log_b^3 = -1 \Rightarrow b^{-1} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b} = 3 \rightarrow b = \frac{1}{3} \rightarrow y = -1 + \log_{\frac{1}{3}}^x$$

$$\log \sqrt{0.75} = \log \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (\log 3 - \log 4) = \frac{1}{2} (\log 3 - 2 \log 2) = \frac{1}{2} (b - 2a) = \frac{1}{2} b - a$$

در نتیجه:

۲۳

۲۴

گزینه ۲

۲۵

۲۶

$$f^{-1}(3) = x \Rightarrow f(x) = \log_p(\sqrt{x^2 - 1}) = 3$$

$$(\sqrt{x^2 - 1}) = 27 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_r 2}{\log_r 10} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{1}{\log_r 10} \Rightarrow \log_r 10 = \frac{10}{3}$$

$$\log_r 25 = \log_r 5^2 = 2 \log_r 5 = 2 \log_r \frac{10}{2} = 2(\log_r 10 - \log_r 2) = 2\left(\frac{10}{3} - 1\right) = 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$$

(صفحه ۸۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log_{10} 2 = \frac{\log_r 2}{\log_r 10} \Rightarrow \frac{3}{10} = \frac{1}{\log_r 10} \Rightarrow \log_r 10 = \frac{10}{3} \quad (\text{نمره } ۲۵)$$

$$\log_r 25 = \log_r 5^2 = 2 \log_r 5 = 2 \log_r \frac{10}{2} = 2(\log_r 10 - \log_r 2) = 2\left(\frac{10}{3} - 1\right) = 2 \times \frac{7}{3} = \frac{14}{3} \quad (\text{نمره } ۲۵)$$

(نمره ۲۵)

(نمره ۲۵)

۲۸

$$\log_{10} 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} = \log_{10} 10 \sqrt{10} = \log_{10} 10 \times 10^{\frac{1}{2}} = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_{10} 10 = \frac{3}{2}$$

(صفحه ۸۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log_{10} 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \quad (\text{نمره } ۲۵) = \log_{10} 10 \times 10^{\frac{1}{2}} \quad (\text{نمره } ۲۵) = \log_{10} 10^{\frac{3}{2}} \quad (\text{نمره } ۲۵) = \frac{3}{2} \quad (\text{نمره } ۲۵)$$

۲۹

$$\log_{b^m} a^n = \frac{n}{m} \log_b a, \log_{b^m} a = \frac{1}{m} \log_b a, \log_b a^n = n \log_b a$$

$$\log_{\sqrt[5]{7}} \sqrt{32} = \log_{\sqrt[5]{7}} \sqrt{2^5} = \log_{\sqrt[5]{7}} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} \log_7 2 = \frac{25}{2}$$

$$\log_{\sqrt[5]{7}} \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = \log_{\sqrt[5]{7}} 7^{-3} = -3 \times \frac{3}{5} \log_7 7 = -9 \Rightarrow \frac{25}{2} - (-9) = \frac{25}{2} + 9 = \frac{25 + 18}{2} = \frac{43}{2}$$

(صفحة ۸۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(۵،نمره)

$$\log_{\sqrt[5]{7}} \sqrt{32} = \log_{\sqrt[5]{7}} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{25}{2}; \log_{\sqrt[5]{7}} \frac{1}{\sqrt[3]{49}} = \log_{\sqrt[5]{7}} 7^{-3} = -3 \times \frac{3}{5} = -9 \text{ (نمره ۵، ۹)}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{2} + 9 = \frac{43}{2} \text{ (نمره ۲۵، ۴۳)}$$

۳۰

$$f(28) = 3 - 2 \log_7 \left(\frac{28}{7} + 2 \right) = 3 - 2 \log_7 (4 + 2) = 3 - 2 \log_7 6$$

$$= 3 - 2 \log_7 3^2 = 3 - 2 \times 2 \log_7 3 = 3 - 4 = -1$$

(صفحة ۸۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\displaystyle f(28) = 3 - 2 \log_7 (4 + 2) \text{ (نمره ۵، ۵)} = 3 - 2 \log_7 3^2 \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)}$$

$$= 3 - 2(2) = -1 \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)}$$

۳۱

$$\log \sqrt[3]{45} = \log 45^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 45 = \frac{1}{3} \log (3^2 \times 5) = \frac{1}{3} (\log 3^2 + \log 5) = \frac{1}{3} (2 \log 3 + 1 - \log 2)$$

$$= \frac{1}{3} (2(0,4) + 1 - 0,3) = \frac{1}{3} (0,8 + 0,7) = \frac{1}{3} \times 1,5 = 0,5$$

(صفحة ۸۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(۵،نمره)

$$\log (3^2 \times 5)^{\frac{1}{3}} \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)} = \frac{1}{3} (2 \log 3 + \log 5) = \frac{1}{3} (2 \log 3 + 1 - \log 2) \text{ (نمره ۵، ۵)}$$

$$= \frac{1}{3} (2(0,4) + 1 - 0,3) \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)} = 0,5 \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)}$$

۳۲ فرض کنیم $M = \log_c a$ و $N = \log_c b$ ؛ پس طبق تعریف $a = c^M$ و $b = c^N$ از این رو $\frac{a}{b} = \frac{c^M}{c^N} = c^{M-N}$ مطابق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c \frac{a}{b} = M - N$

$$\text{نتیجه: } \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} \log_c a = M \Rightarrow a = c^M \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)} \\ \log_c b = N \Rightarrow b = c^N \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = c^{M-N} \text{ (نمره ۵، ۵)}$$

$$\Rightarrow \log_c \frac{a}{b} = M - N \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)} \Rightarrow \log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b \text{ (نمره ۲۵، ۲۵)}$$

$$\text{۳۳} \xrightarrow{\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}} -2 = 2 + \log_a \frac{1}{3} \Rightarrow \log_a \frac{1}{3} = -4 \rightarrow a^{-4} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \sqrt[4]{3}$$

$$\frac{9}{\sqrt[3]{27}} = \frac{3^2}{3^{\frac{3}{3}}} = 3^{\frac{6}{3}}$$

$$A = \log_3 \frac{9}{\sqrt[3]{27}} + \log_{0,001} 1 = \frac{6}{3} + (-3) = -\frac{1}{3}$$

۳۴

۳۵

$$\log_b^{(ac)} = \log_b^a + \log_b^c, \log_b^{(\frac{a}{c})} = \log_b^a - \log_b^c, \log_b^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a$$

$$\text{الف) } \log \sqrt[3]{0,81} = \frac{1}{3} \log \frac{81}{1000} = \frac{1}{3} (\log 81 - \log 1000) = \frac{1}{3} (\log(3^2 \times 3 \times 3) - \log 10^3)$$



$$= \frac{1}{\frac{1}{3}} \log 2^r + \frac{1}{\frac{1}{3}} \log 3 + \frac{1}{\frac{1}{3}} \log 7 - \frac{1}{\frac{1}{3}} \times 3 \log 10$$

$$= \frac{3}{\frac{1}{3}} \log 2 + \frac{3}{\frac{1}{3}} \log 3 + \frac{3}{\frac{1}{3}} \log 7 - 1 = \frac{3}{\frac{1}{3}} a + \frac{3}{\frac{1}{3}} b + \frac{3}{\frac{1}{3}} c - 1$$

ب) $\log(2100)^{-1} = -\log(3 \times 7 \times 10^2) = -\log 3 - \log 7 - \log 10^2$

$$= -\log 3 - \log 7 - 2 \log 10 = -b - c - 2$$

۳۶

$$\log_r(x+7) - \log_r(x-2) = 2 \rightarrow \log_r\left(\frac{x+7}{x-2}\right) = 2 \rightarrow \frac{x+7}{x-2} = 2^2 \rightarrow x+7 = 4x-8 \rightarrow x=5$$

$$\log(x-1) + \log\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \log 18 - \log 2 \Rightarrow \log(x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \log \frac{18}{2}$$

$$\Rightarrow (x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 10 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \Rightarrow (x+5)(x-4) = 0$$

$$x = -5 \quad \text{غ ق ق} \quad x = 4$$

$$m(40) = 24(2^{-\frac{40}{24}}) = 24 \times 0,32 = 7,68$$

$$\log_r(x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2 \Rightarrow (x-1)\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 9 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0$$

$$x = -5, \quad x = 4 \quad \text{مجموعه جواب} = \{4\}$$

$$\log(x+3) + \log(x-3) - \log x = 3 \log 2$$

$$\log \frac{(x+3)(x-3)}{x} = \log 2^3 \rightarrow \frac{x^2-9}{x} = 8 \rightarrow x^2 - 8x - 9 = 0$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 9 \end{cases}$$

جواب $x = -1$ غیر قابل قبول است.

$$m(96) = 256\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{96}{256}} = 2^8 \times 2^{-2} = 2^6 = 64$$

۴۲ برای حل معادله فوق به شکل زیر عمل می‌کنیم:

الف) با در نظر گرفتن دامنه، در صورت امکان لگاریتم‌ها را ساده کرده یا از بین می‌بریم. (گاهی لازم است ابتدا لگاریتم با مبنای مساوی ایجاد کنیم.)

ب) سپس معادله حاصل را حل کرده و جواب‌های حاصل را با دامنه چک می‌کنیم. در پاره‌ای از سوالات هم باید تغییر متغیر داد و معادله حاصل را حل کرد.

$$3\sqrt{\log_r x} - \log_r 2x = 1 \Rightarrow 3\sqrt{\log_r x} - (\log_r 2 + \log_r x) = 1 \xrightarrow{\sqrt{\log_r x} = u} 3u - (1 + u^2) = 1$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{\log_r x} = 1 \Rightarrow \log_r x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ u = \sqrt{\log_r x} = 2 \Rightarrow \log_r x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases}$$

(صفحه ۸۷ و ۸۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$3\sqrt{\log_r x} - \log_r 2x = 1 \Rightarrow 3\sqrt{\log_r x} - (\log_r 2 + \log_r x) = 1 \quad (\text{نمره } 2,5)$$

$$\sqrt{\log_r x} = u \Rightarrow 3u - (1 + u^2) = 1 \quad (\text{نمره } 2,5)$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0 \quad (\text{نمره } 2,5) \Rightarrow \begin{cases} u = \sqrt{\log_r x} = 1 \Rightarrow \log_r x = 1 \Rightarrow x = 2^1 = 2 \\ u = \sqrt{\log_r x} = 2 \Rightarrow \log_r x = 4 \Rightarrow x = 2^4 = 16 \end{cases} \quad (\text{نمره } 2,5)$$

$$\log_r(x^r - 1) = 1 + \log_r(x+3) \rightarrow \log_r(x^r - 1) - \log_r(x+3) = 1$$

$$\log_r \frac{(x^r - 1)}{(x+3)} = 1 \rightarrow \frac{(x^r - 1)}{(x+3)} = 3 \rightarrow x^r - 3x - 10 = 0$$

$$x = 5, x = -2$$

هر دو جواب قابل قبول است.

۴۴



$$\log x(x-1) + \log 8 = \log 10 + \log 3 = \log 30$$

$$\Rightarrow \log 8x(x-1) = \log 30$$

$$\Rightarrow 8x(x-1) = 30$$

$$\Rightarrow 4x(x-1) = 15$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 16(15) = 16 \times 16 = 256$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 16}{8} \begin{cases} x = \frac{20}{8} = \frac{5}{2} \text{ جواب} \\ x = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2} \text{ در دامنه قرار ندارد} \end{cases}$$

(صفحة ۸۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log 8x(x-1) \text{ (نمره ۲۵)} = \log 30 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 4x^2 - 4x - 15 = 0 \text{ (نمره ۵)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \text{ جواب (نمره ۲۵)} \\ x = \frac{-3}{2} \text{ غیق} \end{cases}$$

۴۵

$$\text{الف) } \log_{\sqrt{2}} x^2 + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x(2-x) = \log_{\sqrt{2}} 1$$

$$\Rightarrow 2x - x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{ب) } \log_x (x+1)(2x+1) = \log_x 6 \Rightarrow (x+1)(2x+1) = 6 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-3+7}{4} = 1 \text{ غیق} \\ x = \frac{-3-7}{4} = -\frac{5}{2} \text{ غیق} \end{cases}$$

چون مبنای log باید مثبت و مخالف ۱ باشد؛ پس معادله جواب ندارد.

(صفحة ۸۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{الف) } \log_{\sqrt{2}} x^2 + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt{2}} (2-x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x(2-x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 2x - x^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\text{ب) } \log_x (x+1)(2x+1) = \log_x 6 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 2x^2 + 3x - 5 = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ غیق} \\ x = -\frac{5}{2} \text{ غیق} \end{cases} \text{ (نمره ۲۵) معادله جواب ندارد}$$

۴۶

$$\text{الف) } m(t) = B\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ نیم عمر ماده } B \text{ و جرم اولیه ماده } A$$

$$m(t) = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow m(50) = 24 \times 2^{-\frac{1}{20}} = 24 \times 2^{-2} = 24 \times \frac{1}{4} = 6 \Rightarrow m(50) = 6 \text{ میلی گرم}$$

$$\text{ب) } m(t) = B\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 3 = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow \frac{3}{24} = 2^{-\frac{1}{20}} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-\frac{1}{20}} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-\frac{1}{20}}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{25} = 3 \Rightarrow t = 75 \text{ سال}$$

(صفحة ۸۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{الف) } m(t) = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (نمره ۵)} \Rightarrow m(50) = 24\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow m(50) = \frac{24}{4} = 6 \text{ میلی گرم}$$

$$\text{ب) } 3 = 24\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \frac{1}{8} = 2^{-\frac{1}{20}} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 2^{-3} = 2^{-\frac{1}{20}} \Rightarrow \frac{t}{25} = 3 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow t = 75 \text{ سال (نمره ۲۵)}$$

۴۷

$$\log E = 11.8 + 1.5M \Rightarrow \log E = 11.8 + 1.5(7.3) \Rightarrow \log E = 11.8 + 10.95 = 22.75 \Rightarrow E = 10^{22.75} \text{ Erg}$$

(صفحة ۸۹ کتاب درسی)



راهنمای تصحیح:

$$\log E = 11,8 + 1,5M \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \log E = 22,75 \text{ (نمره ۵)} \Rightarrow E = 10^{22,75} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۴۸

$$y = \log_a x \xrightarrow{(-3)} -3 = \log_a \frac{1}{3} \rightarrow a^{-3} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{a^3} = \frac{1}{3} \rightarrow a^3 = 3 \rightarrow a = \sqrt[3]{3}$$

(صفحة ۸۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$-3 = \log_a \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{(نمره ۲۵)}} a^{-3} = \frac{1}{3} \rightarrow a^3 = 3 \xrightarrow{\text{(نمره ۲۵)}} a = \sqrt[3]{3} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۴۹ ۱. عبارت درون هر لگاریتم باید مثبت باشد.

۲. در توابع لگاریتمی که پایه آنها کمتر از یک باشد جهت نامعادله پس از ساده کردن log از دو طرف عوض می‌شود.

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) \Rightarrow \sqrt[2]{\log_{\frac{1}{2}}(3x-9)} > \sqrt[2]{\log_{\frac{1}{2}}(2x-4)}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-4)$$

تابع نزولی است (پایه لگاریتم کوچک‌تر از یک است)، بنابراین در حل نامعادله باید جهت نامساوی را عوض کرد.

$$\left. \begin{array}{l} 3x-9 < 2x-4 \Rightarrow x < 5 \\ 3x-9 > 0 \Rightarrow x > 3 \\ 2x-4 > 0 \Rightarrow x > 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (3, 5)$$

(صفحة ۸۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{3x-9} > \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}}(3x-9) > \log_{\frac{1}{2}}(2x-4) \text{ (نمره ۵)}$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x-9 < 2x-4 \Rightarrow x < 5 \text{ (نمره ۲۵)} \\ 3x-9 > 0 \Rightarrow x > 3 \text{ (نمره ۲۵)} \\ 2x-4 > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ (نمره ۲۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow (3, 5) \text{ (نمره ۲۵)}$$

۵۰

$$\log_r(x-1) + \log_r\left(\frac{x}{r} + 1\right) = 2 \rightarrow (x-1)\left(\frac{x}{r} + 1\right) = r^2$$

$$\rightarrow \frac{x^r}{r} + \frac{x}{r} - 1 = 9 \rightarrow x^r + x - 20 = 0 \rightarrow x = 4 \text{ ق ق } , x = -5 \text{ ق ق}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۴

یازدهم

سال یازدهم

ریاضی

فهرست

درس اول : رادیان

۱..... مفهوم رادیان، طول کمان مقابل به زاویه، تبدیل رادیان و درجه

درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی زاویه ها

۲..... نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و حالات دیگر

درس سوم : توابع مثلثاتی

۳..... توابع مثلثاتی $y=\sin x$ و $y=\cos x$ و نمودار آن ها

درس چهارم : روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

۴..... نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

۴..... نسبت های مثلثاتی دو برابر و سه برابر زاویه



درس اول : رادیان



مفهوم رادیان، طول کمان مقابل به زاویه، تبدیل رادیان و درجه
۱ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف مقدار $[\sin 6]$ برابر است. (زاویه برحسب رادیان است).

ب) انتهای کمان مقابل به زاویه 10° رادیان در ربع دایره مثلثاتی قرار دارد.

ج) توابع $f(x) = |\cos x|$ و $g(x) = |1 - x^2|$ در نقطه متقاطع هستند.

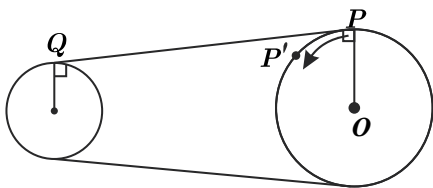
د) ماکزیمم مقدار تابع $y = 3 - |\sin x|$ برابر است با

ه) اگر اندازه دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{5}$ و $\frac{2\pi}{5}$ رادیان باشد، اندازه زاویه سوم درجه است.

۲ در دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر، طول کمان مقابل به زاویه مرکزی 20° را به دست آورید.

۳ در شکل زیر یک تسمه، دو قرقره به شعاع‌های 10cm و 2.5cm را به هم وصل کرده است. وقتی قرقره بزرگ‌تر $\frac{\pi}{5}$ رادیان می‌چرخد،

قرقره کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد؟ $(\widehat{POP'} = \frac{\pi}{5})$



۴ مخروطی با شعاع قاعده ۶ سانتی‌متر و ارتفاع ۸ سانتی‌متر بر روی صفحه‌ای گسترده شده است. زاویه قطاع حاصل چند رادیان است؟

۵ در یک دایره به شعاع ۳ سانتی‌متر، اندازه کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی 20° را تعیین کنید.

۶ در چرخ فلکی، فاصله هر کابین از مرکز چرخ فلک برابر 0.3 متر است. فرض کنید یک کابین هنگام حرکت، کمانی به اندازه 150° طی کند؛

الف اندازه کمان را بر حسب رادیان به دست آورید.

ب طول کمان طی شده توسط این کابین چند سانتی‌متر است؟ $(\pi \cong 3.14)$

۷ شخصی دور زمین دایره‌ای شکل به شعاع 10 متر در حال دوچرخه‌سواری است. اگر زاویه‌ای که شخص طی کرده است 90° درجه باشد، او چه مسافتی را رکاب زده است؟

۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف حاصل عبارت $\tan(-60^\circ)$ برابر با است.

ب زاویه مرکزی روبه‌رو به کمانی به طول $\frac{1}{8}\text{cm}$ در دایره‌ای به شعاع 4cm برابر رادیان است.

۹ انتهای کمان زاویه $\frac{7\pi}{5}$ رادیان در ناحیه مثلثاتی است.

اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۱۰ طول برف‌پاک‌کن عقب خودرویی ۲۵ سانتی‌متر است. اگر برف‌پاک‌کن کمانی به اندازه 60° درجه طی کند، آنگاه طول کمان طی شده توسط

نوک برف‌پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟ $(\pi \cong 3.14)$





درس دوم : نسبت های مثلثاتی برخی

نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه، متمم، مکمل و حالات دیگر

۱۱ حاصل عبارت $A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\cot 4x}{\tan x}$ را به ازای $x = \frac{\pi}{10}$ حساب کنید.

۱۲ گزینه مناسب را انتخاب کنید.

الف) حاصل عبارت $\sin \frac{\alpha}{3} \cos \frac{\alpha}{3}$ برابر با کدام گزینه است؟

۱) $\sin \alpha$ ۲) $\sin 2\alpha$ ۳) $\frac{1}{2} \sin \alpha$ ۴) $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$

ب) حاصل $\tan(-\frac{\pi}{3} - \alpha)$ برابر است با:

۱) $\cot \alpha$ ۲) $-\cot \alpha$ ۳) $\tan \alpha$ ۴) $-\tan \alpha$

۱۳ مقدار نسبت های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\sin(315^\circ)$ ب) $\cos(-\frac{29\pi}{3})$ ج) $\tan(\frac{11\pi}{6})$

۱۴ اگر $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ و انتهای کمان θ در ناحیه دوم دایره مثلثاتی باشد، مقدار $\cot(\frac{\pi}{3} - \theta)$ را بیابید.

۱۵ حاصل عبارت $\frac{\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) - \cos(\theta - \frac{11\pi}{2})}{\cos(\theta - 5\pi) + \sin(7\pi - \theta)}$ را به دست آورید.

۱۶ اگر $A = \sin 16^\circ + \cos 11^\circ - \sin 21^\circ$ باشد، مقدار A را به دست آورید.

۱۷ حاصل عبارت $\sin(\pi - \theta) + \sin(\pi + \theta) + \cos(\frac{\pi}{3} + \theta) + \cos(\frac{3\pi}{2} - \theta)$ را بر حسب θ بیابید.

۱۸ مقدار عددی هر یک از عبارت های زیر را به دست آورید.

الف

$$\sin(\frac{5\pi}{4}) + \cos(300^\circ)$$

ب

$$\cos(15^\circ)$$

۱۹ اگر $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ حاصل عبارت $\sin(4\pi + \alpha) + \sin(\alpha - \pi) + 2 \cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ را به دست آورید.

۲۰ اگر مخرج کسر زیر صفر نباشد، حاصل عبارت را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\frac{\sin(4\pi + \alpha) + \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}$$

۲۱ مقدار عبارت های زیر را به دست آورید.

الف

$$\cos(-240^\circ) + \tan \frac{7\pi}{4} - \sin^2 135^\circ$$



$\cos(22,5)^\circ$

۲۲ * درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف $\cos\left(\frac{\pi}{3} + a\right) = \sin(2\pi - a)$

۲۳ * مقدار نسبت مثلثاتی $\tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right)$ را به دست آورید.

۲۴ * حاصل عبارت $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$ کدام گزینه است؟

$\tan \theta$ (۱) $-\tan \theta$ (۲) $\cot \theta$ (۳) $-\cot \theta$ (۴)

۲۵ * مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف $\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right)$

ب $\cos 135^\circ$



درس سوم : توابع مثلثاتی

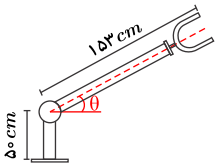


توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$ و نمودار آن‌ها

۲۶ * نمودار تابع $f(x) = 1 + \left|\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right)\right|$ را در بازه $\left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$ رسم کنید.

۲۷ * اگر $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$ باشد، حدود تغییرات $\cos \theta$ را بیابید.

۲۸ * با توجه به شکل ربات صنعتی، ارتفاع نوک گیره ربات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})$



۲۹ * نمودار تابع $y = |\cos x|$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

۳۰ * نمودار تابع $y = 1 - 2 \cos x$ را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۳۱ * نمودار تابع $f(x) = -\sin x + 1$ را به کمک نمودار $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۳۲ * نمودار تابع $f(x) = 1 - |\sin x|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید و برد آن را تعیین کنید.

۳۳ * نمودار تابع $f(x) = 1 - |\cos x|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید و برد آن را بنویسید.

۳۴ * نمودار تابع $y = -|\cos x| + 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کرده و برد تابع را مشخص کنید. (مراحل رسم را نشان دهید)

۳۵ * الف) نمودار تابع مثلثاتی $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

ب) نمودار تابع قسمت (الف) در چه نقاطی محور x ها را قطع می‌کند؟

۳۶ * نمودار تابع مثلثاتی $y = |\sin x|$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.



درس چهارم : روابط مثلثاتی مجموع و

تفاضل زوایا

نسبت های مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه

۳۷ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

(الف) زاویه 225° درجه برابر $\frac{5\pi}{4}$ رادیان است.

(ب) در دایره های به محیط 12π طول کمان مقابل زاویه 150° درجه برابر 5π است.

(ج) اگر α زاویه ای در ربع اول و $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{4} - \alpha)$ برابر $\frac{4}{3}$ است.

(د) مقدار 75° \cot برابر با $-\sqrt{3}$ است.

(ه) $\sin \alpha - \cos \alpha = -\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4})$

۳۸ درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = 2 \cot x$$

۳۹ مقدار $\sin \frac{\pi}{8}$ را محاسبه کنید.

۴۰ فرض کنید $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع دوم قرار دارد. مقدار $\sin(\alpha + 30^\circ)$ را محاسبه کنید.

۴۱ ساده شده عبارت $\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \cdot \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ را بر حسب 2α به دست آورید.

۴۲ حاصل عبارت $\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) + \cos x$ را به دست آورید.

۴۳ اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ، $\cos \beta = \frac{-12}{13}$ ، α زاویه ای حاده و انتهای کمان روبه رو به زاویه β در ربع سوم باشد، حاصل $\sin(\alpha - \beta)$ را به دست آورید.

۴۴ اگر $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ و α زاویه ای حاده و β زاویه ای منفرجه باشد، حاصل $\cos(\alpha - \beta)$ را بیابید.

۴۵ فرض کنید $\cos \beta = \frac{12}{13}$ و $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ ، انتهای کمان α در ربع چهارم و انتهای کمان β در ربع اول باشد. حاصل $\cos(\alpha - \beta)$ را بیابید.

نسبت های مثلثاتی دو برابر و سه برابر زاویه

۴۶ حاصل عبارت $A = 8 \sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2} - 8 \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ را به ازای $x = 15^\circ$ محاسبه کنید.

۴۷ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و $\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3}$ باشد، مقادیر $\sin 2x$ و $\cos 2x$ را بیابید.

۴۸ اگر $\sin a = \frac{3}{5}$ و $\tan \beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$ و انتهای کمان a در ربع اول و β در ربع دوم باشد، مقدار دقیق $\cos(a + \beta)$ و $\sin 2a$ را بیابید.

۴۹ کدام یک از روابط مثلثاتی زیر درست نیست؟

$$(1) \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$(2) \cos 2a = -2 \cos^2 a + 1$$

$$(3) \sin 2a = 2 \cos a \cdot \sin a$$

$$(4) \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$



با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ ۵۰





پاسخنامه تشریحی

۱ الف

$$\frac{3\pi}{2} < \epsilon^{rad} < 2\pi \Rightarrow -1 < \sin \epsilon < 0 \Rightarrow |\sin \epsilon| = -1$$

۶ رادیان در ربع چهارم قرار دارد.

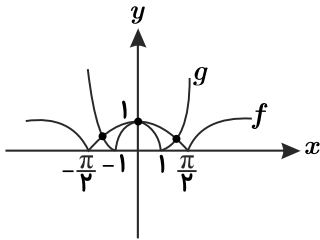
(صفحه ۹۴ کتاب درسی)

(ب)

$$1 \text{ rad} \approx 1 \times 57^\circ = 57^\circ \text{ ربع سوم}$$

(صفحه ۹۲ تا ۹۷ کتاب درسی)

(ج) در ۳ نقطه متقاطع‌اند.



(صفحه ۱۰۵ تا ۱۰۹ کتاب درسی)

(د)

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq |\sin x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -|\sin x| \leq 0 \Rightarrow 2 \leq 3 - |\sin x| \leq 3 \Rightarrow 2 \leq y \leq 3 \Rightarrow \max(y) = 3$$

(صفحه ۱۰۵ تا ۱۰۹ کتاب درسی)

(ه)

$$\frac{\pi}{5} = 36^\circ, \frac{2\pi}{5} = 72^\circ \Rightarrow \alpha + 36^\circ + 72^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 72^\circ$$

(صفحه ۹۲ تا ۹۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(ج) ۳ (۲۵، نمره)

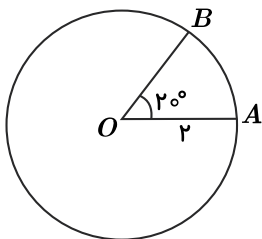
(ب) سوم (۲۵، نمره)

الف) ۱ - (۲۵، نمره)

(ه) ۷۲ (۲۵، نمره)

(د) ۳ (۲۵، نمره)

۲



$$\frac{D}{180} = \frac{\alpha (\text{برحسب رادیان})}{\pi} \Rightarrow \frac{20}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

$$\widehat{AB} = r \cdot \alpha = 2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

(صفحه ۹۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\frac{D}{180} = \frac{\alpha (\text{برحسب رادیان})}{\pi} \Rightarrow \frac{20}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{9} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$L = r \cdot \alpha \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow L = 2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm (نمره ۲۵)}$$

۳ ابتدا مسافتی را که نقطه P روی محیط دایره بزرگ‌تر طی می‌کند، به دست می‌آوریم:

$$\widehat{PP'} = r \cdot \theta = 10 \times \frac{\pi}{5} = 2\pi \text{ cm}$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند؛ پس قرقره کوچک‌تر نیز $2\pi \text{ cm}$ حرکت می‌کند.

$$l = r \cdot \theta \Rightarrow 2\pi = \frac{5}{2} \cdot \theta \Rightarrow \theta = 2\pi \times \frac{2}{5} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad}$$

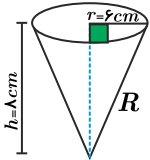
(صفحه ۹۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\widehat{PP'} = r \cdot \theta = 10 \times \frac{\pi}{5} = 2\pi \text{ cm (نمره ۵)}$$

قرقره کوچکتر نیز $2\pi \text{ cm}$ حرکت می‌کند. (نمره ۲۵)

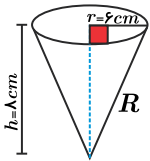
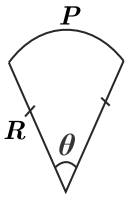
$$l = r \cdot \theta \Rightarrow 2\pi = \frac{5}{2} \cdot \theta \Rightarrow \theta = 2\pi \times \frac{2}{5} = \frac{4\pi}{5} \text{ rad (نمره ۵)}$$



$$R^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow R = 10$$

$$\text{محیط قاعده مخروط} = \text{طول کمان} = 2\pi r = 12\pi$$

$$\theta = \frac{P}{R} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad}$$



$$R^2 = 100 \Rightarrow R = 10 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\text{طول کمان} = 2\pi r = 12\pi \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\theta = \frac{P}{R} \text{ (نمره ۲۵)} = \frac{12\pi}{10} = \frac{6\pi}{5} \text{ rad (نمره ۲۵)}$$

$$\theta = 20^\circ \rightarrow \theta = \frac{\pi}{9} \quad l = r\theta = 3 \times \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3} \text{ cm}$$

$$\frac{150}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{5\pi}{6}$$

$$L = r\theta = 30 \times \frac{5\pi}{6} \Rightarrow L = 25\pi \approx 78.5 \text{ cm}$$

۷

$$\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow l = 10 \times \frac{\pi}{2} = 5\pi$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad} \rightarrow \theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{l}{25} \rightarrow l = 25 \times \frac{\pi}{3} = 25\pi/3$$

$$3x + 2x = 5x \xrightarrow{x=1} 5x = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad 4x + x = 5x \xrightarrow{x=1} 5x = \frac{\pi}{2}$$

(صفحه ۹۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

۵

۶

الف

ب

۸

الف $-\sqrt{3}$

ب $\frac{1}{32}$

۹ گزینۀ ۳: سوم

۱۰

۱۱



زوایای $3x$ و $2x$ به ازای $x = \frac{\pi}{10}$ زوایای متمم هستند. همچنین زوایای x و $4x$ نیز به ازای $x = \frac{\pi}{10}$ زوایای متمم هستند؛ بنابراین تانژانت یکی با کتانژانت دیگری و سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است؛ در نتیجه داریم:

$$\cos 3x = \sin 2x, \cot 4x = \tan x$$

$$\rightarrow A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\cot 4x}{\tan x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} A = 1 + 1 = 2$$

(صفحة ۹۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} 3x + 2x = 5x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} 5x = \frac{\pi}{2} \text{ متمم} \\ 4x + x = 5x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} 5x = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \cos 3x = \sin 2x, \cot 4x = \tan x \text{ (نمره ۵)}$$

$$\rightarrow A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x} + \frac{\cot 4x}{\tan x} \xrightarrow{x=\frac{\pi}{10}} A = 1 + 1 = 2 \text{ (نمره ۲۵)}$$

۱۲

الف) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sin \alpha$

(صفحة ۱۱۲ کتاب درسی)

ب) $\tan\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -(-\cot \alpha) = \cot \alpha$

(صفحة ۹۸ و ۹۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

ب) گزینه ۱ (۵ نمره)

الف) گزینه ۳ (۵ نمره)

۱۳

الف) $\sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \sin 315^\circ = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ب) $\cos\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = \cos \frac{29\pi}{3} = \cos\left(\frac{30\pi - \pi}{3}\right) = \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) \xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \cos\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

ج) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(صفحة ۱۰۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) $\sin 315^\circ = \sin(360^\circ - 45^\circ) \text{ (نمره ۲۵)} = -\sin 45^\circ \text{ (نمره ۲۵)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$

ب) $\cos\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (نمره ۲۵)} = \cos \frac{\pi}{3} \text{ (نمره ۲۵)} = \frac{1}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$

ج) $\tan\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (نمره ۲۵)} = -\tan \frac{\pi}{6} \text{ (نمره ۲۵)} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (نمره ۲۵)}$

۱۴

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \pm \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{ناحیه دوم}} \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

(صفحة ۱۰۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{9} \xrightarrow{\text{ربع دوم}} \cos \theta = -\frac{1}{3} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan \theta \text{ (نمره ۲۵)} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{ (نمره ۲۵)} = -2\sqrt{2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۱۵ با توجه به اینکه:



$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$$

$$\cos\left(\theta - \frac{11\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$$

$$\cos(\theta - 5\pi) = \cos(5\pi - \theta) = -\cos\theta$$

$$\sin(7\pi - \theta) = \sin\theta$$

بنابراین:

$$\frac{\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\theta - \frac{11\pi}{2}\right)}{\cos(\theta - 5\pi) + \sin(7\pi - \theta)} = \frac{-\cos\theta + \sin\theta}{-\cos\theta + \sin\theta} = 1$$

(صفحة ۱۰۳ و ۱۰۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \text{ (نمره ۲۵)} - \cos\left(\frac{11\pi}{2} - \theta\right) \text{ (نمره ۲۵)}}{\cos(5\pi - \theta) \text{ (نمره ۲۵)} + \sin(7\pi - \theta)} =$$

$$\frac{-\cos\theta \text{ (نمره ۲۵)} + \sin\theta \text{ (نمره ۲۵)}}{-\cos\theta \text{ (نمره ۲۵)} + \sin\theta \text{ (نمره ۲۵)}} = 1 \text{ (نمره ۲۵)}$$

۱۶

$$A = \sin(180^\circ - 20^\circ) + \cos(90^\circ + 20^\circ) - \sin(180^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 20^\circ - \sin 20^\circ - (-\sin 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

(صفحة ۱۰۳ و ۱۰۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$A = \overbrace{\sin(180^\circ - 20^\circ)} \text{ (نمره ۲۵)} + \overbrace{\cos(90^\circ + 20^\circ)} \text{ (نمره ۲۵)} - \overbrace{\sin(180^\circ + 30^\circ)} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$= \underbrace{\sin 20^\circ - \sin 20^\circ + \sin 30^\circ} \text{ (نمره ۵)} = \frac{1}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۱۷

$$\sin(\pi - \theta) \stackrel{\text{نوم}}{=} \sin\theta ; \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \stackrel{\text{نوم}}{=} -\sin\theta$$

$$\sin(\pi + \theta) \stackrel{\text{سوم}}{=} -\sin\theta ; \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \stackrel{\text{سوم}}{=} -\sin\theta$$

$$\text{عبارت} = \sin\theta - \sin\theta - \sin\theta - \sin\theta = -2\sin\theta$$

(صفحة ۱۰۳ و ۱۰۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\underbrace{\sin\theta} \text{ (نمره ۲۵)} - \underbrace{\sin\theta} \text{ (نمره ۲۵)} - \underbrace{\sin\theta} \text{ (نمره ۲۵)} - \underbrace{\sin\theta} \text{ (نمره ۲۵)} = \underbrace{-2\sin\theta} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۱۸

الف

$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) + \cos(30^\circ) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos(36^\circ - 6^\circ) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(6^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$$

ب

روش اول:

$$\cos(15^\circ) = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos(45^\circ)\cos(30^\circ) + \sin(45^\circ)\sin(30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

روش دوم:

$$\cos(15^\circ) = \sin(75^\circ) = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin(30^\circ)\cos(45^\circ) + \cos(30^\circ)\sin(45^\circ)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

روش سوم:



$$\cos^r \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \cos^r(15^\circ) = \frac{1 + \cos(30^\circ)}{2} \rightarrow \cos^r(15^\circ) = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$

$$\frac{\cos(15^\circ) > 0}{2} \rightarrow \cos(15^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

* 19

$$\sin(\alpha - \pi) = -\sin(\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4} + \alpha\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin(4\pi + \alpha) + \sin(\alpha - \pi) + 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right) = \sin \alpha - \sin \alpha + 2\sin \alpha = 2\sin \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\sin(4\pi + \alpha) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{\sin(\alpha) + \sin(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = \frac{2\sin(\alpha)}{-\sin(\alpha)} = -2$$

$$\cos(-240^\circ) + \tan \frac{7\pi}{4} - \sin^r 135^\circ = \frac{-1}{2} + (-1) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^r = -2$$

$$\cos^r(22,5^\circ) = \frac{1 + \cos(45^\circ)}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow \cos^r(22,5^\circ) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{23\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{23\pi}{4}\right) = -\tan\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x) = 1 + \left| \cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) \right| = 1 + |\sin x|$$

* 20

* 21

الف

ب

* 22

الف

درست

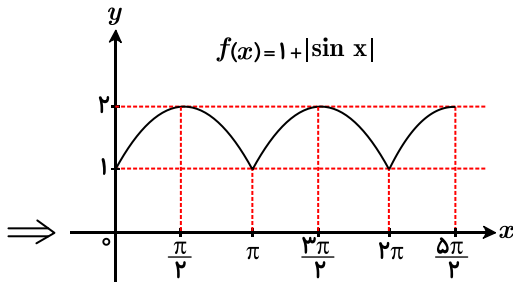
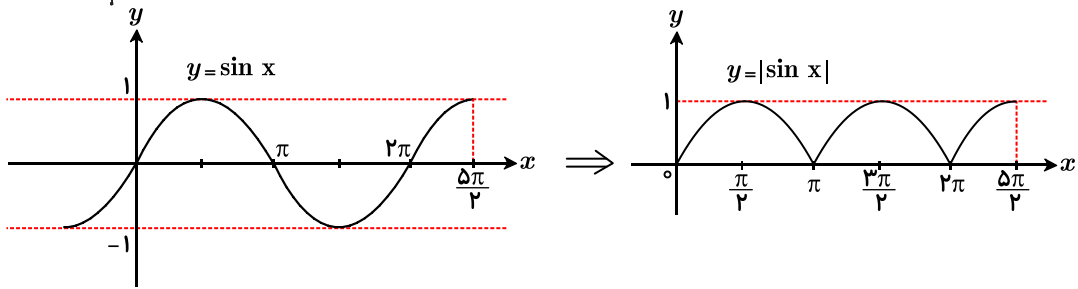
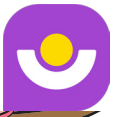
* 23

* 24 گزینه 4،

* 25 الف

(ب)

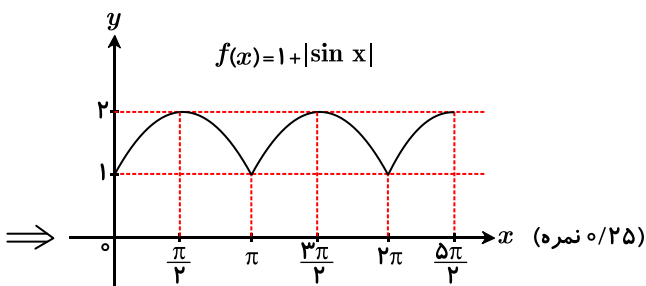
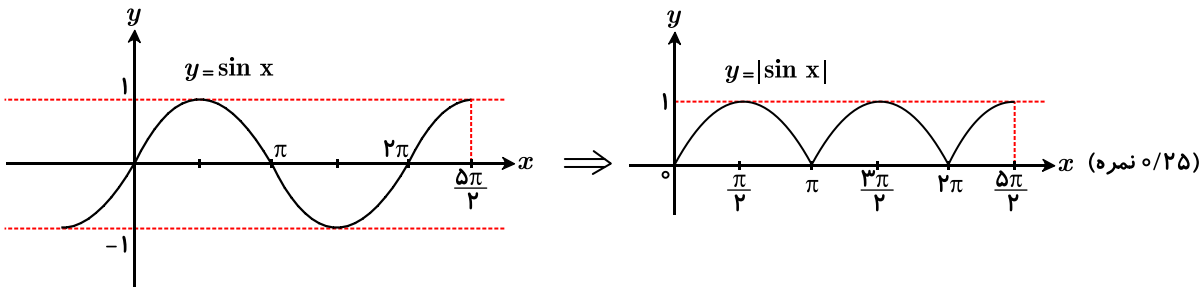
* 26



(صفحة ۱۰۰ و ۱۰۴ کتاب درسی)

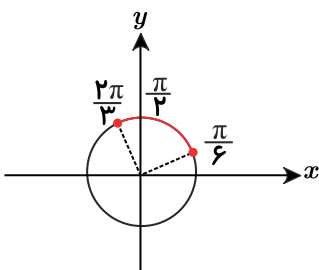
راهنمای تصحیح:

$$f(x) = 1 + \left| \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \right| = 1 + |\sin x| \quad (\text{نمره } ۰,۲۵)$$



در صورتی که دانش‌آموز مستقیماً نمودار نهایی را رسم کند، نمره کامل تعلق گیرد.

۲۷



$$\left. \begin{aligned} \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{\pi}{2} &= 0 \\ \cos \frac{2\pi}{3} &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

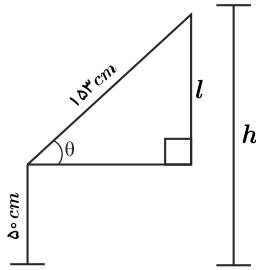
(صفحة ۱۰۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (نمره ۲۵)}, \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ (نمره ۲۵)}, \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

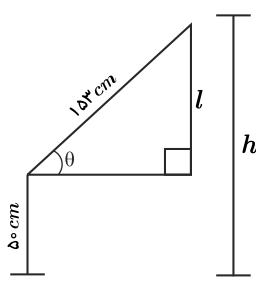
۲۸



$$\sin \theta = \frac{l}{153} \Rightarrow l = 153 \sin \theta$$

$$h = 50 + l \Rightarrow h = 50 + 153 \sin \theta$$

(صفحة ۱۰۸ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:

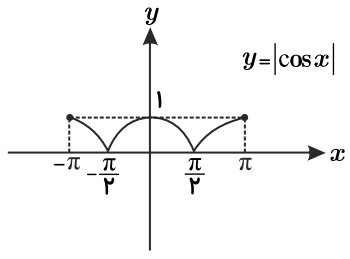
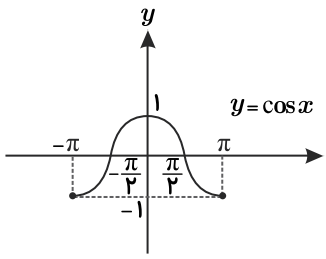


$$\sin \theta = \frac{l}{153} \Rightarrow l = 153 \sin \theta \text{ (نمره ۵)}$$

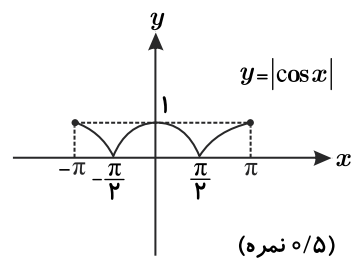
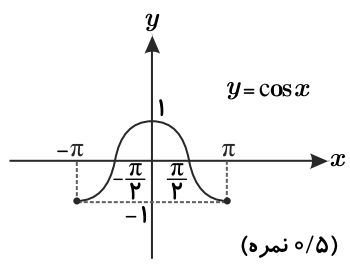
$$h = 50 + l \Rightarrow h = 50 + 153 \sin \theta \text{ (نمره ۵)}$$

(نمره ۰/۲۵)

۲۹ ابتدا نمودار تابع $y = \cos x$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کرده سپس بخش زیرین نمودار را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم.



(صفحة ۱۰۸ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:

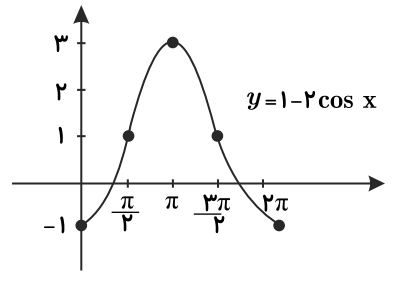
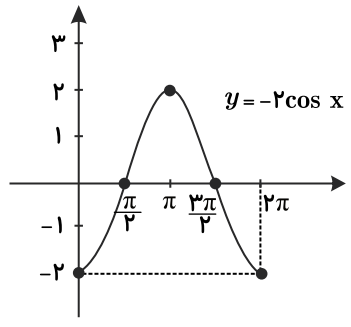
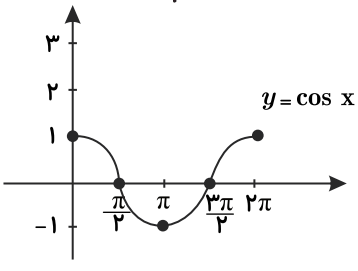
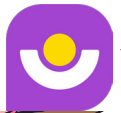


(نمره ۰/۵)

(نمره ۰/۵)

۳۰

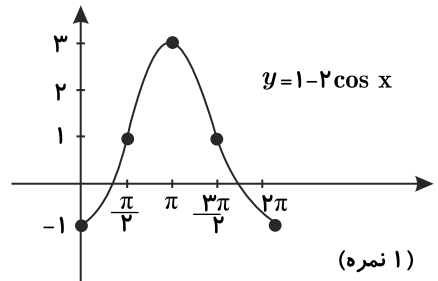
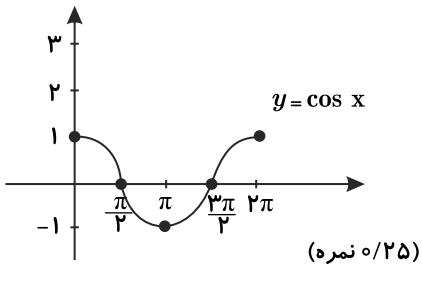
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	1	-1	1	-1



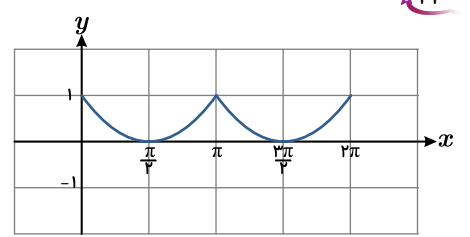
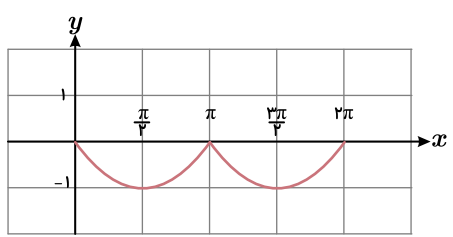
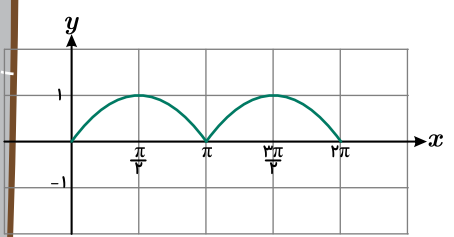
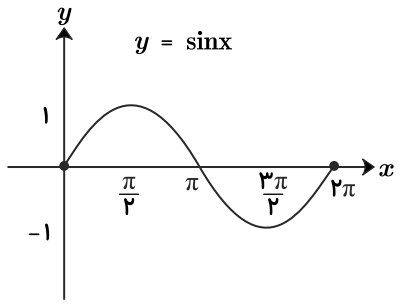
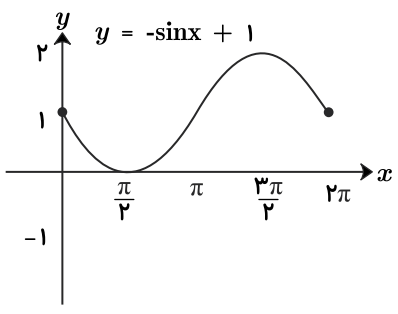
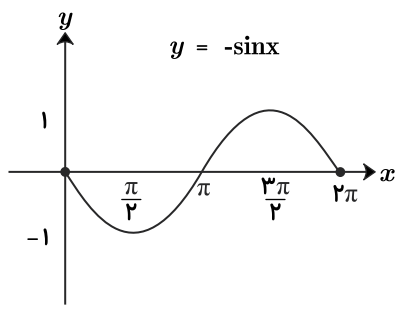
(صفحة ۱۰۷ کتاب درسی)
راهنمای تصحیح:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	1	3	1	-1

(نمره ۰,۲۵)

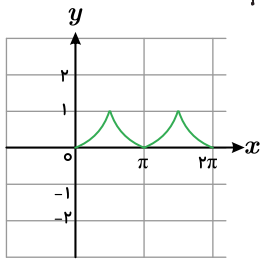


۳۱



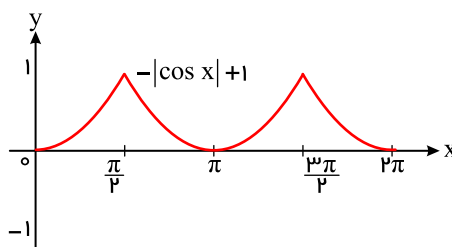
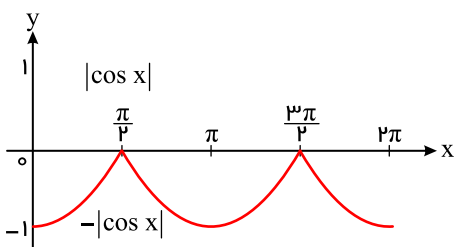
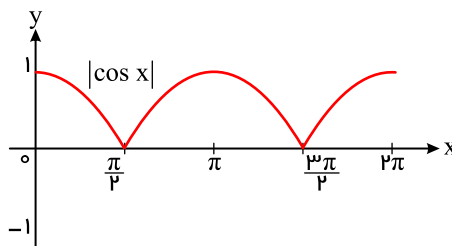
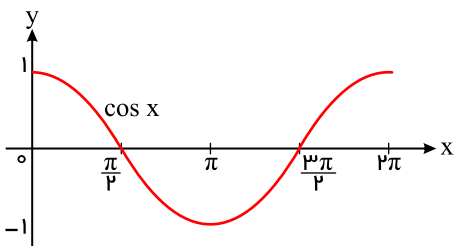
۳۲

۳۳

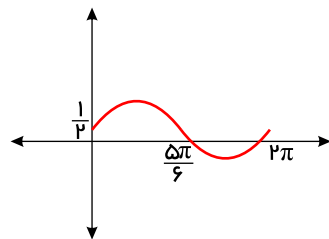
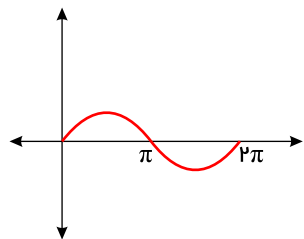


$[0, 1]$ برد

۳۴



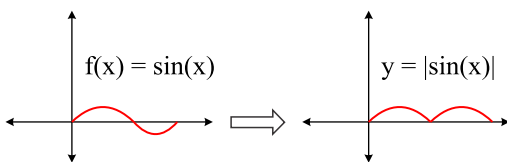
$R_f = [0, 1]$



۳۵ الف) با توجه به نمودار $y = \sin(x)$ و با انتقال این نمودار به اندازه $\frac{\pi}{6}$ به سمت

چپ بر روی محور x ها نمودار موردنظر به دست می‌آید.

ب) نمودار تابع در نقاط $\frac{11\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ محور x ها را قطع می‌کند.



۳۶

۳۷ الف) درست؛

(صفحه ۹۵ کتاب درسی)

ب) درست؛

(صفحه ۹۴ کتاب درسی)

ج) نادرست؛

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{225}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{225}{180} \pi = \frac{5\pi}{4}$$

$$2\pi r = 12\pi \Rightarrow r = 6 \quad \theta = 150^\circ = 5 \times 30^\circ = 5 \frac{\pi}{6}; L = r\theta \Rightarrow L = 6 \times \frac{5\pi}{6} = 5\pi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

(صفحة ۹۸ کتاب درسی)

د) نادرست:

$$\cot 75^\circ = \cot(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \cot 3^\circ = \sqrt{3}$$

(صفحة ۱۰۱ کتاب درسی)

ه) درست:

$$-\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}(\cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{4})$$

$$= -\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha\right) = -\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) = -(\cos \alpha - \sin \alpha) = \sin \alpha - \cos \alpha$$

(صفحة ۱۱۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست (۲۵، ۰ نمره)

د) نادرست (۲۵، ۰ نمره)

ج) نادرست (۲۵، ۰ نمره)

ب) درست (۲۵، ۰ نمره)

ه) درست (۲۵، ۰ نمره)

۳۸

$$\begin{aligned} \cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} &= \frac{\cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{\cos 2\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{2} \sin 2\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \frac{2 \cos x}{\sin x} = 2 \cot x \end{aligned}$$

(صفحة ۱۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\cot \frac{x}{2} - \tan \frac{x}{2} = \frac{\overbrace{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}^{(۵، ۰ نمره)}}{\underbrace{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}_{(۵، ۰ نمره)}} = \frac{2 \cos x}{\sin x} \quad (۲۵، ۰ نمره) = 2 \cot x \quad (۲۵، ۰ نمره)$$

۳۹

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{2} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} &= 1 - \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \\ \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} &= \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \end{aligned}$$

(صفحة ۱۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} \overbrace{\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha}^{(۵، ۰ نمره)} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{2} &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \quad (۲۵، ۰ نمره) \\ \Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} &= \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \quad (۲۵، ۰ نمره) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad (۲۵، ۰ نمره) \Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \quad (۲۵، ۰ نمره) \end{aligned}$$

۴۰

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{144}{169}} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 3^\circ) &= \sin \alpha \cdot \cos 3^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 3^\circ \\ &= \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-12}{13}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{26} - \frac{12}{26} = \frac{5\sqrt{3} - 12}{26} \end{aligned}$$

(صفحة ۱۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



α در ربع دوم است؛ پس مقدار $\sin \alpha$ مثبت می‌باشد.

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{5}{13} \text{ (نمره ۵)}$$

$$\sin(\alpha + 30^\circ) = \sin \alpha \cdot \cos 30^\circ + \cos \alpha \cdot \sin 30^\circ \text{ (نمره ۵)} = \frac{5}{13} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{12}{13} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3} - 12}{26} \text{ (نمره ۵)}$$

۴۱ روش اول:

$$\begin{aligned} 2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) \cdot \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha) \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \sin(2\beta) &= 2 \sin \beta \cdot \cos \beta \xrightarrow{\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha} 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

(صفحه ۱۱۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

روش اول:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \Rightarrow 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \\ &= \underbrace{2 \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right)}_{\text{(نمره ۲۵)}} \cdot \underbrace{\left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right)}_{\text{(نمره ۲۵)}} \\ &= (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \alpha - \sin \alpha) \text{ (نمره ۲۵)} \\ &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha \text{ (نمره ۲۵)} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} \sin(2\beta) &= 2 \sin \beta \cdot \cos \beta \text{ (نمره ۵)} \xrightarrow{\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha} 2 \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \text{ (نمره ۲۵)} = \cos(2\alpha) \text{ (نمره ۲۵)} \end{aligned}$$

۴۲

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) + \cos x \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) + \cos x \\ &= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x - \cos x) + \cos x = \sin x - \cos x + \cos x = \sin x \end{aligned}$$

(صفحه ۱۱۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} &\sqrt{2} \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) + \cos x \text{ (نمره ۲۵)} \\ &= \sin x - \cos x + \cos x \text{ (نمره ۵)} = \sin x \text{ (نمره ۲۵)} \end{aligned}$$

۴۳

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{حاده}} \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^2} = \frac{3}{5} \\ \cos \beta &= -\frac{12}{13} \xrightarrow{\text{در ربع سوم}} \sin \beta = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13} \right)^2} = -\frac{5}{13} \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \left(\frac{4}{5} \right) \left(-\frac{12}{13} \right) - \left(\frac{3}{5} \right) \left(-\frac{5}{13} \right) = \frac{-48 + 15}{65} = -\frac{33}{65} \end{aligned}$$

۴۴

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{حاده}} \cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{منفرجه}} \sin \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \left(\frac{4}{5} \times -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{10}$$

۴۵

$$\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \sin \beta = \frac{5}{13}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{16}{65}$$

۴۶ با استفاده از فرمول‌های $\cos^2 u - \sin^2 u = \cos 2u$ و $\sin 2u = 2 \sin u \cos u$ داریم:

$$A = 8 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - 8 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})$$

$$= 4 \sin x \cos x = 2 \sin 2x$$

$$\xrightarrow{x=15^\circ} A = 2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

(صفحه ۱۱۱ و ۱۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$A = 8 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} - 8 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} (\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) \quad (25 \text{ نمره})$$

$$= 4 \sin x \cos x \quad (25 \text{ نمره}) = 2 \sin 2x \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\xrightarrow{x=15^\circ} A = 2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad (25 \text{ نمره})$$

۴۷

$$\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < x < \pi} \sin x = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{-\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{-4\sqrt{5}}{9}$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9}$$

(صفحه ۱۱۰ تا ۱۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\cos x = \frac{-\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x} \Rightarrow \sin x = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3} \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \times \frac{-\sqrt{5}}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{-4\sqrt{5}}{9} \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{5}{9} - 1 = \frac{1}{9} \quad (25 \text{ نمره})$$

۴۸

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{\cos^2 \beta} = 1 + \tan^2 \beta = \frac{9}{5}$$

$$\sin \beta = \cos \beta \tan \beta, \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \times \frac{-\sqrt{5}}{3} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{-4\sqrt{5} - 6}{15}$$

۴۹ گزینه ۲،

۵۰

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos \alpha \cdot \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۵

یازدهم

سال یازدهم

ریاضی

فهرست

درس اول : مفهوم حد و فرایند های حدی

۱..... مفهوم حد، همسایگی

درس دوم : حد های یک طرفه (حد چپ و حد راست)

۲..... حد چپ و راست از روی نمودار تابع

درس سوم : قضایای حد

۳..... قضایای حد و حد توابع چند جمله ای، گویا، رادیکالی و مثلثاتی

۴..... حد در توابع براکتی

درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم)

۵..... مبهم صفر صفرم جبری

۶..... مبهم صفر صفرم رادیکالی

۷..... مبهم صفر صفرم مثلثاتی

درس پنجم : پیوستگی

۷..... پیوستگی تابع در نقطه از روی نمودار و ضابطه

۸..... مسائل پارامتری پیوستگی

۸..... پیوستگی در بازه



درس اول : مفهوم حد و فرایندهای

حدی

مفهوم حد، همسایگی

۱ آیا تابع $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ در نقطه $x = 1$ حد دارد؟ چرا؟

۲ اگر بازه $(x - 1, 2y + 5)$ یک همسایگی راستِ محذوفِ ۳ باشد، مجموعه مقادیر x و y را به دست آورید.

۳ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که در یک همسایگی محذوف نقطه $x = 3$ تعریف شود ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

۴ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & x > 1 \\ x^2 - 2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کرده، سپس با استفاده از نمودار حد تابع در نقطه $x = 1$ را بررسی کنید.

۵ به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید.

الف) اگر $f(x) = x + 4$ و $g(x) = 3x$ ، حاصل $(\frac{f}{g})(2)$ چقدر است؟

ب) طول برف‌پاک‌کن عقب اتومبیلی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن کمانی به اندازه 150° درجه طی می‌کند، طول کمان طی شده توسط نوک برف‌پاک‌کن چقدر است؟ ($\pi = 3$)

۶ ضابطه‌ی تابعی را بنویسید که در $x = -1$ تعریف نشده و حد نداشته باشد، سپس نمودار آن را رسم کنید.

۷ کدامیک از مجموعه‌های زیر یک همسایگی محذوف ۳ نیست؟

الف

$$A = (-2, 3) \cap (3, 4)$$

ب

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - 3| < 1\}$$

پ

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x - 3|} > 1\}$$

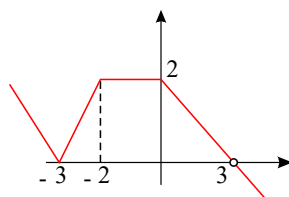
ت

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 3| > 2\}$$

ث

$$E = (1, 2) - \{3\}$$

۸ نمودار تابع f در شکل زیر داده شده است. حاصل هر یک از حدود زیر را در صورت وجود تعیین کنید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ج) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

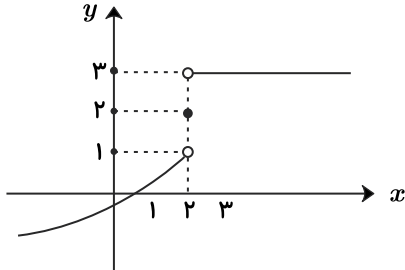




درس دوم: حد های یک طرفه (حد

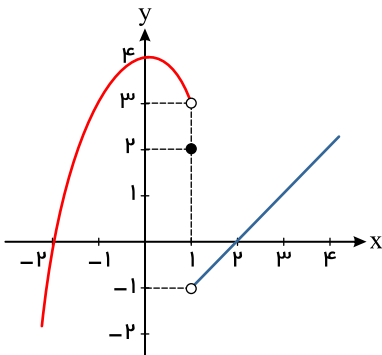
حد چپ و راست از روی نمودار تابع چپ و حد راست)

۹ با توجه به نمودار تابع $f(x)$ مقدار عبارت، $A = \lim_{x \rightarrow 2^-} [f(x)] + f(2) + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است)



۱۰ با توجه به شکل، حاصل عبارت زیر را در صورت وجود به دست آورید.

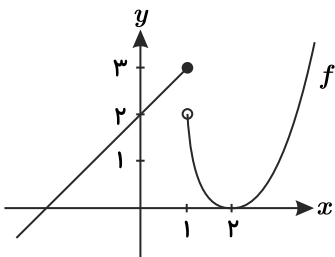
$$2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 3f(1) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$



۱۱ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -2 & x \in \mathbb{Z} \\ 3 & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ را در فاصله $[-2, 2]$ رسم نموده و سپس با استفاده از نمودار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ را به دست آورید.

۱۲ حد راست تابع $f(x) = \frac{x}{[x] - 3}$ را در نقطه $x = 3$ بررسی کنید.

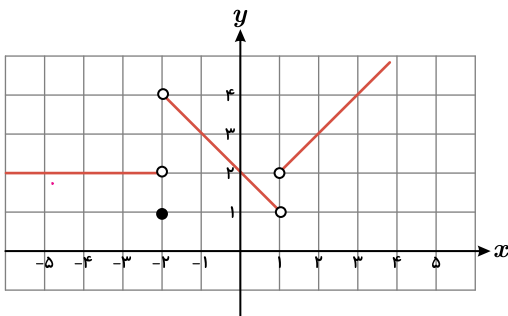
۱۳ با توجه به نمودار تابع f حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)



۱۴ نمودار تابع f به صورت زیر است.

(الف) دامنه این تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

(ب) حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است.)

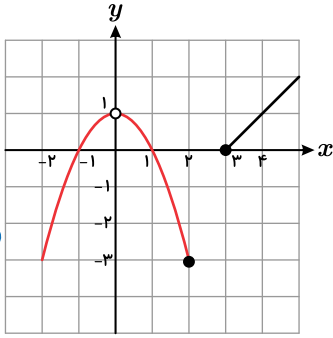


$$\lim_{x \rightarrow -2^+} [f(x)] \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \quad (3)$$

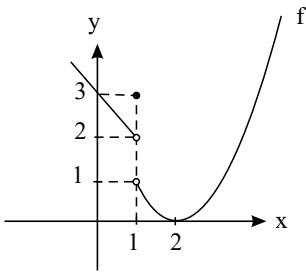
۱۵ با توجه به نمودار تابع f ، حدهای خواسته شده را در صورت وجود پیدا کنید.



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

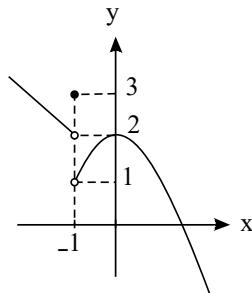
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



۱۶ با استفاده از نمودار رو به رو، عبارت خواسته شده را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1)$$

۱۷ با استفاده از نمودار رو به رو، عبارات خواسته شده را در صورت وجود محاسبه کنید.



الف) $2f(-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]$

درس سوم : قضایای حد

قضایای حد و حد توابع چند جمله ای، گویا، رادیکالی و مثلثاتی

۱۸ حدود زیر را محاسبه کنید. ([] نماد جزء صحیح است)

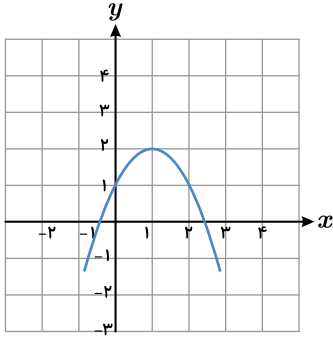
$$\lim_{x \rightarrow 3} \Delta$$



۲۴ تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{[x] - 2}{x - 2}$ را در نظر بگیرید. با کامل کردن جدول زیر، مقدار $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ را در صورت وجود به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است)

x	۲٫۱	۲٫۰۱	۲٫۰۰۱	$\rightarrow 2$
$f(x)$?

۲۵ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(x)]$$

الف

ب

پ



درس چهارم : محاسبه حد توابع کسری (حالت صفر صفرم)

مبهم صفر صفرم جبری

۲۶ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2|x| - 8}{x - 2}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}$$

۲۷ مقدار حدهای زیر را در صورت وجود، بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{6x - 2\pi}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3}$



۲۸ گزینه مناسب را انتخاب کنید.

الف) اگر $\log_b a = 2$ باشد، حاصل $\log_b \sqrt{a}$ چقدر است؟

- (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) ۱ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) ۲

ب) اگر $\tan x + \cot x = 6$ باشد، مقدار $\sin 2x$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۳ (۴) $\frac{1}{3}$

ج) اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + a}{x^2 - 4}$ برابر عددی حقیقی باشد، آن عدد کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{4}{3}$

۲۹ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 + x - 2}$

مبهم صفر صفرم رادیکالی

۳۰ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x}$

ب

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6}$

۳۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x} - 5 - 2}$

ب

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x}$

۳۲ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف

$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x}$

ب

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$



۳۳ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) لگاریتم اعداد تعریف نمی شوند.

ب) اگر $a = \log 2$ باشد، حاصل $\log 0.5$ بر حسب a برابر است.

ج) کمترین مقدار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{3}) - 1$ برابر است.

د) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4}$ مساوی است.

۳۴ حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 6^+} (\lfloor \frac{x}{2} \rfloor - \lfloor -\frac{x}{3} \rfloor)$

ب) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{5x - 15}$

ج) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x}$

۳۵ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x} - 5 - 1} = 3$ آن گاه a را بیابید.

مبهم صفر صفرم مثلثاتی

۳۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan 3x}{x^2}$ را بیابید.

۳۷ حد زیر را در صورت وجود بدست آورید.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$



درس پنجم : پیوستگی



پیوستگی تابع در نقطه از روی نمودار و ضابطه

۳۸ پیوستگی تابع f را در $x = 0$ ، به ازای تمام مقادیر a بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

۳۹ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f در نقطه‌ای به طول $x = 0$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & x > 0 \\ x - \frac{a}{4} & x = 0 \\ b + \frac{[x]}{2} & x < 0 \end{cases}$$

۴۰ نمودار تابع g را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه $x = -2$ حد راست داشته باشد ولی در این نقطه پیوستگی راست نداشته باشد.

۴۱ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x]+a}{x-1} & x > 2 \\ b-1 & x = 2 \\ 2bx+4 & x < 2 \end{cases}$$



۴۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) اگر در یک مستطیل به طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{W}{L} = \frac{L}{L+W}$ ، آنگاه در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.
 ب) هم‌دامنه تابع، همان برد تابع است.

ج) حد تابع $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند، برابر صفر است.

د) تابع $f(x) = [x^2]$ در $x = -\sqrt{2}$ فقط پیوستگی چپ دارد.

۴۳ مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه

$$f(x) = \begin{cases} [x] + a & , x < 0 \\ 1 + b & , x = 0 \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} & , x > 0 \end{cases}$$

در $x = 0$ پیوسته باشد.

۴۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) دامنه تابع $f(x) = \log_x(x - 2)$ برابر $(2, +\infty)$ است.

ب) حاصل $125 \log_{\sqrt{5}} \frac{1}{3}$ مساوی $\frac{1}{3}$ است.

ج) مقدار عبارت $\sin 345^\circ \cos 165^\circ$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

د) تابع f در $x = a$ پیوسته است، هرگاه $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

ه) اگر حد تابع f در a موجود باشد، اما تابع g در a حد نداشته باشد، آنگاه ممکن است حد تابع $f + g$ در a موجود باشد.

مسائل پارامتری پیوستگی

۴۵ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} - 1 & x > 1 \\ x - 1 & x = 1 \\ b - 1 & x = 1 \\ x - 2a & x < 1 \end{cases}$$

۴۶ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x > 2 \\ 3 & x = 2 \\ bx + 1 & x < 2 \end{cases}$$

۴۷ مقدار a را طوری بیابید که تابع $g(x) = ([x] - a)[x]$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد.

۴۸ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 3x + a & x > 1 \\ 5 & x = 1 \\ bx - 2 & x < 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقادیر a و b را بیابید.

۴۹ a و b را چنان بیابید که تابع زیر در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} a[x] - 2 & x > 1 \\ 4 & x = 1 \\ [-x] + bx & x < 1 \end{cases}$$

پیوستگی در بازه

۵۰ پیوستگی تابع $f(x) = [x] + x - 3$ را در بازه $(3, 4)$ بررسی کنید.

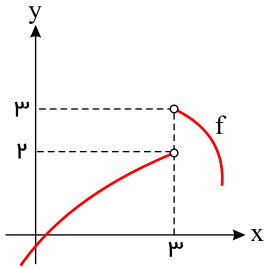


پاسخنامه تشریحی

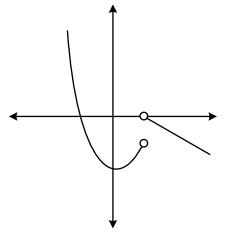
۱ خیر با توجه به دامنه تابع، همسایگی راست یک، وجود ندارد.

$$x - x^2 \geq 0 \Rightarrow D = [0, 1]$$

$$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4, \quad 2y + 5 > 3 \Rightarrow y > -1$$



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

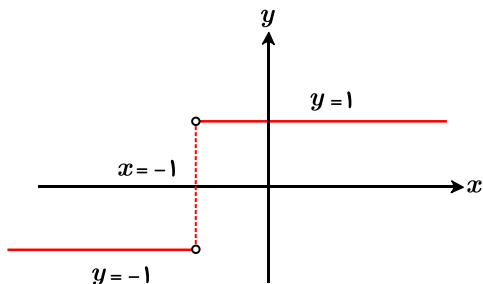


$$\text{الف)} \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3(2)} = 1$$

$$\text{ب)} L = R \times Q^R \xrightarrow{150^\circ = \frac{5\pi}{6}}, L = 24 \times \frac{5\pi}{6} = 24 \times \frac{5 \times 3}{6} = 60$$

$$\text{الف)} \left(\frac{f}{g}\right)(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{2+4}{3(2)} = 1$$

$$\text{ب)} L = R \times Q^R \Rightarrow L = 24 \times \frac{5\pi}{6} = 24 \times \frac{5 \times 3}{6} = 60$$



$$f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

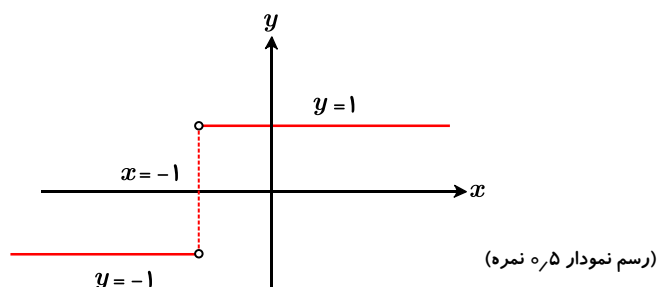
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1 \end{cases}$$

تابع در $x = -1$ حد چپ و راست نابرابر دارد؛ پس در این نقطه حد ندارد. از طرفی در این نقطه تعریف نشده؛ چون $x = -1$ ریشه مخرج کسر است.

(صفحه ۱۲۴ و ۱۲۵ کتاب درسی)



$$f(x) = \frac{|x+1|}{x+1} \quad (\text{نمره ۵, ۵})$$



به توابع دیگری که با ذکر دلیل خواسته سؤال را برآورده می‌کند، نمره کامل تعلق گیرد.

۷

هست الف

هست ب

پ

$$\text{همسایگی محذوف ۳ است.} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} ۲ < x < ۴ \\ \text{و} \\ x \neq ۳ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{باتوجه به هم علامت بودن نامساوی} \\ \text{طرفین را معکوس می‌کنیم} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |x-۳| < ۱ \Rightarrow -۱ < x-۳ < ۱ \xrightarrow{+۳} \\ |x-۳| \neq ۰ \Rightarrow x \neq ۳ \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} x \neq ۳ \\ \text{و} \\ |x-۳| < ۱ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{همسایگی محذوف ۳ داریم.} \Rightarrow \text{نقاطی که فاصله آنها تا ۳ کمتر از ۱ است و خود ۳ نیز نباشد}$$

$$|x-۳| > ۲ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-۳ > ۲ \\ \text{یا} \\ x-۳ < -۲ \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x > ۵ \\ \text{یا} \\ x < ۱ \end{array} \right. \Rightarrow \text{همسایگی محذوف ۳ نیست.}$$

فقط برداشتن ۳ مهم نیست. ابتدا باید یک همسایگی ۳ را داشته باشیم. بازه (۲, ۱) همسایگی از ۳ نیست.

۸

الف) $\lim_{x \rightarrow (-۲)} f(x) = ۲$

ب) $\lim_{x \rightarrow ۳} f(x) = ۰$

ج) $\lim_{x \rightarrow (-۱)} f(x) = ۲$

در هر سه قسمت حد موجود است.

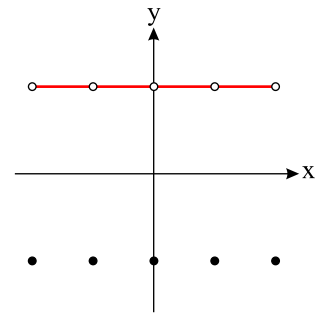
$$\lim_{x \rightarrow ۲^-} [f(x)] = ۰, \quad \lim_{x \rightarrow ۲^+} f(x) = ۳, \quad f(۲) = ۲ \quad \rightarrow A = ۰ + ۲ + ۳ = ۵$$

$$۲ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + ۳f(1) - \lim_{x \rightarrow ۰} f(x) = ۲(-۱) + ۳(۲) - ۴ = ۰$$

۹

۱۰

۱۱



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \quad \rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

۱۲ با توجه به دامنه تابع: $D = (-\infty, +\infty) - [3, 4]$ ، متغیر x نمی‌تواند با مقادیر بیشتر از ۳ به ۳ نزدیک شود. بنابراین حد راست تابع در نقطه $x = 3$ وجود ندارد.

۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = [3^-] = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3; \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \text{عبارت داده شده} = 2 + 3 + 2(0) = 5$$

(صفحة ۱۲۷ و ۱۲۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = [3^-] = 2 \text{ (نمره ۲۵)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \text{ (نمره ۲۵)}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow \text{عبارت داده شده} = 2 + 3 + 2(0) = 5 \text{ (نمره ۲۵)}$$

۱۴ الف ۱

ب

۳ (۱) ۱ (۲) وجود ندارد (۳)

۱۵

الف -۳

ب وجود ندارد

پ ۱

۱۶

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 2f(1) = 2 - 1 + 2 \times 3 = 1 + 6 = 7$$

$$\text{الف } 2f(-1) + \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$\text{ب } \lim_{x \rightarrow (-1)^-} [f(x)] - 2 \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] = [2^+] - 2[2^-] = 2 - 2 \times 1 = 0$$

۱۸

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \Delta = 5$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2[x] - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x^2 - 9)}{x - 3} = 3 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = 18$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x} \times \frac{1}{1 + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$$

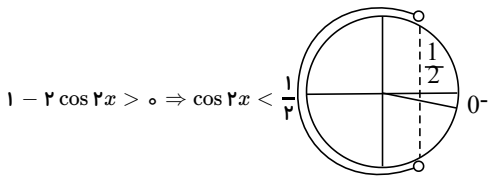
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

۱۹



الف نادرست

۲۰



با توجه به دایره مثلثاتی تابع در همسایگی صفر تعریف نشده است یعنی زمانی که $x \rightarrow 0^-$ داخل رادیکال منفی می شود و حد موجود نیست.

۲۱

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{9 - (x + \lambda)}{(x - 1)(x + 1)(\lambda + \sqrt{x + \lambda})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{(x + 1)(\lambda + \sqrt{x + \lambda})} = \frac{-1}{1\lambda}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 0 = 0$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2 \sin^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x \times \sin x}{x \sin x} = 4$$

۲۲ الف) گزینه ۲؛ با توجه به اینکه $-2 = [(-1)^-]$ ؛ بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + [x]}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2}{-x} = \frac{1 - 2}{1} = -1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} 3x + b = -3 + b \Rightarrow b = 2$$

(صفحه ۱۲۹ کتاب درسی)

ب) گزینه ۱؛

$$\log x + \log(x + 1) = \log 12 \Rightarrow \log x(x + 1) = \log 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 4)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \text{ غلط} \\ x = 3 \text{ قی} \Rightarrow \log_7(x + 6) = \log_7 9 = 2 \end{cases}$$

(صفحه ۸۵ کتاب درسی)

ج) گزینه ۳؛

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x \rightarrow \cos x = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}$$

$$\rightarrow \cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

(صفحه ۱۱۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

ج) گزینه ۳

ب) گزینه ۱

الف) گزینه ۲

(هر مورد ۵/۵ نمره)

۲۳

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \frac{(-1)^+ + [(-1)^-]}{|-1|} = \frac{1 - 2}{1} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= 3(-1) + b = b - 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b - 3 = -1 \Rightarrow b = 2$$

(صفحه ۱۲۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{1 - 2}{1} = -1 \text{ (نمره ۲,۲۵)}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = b - 3 \text{ (نمره ۲,۲۵)} \Rightarrow b - 3 = -1 \text{ (نمره ۲,۲۵)}$$

$$\Rightarrow b = 2 \text{ (نمره ۲,۲۵)}$$

۲۴



x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \epsilon$	$\frac{1}{2} - \epsilon$	$\rightarrow \frac{1}{2}$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

۲۵

الف

ب

پ

صفر

۲۶

الف

ب

۲۷

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{5 \times 2x} = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} &= \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{1 \times 2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6(x - \frac{\pi}{6})} \xrightarrow{x - \frac{\pi}{6} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 [x] - 27}{x - 3} \xrightarrow{[x]=3} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 18$$

(صفحة ۱۴۱ تا ۱۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} \text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} &= \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^2 + x} \times \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - 1+x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(x+1)(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{1 \times 2} = 1 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6x - 2\pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{6})}{6(x - \frac{\pi}{6})} \xrightarrow{x - \frac{\pi}{6} = t} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 [x] - 27}{x - 3} \xrightarrow{[x]=3} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3(x-3)(x+3)}{(x-3)} = 18$$

(هر مورد ۵ نمره)

۲۸ الف گزینه ۲

$$\log_b \sqrt{a} = \log_b a^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_b a = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

ب) گزینه ۴

$$\tan x + \cot x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} \Rightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 6 \Rightarrow \sin 2x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ج) گزینه ۲: در $x = 2$ حد مخارج برابر صفر و از طرفی حد کسر برابر عددی حقیقی است، پس به ازای $x = 2$ صورت کسر نیز برابر صفر می شود:



$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + a) = 0 \Rightarrow 4 + 2a + a = 0 \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow a = -\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x + \frac{2}{3})}{(x-2)(x+2)} = \frac{\frac{2}{3}}{4} = \frac{1}{6}$$

(صفحة ۸۶ و ۱۱۰ تا ۱۱۲ و ۱۴۱ تا ۱۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحيح:

الف) گزینة ۲ (۵، ۵ نمره) ب) گزینة ۴ (۵، ۵ نمره) ج) گزینة ۲ (۵، ۵ نمره)

۲۹

$$\begin{aligned} \text{الف)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1 - 2x - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1) - 2(x+1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1 - 2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x-1} = \frac{1+1-1}{-1-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + 2x - 2}{x^2 + x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)}{x^2 + x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1 + 2)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x + 3}{x+2} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

۳۰

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \cdot \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2$$

ب

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{x^2 + x - 6} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - (x+2)}{(x+3)(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)(x + \sqrt{x+2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)}{(x+3)(x + \sqrt{x+2})} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

۳۱

الف

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{3x - 5} - 2} &= \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{(\sqrt{3x-5} - 2)(\sqrt{3x-5} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3x - 5 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(\sqrt{3x-5} + 2)}{3} = \frac{24}{3} = 8 \end{aligned}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 2x}{x \sin x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos 2x)}{x \sin x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(2 \sin^2 x)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x} = 4 \times 1 = 4$$

۳۲

الف

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{4})}{\cos x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin x \frac{\pi}{4}}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x}{\cos x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)}{\cos x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

ب

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

۳۳ الف) نامثبت

ب)

$$\log \frac{5}{1000} = \log 5 - \log 10^3 = 1 - \log 2 - 3 \log 10 = 1 - a - 3 = -2 - a$$

(ج)

$$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq y \leq 0 \Rightarrow \min(y) = -2$$

(د)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x^2 - 4} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$$

(صفحة ۸۰ و ۸۶ و ۱۰۵ تا ۱۰۹ و ۱۴۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

 $\frac{1}{16}$ (د)الف) نامثبت (ب) $-2 - a$ (ج) -2

(هر مورد ۲۵، ۲۵ نمره)

۳۴

$$\text{الف) } \left[\frac{6^+}{2}\right] - \left[-\frac{6^+}{3}\right] = [3^+] - [-(2^+)] = [3^+] - [(-2)^-] = 3 - (-2) = 5$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{5x-15} \times \frac{x + \sqrt{2x+3}}{x + \sqrt{2x+3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{5(x-3)(x + \sqrt{2x+3})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{5(x-3)(6)} = \frac{2}{15}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(صفحة ۱۲۹ و ۱۴۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{الف) } [3^+] - [-2^-] \text{ (نمره ۵, ۵) } = 3 - (-2) = 5 \text{ (نمره ۵, ۲۵) } = 5$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - \sqrt{2x+3}}{5x-15} \times \frac{x + \sqrt{2x+3}}{x + \sqrt{2x+3}} \text{ (نمره ۵, ۲۵) } = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{5(x-3) \times 6} \text{ (نمره ۵, ۵) } \\ = \frac{2}{5 \times 6} = \frac{2}{15} \text{ (نمره ۵, ۲۵)}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} \text{ (نمره ۵, ۵) } = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} \text{ (نمره ۵, ۲۵)}$$

۳۵

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{ax - 2a}{\sqrt{3x-5} - 1} \times \frac{\sqrt{3x-5} + 1}{\sqrt{3x-5} + 1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5} + 1)}{3x-5-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-2)(\sqrt{3x-5} + 1)}{2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(\sqrt{3x-5} + 1)}{2} = \frac{2a}{2} = a \Rightarrow a = \frac{9}{2}$$

۳۶

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\tan 3x}{3x} = 2 \times 3 = 6$$

(صفحة ۱۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sin 2x}{2x} \times \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\tan x}{3x} = 2 \times 3 = 6 \text{ (نمره ۵, ۲۵)}$$

۳۷

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \cos x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{x}{2} \cos x}{\sin \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times 1 \times 1}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{2}{0} \text{ حد ندارد.}$$

۳۸

$$f(0) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -a$$

$$a = 0 \Rightarrow f(0) \neq \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

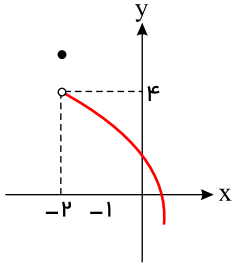
$$a \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$



۳۹

$$f(0) = \frac{-a}{f}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x-1}{x(\sqrt{1+x+1})} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b - \frac{1}{f} \Rightarrow a = -2, \quad b = 1$$



۴۰

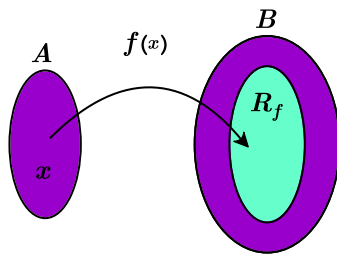
۴۱

برای اینکه تابع در $x = 2$ پیوسته باشد باید: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2+a}{1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3b+4, \quad f(2) = b-1$$

$$3b+4 = b-1 \rightarrow b = \frac{-5}{2}, \quad 2+a = b-1 \rightarrow a = \frac{-14}{3}$$

۴۲ الف) درست؛ اگر در یک مستطیل به طول L و عرض W داشته باشیم $\frac{L}{L+W} = \frac{L}{L}$ یا $\frac{W}{L+W} = \frac{L}{L}$ ، آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است. (صفحه ۱۹ کتاب درسی)



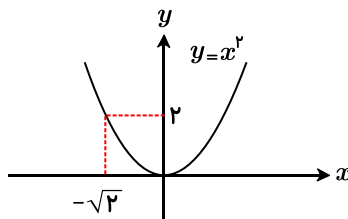
ب) نادرست؛ مجموعه A مجموعه ابتدا و دامنه تابع بوده $(D_f = A)$ و مجموعه B مجموعه انتها و هم دامنه نامیده می‌شود، ولی الزاماً برابر با برد تابع نیست؛ بلکه $R_f \subseteq B$. (صفحه ۳۸ کتاب درسی)

ج) نادرست؛ تابع در همسایگی راست نقطه $x = 2$ تعریف نشده و شرط لازم حد برقرار نیست؛ بنابراین حد ندارد. به عبارت دیگر:

$$f(x) = \sqrt{2x-x^2} \rightarrow 2x-x^2 \geq 0 \Rightarrow D_f = [0, 2] \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{0^-} = \text{وجود ندارد} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{2x-x^2} = \sqrt{0^+} = 0 \end{cases}$$

حد چپ دارد، ولی حد راست ندارد؛ پس در $x = 2$ حد ندارد. (صفحه ۱۲۴ کتاب درسی)

(د) درست



$$f(x) = [x^2] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^-} f(x) = [2^+] \\ = f(-\sqrt{2}) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}^+} f(x) = [2^-] = 1$$

(صفحه ۱۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست ب) نادرست ج) نادرست د) درست
(هر مورد ۰٫۲۵ نمره)

۴۳ برای اینکه f در $x = 0$ پیوسته باشد، باید حدود چپ و راست در $x = 0$ موجود بوده و برابر با $f(0)$ باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{2 \cos(0)}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + a = [0^-] + a = -1 + a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1$$

$$f(0) = 1 + b = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} - 1$$

(صفحه ۱۵۰ و ۱۵۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right|} \quad (\text{نمره } ۲, ۵)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \cos(0)}{\sqrt{2}} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (\text{نمره } ۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [x] + a = [0^-] + a = -1 + a = \sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1 \quad (\text{نمره } ۲, ۵)$$

$$f(0) = 1 + b = \sqrt{2} \Rightarrow b = \sqrt{2} - 1 \quad (\text{نمره } ۲, ۵)$$

۴۴ الف درست

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2 \xrightarrow{\cap} x > 2 \Rightarrow D_f = (2, +\infty)$$

$$x > 0, x \neq 1$$

(ب) نادرست

$$\log_{\delta \times \delta^{\frac{1}{3}}} \delta^3 = \log_{\delta^{\frac{4}{3}}} \delta^3 = 3 \times \frac{3}{4} \log_{\delta} \delta = 2$$

(ج) درست

$$\cos(180^\circ - 15^\circ) \sin(360^\circ - 15^\circ) = (-\cos 15^\circ)(-\sin 15^\circ) = \sin 15^\circ \cos 15^\circ = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

(د) درست؛ تعریف تابع پیوسته

(ه) نادرست؛ زیرا اگر $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ موجود باشد، بنا بر تساوی $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$ و قضیه حد تفاضل، حد تابع $g(x)$ نیز باید در a موجود باشد که خلاف فرض است.

(صفحه ۸۰ و ۸۶ و ۹۸ تا ۱۰۳ و ۱۴۶ و ۱۳۰ تا ۱۳۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف درست (ب) نادرست (ج) درست (د) درست (ه) نادرست

(هر مورد ۲, ۵ نمره)

۴۵

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - 2a) = 1 - 2a$$

$$\text{مقدار } f(1) = b - 1$$

$$\rightarrow \begin{cases} b - 1 = \frac{1}{2} \rightarrow b = \frac{3}{2} \\ 1 - 2a = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{4} \end{cases}$$

چون تابع f در $x = 1$ پیوسته است

۴۶ برای اینکه تابع در $x = 2$ پیوسته باشد باید:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2b + 1, \quad f(2) = 3$$

$$4 + a = 3 \rightarrow a = -1$$

$$2b + 1 = 3 \rightarrow b = 1$$

۴۷

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} ([x] - a)[x] = \lim_{x \rightarrow -2^-} ([-2^-] - a)[-2^-] = (-3 - a)(-3) = 9 + 3a$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} ([x] - a)[x] = \lim_{x \rightarrow -2^+} ([-2^+] - a)[-2^+] = (-2 - a)(-2) = 4 + 2a$$



$$f(-2) = ([-2] - a)[-2] = (-2 - a)(-2) = 4 + 2a$$

$$9 + 3a = 4 + 2a \Rightarrow a = -5$$

برای بررسی پیوستگی باید در نقطه $x = -2$ حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند.

۴۸

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + a) = 5 \Rightarrow 3 + a = 5 \Rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 2) = 5 \Rightarrow b - 2 = 5 \Rightarrow b = 7$$

(صفحة ۱۵۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + a) = a + 3 = 5 \text{ (نمره ۲.۵)} \Rightarrow a = 2 \text{ (نمره ۲.۵)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (bx - 2) = b - 2 = 5 \text{ (نمره ۲.۵)} \Rightarrow b = 7 \text{ (نمره ۲.۵)}$$

۴۹

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-x] + bx = [-(1 - \varepsilon)] + b = [-1 + \varepsilon] + b = -1 + b$$

$$L^+ = \lim_{x \rightarrow 1^+} a[x] - 2 = a - 2, f(1) = 4 \Rightarrow -1 + b = 4 \Rightarrow \boxed{b = 5}$$

$$a - 2 = 4 \Rightarrow \boxed{a = 6}$$

۵۰

$$f(x) = [x] + x - 3 \quad x \in (3, 4]$$

$$x \in (3, 4) \Rightarrow 3 < x < 4 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow f(x) = 3 + x - 3 = x \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow \text{تابع پیوسته}$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = [4] + 4 - 3 = 5$$

$$L^- = \lim_{x \rightarrow 4^-} [x] + x - 3 = [4 - \varepsilon] + 4 - 3 = 3 + 1 = 4 \neq f(4)$$

تابع در $x = 4$ پیوستگی چپ ندارد پس تابع در بازه $(3, 4]$ پیوسته نیست.