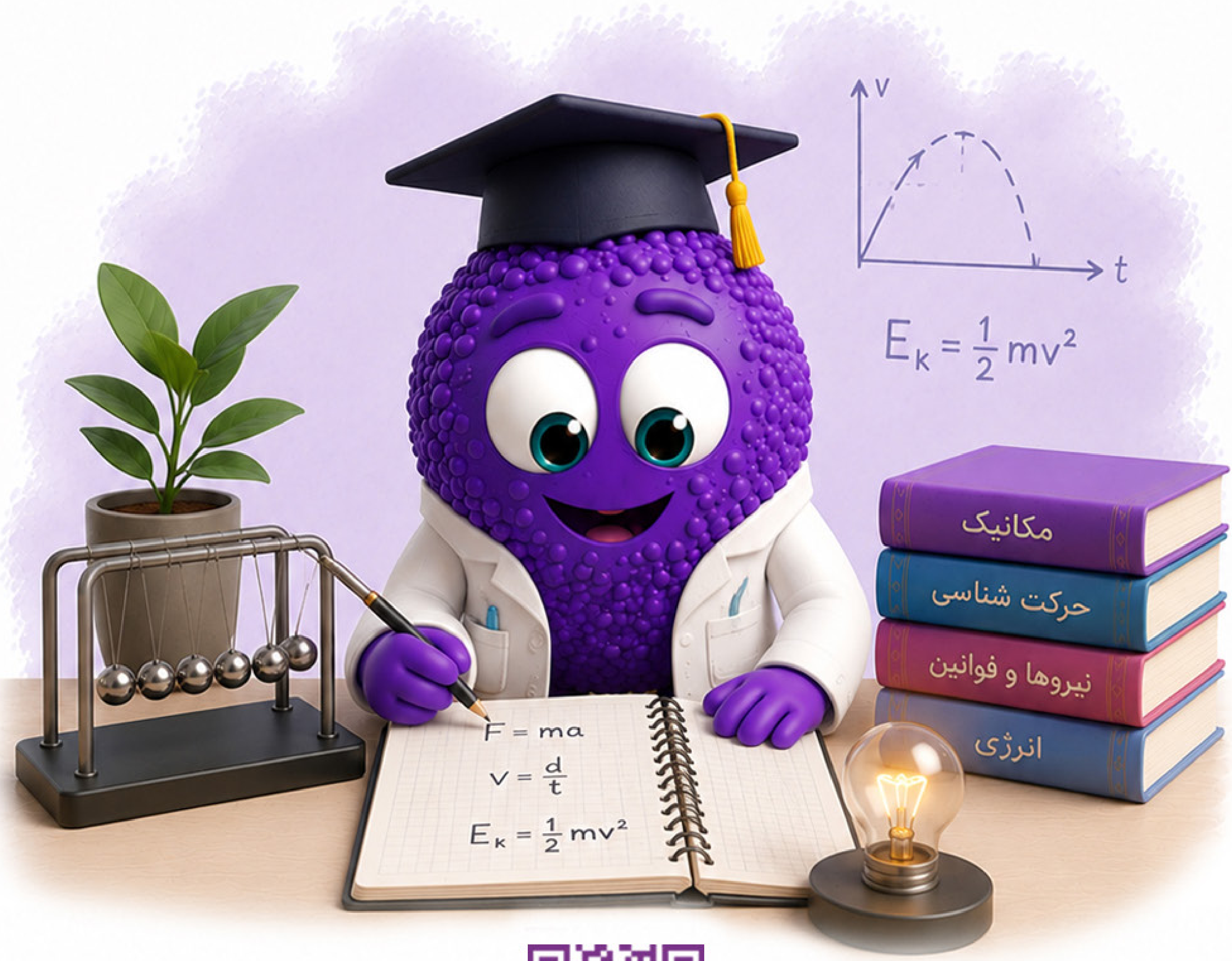
گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

درس

حسابان دوازدهم ـ فصل ۱

نوتروبیست



notruphil

www.notruphil.com

نوتروفیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۴

تک رقمی نوتروفیل.


رتبه ۸
ایمان نیک‌نام جهرمی

دو رقمی های نوتروفیل.


رتبه ۱۴
امیرمحمدکیانی


رتبه ۱۶
آریا قهرمانی


رتبه ۲۰
سینا راضی


رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی


رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی


رتبه ۵۹
ایمان انفرادی


رتبه ۶۱
بهار هلالی


رتبه ۷۵
محمدصالح عارفی


رتبه ۸۰
محمدمهدی شریفی

سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل.


رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری


رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری


رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه


رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی


رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصریان


رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی


رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی


رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری


رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی


رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی


رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبداله آبادی


رتبه ۵۳۲
فاطمه شاهسوند


رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری


رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا


رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد


رتبه ۵۵۷
محمدصالح زارعی


رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد


رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده


رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری


رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی


رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی


رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی


رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان


رتبه ۷۸۱
احسان قنبری


رتبه ۷۸۶
نیما غفاری


رتبه ۸۰۳
مائده رنجبر


رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی


رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی


رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی


رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی


رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار


رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر


رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده


رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی


رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی


رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی


رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری


رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده


رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی


رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی


رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی


رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی


رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده


رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده


رتبه ۱۵۳۴
فاطیما عبیری


رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی


رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند


رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی


رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی


رتبه ۱۷۳۱
محمدرضا محسنی


رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی


رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم


رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد


رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه


رتبه ۲۶۲۵
زهره مجمعی


رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی


رتبه ۲۷۵۱
فهیمه سیدآبادی


رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی


رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی


رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی


رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی


رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی


رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی


رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

حسابان

پیش‌نیازها

۱ اتحادهای جبری:

$(a\pm b)^۲ = a^۲ + b^۲ \pm ۲ab \rightarrow$ مربع دوجمله‌ای $\rightarrow$ توان ۲

$(a\pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \rightarrow$ مکعب دوجمله‌ای $\rightarrow$ توان ۳

$a^۲ - b^۲ = (a+b)(a-b) \rightarrow$ مزدوج

$a^۳ \pm b^۳ = \underbrace{(a\pm b)}_{\text{لاغر}} \times \underbrace{(a^۲ \mp ab + b^۲)}_{\text{چاق}} \rightarrow$ چاق و لاغر

و

$(x+b)(x+a) = x^۲ = (a+b)x + ab \rightarrow$ جمله مشترک

اتحادهایی که به پیشنهاد من حتماً حفظ شوند:

$x^۳ \pm ۳x^۲ + ۳x \pm ۱ = (x\pm ۱)^۳$

$x^۳ \pm ۶x^۲ + ۱۲x \pm ۸ = (x\pm ۲)^۳$

$x^۳ \pm ۹x^۲ + ۲۷x \pm ۲۷ = (x\pm ۳)^۳$

$x^۲ \pm ۲x + ۱ = (x\pm ۱)^۲$

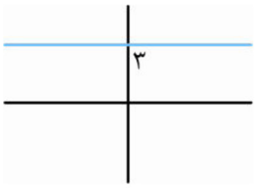
$x^۲ \pm ۴x + ۴ = (x\pm ۲)^۲$

$x^۲ \pm ۶x + ۹ = (x\pm ۳)^۲$

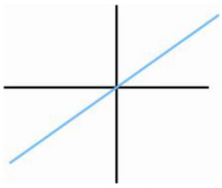
$۴x^۲ \pm ۴x + ۱ = (۲x\pm ۱)^۲$

انواع توابع:

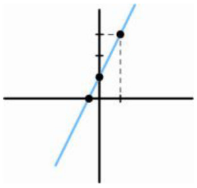
✓ تابع ثابت $y = k$ $y = ۳$



✓ تابع همانی (نیمساز ناحیه «۱» و «۳») $y = x$ $y = x$



✓ تابع خطی $y = ax + b$ $y = ۲x + ۱$

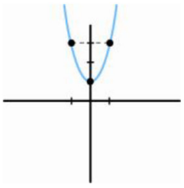


✓ توابع چندجمله‌ای $y = ax^n + bx^{n-۱} + \dots + z$ $y = ۲x^۲ + ۱$

↓

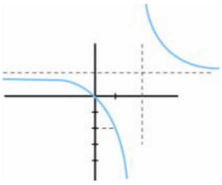
توضیح داده شود

$n \in W$



✓ توابع گویا:

$$y=\frac{\text{چندجمله ای}}{\text{چندجمله ای}} \qquad y=\frac{x+۳}{x-۲}$$



توجه، توجه: توابع چندجمله‌ای گویا هستند ولی توابع گویا چندجمله‌ای نیستند.

فصل ۱: تابع

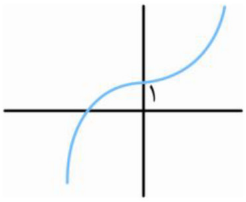
انتقال توابع

عمودی ← جابجایی توابع رو محور "y" ها

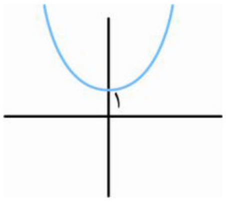
افقی ← جابجایی توابعی روی محور "x" ها

انتقال عمودی: با جمع و یا تفریق عددی با یک تابع مرجع و یا مادر اتفاق می‌افتد که باید به اندازهٔ آن نمودار تابع را بالا و یا پایین ببریم.

مثال:



$$g(x)=\underset{\text{تابع مادر}}{f(x)}+\underset{\text{عدد}}{k}$$



عددی که باعث انتقال شده است $\leftarrow$ $g(x)=\underbrace{\underset{\text{تابع مادر}}{x^{۳}}+۱}_{\text{تابع نهایی}}$

عددی که باعث انتقال عمودی شده است $\leftarrow$ $f(x)=\underbrace{\underset{\text{تابع مادر}}{x^{۲}}-۱}_{\text{تابع‌نهایی}}$

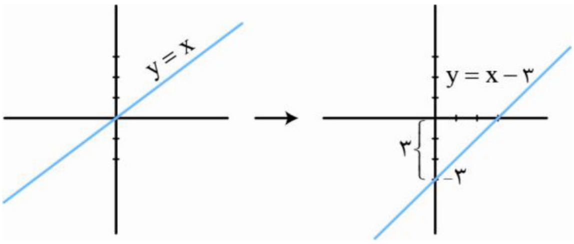
خطر! توابعِ مادر توابعی هستند که ما رسم آنها را می‌شناسیم و بلدیم آنها را رسم کنیم مانند اصطلاحاً در توابع جبری باید حداکثر یک "x" ببینیم و اگر تعداد "x" ها از یک بیشتر باشد باید آن را به یک کاهش دهیم مانند:

"$\cos x$"	"$\sin x$"
"$x^{۳}$"	"$x^{۲}$"

$$x^{۲}+۲x+۳\rightarrow\underbrace{x^{۲}+۲x+۱}_{(x+۱)^{۲}}+۲\Rightarrow\underset{\text{تابع مادر}}{(x+۱)^{۲}}+۲\rightarrow$$ عددی که باعث انتقال می‌شود

طریقه رسم:

۱ رسم تابع مادر



$\underset{\text{تابع مادر}}{x}\ -۳$ عدد

۲ انتقال

۳ ... ادامه دارد

نکته فوق سری: شاید براتون سؤال شه که چرا ننوشتم انتقال عمودی. در جواب می‌تونم بگم به دلیل اینکه ما اعمال دیگر هم داریم که روی تابع انجام می‌شوند.

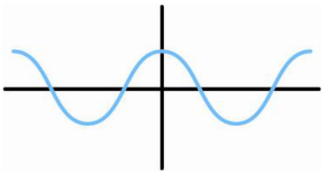
نکات فوق حرفه‌ای: انتقال عمودی فقط روی برد تابع تأثیر میگذارد که اگر تابع کراندار باشد یعنی تابع بین دو عدد تغییر کند و یا به زبان ریاضی $|f(x)|\le m$ باشد، می‌توانیم آن عددی که به تابع مادر اضافه یا کم شده است را با دوسر برد جمع و یا تفریق کنیم تا برد جدید نمایان شود.

اندکی مثال حل شده

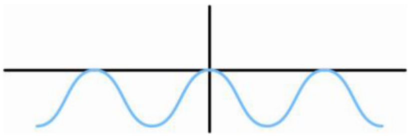
۱ تابع زیر را با کمک $\cos(x)$ رسم کنید. (امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹)

$\cos x - ۱$ عدد
تابع مادر

۱ رسم نمودار تابع مادر



۲ انتقال

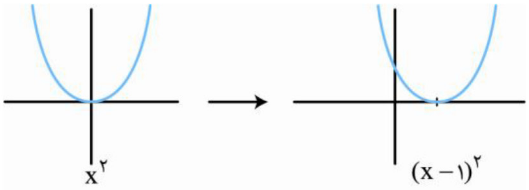


انتقال افقی: در این انتقال عدد با x جمع می‌شود نه یک تابع جدا و باعث انتقال تابع روی محور x ها می‌شود. این انتقال تأثیری روی برد توابع ندارد و صرفاً روی دامنه تابع تغییر ایجاد می‌کند. $g(x)=F(x+k)$

خطر ! در این قسمت (انتقال افقی) برعکس انتقال عمودی تغییراتی که روی x ها انجام می‌دهیم برعکس است یعنی اگر عدد با x جمع شود تابع به جای حرکت به جلو به سمت عقب حرکت می‌کند ولی خب در انتقال عمودی ما اگر عددی را با تابع مادر جمع کنیم با توجه به علامتش اگر مثبت بود موافق با آن تابع را به سمت بالا و اگر منفی بود موافق با علامت به سمت پایین تابع را انتقال می‌دهیم.

مثال:

$(x-۱)^۲$



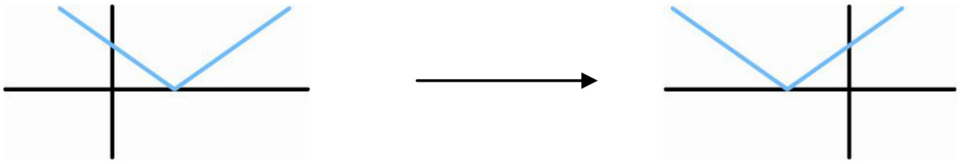
در مرحله اول چون درجه چندجمله‌ای «۲» است یعنی تابع از توابع درجه «۲» است ما نمودار $x^۲$ را رسم می‌کنیم و بعد با توجه به جمع عدد با "x" با توجه به علامت عدد آن را یک واحد یا به سمت چپ و یا به سمت راست می‌بریم ولی حال کدام سمت؟!

به عنوان مثال تصور کنید $F(۱)=۰$ است. اگر با x تابع F عددی جمع یا از آن کم شود،مثلا $g(x)=F(x+۲)$ حال باید به g عددی بدهیم که جلوی F را ۱ کند تا ریشه های تابع g به دست آید.

$$x+۲=۱\rightarrow x=-۲$$

یعنی حال اگر ما به g عدد ۱- بدهیم جلوی F عدد ۱ ظاهر می‌شود و از آنجا که ما می‌دانیم $F(۱)=۰$ است،پس ریشه g عدد ۱- است.

و این یعنی تابع $g(x)$ محور x ها را در ۱- قطع می‌کند در و تابع $F(x)$ محور x ها را در «۱» قطع می‌کرد و رابطه‌ای که بین F و g داشتیم این بود که x های تابع F را با ۲ جمع کردیم تبدیل به تابع g شد.



$F(x)$ $g(x) = F(x+۲)$

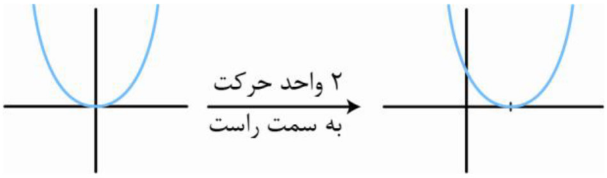
با توجه به توضیحات فوق برخلاف تصور خیلی ها که تابع به سمت عقب می‌رود، تابع به سمت جلو می‌رود.

روش متفاوت

محل برخورد تابع با محور x ها درواقع جایی است که مقدار تابع «صفر» می‌شود یعنی همان ریشه تابع است. مثلاً در مثال بالا ریشه تابع $x^۲$، صفر است یعنی با قرار دادن صفر در تابع صفر به ما می‌دهد ولی بعد از کم شدن «۱» از x ریشه تابع «۱» می‌شود یعنی در نقطه $x = ۱$ با محور x ها برخورد می‌کند.

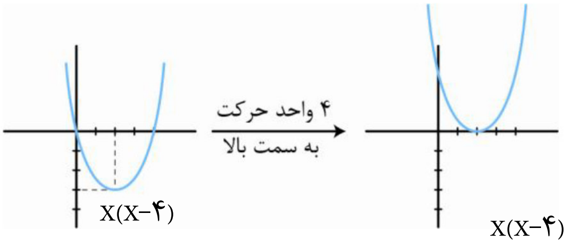
روش ۳

وقتی تابعی را به صورت بسته به ما می‌دهند مثلاً: $(x-۲)^۲$ ما می‌توانیم آن را با انتقال عمودی هم رسم کنیم. برای این کار تابع را باز می‌کنیم $(x^۲-۴x+۴)$ و داخل $x^۲-۴x$ از یک x فاکتور می‌گیریم و تابع را با توجه به ریشه‌ها رسم می‌کنیم و تابع رسم شده را به اندازه ۴ واحد به بالا می‌بریم.



$x^۲$ $(X-۲)^۲$

$$(x-۲)^۲ = \underbrace{x^۲-۴x}_{x(x-۴)}+۴ = \underbrace{x(x-۴)}_{\text{تابع مادر}} + \underbrace{۴}_{\text{عدد}}$$



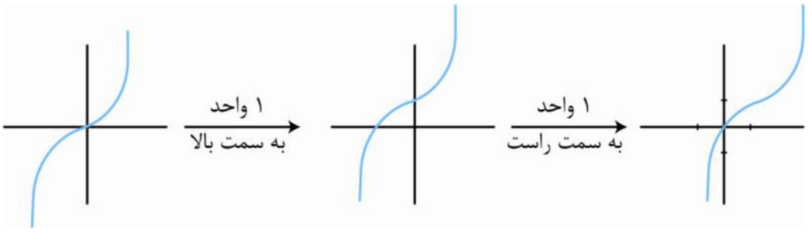
$X(X-۴)+۴$

توجه توجه: این‌روش‌بیشتر اوقات برای تواع درجه ۲ کاربرد دارد و کاربرد چندانی برای توابع درجه ۳ ندارد دلیلش هم این است که در توابع درجه ۳ وقتی از x فاکتور می‌گیریم پیدا کردن ریشه‌های تابع درجه ۲ بدست آمده کار ساده‌ای نیست که کار ما را سخت می‌کند.

$$\underbrace{x^۳+۳x^۲+۳x}_{x(x^۲+۳x+۳)}+۱$$

توجه توجه: توابع می‌توانند هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی را داشته باشند مانند:

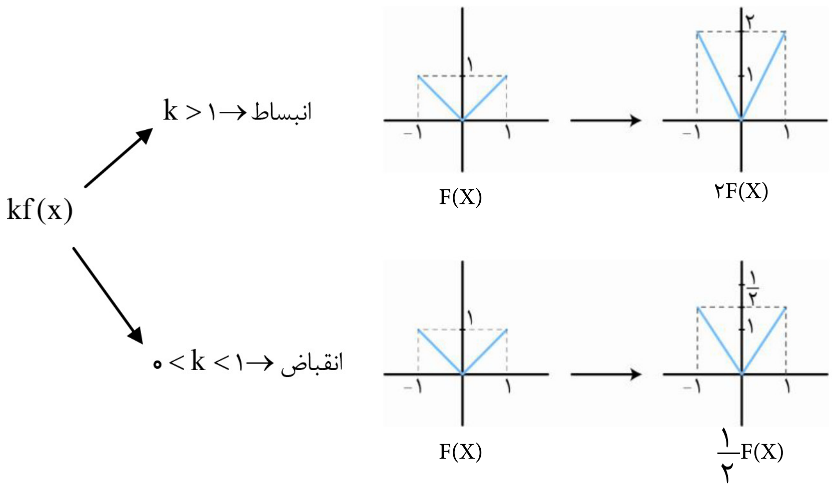
$$F(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۱-۱\Rightarrow(x-۱)^{۳}+۱$$ (خرداد ۱۴۰۲)



توجه! تقدم و تأخر انتقال‌ها را به صورت مفصل بعد از تدریس انبساط و انقباض‌ها توضیح می‌دهم.

انبساط و انقباض عمودی

در این حالت عددی در یک تابع ضرب می‌شود که باعث کوچک و یا بزرگ شدن تابع در راستای محور yها شود که این بزرگ شدن برای اعداد بزرگتر از «۱» (انبساط) و کوچک شدن (انقباض)برای اعداد بین صفر و «۱» است.



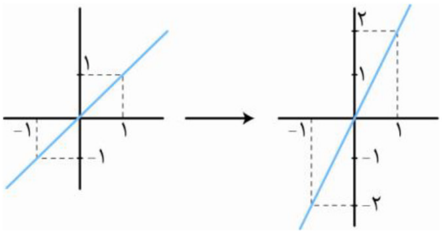
یک سوال حال اگر k عددی منفی باشد چه؟! در این حالت نمودار تابع را نسبت به محور ”x“ ها قرینه می‌کنیم. یعنی x نقاطی که روی تابع هستند را دستکاری نمی‌کنیم و y آن نقاط را در ”-k“ ضرب می‌کنیم و روی محور نشان می‌دهیم و نقاط جدید را به هم وصل می‌کنیم و تبریک می‌گم شما نمودار $k\in\mathbb{N}$ و $-kF(x)$ رو رسم کردین.

نکته حرفه‌ای: در انبساط و انقباض عمودی دامنه توابع ثابت و برد توابع k برابر می‌شود یعنی با داشتن سروته برد (برای توابع کراندار) تابع F(x) می‌توانید برد تابع kF(x) را بدست آورید به طوری که دامنه ثابت است.

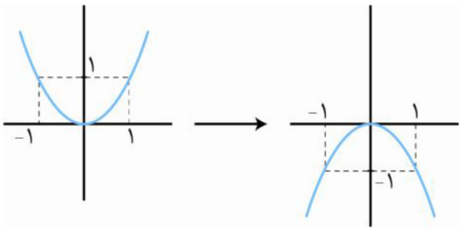
$F(x):[a,b]\to[d,c]$ $\qquad$ $kF(x):[a,b]\Rightarrow[kd,kc]$

کمی مثال:

$F(x)=x$ $\qquad$ $g(x)=۲x$ $\qquad$ $k=۲$



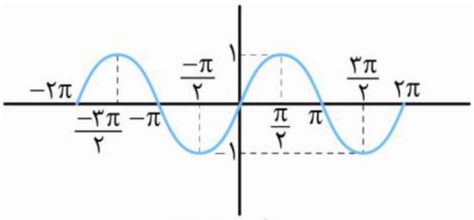
$k=-۱$ $\qquad$ $g(x)=-x^{۲}$ $\qquad$ $f(x)=x^{۲}$



انبساط و انقباض افقی

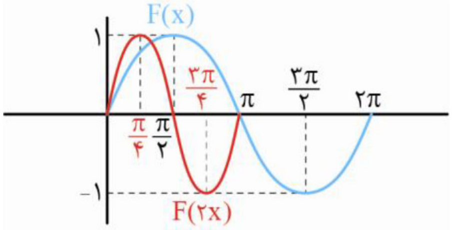
دوستان دقیقاً مثل انتقال‌های افقی که برعکس انتقال‌های عمودی بود اینجا هم قضیه برعکسه. خودمونی بگم تغییراتی که روی xها انجام می‌دیم، x برعکس اون تغییراتو اعمال می‌کنه ولی خب y ها نه! Y ها دقیقاً همون تغییری که ما روشون انجام می‌دیم همون تغییرو اعمال می‌کنه.

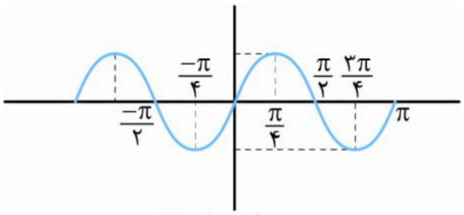
بذارید روی یک مثال قشنگ توضیح بدم. مثلاً داریم: $f(x)=\sin x$ و بخواهیم $f(۲x)=\sin(۲x)$ رو بکشیم. باید اول تابع $f(x)$ را رسم کنیم که به صورت زیر است:



$F(x)=\sin x$

حال برای رسم $F(۲x)$ باید توجه داشته باشیم که اعمال تغییر روی ”x“ها برعکس است که این یعنی برخلاف نظر خیلی‌ها به جای اینکه ”x“ها «۲» برابر شوند باید «$\frac{۱}{۲}$» برابر شوند ولی خب یک سوال ایجاد می‌شود که چرا؟! در باکس پایین توضیح می‌دهم.





$F(۲x)=\sin ۲x$

همان‌طور که دقت می‌کنید ضرب یک عدد در ”x“ در دوره تناوب $\sin x$ نیز تأثیر داشت که دلیل آن را در فصل بعد بررسی می‌کنیم.

جواب سوالی‌که در مثال بالا پیش آمد

سوال اینه که چرا وقتی یک عدد در "x" ضرب میشه معکوسش اعمال میشه؟ درواقع این سوالو من قبلاً جواب دادم ولی از اونجایی که خیلی برام مهمین دوباره میگم ☺

فرض کنید $F(a)=a$ وقتی عددی در "x" ضرب می‌شود مثلاً «۳» می‌شود $F(۳a)$. حال اگر بخواهیم تابع F به ما عدد "a" رو بده باید جلوی تابع "a" بشه. دقت کنید جلوی تابع "a" بشه نه "x" و جلوی تابع F جلوی تابع F، «۳x» وجود دارد که باید برابر "a" بشه پس داریم:

$$۳x=a\Rightarrow \boxed{x=\frac{a}{۳}}$$

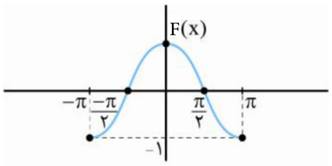
یعنی باید به $F(۳x)$، $\frac{a}{۳}$ بدیم که به ما a بده در صورتی که قبلاً در تابع $F(x)$ با دادن a به تابع به ما a می‌داد. پس نتیجه می‌گیریم که باید در اعمال تغییر در "x" ها برعکس عمل کنیم.

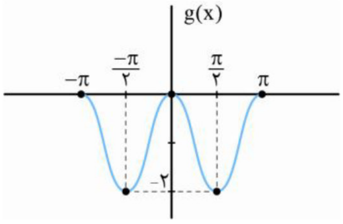
توجه توجه! خطر!

داخل امتحان نهایی حتماً حتماً باید جدول نقطه یابی را رسم کنید وگرنه نمره‌ای به شما تعلق نمی‌گیرد. همچنین سعی کنید در امتحان هیچ چیز رو داخل ذهنتون حساب نکنید و از نوشتن زیاد نترسید چون به نوشته‌های شما نمره می‌دهند نه به تفکراتتان.

تمرین

(شهریور ۹۹) $g(x)=\cos ۲x-۱$ $F(x)=\cos(x)$





x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π
f(x)	−۱	۰	۱	۰	−۱

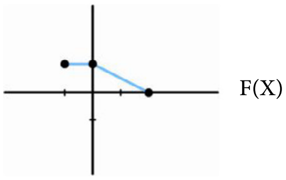
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π
g(x)	۰	−۲	۰	−۲	۰

نکته: تقدم تأخر در انتقال و انبساط انقباض

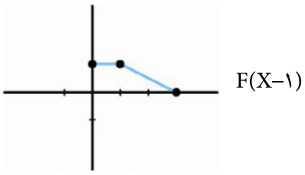
از انبساط و انقباض نه در کنکور و نه در امتحانات نهایی سوال‌نیامده‌ولی از انتقالات سوالات فراوانی آمده

نمودار F(x) به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=F(x-۱)+۲$ را رسم کنید و دامنهٔ آن را بنویسید. (دی ۱۴۰۰)

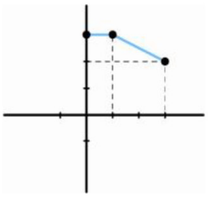
مرحله اول: انتخاب اینکه اول انتقال عمودی یا افقی را انجام دهیم (فرقی نداره)



مرحله دوم: ما انتقال افقی را انتخاب می‌کنیم چون نیاز به دقت بالایی دارد.

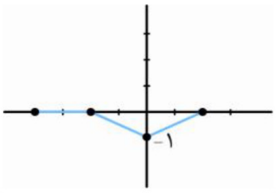


مرحله سوم: انتقال عمودی رو انجام می‌دهیم.

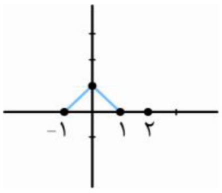


$Dg(x)=[۰,۳]$

اگر نمودار تابع $F(x)$ به صورت زیر باشد نمودار تابع $g(x)=k\,F(k'x+a)+b$ مقادیر k و k'، a، b را بیابید.



$g(x)$



$F(x)$

جواب: $\boxed{a,b=۰}$ $\quad$ $\boxed{k,k'=-\frac{۱}{۲}}$ ← منفی به دلیل قرینه شدن تابع نسبت به محور x ها و y هاست.

$\downarrow$

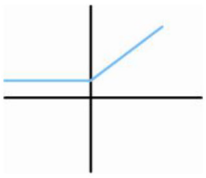
به دلیل اینکه نه تابع بالا و یا پایین شده و نه چپ و راست فقط نسبت به محور x ها و y ها قرینه شده و در یک ضریب ضرب شده.

$k=-\frac{۱}{۲}$ ← چون برد تابع نصف شده

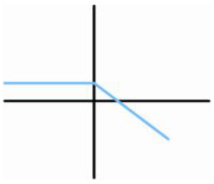
$k'=-\frac{۱}{۲}$ ← چون دامنه تابع «۲» برابر شده

توابع صعودی و نزولی

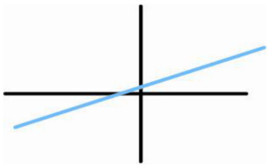
توابع
- صعودی
- هم صعودی و هم نزولی
- نه صعودی و نه نزولی
- نزولی



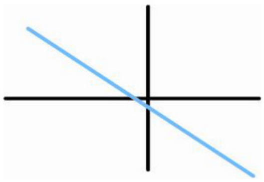
صعودی



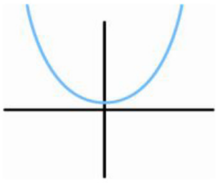
نزولی



صعودی (اکید)



نزولی (اکید)

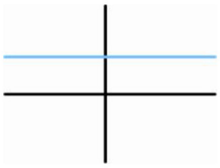


نه نزولی و نه صعودی

(باید بازه بندی بشه)

صعودی $\Rightarrow [۰,+\infty)$

نزولی $\Rightarrow (-\infty,۰]$



هم صعودی و هم نزولی

بخش‌پذیری

قضیه تقسیم‌ها:

$$\underset{\text{مقسوم}}{F(x)} = \underset{\text{مقسوم‌علیه}}{p(x)}\,\underset{\text{خارج‌قسمت}}{q(x)} + \underset{\text{باقی‌مانده}}{r(x)}$$

توجه توجه: همیشه باید درجه باقی‌مانده از مقسوم کمتر باشد. در غیر این صورت تقسیم را ادامه می‌دیم تا این اتفاق بیفتد.

نکته: اگر $r(x) = ۰$ باشد یعنی $F(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

نکته حرفه‌ای: اگر $p(x)$ درجه اول باشد، می‌توانید با گذاشتن ریشه آن در معادله قضیه تقسیم باقی‌مانده($r(x)$) را بدست آورید.

مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $F(x) = x^۴ + kx^۲ - ۳$ بر $\underset{p(x)}{x+۱}$ برابر $\underset{r(x)}{۲}$ باشد، k را تعیین کنید.

(شهریور ۱۴۰۱)

$$p(-۱) = ۰$$

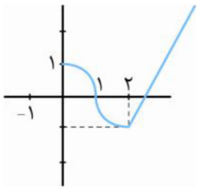
$$x^۴ + kx^۲ - ۳ = q(x)(x+۱) + \overset{۲}{r(x)} \overset{x=-۱}{\Rightarrow} ۱ + k - ۳ = ۲ \Rightarrow \boxed{k = ۴}$$

انقباض افقی

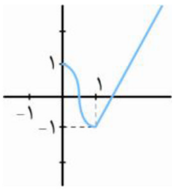
$F(kx)$

$k > ۱$

طول‌ها $\frac{۱}{k}$ برابر می‌شوند



F(x)



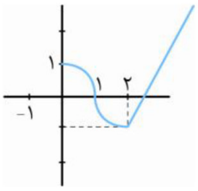
F(۲x)

انبساط افقی

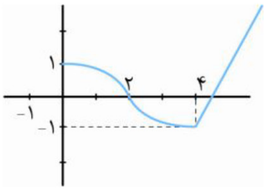
$F(Kx)$

$۰ < k < ۱$

طول‌ها $\frac{۱}{k}$ برابر می‌شوند



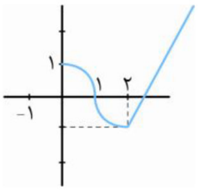
F(x)



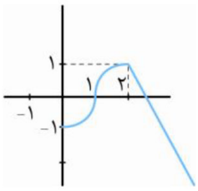
$F(\frac{۱}{۲}x)$

$-F(x)$

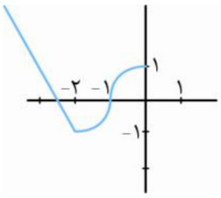
نسبت به محور x ها قرینه می‌شود

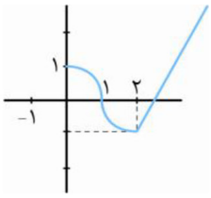


F(x)



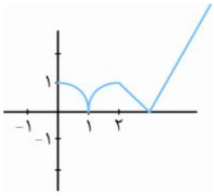
-F(x)

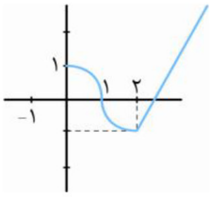




نسبت به محور y ها قرینه می‌شود

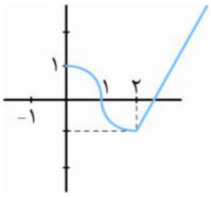
$F(-x)$

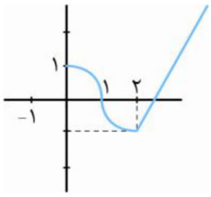




بخشی که زیر محور x هاست
را قرینــه کــرده و در بــالای
محور x ها می‌کشیم

$|F(x)|$



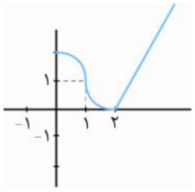


بخشی که سمت چپ محـور
y هاســت را پــاک کــرده و
قرینه بخش ســمت راســت را
در سمت چپ می‌کشیم

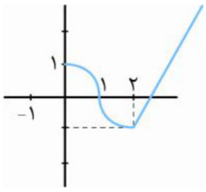
$F(|x|)$

جمع‌بندی۱

انتقال عمودی



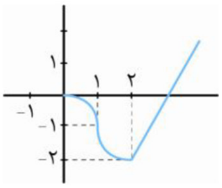
$F(x)+۱$



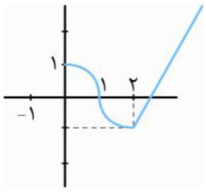
$F(x)$

k واحد به سمت بالا

$F(x)+k$
$k>۰$



$F(x)-۱$



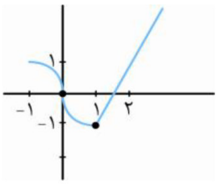
$F(x)$

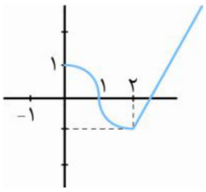
k واحد به سمت پایین

$F(x)-k$
$k>۰$

انتقال عمودی فقط روی برد تأثیر می‌گذارد

انتقال افقی

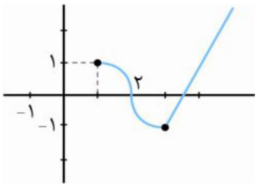


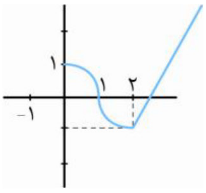


k واحد به سمت چپ

$F(x+k)$
$k>۰$

انتقال افقی



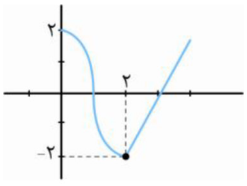


k واحد به سمت راست

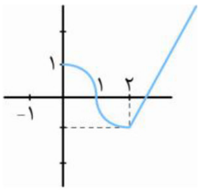
$F(x-k)$
$k>۰$

انتقال افقی فقط روی دامنه تأثیر می‌گذارد

انبساط عمودی



$۲F(x)$



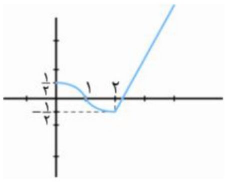
$F(x)$

عرض‌ها k برابر می‌شوند

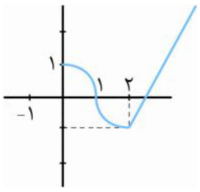
$kF(x)$

$k > ۱$

انقباض عمودی



$\frac{۱}{۲}F(x)$



$F(x)$

عرض‌ها k برابر می‌شوند

$kF(x)$

$۰ < k < ۱$

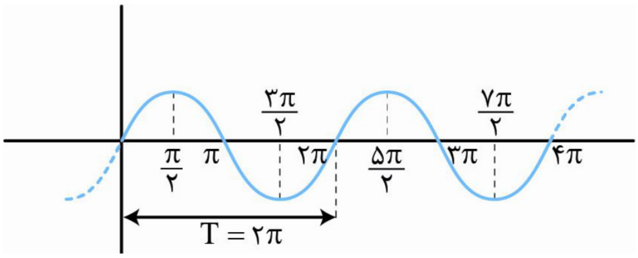
مفاهیم

دوره تناوب: دوره تناوب معمولاً برای توابع مثلثاتی کاربرد دارد. به طور کلی و هر تابعی که یک واحد تکرارشونده داشته باشد دوره تناوب دارد به کوچکترین واحد تکرارشونده دوره تناوب می‌گویند.
حواستان به دامنه باشد مخصوصاً در توابع tan و cot

به زبان ریاضی

$$\forall T \in R \quad s.t \qquad F(x) = F(x+T) = F(x.T)$$

اگر شرط مقابل برقرار باشد می‌گوییم که تابع دوره تناوب T را دارد.
حال تعریف بالا چه می‌گوید. می‌گوید که T به شرطی دوره تناوب است که اگر F(x) را به اندازه T به سمت راست یا چپ انتقال دهیم باز روی خود تابع قرار بگیرد.

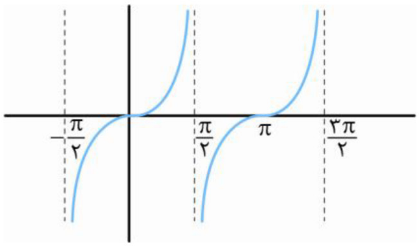


دوره تناوب توابع مثلثاتی به صورت زیر حساب می‌شوند:

	T	Max	Min
$a\sin(bx)+c$	$\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a\rvert+c$	$-\lvert a\rvert+c$
$a\cos(bx)+c$	$\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a\rvert+c$	$-\lvert a\rvert+c$
$a\tan(bx)+c$	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	$+\infty$	$-\infty$
$a\cot(bx)+c$	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	$+\infty$	$-\infty$

توابع تانژانت tan و کتانژانت cot

در کتاب فقط نمودار تابع تانژانت و دامنه آن آمده است و خب مسلماً نیازی هم به آن نیست ولی خب نمودار cot را نیز رسم می‌کنیم.

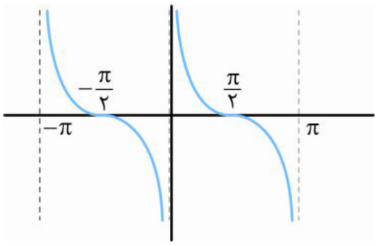


$F(x) = \tan(x)$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} | a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$T = \pi$$



$g(x) = \cot(x)$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

تعداد جواب‌ها رو خواست ← رسم نمودار و شمارش تعداد نقاط برخورد

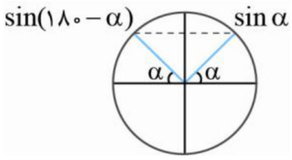
جواب‌ها رو خواست ← بدست آوردن معادله کلی جواب و عددگذاری

مفاهیم

معادلات مثلثاتی همانند همان معادلات جبری هستند فقط در آنها توابع مثلثاتی وجود دارد.

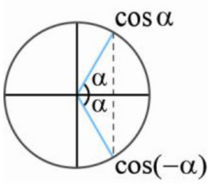
معادله کلی جواب‌های توابع مثلثاتی:

$$\sin x = \sin \alpha$$



$$\begin{matrix} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{matrix} \quad k \in \mathbb{Z}$$

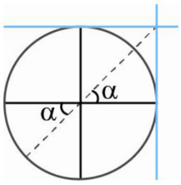
$\cos x = \cos\alpha$



$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi - \alpha \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\tan x = \tan\alpha$

$\text{cptx} = \cot\alpha$



$x = k\pi + \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$

نکات کمکی

سعی کنید در معادلات مثلثاتی، عبارت را جوری ساده کنید که به ضرب دو عبارت مساوی صفر و یا به برابری دو تابع مثلثاتی برسید و خب این مهارت با تمرین زیاد بدست می‌آید.

فرمول‌هایی که باید حفظ باشید

$\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱ \qquad \sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sin ۲\alpha$

$\cos ۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$

$\tan ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱ - \tan^۲\alpha}$

مثال: معادله $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید.

$\cos ۳x = \cos x$

$۳x = ۲k\pi + x \Rightarrow \cancel{۲}x = \cancel{۲}k\pi \Rightarrow x = k\pi$

$۳x = ۲k\pi - x \Rightarrow ۴x = ۲k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲}$

k	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π

جواب‌های معادله مثلثاتی $۴\sin x + -۲\sqrt{۳} = ۰$ را در بازه $[۰,۲\pi]$ بدست آورید. **(خرداد ۹۹)**

$۴\sin x = -۲\sqrt{۳} \Rightarrow \sin x = -\overset{\sin ۲۴۰}{\cancel{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}} \Rightarrow \sin x = \sin ۲۴۰$

$x = ۲k\pi + \frac{۴\pi}{۳}$

$x = (۲k + ۱)\pi - \frac{۴\pi}{۳}$

$x = \frac{۵\pi}{۳} \qquad x = \frac{۴\pi}{۳}$

معادله $\sin x\cos x=\frac{۱}{۴}$ **را حل کنید.** **(خرداد ۱۴۰۲)**

$$\sin x\cos x=\frac{۱}{۲}\sin ۲x\Rightarrow\cancel{\frac{۱}{۲}}\sin ۲x=\cancel{\frac{۱}{۴}}\,\frac{۱}{۲}\Rightarrow\sin ۲x=\overset{\sin\frac{\pi}{۶}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}}$$

$$۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}$$

$$۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}$$

معادله $\cos ۲x-\cos x+۱=۰$ **را حل کنید.** **(دی ۱۴۰۱)**

$$\cos ۲x=۲\cos^{۲}x-۱=۱-۲\sin^{۲}x$$

برای ساختن معادله ساده‌ای از این معادله پیچیده باید عدد «۱» رو از بین ببریم و درنتیجه از فرمولی برای $\cos ۲x$ استفاده می‌کنیم که در آن «۱-» دارد.

$$۲\cos^{۲}x-\cancel{۱}-\cos x-\cancel{۱}=۰$$

$$\cos x(۱۲\cos x-۱)=۰\Rightarrow\begin{cases}\cos x=\overset{\cos\frac{\pi}{۲}}{\cancel{۰}}\\ ۲\cos x-۱=۰\rightarrow\cos x=\overset{\cos\frac{\pi}{۲}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}}\end{cases}$$

تذکر: خطر: هیچ‌وقت در معادله‌ها **ساده نکنید** چون باعث حذف بعضی از جواب‌ها می‌شود.

حدهای نامتناهی:

حدهای نامتناهی از اسمشان معلوم است که حدهایی هستند که پایان و انتهای آن‌ها معلوم نیست و یا به زبان ریاضی "x" به چه عددی باید میل کند و یا نزدیک شود که مقدار "y" به∞ میل کند، که در حد کتاب دوازدهم $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}$ می‌شود.

تذکر: صفری که در مخرج کسری است که جواب حد آن بی‌نهایت است، صفر حدی است و خود صفر نیست چون اگر خود صفر باشد:

۱) کسر تعریف نشده است؛

۲) ما در حد هستیم و عددهایی که در حد هستند خود آن عدد نیستند؛ فقط اعدادی هستند که به شدن به آن عدد نزدیک می‌شوند و به خاطر نزدیک بودن آن خود آن عدد را می‌گیریم.

بگذارید با یک مثال روشن‌تون کنم:

$$\lim_{x\to ۲} ۲x = ۴$$

«۴» خود «۴» نیست، فقط عددی هست که خیلی به «۴» نزدیک می‌شود.

x خود «۲» نیست،یک عددی نزدیک به «۲» هست.

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲ - ۲x + ۳}{(x-۱)} \quad \begin{cases} \to ۱^+ : \frac{۲}{۰^+} = +\infty \\ \to ۱^- : \frac{۲}{۰^-} = -\infty \end{cases}$$

تذکر: باید حساب کنید که صفری که در مخرج هست، صفر مثبت است یا صفر منفی؛ چون در علامت ∞ تأثیر دارد. مثلاً:

$$\frac{\text{عددی} +}{۰^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عددی} +}{۰^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عددی} -}{۰^+} = -\infty$$

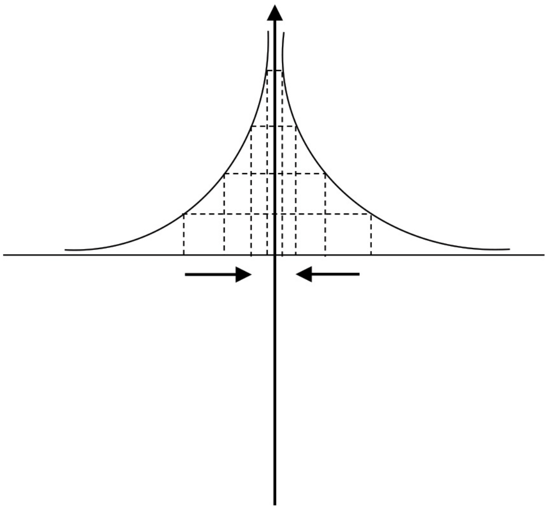
$$\frac{\text{عددی} -}{۰^-} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{۰} = \text{تعریف نشده}$$

مثال: حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x=۰}\frac{۱}{x^۲} \quad \begin{cases} \to ۰^- \to \frac{۱}{(۰^-)^۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \\ \to ۰^+ \to \frac{۱}{(۰^+)^۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \end{cases} \quad \to +\infty$$

هرچه x به سمت صفر میل می‌کند، y به سمت ∞ می‌رود.



$$f(x) = \frac{۱}{x^۲}$$

مجانب قائم: وقتی جواب حدی می‌شود ∞ (چه مثبت و چه منفی) می‌گوییم که آن تابع در آن نقطه مجانب قائم دارد.

$$\forall x \in R \quad s.t \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

درنتیجه: $f(x)$ در a دارای مجانب قائم است.
یا $x = a$ ← مجانب قائم.

مثال: حاصل حدهای زیر را بیابید.

(شهریور ۱۴۰۱)
$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{[x]-۲}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{[۲^-]-۲}{۲^- - ۲} = \lim_{x\to ۲^-} \frac{[۱]-۲}{۲^- - ۲} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

(شهریور ۱۴۰۲)
$$\lim_{x\to ۱^-} \frac{[x]-۱}{(x-۱)^۲} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{[۱^-]-۱}{(۱^- - ۱)^۲} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{[۰]-۱}{(۱^- - ۱)^۲} = \frac{-۱}{(۰^-)^۲} = \frac{-۱}{۰^+} = +\infty$$

(دی ۱۴۰۱)
$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{(۲-x)^۳} = +\infty \qquad a=? \qquad \frac{۲a-۳}{۰^-} = +\infty$$

از آنجا که ۰^- و جواب $+\infty$ پس صورت نیز باید عددی منفی باشد که بشود $\frac{\text{عددی } -}{۰^-} = +\infty$ پس داریم:

$$۲a - ۳ < ۰ \quad \to a < \frac{۳}{۲}$$

حد در بی‌نهایت:

مفاهیم: یعنی وقتی "x" میل می‌کند به سمت ∞، تابع $f(x)$ به سمت چه عددی نزدیک می‌شود و برای محاسبه این حد از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم که یعنی از هر عبارت، عبارتی را برمی‌داریم که بزرگترین توان یا درجه را داشته باشد. بعد از ساده‌سازی اگر به عدد رسیدیم، گوییم که تابع حد در بی‌نهایت دارد ولی اگر به ∞ رسیدیم گوییم تابع حد در بی‌نهایت ندارد.

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۲+x-۱}{x^۲+۳x+۴}\sim\frac{x^۳}{x^۲}=۱$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۴+۳x^۳+x^۲-x+۱}{۳x^۴+x^۳+x^۲+۵x-۸}\sim\frac{۲x^۴}{۳x^۴}=\frac{۲}{۳}$$

(شهریور ۱۴۰۲)
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۴+۳x-۱}{۲+x-x^۴}\sim\frac{x^۴}{-x^۴}=-۱$$

(شهریور ۱۴۰۱)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲+۲x+۱}{۴x-۱}\sim\frac{-x^۲}{۴x}=\frac{-x}{۴}=\frac{+\infty}{۴}=+\infty$$

مجانب افقی: هرگاه حد در بی‌نهایت تابعی موجود بود، گوییم که تابع دارای مجانب افقی است و مجانب افقی آن را همان عددی که به سمت آن ∞ در میل می‌کند، گوییم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۴}{x-۴}\sim\frac{x}{x}=۱$$

$y=۱$ ← مجانب افقی

مثال: اگر $y=۲$ مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{ax^۲+۱}{۲x^۲-۳x}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (شهریور ۱۴۰۱)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲+۱}{۲x^۲-۳x}=۲\quad\to\quad\frac{ax^۲}{۲x^۲}=۲\quad\to\quad\frac{a}{۲}=۲\quad\to\quad a=۴$$

هنگامی $y=۲$ مجانب افقی تابع است که حد تابع در بی‌نهایت وجود داشته باشد. پس حد تابع در بی‌نهایت را مساوی "۲" قرار می‌دهیم و از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم.

اگر $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^۲+x}{۲x^۲+۳}=۷$ باشد، مقدار m را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^۲+x}{۲x^۲+۳}=۷\quad\to\quad\frac{mx^۲}{۲x^۲}=۷\quad\to\quad\frac{m}{۲}=۷\quad\to\quad m=۱۴$$

وقتی حد تابع در بی‌نهایت وجود دارد، یعنی بزرگترین درجه بالا با بزرگترین درجه مخرج برابر است؛ پس $m\neq ۰$ و از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم و $m=۱۴$، بدست می‌آید.

فصل ۴: مشتق

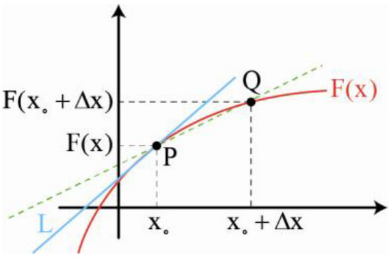
فرض کنید نمودار تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به صورت زیر باشد. نقطه P را با مختصات $P=(x_0,F(x_0))$ روی نمودار تابع F در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط L خطی است که بر نمودار تابع F مماس است. بدین معنی که خط L فقط در نقطه P تابع F را قطع می‌کند. حال چطور می‌توان به خط L معنا بخشید و آن را تعریف کرد.

به عبارت دیگر چطور می‌توان شیب این خط را تعریف کرد؟

برای این کار فرض کنید نقطه $Q(x_0+\Delta x,F(x_0+\Delta x))$ یک نقطه دیگر باشد که روی F قرار دارد. می‌دانیم که شیب خط PQ برابر است با: $M_{PQ}=\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}$

نکته آن است که با نزدیک شدن نقطه Q به نقطه P شیب خطوط PQ به شیب خط L نزدیک می‌شود. با این ملاحظه شیب خط متصور شده Lرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

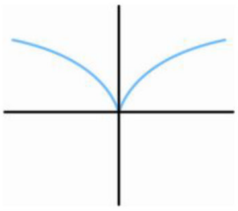
برای تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ شیب خط مماس بر تابع F در نقطه (x_0) را به صورت $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{F(x_0+\Delta x)-F(x_0)}{\Delta x}$



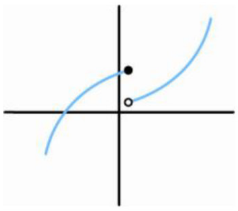
به زبون خودمونی: اگر از یک تابع مشتق بگیریم و داخل مشتق نمودار یک x جایگذاری کنیم عددی که مشتق به ما می‌دهد شیب خط مماس است که از نقطه x بر تابع مماس شده.

شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است ولی کافی نیست یعنی تابعی که مشتق پذیر است حتماْ پیوسته هم هست ولی تابعی که پیوسته است لزوماً مشتق‌پذیر نیست.

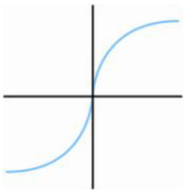
نقاط مشتق‌پذیر



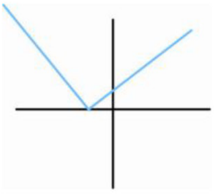
نقاط گوشه ای



ناپیوسته



مماس قائم



نقاط زاویه‌دار

$F(x)=x^n$ $\quad F'(x)=nx^{n-1}$ $\quad (n\in\mathbb{R})$

یک حالت عمومی‌تر حالتی است که میشه برای فرمول مشتق نوشت یعنی شما هر نوع تابعی که دارید که بتوان آن را به صورت توان‌دار نوشت به راحتی با فرمول بالا می‌توان مشتق آن را حساب کرد.

مثال:

$$\sqrt[۲]{x}=x^{\frac{۱}{۲}}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}\Rightarrow\frac{۱}{۲}\frac{۱}{\sqrt{x}}=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۱) $F(x)=x^n\to F'(x)=nx^{n-۱}$

۲) $F(x)=u^n\to F'(x)=n\times u'\times u^{n-۱}$ u یک تابع دلخواه

۳) $F(x)=v\times u\to F'(x)=v'\times u+v\times u'$

۴) $F(x)=\frac{u}{v}\to F'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^۲}$

که در آن v و u توابعی مجزا هستند.

۵) $(F\pm g)'=F'(x)\pm g'(x)$

۶) $(kF(x))'=kF'(x)\qquad k\in\mathbb{Z}$

۷) $y=\sqrt{x}\to y'=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$

۸) $F(x)=\sqrt[۳]{x}\to F'(x)=\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$

۹) $(\frac{۱}{F(x)})'=\frac{-F'(x)}{F^۲(x)}$

همه توابعی که در اینجا مشتق آنها را می‌نویسیم می‌توان با فرمول تعریف مشتق: $\lim\limits_{x\to x_۰}\frac{F(x)-F(x_۰)}{x-x_۰}$ یا $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ می‌توان آنها را ثابت کرد.

۱۰) $(Fog)'=g'(x)\times F'(g(x))$

۱۱) $F(x)=x^n\Rightarrow F'(x)=nx^{(n-۱)}\Rightarrow\underset{\substack{\downarrow\\ \text{مشتق مرتبه ۲}}}{F''(x)}=n(n-۱)x^{(n-۲)}$

۱۲) $F(x)=\sin x\to F'(x)=\cos x$

۱۳) $F(x)=\sin u\to F'(x)=u'\cos x$

۱۴) $F(x)=\cos x\to F'(x)=-\sin x$

۱۵) $F(x)=\tan x\to F'(x)=۱+\tan^۲ x$

۱۶) $F(x)=\tan u\to F'(x)=u'(۱+\tan^۲ u)$

۱۷) $F(x)=\cot x\to F'(x)=-(۱+\cot^۲ x)$

۱۸) $F(x)=\cot u\to F'(x)=-\sin xu'(۱+\cot^۲ u)$

مثال: اگر $F(x)=x^۲-۳x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $F'(۱)$ را حساب کنید. (شهریور ۱۳۹۹)

$$\lim_{x\to x_۰}\frac{F(x)-F(x_۰)}{x-x_۰}=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x-(-۲)}{x-۱}=\frac{۰}{۰}$$ مبهم

مشتق آنها صفر است ولی نقاط اکسترمم حساب نمی‌شود.

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}(x-۲)}{\cancel{(x-۱)}}=\boxed{-۱}\quad ✓$$

$$F'(x)=۲x-۳\overset{x=۱}{\Rightarrow}\boxed{F'(۱)=-۱}\quad ✓$$

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

(دی ۱۴۰۰)

$$F(x)\sin^۳(۵x)=۳\sin^۲(۵x)\times\cos(۵x)\times ۵=۱۰\sin^۲(۵x)\times\cos(۵x)$$

(دی ۱۴۰۰)

$$F(x)=۱(x^۲-۶)^۳(\frac{۱}{۴}x+۱)=۳(x^۲-۶)(۲x)(\frac{۱}{۴}x+۱)+(\frac{۱}{۴})(x^۲-۶)^۳$$

(شهریور ۱۴۰۱)

$$F(x)=\frac{۹x+۱}{x-x^۲}=\frac{(۹)(x-x^۲)-(۱-۲x)(۹x+۱)}{(x-x^۲)^۲}$$

مثال: مشتق‌پذیری تابع $F(x)=\begin{cases}x^۲+۱ & x\ge ۱\\ ۳x+۱ & x<۱\end{cases}$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

اول پیوستگی: $\begin{cases}۱^+\to ۲\\ ۱\to ۲\\ ۱^-\to ۲\end{cases}$ پیوسته است

از ضوابط مشتق می‌گیریم: $\begin{cases}۲x & x>۱\\ ۳ & x<۱\end{cases}$

تابع در $x=۱$ مشتق پذیر نیست. $F'_+(۱)\neq F'_-(۱)$

اگر $F(x)=\cos(۲x)$ باشد مقدار $F''(\frac{\pi}{۸})$ را بدست آورید.

$$F(x)=\cos(۲x)\to F'(x)=-\sin(۲x)\times ۲\to F''(x)=-۲\times\cos(۲x)\times ۲$$

$$F''(x)=-۴\cos(۲x)\to F''(\frac{\pi}{۸})=-۴\underbrace{\cancel{\cos(\frac{\pi}{۴})}}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}\Rightarrow\boxed{F''(\frac{\pi}{۸})=-۲\sqrt{۲}}$$

فصل ۵: کاربرد مشتق

مفاهیم

بحرانی: نقاطی هستند که یا مشتق‌پذیر نیستند و یا مشتق در آن نقاط صفر است.

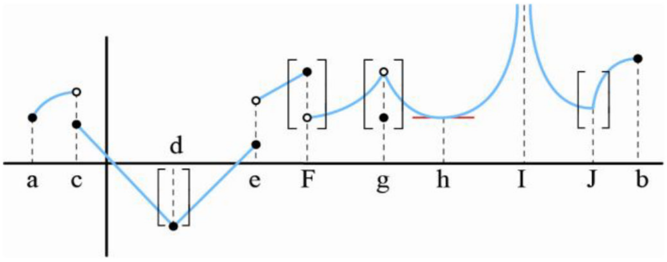
اکسترمم نسبی: نقاطی که مشتق در آن نقاط صفر و یا وجود ندارد و آن نقطه یا نسبت اطراف خود بالاتر یا پایین تر است. (نمودار F' باید تغییر علامت بدهد).

اکسترمم مطلق: نقاطی هستند که نسبت به تمام نقاط تابع یا بالاتر هستند یا پایین‌تر. (سروته باز، جز این نقاط قبول هستند).

تذکر: نقاط بحرانی باید حتماً عضو دامنه باشند مثلاً:

در $x = ۰$ بحرانی نیست در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست. $F(x) = \frac{۱}{x}$

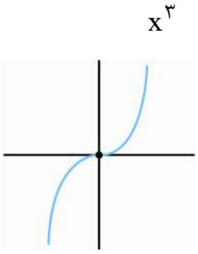
توجه: نقاط اکسترمم بحرانی هستند ولی نقاط بحرانی الزاماً اکسترمم نیستند یا به زبانی دیگر همه نقاطی که اکسترمم هستند حتماً بحرانی هستند ولی نقاطی که بحرانی هستند حتماً اکسترمم نیستند.



نقاط اکسترمم نسبی: d، h، J، F و g

بحرانی: a، c، d، e، F، g، h، J، b

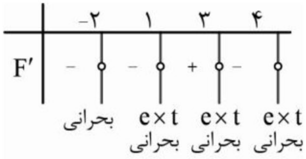
نقطه اکسترمم
- اکسترمم مطلق
  - Max مطلق ← بالاترین نقطه نمودار تابع
  - Min مطلق ← پایین‌ترین نقطه نمودار تابع
- اکسترمم نسبی
  - Max نسبی ← نقطه‌ای که نسبت به نقاط همسایگی آن نقطه بالاتر باشد
  - Min نسبی ← نقطه‌ای که نسبت به نقاط هممسایگی آن نقطه پایین‌تر باشد.



خطر: نقاطی هستند که مشتق آنها صفر است ولی اکسترمم نیستند مانند نمودار تابع $x^۳$ به صورت روبرو است که در $x = ۰$ مشتق آنها صفر است ولی نقطه‌اکسترمم حساب نمی‌شود.

نکته حرفه‌ای: بحرانی تمام ریشه‌های F' هستند ولی اکسترمم نسبی ریشه‌های غیرمکرر زوج F' هستند.

محانب قائم



$$F'(x)=(x-\overset{۳}{۳})(x-\overset{۴}{۴})(x+\overset{-۲}{۲})^{۲}(x-\overset{۱}{۱})$$

۱ و ۲- و ۴ و ۳ : نقاط بحرانی

۳ و ۴ و ۱ : نقاط ext نسبی

توجه: ما برای نقاط ext <u>نسبی</u> مقدار <u>"x"</u> را اعلام می‌کنیم ولی برای ext مطلق مقدار "y" را اعلام می‌کنیم.

اگر $F(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $F(a)=F(b)$ باشد، تابع F حتماً در این بازه هم Max مطلق و هم Min مطلق دارد.

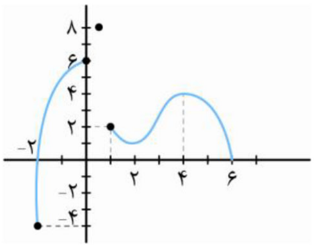
با توجه به نمودار داده شده، سوالات زیر را پاسخ دهید. **(خرداد ۱۴۰۱)**

Max مطلق ۸

Min مطلق ۴-

Max نسبی ۴

Min نسبی ۲



ضرایب a و b را در تابع $F(x)=x^{۳}+ax-b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(۱,۲)$ <u>اکسترمم نسبی</u> تابع باشد.

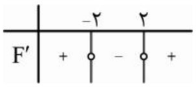
(شهریور ۱۴۰۱)

$$F(۱)=۲\Rightarrow ۱+\overset{-۳}{\cancel{a}}-b=۲\Rightarrow \boxed{b=-۴}$$

$$F'(۱)=۰\Rightarrow F'(x)=۳x^{۲}+a\Rightarrow ۳+a=۰\Rightarrow \boxed{a=-۳}$$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که $x^{۳}-۱۲x+۴$ در آن بازه نزولی اکید است؟ (۲ و ۲-)

$$F'(x)=۳x^{۲}-۱۲=\underset{(x-۲)(x+۲)}{\cancel{۳(x^{۲}-۴)}}$$



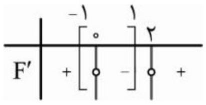
نکته: اگر تابع مشتق را تعیین علامت کنید، ۳ حالت پیش می‌آید:

$F'(x)=۰ \leftarrow$ تابع ثابت است $\Leftarrow$ شیب $=۰$ $\Leftarrow$ هم نقاط ext نسبی و مطلق هستند.

$F'(x)\geq ۰$ تابع صعودی است و اگر $F'(x)>۰$ باشد تابع صعودی اکید است.

$F'(x)\leq ۰$ تابع نزولی است و اگر $F'(x)<۰$ باشد تابع نزولی اکید است.

Ext های مطلق تابع $F(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را در بازه $[-۱,۱]$ تعیین کنید. **(خرداد ۱۴۰۰)**



$$F'(x)=۳x^{۲}-۶x=۳\underset{۰}{x}(\underset{۲}{x-۲})$$

$$\left.\begin{aligned}F(-۱)&=-۱-۳+۱=-۳\\F(۰)&=+۱\\F(۱)&=۱-۳+۱=-۱\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\text{Min مطلق}=-۳\\&\text{Max مطلق}=۱\end{aligned}$$

بهینه‌سازی

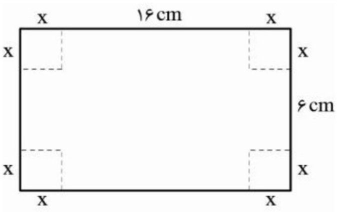
تابع فرض ← تابعی هست که از اطلاعات سوال می‌توان آن را نوشت. (رابطه بین دو متغیر رو دربیار)

تابع هدف ← تابعی هست که که سوال از ما آن را سوال می‌کند. (یک متغیرش کنید)

وقتی که تابع هدف تک متغیره شد از آن مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم.

مثال: ورق فلزی مستطیل شکلی به طول ۱۶cm و عرض ۶cm در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های به ضلع x برش دهیم و آنها را کنار گذاریم. سپس لبه‌ی جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن شود. (شهریور ۱۴۰۰)

۱) $x \in (۰,۱)$



$$\left.\begin{matrix}\text{طول}:۱۶-۲x\\ \text{عرض}:۶-۲x\\ \text{ارتفاع}:x\end{matrix}\right\} v=(۱۶-۲x)(x)(۶-۲x)=۴x^۳-۴۴x^۲+۹۶x$$

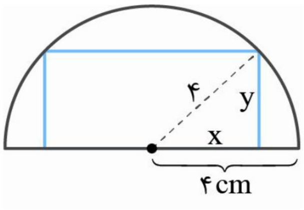
$$v'=\frac{۱۲x^۲-۸۸x+۹۶=۰}{۴}\Rightarrow ۳x^۲-۲۲x+۲۴=۰$$

$x_۱=۶\notin(۰,۳)$ ✗

$x_۲=\frac{۴}{۳}$ ✓

۱) اگر x خارج این محدوده باشد عرض مکعب صفر می‌شود و مکعب نمی‌تواند طول صفر داشته باشد

یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴cm باشد، طول و عرض مستطیل را طوری بدست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.



$\text{طول}=۲x$

$\text{عرض}=y=\sqrt{۱۶-x^۲}$

$$x^۲+y^۲=۱۶\Rightarrow y=\sqrt{۱۶-x^۲}$$

$x\in(۰,۴)$

$$S_{(x)}=۲x\sqrt{۱۶-x^۲}\Rightarrow\sqrt{۶۴x^۲-۴x^۴}$$

$$S'_{(x)}=۴\frac{۱۲۸x-۱۶x^۳}{۲\sqrt{۶۴x^۲-۴x^۴}}=۰\Rightarrow$$

$$۱۲۸x-۱۶x^۳=۰$$
$$۱۶x(۸-x^۲)=۰$$
$$(۲\sqrt{۲}-x)(۲\sqrt{۲}+x)$$

$x_۱=۰$ ✗

$x^۲=۲\sqrt{۲}$ ✓

$x_۳=-۲\sqrt{۲}$ ✗

$\text{طول}=۴\sqrt{۲}$

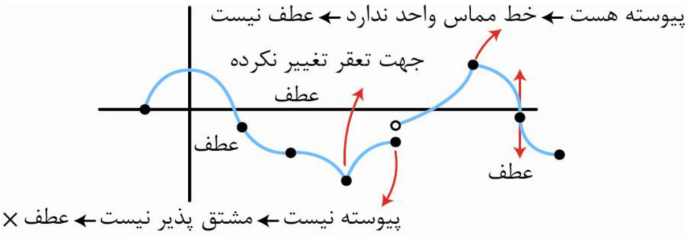
$\text{عرض}=۲\sqrt{۲}$

نقطه عطف و جهت تقعر

نقطه عطف ← نقطه‌ای از تابع است که جهت تقعر در آن نقطه عوض می‌شود.

تقعر ← جهت گودی تابع رو تقعرمی‌گویند،مثلا« $\underset{x^۲}{[\cup]}$ » تقعر رو به بالا « $\underset{-x^۲}{[\cap]}$ »تقعر رو به پایین است.

$F''(x)<۰$ ↙   ↘ $F''(x)>۰$



توجه: در نقطه عطف تابع باید پیوسته و خط مماس واحد داشته باشد، در غیر این صورت گوییم

از نکته بالا نتیجه می‌گیریم که همه نقاط عطف وجود دارند به شرطی که یا $F''(x)=۰$ یا موجود نباشد ولی هر جایی که $F''(x)=۰$ بود و یا موجود نبود لزوماً نقطه عطف نیست.

جهت تقعر و نقطه عطف نمودار تابع $F''(x)=-x^۳+۳x^۲+۱$ را بدست آورید. **(دی ۱۳۹۷)**

$$F'(x)=-۳x^۲+۶x\to F''(x)=-۶x+۶\xrightarrow{F''(x)=۰}-۶x+۶=۰\Rightarrow\boxed{x=۱}$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y'	+	○	−
y	∪		∩

نقطه عطف

نقطه عطف $\boxed{x=۱}$

اگر نقطه $A(-۱,۱)$ نقطه‌ی عطف منحنی $F(x)=x^۳+ax^۲+bx-۱$ باشد، مقادیر b و a را بدست آورید.

$$F'(x)=۳x^۲+۲ax+b\to F'(x)=۶x+۲a\xrightarrow[\text{چون نقطه عطف هست}]{F''(-۱)=۰}-۶+۲a=۰\Rightarrow\boxed{a=۳}$$

$$F(-۱)=۱$$

$$=-\cancel{۱}+\overset{۳}{\cancel{a}}-b-\cancel{۱}\Rightarrow\boxed{b=۰}$$

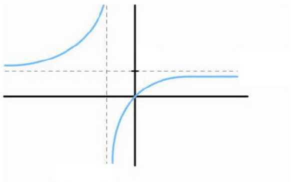
رسم نمودار تابع

برای توابع هموگرافیک اول مجانب‌های قائم و مجانب‌های افقی آن را بدست‌می‌آوریم وآنها را روی صفحه مختصات رسم می‌کنیم بعد از تابع یک بار مشتق می‌گیریم و تعیین علامت می‌کنیم تا وضعیت یکنوایی تابع مشخص ش بعد تابع را رسم می‌کنیم. (نمره دارد)

جدول رفتار و نمودار تابع $x=۱$ را رسم کنید. (دی ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to-۲}\frac{x-۲}{x+۲}=\frac{-۴}{۰}=\infty \quad \begin{cases}۲^+\to-\infty\\ -۲^-\to+\infty\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-۲}{x+۲}=۱\to \text{مجانب افقی}$$



مجانب قائم $\boxed{x=-۲}$

همیشه صعودی هست $y'=\dfrac{۴}{(x+۲)^۲}>۰$

x		-۲	
y'	+		+
y	↗	$+\infty$ $-\infty$	↗

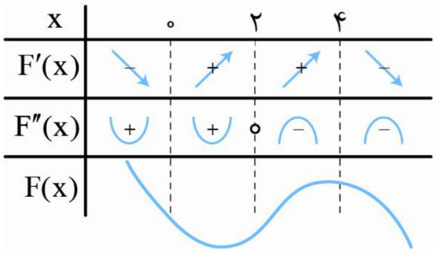
برای توابع درجه ۳

از تابع ۲ بار مشتق می‌گیریم و جهت تقعر تابع را مشخص می‌کنیم و با تعیین علامت $F'(x)$ رفتار یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم و با توجه به علامت $x^{۳}$ نمودار را رسم می‌کنیم.

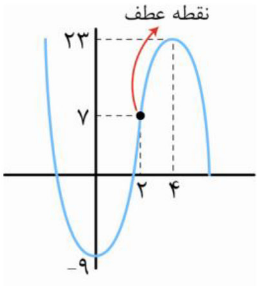
جدول رفتار و نمودار تابع $F(x)=-x^{۳}+۶x^{۲}-۹$ را رسم کنید. **(شهریور ۱۴۰۰)**

$$F'(x)=-۳x^{۲}+۱۲x=-\overset{۰}{۳x}(x-\overset{۴}{۴})$$

$$F''(x)=-۶x+۱۲=-۶\underset{۲}{(x-۲)}$$



x		۰		۲		۴	
F'(x)	↘ −		↗ +		↗ +		↘ −
F''(x)	∪ +		∪ +	۰	∩ −		∩ −
F(x)							

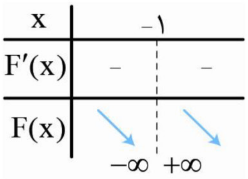


جدول رفتار و نمودار تابع $F(x)=\frac{-x}{x+1}$ را رسم کنید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x+1}=-۱\Rightarrow \boxed{y=-۱}$$ مجانب افقی

$$\lim_{x\to-۱}\frac{-x}{x+1}=\infty\Rightarrow \boxed{x=-۱}$$ مجانب قائم

$$F'(x)=\frac{-۱}{(x+۱)^{۲}}<۰$$ ← همیشه نزولی اکید



x		-۱	
F'(x)	−		−
F(x)	↘ -∞		↘ +∞