



گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل



# درس

## هندسه دوازدهم - سوالات

نوتروبیست





# نوטר وفیل خونہ رتبہ برترها

## قبولی های کنکور ۱۴۰۴



### تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۸  
ایمان نیک نام جهرمی

رتبه ۳۲  
امیرمحمد رضائی

رتبه ۲۰  
سینا راضی

رتبه ۱۶  
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴  
امیرمحمد کیانی

### دور رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۸۰  
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵  
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱  
بهار هلالی

رتبه ۵۹  
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵  
مهسا سیاوشی

### سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲  
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۱۶۹  
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰  
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷  
محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲  
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۳۴۱  
حمیدرضا بشیری

رتبه ۳۰۸  
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱  
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹  
ابوالفضل ناصران

رتبه ۵۳۹  
نجمه کیخا

رتبه ۵۳۷  
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۳  
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۱۴  
محمدپارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳  
زهرا بابائی

رتبه ۶۶۱  
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶  
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰  
زهرا ولی نژاد

رتبه ۵۵۷  
محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶  
حسین تفضلی نژاد

رتبه ۷۸۱  
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴  
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱  
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲  
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷  
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹  
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳  
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴  
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳  
مانده رنجبر

رتبه ۷۸۶  
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷  
زهرا بابائی

رتبه ۱۱۲۲  
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸  
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲  
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷  
صفورا بقائی

رتبه ۱۳۵۰  
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴  
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴  
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶  
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴  
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳  
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳  
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳  
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴  
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲  
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶  
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۶۷۸  
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹  
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸  
امیرمحمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴  
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹  
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵  
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶  
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴  
هللیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱  
محمد رضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴  
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱  
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱  
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۱۱  
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵  
زهرة جمعی

رتبه ۳۳۴۳  
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴  
هللیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳  
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱  
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰  
هدیه رحیمی

**هندسه دوازدهم**
**سوال ۱** جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

- الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس ..... مینامیم. (دی ۹۷)
- ب) رأس سهمی به معادله  $y^2 + 2x - 2y = 0$ ، نقطه ای به مختصات ..... است. (دی ۹۷)
- پ) حاصل ضرب ماتریس‌ها خاصیت جا به جایی ..... (دی ۹۷)
- ت) در حالی که  $\frac{c}{a} = 1$ ، بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود. (شهریور ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

 الف) ماتریس اسکالر (ب)  $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  (پ) ندارد (ت) پاره خط

**سوال ۲** درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

- الف) اگر برای ماتریس‌های متمایز  $A$  و  $B$  و  $C$  داشته باشیم:  $AB = AC$ ، آنگاه  $B = C$  است. (دی ۹۹)
- ب) نقطه  $(3, -2)$  روی دایره  $x^2 + y^2 + 2x = 0$  قرار دارد. (دی ۹۹)
- پ) برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$ ، حاصل  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$  است. (دی ۹۹)
- ت) برای سه بردار  $\vec{i}$ ،  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در  $R^3$  داریم:  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  (شهریور ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

الف) نادرست (ب) نادرست (پ) درست (ت) درست

**سوال ۳** اگر  $A = [a_{ij}]$  یک ماتریس  $3 \times 3$  با درایه‌های  $i = j$  باشد، درایه‌های  $a_{33}$ ،  $a_{12}$  و  $a_{31}$  را بدست آورید. (دی ۹۹)

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j & i < j \\ 2 & i = j \\ i + j & i > j \end{cases}$$
**پاسخ:**

$$a_{32} = 2 \quad a_{31} = 3 + 1 = 4 \quad a_{12} = 1 - 2 = -1$$

 یادآوری: می‌دانیم درایه سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام در ماتریس  $C$ ، از ضرب سطر  $i$ ام در ستون  $j$ ام بدست می‌آید.

**سوال ۴** مقادیر  $x$  و  $y$  را از معادله زیر بدست آورید. (دی ۹۹)

**پاسخ:**

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 4x - 2 = y - 2 \Rightarrow y = 8 \end{cases}$$



**سوال ۵** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$  حاصل  $-\frac{1}{2}A^4$  را بدست آورید. (۱۴۰۱)

**پاسخ:**

یادآوری: از روش دترمینان ساروس می‌رویم.

$$|A| = 2 \Rightarrow \left| -\frac{1}{2}A^4 \right| = \left( -\frac{1}{2} \right)^3 |A|^4 = -2$$

**سوال ۶** مقدار  $m$  را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی  $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ (m-1)x + y = 3 \end{cases}$  جواب نداشته باشد (شهریور ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{2}{m-1} = \frac{m}{1} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow m(m-1) = 2 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$$

**سوال ۷** اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  باشد و  $|A| = -2$ ، حاصل  $|A \cdot A|$  را بیابید. (دی ۹۷)

**پاسخ:**

$$|A \cdot A| = |-2A| = (-2)^3 |A| = -8(-2) = 16$$

**سوال ۸** دستگاه  $\begin{cases} (m-2)x + 3y = m \\ 4x + (m+1)y = 2 \end{cases}$  به ازای چه مقادیر  $m$  دارای جواب منحصر به فرد می‌باشد؟ (دی ۹۷)

**پاسخ:**

$$\begin{vmatrix} m-2 & 3 \\ 4 & m+1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow (m-2)(m+1) - 12 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} m \neq 5 \\ m \neq -3 \end{cases}$$

$$m \in \mathbb{R} - \{5, -3\}$$

**سوال ۹** ماتریس  $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$  به صورت  $\begin{cases} i^2 - j & i > j \\ i + j & i \leq j \end{cases}$  داده شده است. ماتریس  $A^{-1}$  را بدست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)

**پاسخ:**

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad |A| = -1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

**سوال ۱۰** اگر  $A = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix}$  باشد، آن گاه دترمینان ماتریس  $A$  برابر ..... است. (شهریور ۱۴۰۲)

**پاسخ:**

$$|A| = -\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -1$$

**سوال ۱۱** اگر  $A = \begin{bmatrix} a & ۸ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد، مقدار  $a$  برابر ..... است.

**پاسخ:**

باید  $|A|$  برابر با صفر باشد

$$(a \times -۴) - (۳ \times ۸) = ۰ \Rightarrow -۴a - ۲۴ = ۰ \Rightarrow a = ۶$$

**سوال ۱۲** دو ماتریس  $A = \begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$  مفروض اند. اگر  $A$  یک ماتریس قطری باشد، حاصل  $|A| + |B|$  را محاسبه کنید. (خرداد ۹۹)

**پاسخ:**

$$\begin{cases} m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \\ n+۱=۰ \Rightarrow n=-۱ \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|B| = ۲(-۱) - ۱(۷) + ۱(-۲) = -۱۱, \quad |A| = ۲$$

$$|A| + |B| = ۲ + (-۱۱) = -۹$$

**سوال ۱۳** اگر  $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$  باشد، حاصل  $|A|^۳$  را محاسبه کنید. (خرداد ۹۸)

**پاسخ:**

$$|A| = \begin{vmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۲ \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۲(۸ - ۳) = ۱۰$$

$$|A|^۳ = ۱۰^۳ = ۱۰۰۰$$

**سوال ۱۴** اگر  $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$  و  $I_۳$  ماتریس همانی  $۳ \times ۳$  باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (دی ۹۹)

**پاسخ:**

$$|A \times B| + |2I_۳| =$$

$$|A| = (۴ - ۹ - ۴) - (-۴ - ۱۲ + ۳) = -۹ + ۱۳ = ۴$$

$$|B| = -۶$$

$$|A \times B| + ۸|I| = -۲۴ + ۸ = -۱۶$$

**سوال ۱۵** ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. اگر  $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$  باشد، آن گاه مقادیر  $x$  و  $y$  را بدست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\begin{cases} 2 + x + 1 = 5 \Rightarrow x = 2 \\ 3 + y + 2 = 4 \Rightarrow y = -1 \end{cases}$$

**سوال ۱۶** در تساوی ماتریسی  $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $A$  را بدست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} A &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{15 - 14} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ 17 & -9 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**سوال ۱۷** ماتریس  $A$  مربعی مرتبه سه به سه به صورت  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  که  $a_{ij} = \begin{cases} i + j & i = j \\ j & i > j \\ \cdot & i < j \end{cases}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  باشد

الف) ماتریس  $A$  را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.  
ب) دترمینان ماتریس  $B$  را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

الف)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

ب)  $|B| = 39$

**سوال ۱۸** دستگاه  $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 7x + 4y = 15 \end{cases}$  را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$x = A^{-1} \times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

**سوال ۱۹** اگر  $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری بدست آورید که  $A \times B$  ماتریس قطری باشد. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 + 3a & -8 + 2a \\ b - 3 & -2b - 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 8 = 0 \\ b - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

**سوال ۲۰** ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به صورت  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$  معرفی شده است. مقدار  $k$  را طوری پیدا کنید که رابطه  $k|kA| = 625$  برقرار باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 1$$

$$k|kA| = k(k^3|A|) = k^4 \times 1 = 625 \Rightarrow k = \pm 5$$

**سوال ۲۱** با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی  $I$ ، درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

پاسخ:

$$(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$$

$$(A - 3I)^2 = (A - 3I)(A - 3I) = A^2 - 3AI - 3IA + 9I^2$$

$$= A^2 - 6A + 9I$$

$$\text{می دانیم: } \begin{cases} AI = IA = A \\ I^2 = I \end{cases} \text{ پس داریم:}$$

**سوال ۲۲** اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  باشد، نشان دهید: (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$(\Delta A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\Delta} A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta} & -\frac{1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & -\frac{3}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow (\Delta A)^{-1} = \frac{1}{-50} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ یادآوری:}$$

**سوال ۲۳** اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به صورت  $a_{ij} = \begin{cases} i > j \\ i^2 & i = j \\ 2i - j & i < j \end{cases}$  تعریف شده باشد، ماتریس  $2A - 3I$  را بدست آورید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2A - 3I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 8 & 2 \\ 6 & 12 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

**سوال ۲۴** اگر ضرب ماتریس‌های  $A = \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  تعویض پذیر باشد، حاصل  $\begin{bmatrix} x & 2 & -y \\ & 3 & \\ & & -x \end{bmatrix}$  را بیابید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4x + 3y & 3x + 4y \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 6 & 4y - 3 \\ 3x + 8 & 3y - 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x + 8 = 5 \Rightarrow x = -1 \\ 3y - 4 = 2 \Rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2 + 4 - 2 = 0$$

**سوال ۲۵** دستگاه مقابل را با استفاده از  $A^{-1}$  حل کنید. (دی ۹۹)

پاسخ:

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 3 + 10 = 13$$

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1} \times B \Rightarrow \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -1 + 40 \\ 2 + 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

**سوال ۲۶** درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر  $A$  و  $B$ ، دو ماتریس  $2 \times 2$  باشند، آن گاه  $|AB| = |A||B|$ . (دی ۱۴۰۰)

ب) اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  و  $|A| = 5$  باشد، آن گاه  $|2A| = 40$  است. (خرداد ۱۴۰۱)

پ) اگر  $A$  و  $B$  دو ماتریس هم مرتبه و  $r$  یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و  $rA = rB$ ، آن گاه

داریم:  $A = B$ . (خرداد ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

الف) درست  
ب) درست  $|2A| = 40$   
پ) درست

**سوال ۲۷** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  و  $A = B$ ، در این صورت حاصل  $x + 2y + 3z$  را

بدست آورید. (دی ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

$$\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \\ 2x + y = 5 \Rightarrow y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x + 2y + 3z = \frac{-1}{2}$$

**سوال ۲۸** اگر  $A = [2i - 3j]_{3 \times 2}$  و  $\begin{cases} i \neq j \\ i = j \end{cases}$  باشد،  $B_{2 \times 3}$  دترمینان ماتریس  $AB$  را بدست آورید.

(دی ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

$$B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = 4(6) - 1(-6) + 5(-6) = 0$$

**سوال ۲۹ الف)**  $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$  ماتریس اسکالر باشد، مقادیر  $m$  و  $n$  را بیابید. (دی ۱۴۰۱)

ب) اگر  $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & i=j \\ j-2 & i < j \\ 1 & i > j \end{cases}$  ماتریس  $B$  را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

پ) ماتریس  $B^2 + 2I$  را محاسبه کنید. ( $I$  ماتریس همانی مرتبه ۳ است.)

**پاسخ:**

الف)  $m-2=0 \rightarrow m=2 \rightarrow n=m=2$

ب)  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

پ)  $B^2 + 2I = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 6 & 10 & 8 \\ 7 & 7 & 18 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 6 \\ 6 & 12 & 8 \\ 7 & 7 & 20 \end{bmatrix}$

**سوال ۳۰** اگر ماتریس  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  که  $a_{ij} = \begin{cases} i^2 - 1 & i=j \\ i-j & i > j \\ j-i & i < j \end{cases}$  و  $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$  باشد:

الف) حاصل ماتریس  $A \times B$  را بدست آورید. (شهریور ۹۸)

ب) دترمینان ماتریس  $B$  را به دست آورید.

**پاسخ:**

الف)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 12 \\ 1 & 10 & 11 \\ 19 & 5 & 42 \end{bmatrix}$

ب)  $|B| = 2(15) - 1(-9) + 0(-6) = 39$

**سوال ۳۱** مقدار  $m$  را طوری بیابید که ماتریس  $A = \begin{bmatrix} m & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  وارون پذیر نباشد. (شهریور ۹۸)

**پاسخ:**

باید  $|A| = 0 \Rightarrow 2m - 4 = 0 \Rightarrow m = 2$

**سوال ۳۲** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  باشند، حاصل  $|A| + |B^2|$  را بیابید. (شهریور ۹۹)

پاسخ:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 10 = 20$$

$$|B| = -6 \Rightarrow |B^2| = 36 \quad |A| + |B^2| = 56$$

**سوال ۳۳** به ازای چه مقداری از  $m$ ، دستگاه معادلات  $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ mx + 6y = -4 \end{cases}$  فاقد جواب است؟ (شهریور ۹۹)

پاسخ:

باید  $|A| = 0$  شود. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ m & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6 + 2m = 0 \rightarrow m = -3$$

**سوال ۳۴** اگر  $3A = \begin{bmatrix} |A| & -5 \\ 1 & 4|A| \end{bmatrix}$  باشد، مقدار  $|A^{-1}|$  را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$|3A| = 4|A|^2 + 5 \rightarrow 4|A|^2 - 9|A| + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \rightarrow |A^{-1}| = 1 \\ |A| = \frac{5}{4} \rightarrow |A^{-1}| = \frac{4}{5} \end{cases}$$

**سوال ۳۵** اگر  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، نشان دهید: (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$(\Delta A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{\Delta} A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم:  $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow (\Delta A)^{-1} = \frac{1}{-5 \cdot 5} \begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$



**سوال ۳۶** درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

(الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع  $d'$  و  $d$  به یک فاصله اند. نیمساز زاویه بین آن دو خط می باشد. (دی ۹۷)

(ب) صفحه ای با مولد سطح مخروط دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. (دی ۹۷)

(پ) اگر ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  باشد، مجموع درایه های سطر دوم  $A^2$  برابر ۵ می باشد. (دی ۹۷)

(ت) اگر مجموع فواصل نقطه  $A$  از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه  $A$  در خارج بیضی است. (دی ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

(الف) درست (ب) نادرست (پ) نادرست (ت) درست

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -8 \\ -1 & 1 & -4 \\ 7 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

**سوال ۳۷** معادله دایره ای را بنویسید که نقاط  $A(4, -1)$  و  $B(-2, 1)$  دو سر قطری از آن باشد. (دی ۹۷)

**پاسخ:**

$$O\left(\frac{4-2}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (1, 0) \quad |AB| = \sqrt{6^2 + 2^2} = 2\sqrt{10} \rightarrow r = \sqrt{10}$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 10$$

**سوال ۳۸** حدود  $a$  را طوری به دست آورید که  $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$  بتواند یک معادله دایره باشد. (دی ۹۷)

**پاسخ:**

$$a^2 + b^2 - 4c > 0 \rightarrow 9 + 25 - 4a > 0 \rightarrow 4a < 34 \rightarrow a < \frac{17}{2}$$

می دانیم:

**سوال ۳۹** جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

(الف) اگر ماتریس اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است. (خرداد ۱۴۰۰)

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$$

(ب) اگر صفحه  $P$  با مولد  $d$  موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه  $P$  و سطح مخروطی، یک ..... است. (خرداد ۱۴۰۰)

(پ) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس ..... می نامیم. (خرداد ۹۹)

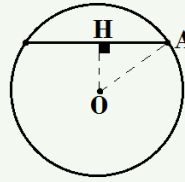
**پاسخ:**

(الف) ۸ (ب) خط (پ) اسکالر باید:  $\begin{cases} a = b = 2 \\ e = c = f = 0 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & f \\ 0 & a & 0 \\ e & c & b \end{bmatrix}$$

**سوال ۴۰** معادله دایره‌ای را بنویسید که  $O(-1, -1)$  مرکز آن بوده و روی خط  $2x + y = 2$  و تری به طول ۴ ایجاد کند. (خرداد ۹۹)

$$OH = \frac{2(-1) + 1(-1) - 2}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$



پاسخ:

$$\triangle AOH (\hat{H} = 90^\circ): OH^2 + AH^2 = OA^2 \rightarrow (\sqrt{5})^2 + 2^2 = r^2 \rightarrow r = 3$$

بنابراین:  $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$

**سوال ۴۱** وضعیت نقطه  $A(1, -2)$  نسبت به دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$  را تعیین کنید. (خرداد ۹۹)

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \quad O(1, -1) \quad r = \sqrt{2} \quad OA = 1$$

پاسخ:

$OA < r$  پس نقطه داخل دایره است.

**سوال ۴۲** معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط  $x + y = 1$  و  $x - y = 3$  شامل قطرهایی از آن بوده و خط  $4x + 3y = -5$  بر آن مماس باشد. (دی ۹۹)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \quad r = \frac{4(2) + 3(-1) + 5}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 2$$

پاسخ:

مرکز دایره  $O(2, -1)$  و شعاع آن  $r = 2$  است. معادله دایره برابر با  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  است.

**سوال ۴۳** در نقطه  $A(2, 3)$  روی دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$  مماسی بر دایره رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

$$O(1, 1)$$

پاسخ:

$$m' = \frac{1}{m} = \frac{-1}{2} \quad m_{OA} = \frac{3-1}{2-1} = 2$$

شیب خط مماس

$$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

**سوال ۴۴** نقاط  $A, B, C, D$  در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله باشد.  
 مکان هندسی نقاطی که از نقاط  $A$  و  $B$  به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط  $AB$  است.  
 مکان هندسی نقاطی که از نقاط  $C$  و  $D$  به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط  $CD$  است.

**پاسخ:**

محل برخورد دو عمود منصف، جواب مسئله است.  
 حالات ممکن: [یک جواب - بدون جواب - بی شمار جواب]

**سوال ۴۵** معادله دایره ای را بنویسید که نقاط  $O(-2, 3)$  مرکز و  $B(1, -1)$  یک نقطه از آن باشد. (شهریور ۹۸)

**پاسخ:**

$$r = OB = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5 \qquad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

**سوال ۴۶** معادله دایره ای را بنویسید که  $O(1, 0)$  مرکز آن بوده و بر خط  $X = -3$  مماس باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

**پاسخ:**

می دانیم:  $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$

$$OH = \frac{|1+3|}{\sqrt{1^2+0^2}} = 4 \qquad OH = R \qquad (x-1)^2 + y^2 = 16$$

**سوال ۴۷** دایره های  $x^2 + y^2 - 2x = 4$  و  $x^2 + y^2 = 4$  نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (دی ۹۷)

**پاسخ:**

مرکزها به ترتیب  $O(0, 0)$  و  $O'(1, 0)$  است.

$$OO' = \sqrt{1^2 + 0} = 1$$

شعاع ها به ترتیب  $\sqrt{5}$  و  $2$  است.

$$|r - r'| = \sqrt{5} - 2 < OO' < r + r' = \sqrt{5} + 2$$

دو دایره متقاطع هستند.

**سوال ۴۸** مقدار  $c$  را چنان بیابید که دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 2y + c = 0$  بر دایره  $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$  مماس بیرون باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

**پاسخ:**

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2 \qquad O'(-1, 1) \qquad r' = \sqrt{2}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2 - c \Rightarrow O(1, -1) \qquad r = \sqrt{2-c}$$

$$OO' = 2\sqrt{2} \qquad OO' = r + r' \rightarrow 2\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2-c} \rightarrow c = 0$$

**سوال ۴۹** الف) هر گاه دو خط  $d$  و  $I$  موازی باشند، از دوران  $d$  حول  $I$  سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحه  $P$  بر خط  $I$  عمود باشد، سطح مقطع صفحه  $P$  و سطح ایجاد شده، بیضی است. (درست / نادرست)  
 ب) مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایره  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$  مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز  $O(1, -2)$  و شعاع  $5$ ..... است. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$r = 4 \quad 4 + 1 = 5$$

**سوال ۵۰** وضعیت خط  $x + y = 2$  و دایره  $x^2 + y^2 = 2$  را نسبت به هم مشخص کنید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$r = OM = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5 \quad (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

**سوال ۵۱** در شکل رو به رو، نقطه  $M$  روی بیضی با کانون‌های  $F$  و  $F'$  قرار دارد به طوری که  $MF = 8$  و  $MF' = 6$ . اگر خروج از مرکز بیضی  $\frac{1}{7}$  باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

بنا به تعریف بیضی:  $MF + MF' = 2a$  پس داریم:

$$2a = 14 \rightarrow a = 7 \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{7} \rightarrow c = 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 4\sqrt{3}$$

**سوال ۵۲** سهمی با رأس  $A(1, 2)$  و کانون  $F(1, -2)$  مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

با توجه به رأس و کانون سهمی، دهانه آن رو به پایین و قائم است.

$$a = AF = 4 \quad (x-1)^2 = -16(y-2)$$

معادله خط هادی:  $y = 6$

**سوال ۵۳** اگر اندازه گودی یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصله کانونی این دیش چه تغییری می‌کند؟ (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

نصف می‌شود.

$$\frac{a'}{a} = \frac{\frac{b^2}{4(2h)}}{\frac{b^2}{4h}} = \frac{1}{2}$$



**سوال ۵۴** عبارت های زیر را کامل کنید.

- (الف) اگر در بیضی، خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به ..... نزدیک تر می شود. (خرداد ۱۴۰۱)
- (ب) سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک ..... ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (شهریور ۹۹)
- (پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر ..... است. (شهریور ۹۹)

**پاسخ:**

- (الف) دایره  
(ب) نقطه  
(پ)  $\frac{1}{2}$

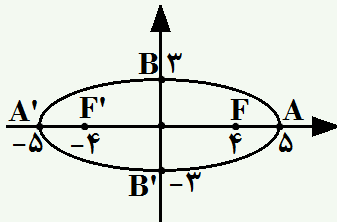
**سوال ۵۵** در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات، طول قطرهای برابر ۱۰ و ۶ است:

- (الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.
- (ب) مختصات کانون ها  $F$  و  $F'$ ، مختصات دو سر قطر بزرگ  $A$  و  $A'$  و دو سر قطر کوچک  $B$  و  $B'$  را بدست آورید
- (پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

**پاسخ:**

(الف)  $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$      $c = 4$      $a^2 = b^2 + c^2$      $2a = 10 \rightarrow a = 5$      $2b = 6 \rightarrow b = 3$

(ب)  $A(5,0), A'(-5,0)$  ,  $F(4,0), F'(-4,0)$  ,  $B(0,3), B'(0,-3)$



(پ)

**سوال ۵۶** (الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادله  $y^2 - 2y - 8x + 9 = 0$  را بیابید.

(ب) مختصات رأس کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱)

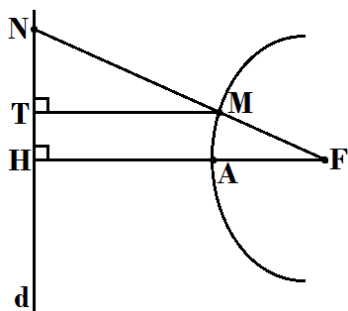
**پاسخ:**

(الف)  $(y-1)^2 = 8(x-1)$     فاصله کانونی  $a = 2$

(ب) رأس سهمی  $(1,1)$     معادله خط هادی  $x = -1$

مختصات کانون آن  $(3,1)$

**سوال ۵۷** در شکل رو به رو، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از کانون F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده ایم. ثابت کنید:  $\frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$ . (خرداد ۱۴۰۱)

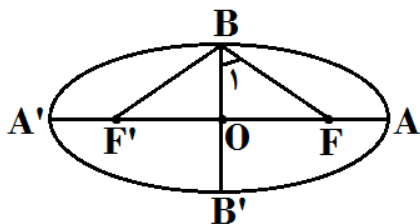


**پاسخ:**

$MT \perp FH$  با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{NF}{2FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times 2} \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

**سوال ۵۸** اگر در بیضی، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه  $\widehat{FBF'}$  چند درجه است؟ (دی ۹۷)



**پاسخ:**

$$a = 2b \quad c^2 = a^2 - b^2 = 4b^2 - b^2 = 3b^2 \quad c = \sqrt{3}b$$

$$\tan B_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{3}b}{b} = \sqrt{3} \quad \widehat{B}_1 = 60^\circ \quad \widehat{FBF'} = 2 \times 60 = 120^\circ$$

**سوال ۵۹** معادله سهمی را بنویسید که F(۱, -۲) کانون و S(۱, ۲) رأس آن باشد. سپس معادله خط هادی آن را بنویسید. (دی ۹۷)

**پاسخ:**

سهمی با توجه به رأس و کانونش، رو به پایین است و  $a = 4$  و معادله خط هادی،  $y = 6$  است. معادله

$$\text{سهمی: } (x-1)^2 = -16(y-2)$$

**سوال ۶۰** سهمی  $y^2 = 2x + 4y$  را در نظر بگیرید. (دی ۱۴۰۰)

الف) مختصات رأس کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.

**پاسخ:**

سهمی افقی و رو به راست است.  $y^2 = 2x + 4y \quad (y-2)^2 = 2(x+2)$

رأس سهمی:  $(-2, 2)$  فاصله کانونی:  $a = \frac{1}{2}$  کانون سهمی:  $(\frac{-3}{2}, 2)$

معادله خط هادی:  $x = -\frac{5}{2}$

مختصات نقاط برخورد با محور  $y$ ،  $(0, 4)$  و  $(0, 0)$  و با محور  $x$ ها  $(0, 0)$  است.

**سوال ۶۱** در یک بیضی، مختصات کانون‌ها  $F(4, 0)$  و  $F'(-2, 0)$  و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر

نقطه  $P(1, m)$  روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار  $m$  را بیابید. (دی ۱۴۰۱)

**پاسخ:**

$$PF + PF' = 2a \quad \sqrt{9+m^2} + \sqrt{9+m^2} = 10 \rightarrow m = \pm 4$$

**سوال ۶۲** مختصات نقطه برخورد سهمی  $y^2 + 7x + 5 = 0$  و دایره  $x^2 + y^2 = 25$  را بدست آورید. (دی ۱۴۰۱)

**پاسخ:**

$$\begin{cases} y^2 + 7x + 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \rightarrow x^2 + (-7x - 5) = 25 \rightarrow x^2 - 7x - 30 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \rightarrow (-3, 4) \quad , \quad (-3, -4) \\ \hat{K.P.} \rightarrow y^2 = -75 \end{cases}$$

**سوال ۶۳** بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است. خروج از مرکز بیضی را بدست آورید. (شهریور ۹۸)

**پاسخ:**

$$\begin{cases} 2a = 10 \rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \rightarrow b = 3 \end{cases} \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow c = 4 \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

**سوال ۶۴** معادله سهمی را بنویسید که رأس  $A(4, 6)$  و  $y = 3$  معادله خط هادی آن باشد. (شهریور ۹۹)

**پاسخ:**

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا است.

$a = 3$  فاصله کانونی.

فرم استاندارد سهمی به صورت:  $(x-h)^2 = 4a(y-k) \Rightarrow (x-4)^2 = 12(y-6)$

**سوال ۶۵** معادله سهمی با کانون  $F(1, 2)$  و خط هادی  $X = -3$  را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$F(\alpha + a, \beta) = (1, 2) \rightarrow \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

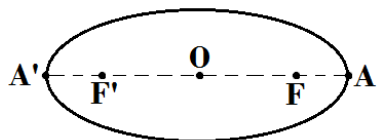
$$\left. \begin{matrix} x = \alpha - a \\ x = -3 \end{matrix} \right\} \rightarrow \alpha - a = -3 \xrightarrow{\alpha + a = 1} \begin{cases} a = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases} \quad (y - 2)^2 = \lambda(x + 1)$$

**سوال ۶۶** اگر در یک بیضی، طول  $AA'$  قطر بزرگ برابر با ۱۶ و خروج از مرکز  $\frac{3}{4}$  باشد، فاصله رأس  $A$  تا نزدیک ترین کانون را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{4} \xrightarrow{a=8} c = 6 \quad AF = a - c = 2$$

**سوال ۶۷** در بیضی رو به رو، نقاط  $A$  و  $A'$  دو سر قطر بزرگ و نقاط  $F$  و  $F'$  کانون های بیضی هستند. ثابت کنید:  $A'F' = AF$ . (شهریور ۱۴۰۰)



پاسخ:

$$AF' + AF = 2a \quad , \quad A'F' + A'F = 2a \rightarrow$$

$$A'F' + A'F = AF' + AF \rightarrow$$

$$A'F' + (A'F + FF') = AF + (AF + FF') \rightarrow AF = A'F'$$

بنا به تعریف بیضی داریم:

**سوال ۶۸** سهمی به معادله  $y^2 - 2y + \lambda x + 9 = 0$  را در نظر بگیرید. (شهریور ۱۴۰۰)

الف) مختصات رأس کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

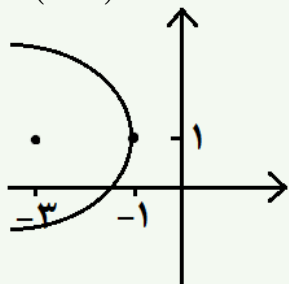
ب) نمودار سهمی را رسم کنید.

پاسخ:

$$F(-3, 1) \quad y^2 - 2y + 1 = -\lambda x - 9 + 1$$

$$x = 1 \quad (y - 1)^2 = -\lambda(x + 1)$$

$$A(-1, 1) \quad a = 2$$



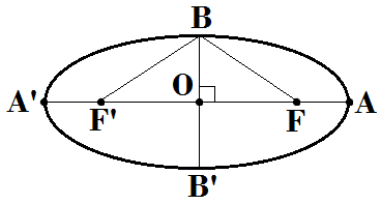
الف)

ب)



**سوال ۶۹** در شکل مقابل، اگر  $OA = a$ ،  $OB = b$  و  $OF = c$  باشد، ثابت کنید:  $a^2 = b^2 + c^2$ . (خرداد)

(۱۴۰۰)



**پاسخ:**

نقطه B روی عمود منصف پاره خط  $FF'$  قرار دارد:  $BF = BF'$ .

فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر با قطر بزرگ است:

$$BF + BF' = 2a \rightarrow BF = BF' = a$$

بر اساس فیثاغورث در مثلث BOF:  $OF^2 + OB^2 = BF^2 \rightarrow c^2 + b^2 = a^2$

**سوال ۷۰** اگر خروج از مرکز بیضی برابر  $\frac{3}{5}$  و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانون آن را به دست آورید. (خرداد ۹۸)

**پاسخ:**

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{5} \rightarrow c = \frac{3}{5}a \quad b = 8 \quad a^2 = b^2 + c^2$$

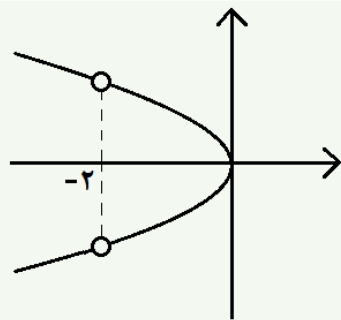
$$a^2 = 64 + \frac{9}{25}a^2 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \\ c = 6 \end{cases}$$

طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله کانونی ۱۲ است.

**سوال ۷۱** شکل کلی نمودار مربوط به روابط  $x > -2$  و  $y^2 + x \leq 0$  را در فضای دو بعدی رسم کنید. (خرداد)

(۱۴۰۲)

**پاسخ:**



**سوال ۷۲** نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه B(۱, ۰, ۱) در فضا مفروض اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

**پاسخ:**

$$AB = (1, 0, 4)$$

مختصات نقطه  $A(0, 0, 3)$ ، مختصات وسط AB برابر با  $M(\frac{1}{2}, 0, 2)$  و فاصله تا مبدأ مختصات  $\frac{\sqrt{17}}{2}$  است.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

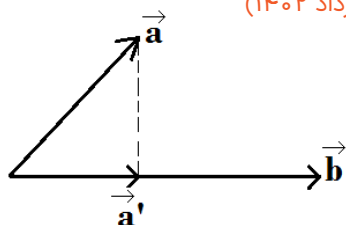
**سوال ۷۳** زاویه بین دو بردار  $\vec{a}(2, -1, 2)$  و  $\vec{b}(1, -1, 0)$  را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$a \cdot b = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \rightarrow 3 = 3\sqrt{2} \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 45^\circ$$

**سوال ۷۴** نشان دهید تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  روی بردار  $\vec{b}$  برابر  $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$  است. (خرداد ۱۴۰۲)

بردار  $\vec{a}'$  با بردار  $\vec{b}$  موازی است:  $\vec{a}' \parallel \vec{b} \rightarrow \vec{a}' = k\vec{b}$



پاسخ:

$$(\vec{a} - \vec{a}') \perp \vec{b} \rightarrow (\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - (k\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0$$

$$k = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

**سوال ۷۵** سه بردار  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$  و  $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$  و  $\vec{c} = (0, 2, 1)$  در نظر بگیرید.

(الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  برابر با  $\theta$  باشد،  $\cos \theta$  را بیابید.

(ب) تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر  $\vec{c} - \vec{b}$  را به دست آورید.

پاسخ:

$$\vec{a} = (2, 3, -1) \quad \vec{b} = (1, 0, 1)$$

(الف)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \rightarrow 1 = \sqrt{14} \sqrt{2} \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} \quad (1, -2, 0) \quad \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|^2} \vec{d} = \frac{-4}{5} (1, -2, 0)$$

(ب)

**سوال ۷۶** اگر  $A(2, -1, 3)$  و  $B(3, 1, 4)$  و  $C(-1, 1, 0)$  سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\vec{AB} = (1, 2, 1) \quad \vec{AC} = (-3, 2, -3) \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = (-8, 0, 8)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 4\sqrt{2}$$

**سوال ۷۷** برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  ثابت کنید دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمودند اگر و فقط اگر  $a \cdot b = 0$ . (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 0 \rightarrow \cos \theta = 0 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

**سوال ۷۸** اگر  $\vec{c} = (-1, 1, 4)$  و  $\vec{b} = (3, -4, 2)$  و  $\vec{a} = (-1, -3, 0)$  باشند، آنگاه تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\vec{b} + \vec{c} = (2, -3, 6) \quad \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|\vec{b} + \vec{c}|^2} (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{(-1, -3, 0) \cdot (2, -3, 6)}{49} (2, -3, 6) = \frac{1}{7} (2, 3, -6)$$

**سوال ۷۹** مساحت متوازی الاضلاع که توسط بردارهای  $\vec{a} = (1, 0, 1)$  و  $\vec{b} = (0, 1, 1)$  تولید می‌شود را به دست آورید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-1, -1, 1) \quad S = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

**سوال ۸۰** نقاط  $A = (1, 2, 1)$  و  $B = (2, 2, 1)$  و  $C = (3, 2, -1)$  را در فضا در نظر می‌گیریم. کدام‌ها روی خط  $\begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$  قرار دارند؟ چرا؟ (دی ۹۹)

**پاسخ:** نقاط  $A$  و  $B$ : زیرا در این دو نقطه  $y = 2$  و  $z = 1$  می‌باشد.

**سوال ۸۱** دو بردار  $\vec{a} = (1, 2, -1)$  و  $\vec{b} = (0, 2, -1)$  را در نظر بگیرید. (دی ۹۹)

(الف) بردار  $\vec{a}$  در کدام ناحیه از فضای  $R^3$  واقع است؟

(ب) طول بردار  $2\vec{a} - \vec{b}$  را به دست آورید.

پاسخ:

(الف) در ناحیه ۵.

$$2\vec{a} - \vec{b} = (2, 2, -1) \rightarrow |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \quad (\text{ب})$$

**سوال ۸۲** بردار  $\vec{a} = (4, -4, 2)$  مفروض است. بردار  $\vec{b}$  غیر هم جهت با  $\vec{a}$  و به طول ۱۲ را طوری بیابید

که  $\vec{a} \times \vec{b} = 0$  باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0 \quad \vec{b} \parallel \vec{a} \quad \vec{b} = (4k, -4k, 2k)$$

$$|\vec{b}| = 6|k| \rightarrow k = \pm 2 \quad k = -2 \rightarrow \vec{b} = (-8, 8, -4)$$

**سوال ۸۳** بردارهای  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  مفروض اند به طوری که  $|\vec{a}| = 3$  و  $|\vec{b}| = 26$  و  $|\vec{a} \times \vec{b}| = 72$ . اگر زاویه بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

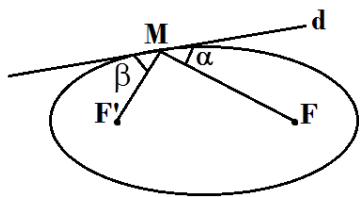
پاسخ:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \rightarrow 72 = 3(26) \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{12}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{5}{13} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta = 3(26) \frac{5}{13} = 30$$

**سوال ۸۴** درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در شکل رو به رو، اگر خط  $d$  در نقطه  $M$  بر بیضی مماس باشد و زاویه  $\widehat{FMF'} = 50^\circ$  باشد، آن گاه اندازه زاویه  $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 60^\circ$  است. (خرداد ۱۴۰۱)



ب) برای دو بردار واحد  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  حاصل ضرب خارجی  $\vec{i} \times \vec{j} = 0$  است. (خرداد ۱۴۰۱)

پ) برای دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  حاصل  $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$  است. (دی ۹۹)

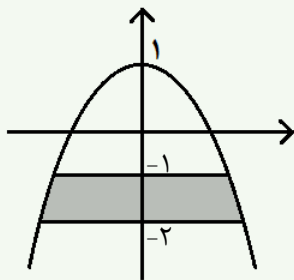
پاسخ:

الف) نادرست.  $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 65^\circ$  ب) نادرست.  $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$  پ) درست.

**سوال ۸۵** الف) معادله صفحه‌ای که بر محور  $Z$ ها در نقطه‌ای به مختصات  $A = (0, 0, 3)$  عمود باشد، .....  $Z = 3$  ..... است

ب) شکل کلی مربوط به روابط  $-2 < y \leq -1$  و  $y < -x^2 + 1$  را در فضای دو بعدی رسم کنید. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:



**سوال ۸۶** نقاط  $A(3, 1, 2)$  و  $B(3, -2, 2)$  در  $R^3$  مفروضاند.

الف) طول پاره خط  $AB$  را به دست آورید.

ب) معادلات مربوط به پاره خط  $AB$  را بنویسید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$|AB| = \sqrt{(3-3)^2 + (-2-1)^2 + (2-2)^2} = 3$$

الف)

$$x = 3 \quad -2 \leq y < 1 \quad z = 2$$

ب)



**سوال ۸۷** اگر  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  و  $\vec{k}$  بردارهای واحد در  $R^3$  باشند، حاصل  $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$  را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) = \vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$$

**سوال ۸۸** سه بردار  $\vec{a}(2, 3, 1)$  و  $\vec{b}(-1, 1, 0)$  و  $\vec{c}(2, 1, -2)$  مفروض اند. (شهریور ۹۸)

الف) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a} + \vec{b}$  و  $\vec{c}$  را بدست آورید.

ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  و  $\vec{c}$  تولید می شود را بدست آورید.

پاسخ:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (1, 4, 1) \times (2, 1, -2) = (-9, 4, -7)$$

الف)

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = (2, 3, 1) \times (-2, -2, -3) = -13$$

ب)

**سوال ۸۹** بردارهای  $\vec{a}(2, -1, 2)$  و  $\vec{b}(1, -1, 0)$  را در نظر بگیرید. (شهریور ۹۹)

الف) زاویه بین دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  پیدا کنید.

پاسخ:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

الف)

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2, -1, 2) \times (1, -1, 0) = (2, 2, -1)$$

ب)

**سوال ۹۰** مقدار  $m$  را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار  $\vec{a}(m, 0, 2)$  و  $\vec{b}(2, -2, 0)$  برابر  $\frac{\pi}{3}$  باشد. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \rightarrow 2m = (\sqrt{m^2 + 4})(2\sqrt{2})\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow 4m^2 = 2m^2 + 8$$

$$\rightarrow m^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} m = 2 & \text{ق.} \\ m = -2 & \text{غ.ق.} \end{cases}$$

**سوال ۹۱** اگر سه بردار  $\vec{a}(m, -1, 1)$  و  $\vec{b}(1, -1, 1)$  و  $\vec{c}(1, m, -1)$  در یک صفحه واقع باشند، مقدار  $m$

را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad m^2 - 2m + 1 = 0 \rightarrow m = 1$$

**سوال ۹۲** اگر  $\vec{a}(-2, 0, 1)$  و  $\vec{b}(\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k})$  باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای  $\vec{a} - \vec{j}$  و  $\vec{b}$  تولید می‌شوند را حساب کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{u} = \vec{a} - \vec{j} = (-2, -1, 1) \quad \vec{u} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$|\vec{u} \times \vec{b}| = \sqrt{75} \quad S = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

**سوال ۹۳** مقدار  $m$  را چنان بیابید که دو بردار  $\vec{a}(2, m, -1)$  و  $\vec{b}(m+1, 3, 2)$  بر هم عمود باشند. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \rightarrow 2(m+1) + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = 0$$

**سوال ۹۴** تصویر قائم بردار  $\vec{a}(2, -1, 2)$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}(1, -1, 0)$  بیابید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + 2 \times 0 = 3 \quad |\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} = \frac{3}{2}(1, -1, 0) = \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, 0\right)$$

**سوال ۹۵** اگر  $\vec{a}(1, -3, 4)$  و  $\vec{b}(3, -4, 2)$  و  $\vec{c}(-1, 1, 4)$  باشند، آنگاه تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  بر امتداد  $\vec{b} + \vec{c}$  را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, -3, 6) \quad \vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})}{|(\vec{b} + \vec{c})|^2} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \frac{35}{49}(2, -3, 6)$$

**سوال ۹۶** مقدار  $m$  را طوری تعیین کنید که سه بردار  $\vec{a}(1, m, -11)$  و  $\vec{b}(2, 3, -1)$  و  $\vec{c}(1, -1, 3)$  در یک صفحه باشند. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$\vec{b} \times \vec{c} = (2, 3, -1) \times (1, -1, 3) = (8, -7, -5)$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0 \rightarrow (1, m, -11) \cdot (8, -7, -5) = 0 \rightarrow 8 - 7m + 55 = 0 \rightarrow m = 9$$



**سوال ۹۷** ثابت کنید: «دو بردار غیر صفر  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  با هم موازی هستند اگر و فقط اگر  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ». (خرداد)

(۹۸)

**پاسخ:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = 0 \Leftrightarrow |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \vee \\ \theta = \pi \end{cases} \rightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ پس.}$$

**سوال ۹۸** الف) اگر  $y = b$  معادله صفحه‌ای در فضای  $R^3$  باشد که از نقطه  $A = (2, -3, 4)$  بگذرد. مقدار عددی  $b$  چقدر است؟

ب) معادلات  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$  مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات  $R^3$  است؟

پ) در فضای  $R^3$ ، نقطه  $A$  به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه  $YOZ$  و نقطه  $B = (-4, 6, -3)$  مفروض هستند. مختصات وسط  $AB$  را بیابید. (خرداد ۱۴۰۰)

**پاسخ:**

الف) ۳-  
ب) محور  $Z$ ها  
پ) نقطه  $A = (0, 2, 3)$  و مختصات وسط  $AB$ ،  $(-2, -4, 0)$  است.

**سوال ۹۹** حجم متوازی السطوح را بدست آورید که توسط سه بردار  $\vec{a}(1, 0, -1)$  و  $\vec{b}(0, 2, 2)$  و  $\vec{c}(2, -3, 0)$  تولید می‌شود. (شهریور ۱۴۰۱)

**پاسخ:**

$$\vec{a} \cdot |\vec{b} \times \vec{c}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 10$$

**سوال ۱۰۰** اگر زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, n)$  و  $\vec{b}(1, 0, -1)$  برابر با  $135^\circ$  باشد، مقدار  $n$  را بیابید. (دی)

(۱۴۰۱)

**پاسخ:**

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2} = \frac{2-n}{\sqrt{2} \times \sqrt{4+1+n^2}} \rightarrow \frac{n-2}{\sqrt{n^2+5}} = 1$$

$$\rightarrow n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \rightarrow n = \frac{-1}{4}$$