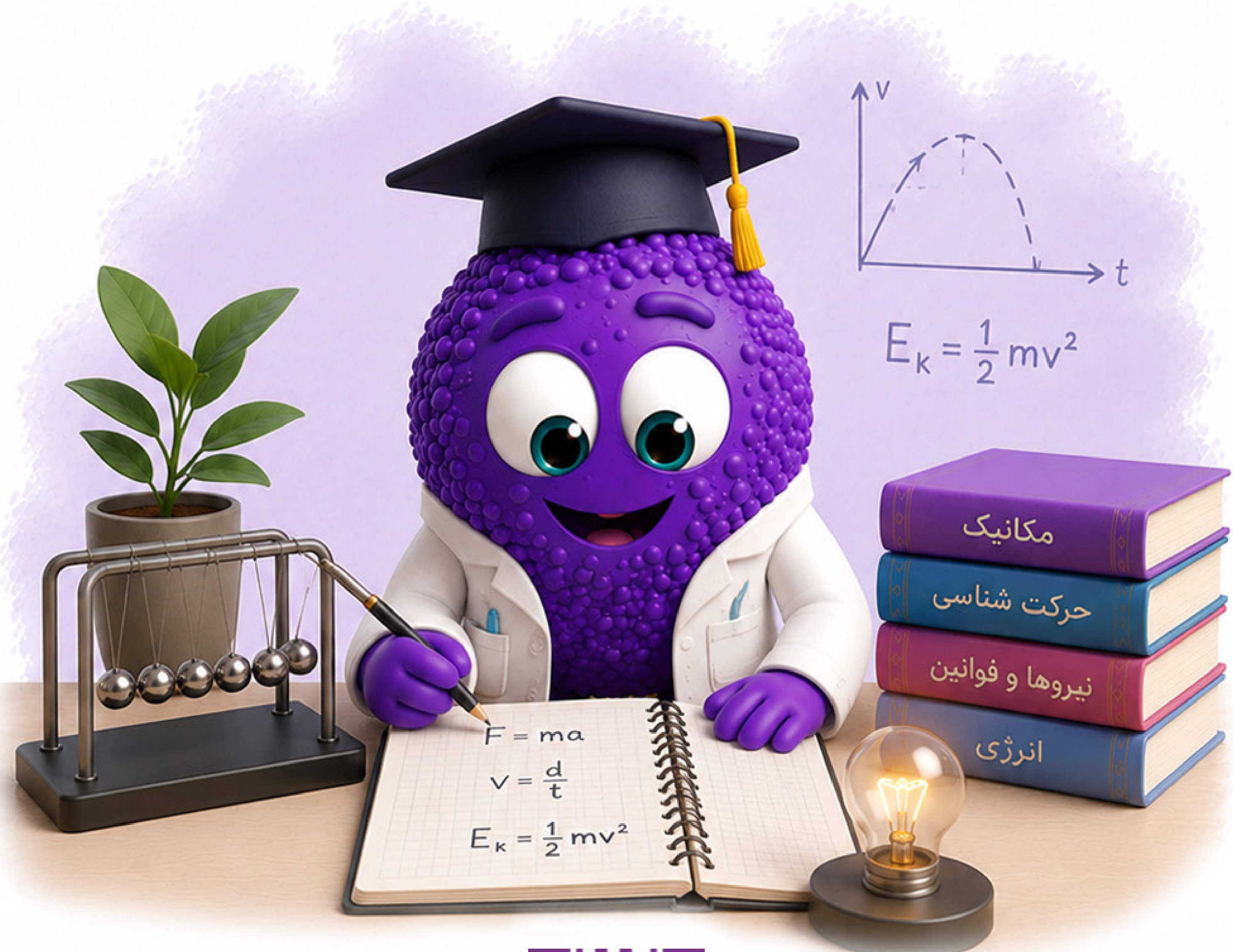
گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

درس

هندسه دوازدهم ـ فصل۳

نوتروبیست



نوتروفیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۴
.تک رقمی نوتروفیل
رتبه ۸ ایمان نیک‌نام جهرمی
.دو رقمی‌های نوتروفیل
رتبه ۱۴ امیرمحمدکیانی
رتبه ۱۶ آریا قهرمانی
رتبه ۲۰ سینا راضی
رتبه ۳۲ امیرمحمد رضائی
رتبه ۵۵ مهسا سیاوشی
رتبه ۵۹ ایمان انفرادی
رتبه ۶۱ بهار هلالی
رتبه ۷۵ محمدصالح عارفی
رتبه ۸۰ محمدمهدی شریفی
.سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل
رتبه ۱۴۷ محدثه حیدری
رتبه ۱۶۰ اشکان کوثری
رتبه ۱۶۹ هانیه خواجه
رتبه ۲۲۲ امیرمحمد شکوهی
رتبه ۲۵۹ ابوالفضل ناصریان
رتبه ۲۷۱ فاطمه سادات موسوی
رتبه ۳۰۸ سید علی اکرمی
رتبه ۳۴۱ حمیدرضا بشیری
رتبه ۴۳۲ سید محمدصادق حسینی
رتبه ۴۷۳ زهرا بابائی
رتبه ۵۱۴ محمدپارسا عبداله آبادی
رتبه ۵۳۲ فاطمه شاهسوند
رتبه ۵۳۷ ریحانه حیدری
رتبه ۵۳۹ نجمه کیخا
رتبه ۵۴۶ حسین تفضلی نژاد
رتبه ۵۵۷ محمدصالح زارعی
رتبه ۵۷۰ زهرا ولی نژاد
رتبه ۶۰۶ سجاد محمودی زاده
رتبه ۶۶۱ فاطمه اصغری
رتبه ۶۶۷ سیاوش مصطفایی
رتبه ۶۷۲ محمدماهان عنبرستانی
رتبه ۶۹۱ بهار ضرغامی
رتبه ۷۱۴ محمد یزدیان
رتبه ۷۸۱ احسان قنبری
رتبه ۷۸۶ نیما غفاری
رتبه ۸۰۳ مائده رنجبر
رتبه ۸۰۴ آرمین رضایی
رتبه ۸۹۳ فاطمه مشاوری نجف آبادی
رتبه ۹۰۹ کیمیا فدائی
رتبه ۹۴۷ صفورا بقائی
رتبه ۱۰۵۲ پویان فریور افشار
رتبه ۱۰۵۸ الینا جلالی فر
رتبه ۱۱۲۲ علی طاهر زاده
رتبه ۱۱۲۷ زهرا بابائی
رتبه ۱۲۳۴ مطهره توحیدی
رتبه ۱۲۳۶ مبینا ایزدی
رتبه ۱۲۸۴ بهار امیری
رتبه ۱۲۸۴ فاطمه معین زاده
رتبه ۱۳۵۰ علی زینلی
رتبه ۱۳۷۲ پارسا رضایی
رتبه ۱۴۲۴ سید امیرحسین حسینی
رتبه ۱۴۸۳ سینا خاوری خراسانی
رتبه ۱۴۹۳ محمد مهدی خرم زاده
رتبه ۱۵۰۳ فاطمه رحیم زاده
رتبه ۱۵۳۴ فاطیما عبیری
رتبه ۱۶۲۸ امیرمحمد فکور حقیقی
رتبه ۱۶۳۹ ابوالفضل نیرومند
رتبه ۱۶۷۸ سجاد ینکی
رتبه ۱۶۹۶ ندا ملکشاهی
رتبه ۱۷۳۱ محمدرضا محسنی
رتبه ۱۷۵۴ هلیا حاجیلوئی
رتبه ۱۹۶۶ مهسا رضایی مقدم
رتبه ۲۰۱۵ علی شیرزاد
رتبه ۲۵۵۹ سارا حمزه
رتبه ۲۶۲۵ زهره مجمعی
رتبه ۲۷۱۱ محمد غلامی
رتبه ۲۷۵۱ فهیمه سیدآبادی
رتبه ۲۷۸۱ سعید شبانی
رتبه ۲۷۹۴ مریم بادلی
رتبه ۲۸۱۰ هدیه رحیمی
رتبه ۲۸۸۱ پارسا جمال امیدی
رتبه ۳۱۳۳ صبا شایع ثانی
رتبه ۳۲۴۴ هلیا سجادی
رتبه ۳۳۴۳ سینا ارزمانی

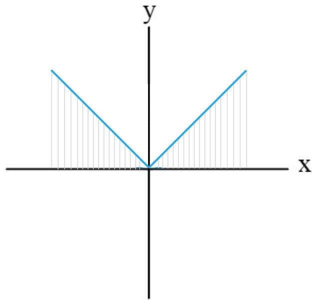
فصل سوم: بردارها

دستگاهِ مختصات در صفحه نمایانگر فضای دو بعدی R^2 می‌باشد.

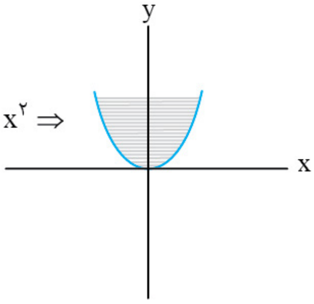
چگونه نقاط رابطه‌ای که به صورت نامساوی بیان شده مشخص کنیم؟

مثال: تمام نقاطی را مشخص کنید که در رابطه $y > x^2$ و $y \le |x|$ صدق می‌کند؟

$y \le |x| \Rightarrow$



$y \ge x^2 \Rightarrow$



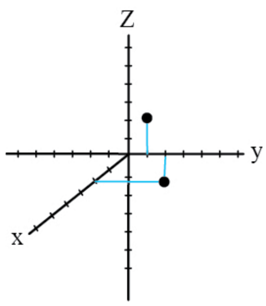
معرفی فضای R^3

محور / ناحیه	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

چگونه نقطه‌ای از فضای R^3 را که مختصات آن داده شده است نمایش دهیم؟

مثال: نقطه $A(2,1,3)$ را می‌خواهیم رسم کنیم:

روی محور xها نقطهٔ ۲ و روی محور yها نقطهٔ ۱ را می‌یابیم و بعد ۳ واحد روی محور z بالا می‌رویم.



محورهای مختصات و خواص آن

	ox	oy	oz	xy	xz	yz
تصویر قائم	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$	$(x,y,0)$	$(x,0,z)$	$(0,y,z)$
قرینه	$(x,-y,-z)$	$(-x,y,-z)$	$(-x,-y,z)$	$(x,y,-z)$	$(x,-y,z)$	$(-x,y,z)$
فاصله	$\sqrt{y^2+z^2}$	$\sqrt{x^2+z^2}$	$\sqrt{x^2+y^2}$	$\sqrt{z^2}=\|z\|$	$\sqrt{y^2}=\|y\|$	$\sqrt{x^2}=\|x\|$

فاصله دو نقطه در فضای R^3 از فرمول روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

بردارها در R^2

هر خط جهت‌دار مانند $\overrightarrow{AB}$ را می‌گویند که ابتدای آن A و انتهای آن B است که بردارها را با $\vec{a}$ نشان می‌دهند.

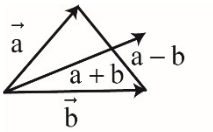
بردار مساوی (همسنگ) = به برداری می‌گوییم که هم‌اندازه و هم‌جهت باشد.

بردار قرینه = دو بردار موازی و هم‌اندازه که هم‌جهت نیستند را می‌گویند.

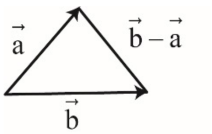
معمولاً مبدأ مختصات را به عنوان بردار صفر در نظر می‌گیریم و با $\vec{O}(0,0)$ نشان می‌دهیم. ابتدای هر بردار مانند $\vec{a}(a_1,a_2)$ را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت:

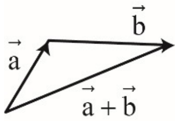
$$\vec{a}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

جمع و تفریق بردار به روش متوازی‌الاضلاع



جمع و تفریق بردار به روش مثلث





طول بردار در R^3

طول هر بردار مانند $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$|\vec{a'}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

جمع دو بردار

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1\ ,\ a_2+b_2\ ,\ a_3+b_3)$$

ضرب عدد در بردار

$$r\vec{a}=r(a_1,a_2,a_3)$$

اگر $r>0$ باشد بردار $r\vec{a}$ هم‌جهت $\vec{a}$ و اگر $r<0$ باشد بردار $r\vec{a}$ در خلاف جهت بردار $\vec{a}$ است.

خواص جمع بردارها

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$$

بردارهای یکه در R^3

$$i(1,0,0)\qquad j=(0,1,0)\qquad k=(0,0,1)$$

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(2,1,3)$ $\quad \vec{b}=(-5,0,2)$ $\quad \vec{c}=(1,-2,2)$ **را در نظر بگیرید:**

الف) بردار $\vec{a}+2\vec{c}$ را به صورت مجموع مضاربی از بردارهای یکه بنویسید.

$$\vec{a}+2\vec{c}=(4,-3,7)=4i-3j+7k$$

ب) طول بردار $3\vec{a}-2\vec{b}$ را مشخص کنید.

جواب)

$$3(2,1,3)-2(-5,0,2)=(16,3,5)$$

$$|3\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{16^2+3^2+5^2}=\sqrt{290}$$

ضرب داخلی

فرض کنید دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲)$ را داریم می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار را پیدا کنیم:

ضرب داخلی یک بردار عدد حقیقی است.

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$a.b=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$ به $a.b$ ضرب داخلی می‌گویند

تعریف: اگر $\vec{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار در $R^۳$ باشند در این صورت:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

خواص ضرب داخلی

1- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

2- $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

3- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

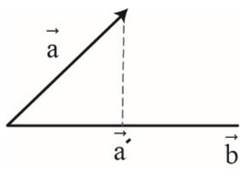
4- اگر $\vec{a},\vec{b}$ بر هم عمود باشند $\vec{a}.\vec{b}=۰$ است در واقع $\cos\theta$ برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است.

5- $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\le|\vec{a}||\vec{b}|$

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$

$$\vec{a'}=r\vec{a}$$

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\times\vec{b}$$



اگر اندازه بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ را خواست از فرمول $|a'|=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(۳,m,۳)$ و $\vec{b}(m-۱,۲,۲m-۷)$ بر هم عمود هستند مقدار m را پیدا کنید.

جواب)

باید $a.b$ باشد.

$$(۳,m,۳).(m-۱,۲,۲m-۷)=۰$$
$$۳(m-۱)+m\times۲+۳(۲m-۷)=۰$$
$$۳m-۳+۲m+۶m-۲۱=۰$$
$$۱۱m=۲۴$$
$$m=\frac{۲۴}{۱۱}$$

سؤال) سه بردار $\vec a = 2\vec i + 3\vec j - \vec k$ و $\vec b = \vec i + \vec k$ و $\vec c(0,2,1)$ در نظر بگیرید:

الف) زاویه بین دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ برابر با θ است، $\cos\theta$ را به دست آورید. $\quad \vec b = (1,0,1) \qquad \vec a = (2,3,-1)$

جواب) $\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{7}} \qquad 1 = \sqrt{14}\sqrt{2}\cos\theta \qquad \vec a.\vec b = |\vec a||\vec b|\cos\theta$

ب) تصویر قائم بردار $\vec a$ بر $\vec b - \vec c$ را به دست آورید.

$$\vec a = \frac{\vec a\vec d}{\vec d}\times\vec d = \frac{-4}{5}(1,-2,0) \qquad 1,-2,0 \qquad \vec d \quad \vec b \quad \vec c$$

ضرب خارجی

می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل‌ضرب آن‌ها همواره یک بردار باشد.

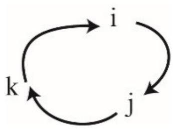
$$\vec a\times\vec b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec k$$

$$\Rightarrow (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

می‌توان گفت $|a\times b| = |a||b|\sin\theta$

✓نکات مهم:

$i\times i = 0 \qquad i\times j = k$

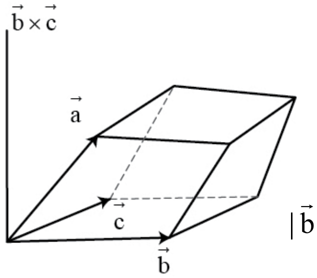


اگر در جهت فلش‌ها برویم مثبت است.

$a.(a\times b) = 0 \qquad b.(a\times b) = 0$ این خاصیت گویای این مطلب است که $b\perp a\times b$ و $a\perp a\times b$

دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ با هم موازی هستند اگر $\vec a\times\vec b = \vec o$ باشد.

حجم متوازی‌السطوح



$\frac{\vec a.(\vec b\times\vec c)}{|\vec b\times\vec c|^2}(\vec b\times\vec c) =$ ارتفاع [تصویر قائم بردار $\vec a$ بر روی بردار $\vec b\times\vec c$]

چون قاعدهٔ این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec b$ و $\vec c$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec b\times\vec c|$

از طریق دترمینان هم می‌توان مساحت را به دست آورد:

$$|\vec a\times\vec b| = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

سؤال) دو بردار $\vec a$ و $\vec b$ مفروض‌اند به طوری‌که $|\vec a| = 6$ و $|\vec b| = 4$ و زاویه بین آن‌ها ۳۰ درجه است مقدار عبارت $|2\vec a\times\vec b|$ را محاسبه کنید.

جواب)

$$|2\vec a\times\vec b| = |2\vec a||\vec b|\sin 30^\circ = 2(6)(4)(\frac{1}{2}) = 24$$

سؤال) بردار $\vec a = (4,-4,2)$ مفروض است. بردار $\vec b$ غیر هم‌جهت با $\vec a$ و به طول ۱۲ را طوری بیابید که $\vec a\times\vec b = 0$ باشد.

جواب)

$$\vec a\times\vec b = 0 \Rightarrow \vec b \| \vec a \to \vec b = (4k, -4k, 2k)$$

$$|\vec b| = 6|k| = 12$$

$$k = \pm 2 \xrightarrow{k=-2} \vec b = (-8, 8, -4)$$

سؤال) اگر $A(۴,۱,۳)$، $B(۲,۳,-۱)$، $C(-۳,۲,۶)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

جواب)

$$\overline{AC}=(-۷,۱,۳) \qquad \overline{AB}=(-۲,۲,-۴) \qquad \overline{AB}\times\overline{AC}=(۱۰,۳۴,۱۲)$$

$$\text{مساحت}=|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{۱۰^۲+۳۴^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۱۴۰۰}=۱۰\sqrt{۱۴}$$

سؤالات تکمیلی

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید.

جواب)

الف)

$$\vec{a}.\vec{b}=(-۲,۰,۲).(۰,۲,۲)=۴ \quad (25/0)$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=۲\sqrt{۲} \quad (25/0)$$

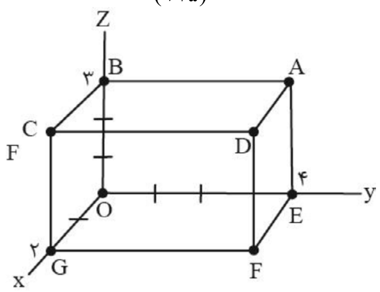
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۱}{۲}(۰/۲۵)\rightarrow\theta=۶۰^\circ(۰/۲۵$$

ب)

$$\vec{a}+\vec{b}=(-۲,۰,۲)+(۰,۲,۲)=(-۲,۲,۴) \quad (25/0)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})'=\underbrace{\frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲)=(۰,۳,۳)}_{(۰/۵)}$$

سؤال) با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) نام وجه از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.

$$x=۲\,,\,۰\le y\le ۴\,,\,۰\le z\le ۳$$

ب) معادلات مربوط به پاره خط (یال) AD را بنویسید.

پ) مختصات نقطه D را بنویسید.

ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.

جواب)

الف) $CDFG$ (25/0)

ب) $\begin{cases}۰\le x\le ۲\\ y=۴\\ z=۳\end{cases}$ (5/0)

پ) $D(۲,۴,۳)$ (25/0)

ت) $y=۲$ (5/0)

سؤال) اگر $\vec{a}=(۲,-۳,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۲,-۴)$ باشند، حجم متوازی‌الاسطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود کدام است؟

1) 225   2) 230   3) 245   4) 250

جواب) گزینه ۲ حجم متوازی‌السطوح ساخته بر روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$ یعنی $|\vec{a}\times\vec{b}|^۲$ است. داریم:

$$i\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & -۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۴\end{vmatrix}=۱۰i+۹j+۷k$$

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=۱۰^۲+۹^۲+۷^۲=۱۰۰+۸۱+۴۹=۲۳۰$$

سؤال) دو بردار $\vec{a}=(۳,-۲,۱)$، $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $R^۳$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)،

ب) طول بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را حساب کنید.

پ) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

جواب)

بردار $\vec{a}$ در ناحیه چهارم (۰/۵)

ب)

$$\vec{a}+۲\vec{b}=(۳,-۲,۱)+۲(-۲,۱,-۱)=(-۱,۰,-۱)\quad (5/0)$$

$$|\vec{a}+۲\vec{b}|=\sqrt{۲}\quad (25/0)$$

پ) ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر آن‌ها عمود است. (۰/۲۵)

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۱,۱,-۱)\quad (5/0)$$

سؤال) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با معلومات $|\vec{a}|=۵$ و $|\vec{b}|=۷$ و $\vec{a}-\vec{b}=۲\vec{i}+\vec{j}-۳\vec{k}$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر روی بردار $\vec{a}$، چند برابر $\vec{a}$ است؟

1) ۰/۷ 2) ۰/۸ 3) ۱/۲ 4) ۱/۴

جواب)

گزینه ۳ با توجه به فرض داریم:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow(\sqrt{۴+۱+۹})^۲=۲۵+۴۹-۲\vec{a}.\vec{b}$$

$$\Rightarrow ۱۴=۷۴-۲\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=۳۰$$

در نتیجه اندازه تصویر قائم $\vec{b}$ روی $\vec{a}$ برابر می‌شود:

$$\Rightarrow|\vec{b'}|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{|۳۰|}{۵}=۶\Rightarrow\frac{|\vec{b'}|}{|\vec{a}|}=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(-۱,\alpha,۲)$ و $\vec{b}=(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ در فضا مفروض‌اند. اگر بردار $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ موازی بردار $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ باشد، مقدار α کدام است؟

1) صفر 2) 1

3) 3 4) هیچ مقداری برای α به دست نمی‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(-۱,\alpha,۲)\\ \vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)\end{array}\right\}\rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=(۲\alpha-\frac{۴}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۴\alpha-۲}{۳})$$

طبق فرض داریم:

$$(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})\,||\,\vec{c}\Rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\,||\,\vec{c}\Rightarrow\frac{۲\alpha-\frac{۴}{۳}}{-۱}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱}=\frac{\frac{۴\alpha-۲}{۳}}{-۱}\Rightarrow ۲\alpha-\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}\rightarrow ۲\alpha=۲\rightarrow\alpha=۱$$