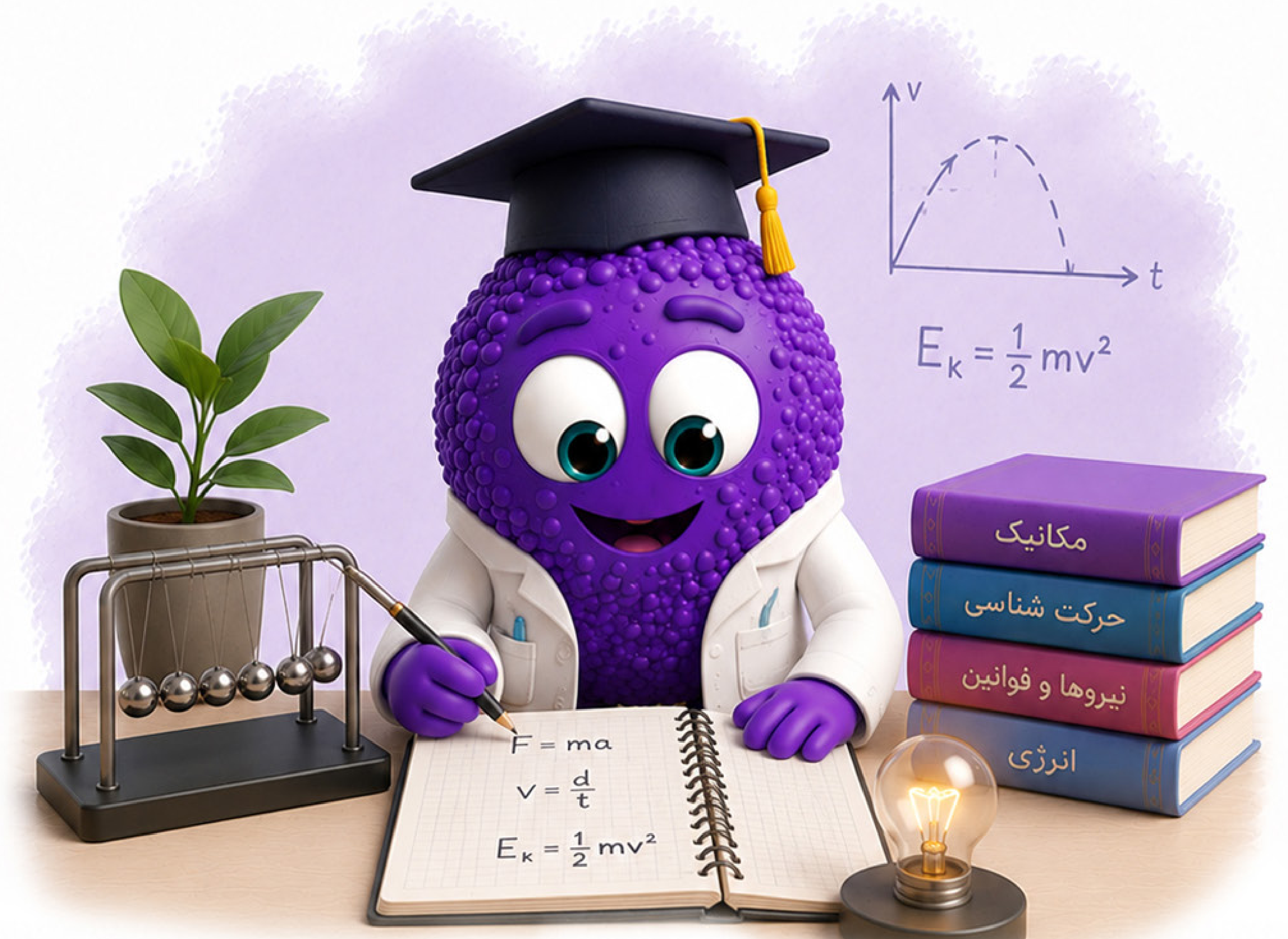
درس

هندسه دوازدهم ـ فصل۱

نوتروبیست



نوتروفیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۴

تک رقمی نوتروفیل.

- ایمان نیک‌نام جهرمی — رتبه ۸

دو رقمی‌های نوتروفیل.

- امیرمحمدکیانی — رتبه ۱۴
- آریا قهرمانی — رتبه ۱۶
- سینا راضی — رتبه ۲۰
- امیرمحمد رضائی — رتبه ۳۲
- مهسا سیاوشی — رتبه ۵۵
- ایمان انفرادی — رتبه ۵۹
- بهار هلالی — رتبه ۶۱
- محمدصالح عارفی — رتبه ۷۵
- محمدمهدی شریفی — رتبه ۸۰

سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل.

- محدثه حیدری — رتبه ۱۴۷
- اشکان کوثری — رتبه ۱۶۰
- هانیه خواجه — رتبه ۱۶۹
- امیرمحمد شکوهی — رتبه ۲۲۲
- ابوالفضل ناصریان — رتبه ۲۵۹
- فاطمه سادات موسوی — رتبه ۲۷۱
- سید علی اکرمی — رتبه ۳۰۸
- حمیدرضا بشیری — رتبه ۳۴۱
- سید محمدصادق حسینی — رتبه ۴۳۲
- زهرا بابائی — رتبه ۴۷۳
- محمدپارسا عبداله آبادی — رتبه ۵۱۴
- فاطمه شاهسوند — رتبه ۵۳۲
- ریحانه حیدری — رتبه ۵۳۷
- نجمه کیخا — رتبه ۵۳۹
- حسین تفضلی نژاد — رتبه ۵۴۶
- محمدصالح زارعی — رتبه ۵۵۷
- زهرا ولی نژاد — رتبه ۵۷۰
- سجاد محمودی زاده — رتبه ۶۰۶
- فاطمه اصغری — رتبه ۶۶۱
- سیاوش مصطفایی — رتبه ۶۶۷
- محمدماهان عنبرستانی — رتبه ۶۷۲
- بهار ضرغامی — رتبه ۶۹۱
- محمد یزدیان — رتبه ۷۱۴
- احسان قنبری — رتبه ۷۸۱
- نیما غفاری — رتبه ۷۸۶
- مائده رنجبر — رتبه ۸۰۳
- آرمین رضایی — رتبه ۸۰۴
- فاطمه مشاوری نجف آبادی — رتبه ۸۹۳
- کیمیا فدائی — رتبه ۹۰۹
- صفورا بقائی — رتبه ۹۴۷
- پویان فریور افشار — رتبه ۱۰۵۲
- الینا جلالی فر — رتبه ۱۰۵۸
- علی طاهر زاده — رتبه ۱۱۲۲
- زهرا بابائی — رتبه ۱۱۲۷
- مطهره توحیدی — رتبه ۱۲۳۴
- مبینا ایزدی — رتبه ۱۲۳۶
- بهار امیری — رتبه ۱۲۸۴
- فاطمه معین زاده — رتبه ۱۲۸۴
- علی زینلی — رتبه ۱۳۵۰
- پارسا رضایی — رتبه ۱۳۷۲
- سید امیرحسین حسینی — رتبه ۱۴۲۴
- سینا خاوری خراسانی — رتبه ۱۴۸۳
- محمد مهدی خرم زاده — رتبه ۱۴۹۳
- فاطمه رحیم زاده — رتبه ۱۵۰۳
- فاطیما عبیری — رتبه ۱۵۳۴
- امیرمحمد فکور حقیقی — رتبه ۱۶۲۸
- ابوالفضل نیرومند — رتبه ۱۶۳۹
- سجاد ینکی — رتبه ۱۶۷۸
- ندا ملکشاهی — رتبه ۱۶۹۶
- محمدرضا محسنی — رتبه ۱۷۳۱
- هلیا حاجیلوئی — رتبه ۱۷۵۴
- مهسا رضایی مقدم — رتبه ۱۹۶۶
- علی شیرزاد — رتبه ۲۰۱۵
- سارا حمزه — رتبه ۲۵۵۹
- زهره مجمعی — رتبه ۲۶۲۵
- محمد غلامی — رتبه ۲۷۱۱
- فهمیه سیدآبادی — رتبه ۲۷۵۱
- سعید شبانی — رتبه ۲۷۸۱
- مریم بادلی — رتبه ۲۷۹۴
- هدیه رحیمی — رتبه ۲۸۱۰
- پارسا جمال امیدی — رتبه ۲۸۸۱
- صبا شایع ثانی — رتبه ۳۱۳۳
- هلیا سجادی — رتبه ۳۲۴۴
- سینا ارزمانی — رتبه ۳۳۴۳

هندسه۳ - فصل اول -ماتریکس و کاربردها

فصل اول: ماتریس و کاربردها

به آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی که شامل سطر و ستون است [ماتریس] می‌گویند.

$$A=[a_{ij}]_{\underset{\text{سطر}}{m}\times\underset{\text{ستون}}{n}} \quad B=[b_{ij}]_{m\times n}$$

هر مورد را [درایه] می‌گویند.

قطر اصلی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ قطر فرعی $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

انواع ماتریس

ماتریس صفر = تمام درایه‌ها اعداد صفر باشد. $[\bar{O}]$

ماتریس سطری = تنها دارای یک سطر است.

ماتریس ستونی = تنها دارای یک ستون است.

ماتریس مربعی = تعداد سطرها و ستون برابر است.

ماتریس قطری $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{bmatrix}$

درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر است. (قطر اصلی می‌تواند صفر باشد یا نباشد.)

ماتریس اسکالر $\begin{bmatrix} a & ۰ \\ ۰ & a \end{bmatrix}$

درایه‌های روی قطر اصلی برابرند و قطری هم است.

ماتریس همانی $I=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$

خطر خطر اگر همهٔ درایه‌ها یک باشد همانی نیست!!

ماتریس بالا مثلثی = ماتریس مربعی که درایه‌های پایین قطر اصلی همگی صفر هستند.

ماتریس پایین مثلثی = ماتریس مربعی که درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفر هستند.

تساوی ماتریس‌ها = دو ماتریس هم مرتبه را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها برابر باشد.

جمع ماتریس‌ها = باید درایه‌ها را دو به دو جمع کنیم.

سؤال) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} z+۱ & ۹ \\ ۵ & x-۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۹ \\ x-y & ۷ \end{bmatrix}$ برابر باشد، مقدار $۲x+y-z$ را به دست آورید.

جواب) درایه‌های نظیر را برابر می‌گذاریم ⇐

$۲=z+۱$

$۱=z$

$۷=x-۲$ $\quad x-y=۵$

$۹=x$ $\quad ۹-y=۵$

$y=۴$

$۲(۹)+۴-۱=\boxed{۲۱}$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس = باید عدد را در تک‌تک درایه‌ها ضرب کرد.

✓خواص مهم

خاصیت جابه‌جایی ⇦ $A+B=B+A$

خاصیت شرکت‌پذیری ⇦ $A+(B+C)=(A+B)+C$

خاصیت عضو قرینه ⇦ $A+(-A)=\bar{O}$

$r\times A=\bar{O}$ $\quad r=۰$ یا $A=\bar{O}$

$A=B \quad rA=rB \quad r\neq ۰$

$r(A+B)=rA+rB$

ضرب ماتریس‌ها

داریم $\leftarrow$ $A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn}$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

درایه سطر i ام و ستون j ام در ماتریس c، از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید.

$$C_{ij}\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 \times b_1 + a_2 \times b_2 + \ldots + a_n \times b_n$$

✓**نکته:** مجموع عناصر روی قطر اصلی AB برابر با عناصر روی BA است.

سؤال) $A \times B$ را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ)

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۷ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} = a_{11} \qquad a_{22} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad a_{12} = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad a_{21} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$۰+۲۱=۲۱ \leftarrow a_{11} \qquad a_{22} = ۰+۱=۱ \qquad a_{12} = ۱۰+۷=۱۷ \qquad a_{21} = ۰+۳=۳$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۱۷ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

✓**نکته:** ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

خواص

$$A_{mn} \times I_n = A_{mn} \qquad A \times (B+C) = (A \times B) + (A \times C) \qquad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \qquad \underset{B \neq C}{AB = AC}$$

✓**نکته:** ممکن است A و B ناتهی باشند اما $A \times B$ تهی شود یعنی ماتریس صفر به ما بدهد.

اگر A ماتریس مربعی باشد آن‌گاه اگر $A^2 = I$:

$$\begin{cases} A^{2k} = I \\ A^{2k+1} = A \end{cases}$$

اگر ماتریس قطری مثل $A = \begin{bmatrix} r_1 & \cdot \\ \cdot & r_2 \end{bmatrix}$ را در ماتریس B ضرب کنیم نتیجه می‌گیریم که $AB = \begin{bmatrix} r_1 a & r_1 b \\ r_2 c & r_2 d \end{bmatrix}$ است.

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس اسکالر مثل $A = \begin{bmatrix} r & \cdot \\ \cdot & r \end{bmatrix}$ را در ماتریس B ضرب کنیم $\begin{bmatrix} r_a & r_b \\ r_c & r_d \end{bmatrix}$ به دست می‌آید.

اتحادها روی ماتریس‌ها برقرار است:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$$

✓**نکته:** اگر A یک ماتریس قطری باشد برای محاسبه A^k کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان n برسانیم.

وارون ماتریس‌ها

برای هر ماتریس مربعی مانند A وارون آن را A^{-1} می‌نامیم و یا آن را ماتریس B می‌نامیم و $BA = AB = I$ و $AA^{-1} = I$

شرط وارون‌پذیری $|A| \neq ۰$

$|A|$ دترمینان در ادامهٔ درس با آن آشنا می‌شویم ...

✓روش محاسبه وارون و خواصِ آن

$$(A^{-1})^{-1}=A \qquad (A^{n})^{-1}=(A^{-1})^{n}$$

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1} \qquad (KA)^{-1}=K^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad\ bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

✓**نکته:** وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.

دترمینان

اگر A ماتریس مربعی باشد $1 \le n \le 3$ $|A|$ را داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A|=[ad-bc] \quad (\text{درجه } 2)$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{23} & a_{23} \\ a_{23} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{33} \end{bmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

✓دستور ساروس برای محاسبه دترمینان (مخصوص۳x۳)

نکته: دترمینان ماتریس قطری از ضرب درایه‌های روی قطر اصلی به دست می‌آید.

نکته: اگر درایه‌های یک سطر یا ستون دترمینان در عددی ضرب شود حاصل دترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود.

اگر عدد از دترمینان خارج شود به توان مرتبه ماتریس می‌رسد: $A_{mn}\ ,\ |KA|=K^{n}|A|$

دستگاه معادلات

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$ باید $|A|\neq 0$ باشد.

$$\underset{\text{ماتریس‌ضرایب}}{A}\times\underset{\text{مجهول}}{x}=\underset{\text{ماتریس‌معلوم}}{B}\Rightarrow x=A^{-1}B$$

تعداد جواب دستگاه

۱ است. دو خط متقاطع داریم و دستگاه یک جواب دارد.

۲ است. دو خط موازی داریم و دستگاه جواب ندارد.

۳ است. دو خط بر هم منطبق داریم و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

✓**نکته:** اگر $|A|\neq 0$ باشد دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع)

✓**نکته:** اگر $|A|=0$ باشد یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی) یا اینکه بی‌شمار جواب دارد. (دو خط بر هم منطبق)

سؤالات تکمیلی

ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $k|kA|=625$ برقرار باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (0/25) \Rightarrow |A|=1 \quad (0/25)$$

$$k|kA|=k(k^{3}|A|)=k^{4}\times 1=625 \Rightarrow k=\pm 5 \quad (0/25)$$

ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۲ & x+۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مقادیر x و y را به دست آورید.

$x=۲ \ (۰/۲۵)$ و $y=-۱ \ (۰/۲۵)$

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} r & m-۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ برابر با .... است.

جواب) دو

ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ در رابطه $AX=B$ صدق می‌کنند. ماتریس X، کدام است؟

1) $\begin{bmatrix} ۱۳ & ۲ \\ -۸ & -۱ \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} ۱۱ & ۲ \\ -۶ & ۱ \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} ۱۳ & ۱ \\ -۶ & -۱ \end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix} -۱۲ & -۱ \\ ۸ & ۱ \end{bmatrix}$

جواب) گزینه ۱ نکته: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ از دستور $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. پس:

$$AX=B \xrightarrow{A^{-۱}\times} \underbrace{A^{-۱}A}_{I}X=A^{-۱}B \xrightarrow{IX=X} X=A^{-۱}B$$

$$\Rightarrow X=\frac{۱}{-۴+۳}\begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix}=-۱\times\begin{bmatrix} -۲ & -۱۳ \\ ۱ & ۸ \end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix} ۲ & ۱۳ \\ -۱ & -۸ \end{bmatrix}$$

ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} ۱ \ ; \ i=j \\ ۲ \ ; \ i\neq j \end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۴A$ کدام است؟

1) 12 2) 15 3) 18 4) 21

جواب) گزینه ۲ ابتدا درایه‌های ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$A^۲-۴A=\begin{bmatrix} ۹ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۹ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ & ۸ & ۸ \\ ۸ & ۴ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۵ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۵ \end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر ۱۵ است.

اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & |A| \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید.

جواب) $\underbrace{|A|=|A|(|A|-۲)+۱(۲)}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow |A|^۲-۳|A|+۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} |A|=۱ \\ |A|=۲ \end{cases}$

سؤال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & |A| \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد مقدار $|A|$ را بیابید.

جواب) $|A|=|A|(|A|-۲)+۱(۲)\Rightarrow |A|^۲-۳|A|+۲=۰$
$\begin{cases} |A|=۱ \\ |A|=۲ \end{cases}$

سؤال) دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

جواب) $R=A^{-۱}B\Rightarrow \frac{۱}{\cancel{ad-bc}_{۱}}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ $\quad x=۱ \quad y=۲$