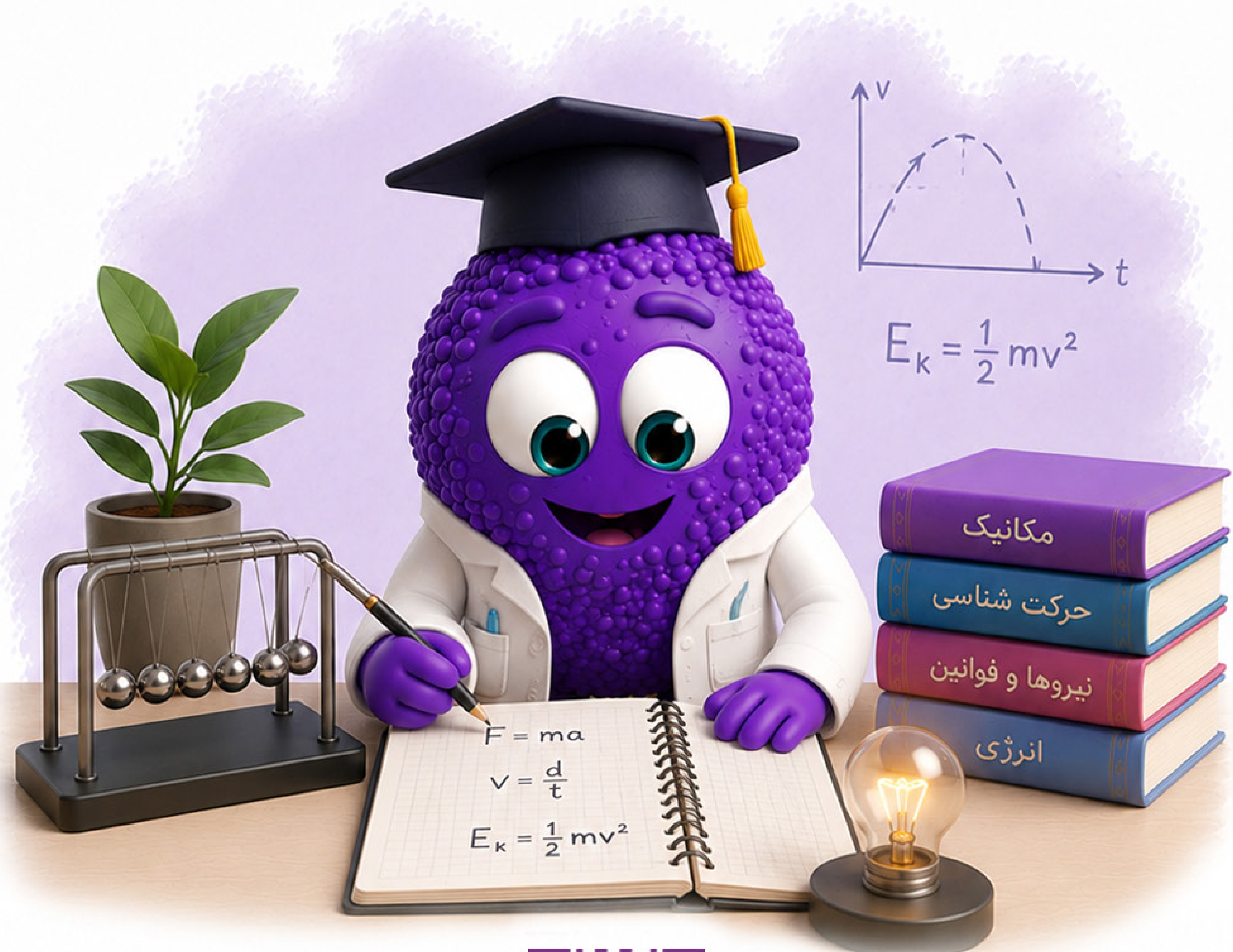
گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

درس

آمار و احتمال یازدهم ـ فصل ۲

نوتروبیست



نوتروفیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۴

تک رقمی نوتروفیل

- رتبه ۸ — ایمان نیک‌نام جهرمی

دو رقمی های نوتروفیل

- رتبه ۱۴ — امیرمحمدکیانی
- رتبه ۱۶ — آریا قهرمانی
- رتبه ۲۰ — سینا راضی
- رتبه ۳۲ — امیرمحمد رضائی
- رتبه ۵۵ — مهسا سیاوشی
- رتبه ۵۹ — ایمان انفرادی
- رتبه ۶۱ — بهار هلالی
- رتبه ۷۵ — محمدصالح عارفی
- رتبه ۸۰ — محمدمهدی شریفی

سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل

- رتبه ۱۴۷ — محدثه حیدری
- رتبه ۱۶۰ — اشکان کوثری
- رتبه ۱۶۹ — هانیه خواجه
- رتبه ۲۲۲ — امیرمحمد شکوهی
- رتبه ۲۵۹ — ابوالفضل ناصریان
- رتبه ۲۷۱ — فاطمه سادات موسوی
- رتبه ۳۰۸ — سید علی اکرمی
- رتبه ۳۴۱ — حمیدرضا بشیری
- رتبه ۴۳۲ — سید محمدصادق حسینی
- رتبه ۴۷۳ — زهرا بابائی
- رتبه ۵۱۴ — محمدپارسا عبداله آبادی
- رتبه ۵۳۲ — فاطمه شاهسوند
- رتبه ۵۳۷ — ریحانه حیدری
- رتبه ۵۳۹ — نجمه کیخا
- رتبه ۵۴۶ — حسین تفضلی نژاد
- رتبه ۵۵۷ — محمدصالح زارعی
- رتبه ۵۷۰ — زهرا ولی نژاد
- رتبه ۶۰۶ — سجاد محمودی زاده
- رتبه ۶۶۱ — فاطمه اصغری
- رتبه ۶۶۷ — سیاوش مصطفایی
- رتبه ۶۷۲ — محمدماهان عنبرستانی
- رتبه ۶۹۱ — بهار ضرغامی
- رتبه ۷۱۴ — محمد یزدیان
- رتبه ۷۸۱ — احسان قنبری
- رتبه ۷۸۶ — نیما غفاری
- رتبه ۸۰۳ — مائده رنجبر
- رتبه ۸۰۴ — آرمین رضایی
- رتبه ۸۹۳ — فاطمه مشاوری نجف آبادی
- رتبه ۹۰۹ — کیمیا فدائی
- رتبه ۹۴۷ — صفورا بقائی
- رتبه ۱۰۵۲ — پویان فریور افشار
- رتبه ۱۰۵۸ — الینا جلالی فر
- رتبه ۱۱۲۲ — علی طاهر زاده
- رتبه ۱۱۲۷ — زهرا بابائی
- رتبه ۱۲۳۴ — مطهره توحیدی
- رتبه ۱۲۳۶ — مبینا ایزدی
- رتبه ۱۲۸۴ — بهار امیری
- رتبه ۱۲۸۴ — فاطمه معین زاده
- رتبه ۱۳۵۰ — علی زینلی
- رتبه ۱۳۷۲ — پارسا رضایی
- رتبه ۱۴۲۴ — سید امیرحسین حسینی
- رتبه ۱۴۸۳ — سینا خاوری خراسانی
- رتبه ۱۴۹۳ — محمد مهدی خرم زاده
- رتبه ۱۵۰۳ — فاطمه رحیم زاده
- رتبه ۱۵۳۴ — فاطیما عبیری
- رتبه ۱۶۲۸ — امیرمحمد فکور حقیقی
- رتبه ۱۶۳۹ — ابوالفضل نیرومند
- رتبه ۱۶۷۸ — سجاد ینکی
- رتبه ۱۶۹۶ — ندا ملکشاهی
- رتبه ۱۷۳۱ — محمدرضا محسنی
- رتبه ۱۷۵۴ — هلیا حاجیلوئی
- رتبه ۱۹۶۶ — مهسا رضایی مقدم
- رتبه ۲۰۱۵ — علی شیرزاد
- رتبه ۲۵۵۹ — سارا حمزه
- رتبه ۲۶۲۵ — زهره مجمعی
- رتبه ۲۷۱۱ — محمد غلامی
- رتبه ۲۷۵۱ — فهیمه سیدآبادی
- رتبه ۲۷۸۱ — سعید شبانی
- رتبه ۲۷۹۴ — مریم بادلی
- رتبه ۲۸۱۰ — هدیه رحیمی
- رتبه ۲۸۸۱ — پارسا جمال امیدی
- رتبه ۳۱۳۳ — صبا شایع ثانی
- رتبه ۳۲۴۴ — هلیا سجادی
- رتبه ۳۳۴۳ — سینا ارزمانی

فصل دوم: احتمال

☑ **علـم آمـار:** آن‌گاه کـه بـا جامعـه‌ای ناشـناخته سـروکار داریـم، شـناختن جامعـه بـا اسـتفاده از نمونه‌هـا و داده‌هـا، یـک کار آمـاری اسـت

☑ **علــم احتمــال:** اگـر جامعـه را بـا جزئیـات موردنیـاز بشـناسیم و بخواهیـم بدانیـم نمونه‌هـایی از آن جامعـه چگونـه خواهنـد بـود، علـم احتمـال بـه کمکمـان می‌آیـد

جمع‌بندی: احتمال: جامعه معلوم، نمونه نامعلوم   آمار: نمونه معلومه، جامعه نامعلوم ☺

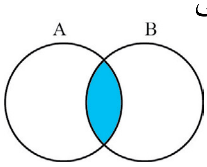
☑ **فضـای نمونـه:** مجموعـه تمـام حالت‌هـای ممکـن بـرای یـک آزمایـش تصـادفی را بـا فضـای نمونـه نمایش می‌دهیـم و آن را S می‌نامیـم فضـای نمونـه مجموعـه‌ای اسـت کـه اعضـای آن «برآمدهـا» مشـخص می‌کننـد کـه نتیجـه آزمایـش یـا مشـاهده‌ای کـه درحـال بـررسی آن هسـتیم چـه حالت‌هـایی دارد. درصورتی‌کـه آزمایـشی متشـکل از دو آزمایـش بـا فضاهـای نمونـه‌ای s_1 و s_2 باشـد، فضـای نمونـه آن $s_1 \times s_2$ اسـت. مشـابه ایـن موضـوع بـرای هـر تعـداد آزمایـش هم‌زمـان نیـز درسـت اسـت

☑ **برآمد:** به هر عضو از فضای نمونه یک «برآمد» می‌گویند.

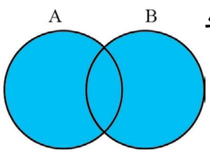
☑ **پیشـامد:** هـر زیرمجموعـه از فضـای نمونـه‌ای را یـک پیشـامد می‌گوینـد. تعـداد پیشـامدهای یـک فضـای نمونـه‌ای n ضـوی برابـر 2^n اسـت

اعمال روی پیشامدها:

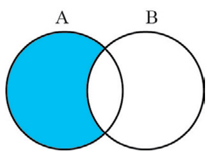
۱ـ پیشامد $A \cap B$: اشتراک دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که هردو با هم اتفاق بیفتند.



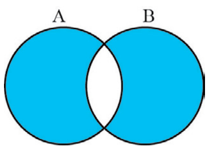
۲ـ پیشامد $A \cup B$: اجتماع دو پیشامد زمانی رخ می‌دهد که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد.



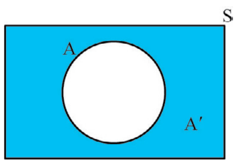
۳ـ پیشامد $A - B$: A رخ دهد ولی B رخ ندهد. یعنی فقط A رخ دهد.



۴ـ پیشامد $A \Delta B$ (تفاضل متقارن): یعنی فقط یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد. یعنی یا A رخ دهد یا B رخ دهد و هردو با هم ندهند.



۵ـ پیشامد A': یعنی A رخ ندهد.



۶ـ اگر A_1 زیرمجموعه‌ی A_2 باشد، رخ دادن A_1، رخ دادن A_2 را نتیجه می‌دهد

۷ـ اگر $A \subseteq S$ و $A \neq \phi$ آن‌گاه، A را پیشامد ممکن می‌نامند. و اگر $A = S$، A را پیشامد قطعی «حتمی» می‌نامند و اگر $A = \phi$، A را پیشامد ناممکن می‌نامند.

مثال: دو تاس سالم را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه:

ب) پیشامد A = عدد روی یک تاس، مرجع عدد ظاهرشده روی تاس دوم باشد.

پ) پیشامد B = دقیقاً یکی از تاس‌ها عدد ۴ بیاید.

ت) $A \cap B$

ث) $A - B$

راه‌حل: الف) فضای نمونه که ۶×۶ دارای ۳۶ حالت است.

ب) برای پیشامد A زوج مرتب‌هایی را انتخاب می‌کنیم که یکی از مؤلفه‌ها توان دوم مؤلفه دیگر باشد.

$A = \{(۱,۱),(۲,۴),(۴,۲)\}$

پ) برای پیشامد B زوج مرتب‌های خواسته‌شده را انتخاب می‌کنیم:

$$B = \begin{Bmatrix} (۱,۴),(۲,۴),(۳,۴),(۵,۴),(۶,۴) \\ (۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۵),(۴,۶) \end{Bmatrix}$$

ت) $A \cap B = \{(۲,۴),(۴,۲)\}$

ث) $A - B = \{(۱,۱)\}$

☑ اصول احتمال:

برای هر پیشامد مثل A، احتمال رخ دادن آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم که عددی حقیقی در بازه‌ی $[۰,۱]$ است.

اصول احتمال عبارت‌اند از:

۱ـ $P(s) = ۱$

۲ـ برای دو پیشامد A و B که $A \cap B = \phi$، داریم: $P(A \cup B) = (PA) + P(B)$

به خاصیت $A \cap B = \phi$، ناسازگاری گفته می‌شود و بدین معناست که رخ دادن هردوی آن‌ها هم‌زمان محال است.

☑ **چند نکته در رابطه با اصول و قضیه‌های احتمال:** «بهتر است اثبات هر قضیه را که با اصول بالا ثابت شده‌اند را به‌خاطر بسپارید.»

۱ـ $P(A') = ۱ - P(A) \xleftarrow{\text{اثبات}} \left.\begin{matrix} A \cup A' = S \\ A \cap A' = \phi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underbrace{(A \cup A')}_{P(S)=۱} = P(A) + P(A')$

۲ـ $P(\phi) = ۰ \xleftarrow{\text{اثبات}} P(S') = ۱ - P(S) \xleftarrow[\text{به قضیه اول}]{\text{با توجه}} \phi' = S \Rightarrow \phi = S' \rightarrow p(\phi) = P(S')$

$\rightarrow P(\phi) = ۰$

۳ـ اگر C,B,A پیشامدهایی دوبه‌دو ناسازگار باشند آن‌گاه: $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$\xrightarrow{\text{اثبات}} (A \cup B) \cap C \Rightarrow (A \cap C) \cup (B \cap C) = \phi \cup \phi = \phi$

$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) \xrightarrow{P(A \cup B) = P(A) + P(B)} P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

۴ـ برای هردو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$$\longrightarrow (A-B)\cup(A\cap B)=A \quad , \quad (A-B)\cap(A\cap B)=\phi$$

$$\Rightarrow P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)\rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

۵ـ برای هردو پیشامد دلخواه A و B داریم: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=P(A\cap B)$

اثبات: اثبات این قضیه در صفحه ۴۶ کتاب به‌طور مفصل توضیح داده شده است. لطفاً حتماً مطالعه کنید. ☐

سوال: فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید:

الف) اگر $A\subseteq B$ داریم: $P(A-B)=P(A)-P(B)$

ب) اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $P(B)\le P(A)$

راه‌حل:

الف) $P(A-B)=P(A)-P(\underbrace{A\cap B}_{B})\Rightarrow P(A)-P(B)$

ب) $\xrightarrow[\text{داریم}]{\text{طبق قسمت الف}} P(A-B)\Rightarrow P(A)-P(B)\ge ۰\Rightarrow P(A)\ge P(B)$

☑ **احتمال هم‌شانس:** برای محاسبه احتمال در فضاهای هم‌شانس، کافیست تعداد اعضای فضای نمونه $n(S)$ و تعداد اعضای پیشامد $n(A)$ را بیابیم. پس احتمال وقوع پیشامد A که با نماد $P(A)$ نمایش می‌دهیم برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

یکی از سؤالات مهم احتمال هم‌شانس به مسئله کیسه و مهره است. در مثال زیر که یک مثال الگو است به حالت‌های مهم آن می‌پردازیم.

مثال: کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سفید، ۶ مهره سیاه و ۴ مهره قرمز است. از این کیسه ۳ مهره با هم به تصادف برمیداریم. مطلوب است:

الف) احتمال این‌که هرسه سفید باشند.

ب) احتمال این‌که دقیقاً ۲تا سفید باشند.

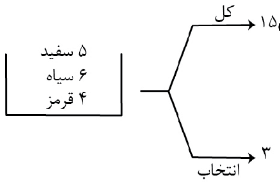
پ) احتمال این‌که هرسه مهره هم‌رنگ باشند.

ت) احتمال این‌که هیچ دومهره‌ای هم‌رنگ نباشند.

ث) حداقل ۱ مهره سفید باشد.

ج) حداکثر ۲ مهره سفید باشند.

راه‌حل:



الف) $n(S)=\binom{۱۵}{۳}=\frac{۱۵\times ۱۴\times ۱۳}{۳\times ۲\times ۱}=۴۵۵$

$n(A)=\binom{۵}{۳}=۱۰ \rightarrow P(A)=\frac{۱۰}{۴۵۵}$

ب) یعنی دوتا سفید و یک غیرسفید! $n(B)=\binom{۵}{۲}\times\binom{۱۰}{۱}=۱۰۰\rightarrow P(B)=\frac{۱۰۰}{۴۵۵}$

پ) یعنی یا هرسه سفید یا هرسه سیاه یا هرسه قرمز!

$$n(C)=\binom{5}{3}+\binom{6}{3}+\binom{4}{3}=10+20+4=34$$

$$P(C)=\frac{34}{455}$$

ت) یعنی از سه رنگ متفاوت باشند.

$$n(D)=\binom{5}{1}\times\binom{6}{1}\times\binom{4}{1}=120\rightarrow P(D)=\frac{120}{455}$$

ث) یعنی ۱ یا ۲ یا ۳ مهره سفید باشند، حالتی را درنظر می‌گیریم که اصلاً مهره‌ای سفید نباشد، پس هرسه مهره غیرسفید هستند. که داریم:

$$\binom{10}{3}=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120\Rightarrow n(E)=455-120=335$$

$$P(E)=\frac{355}{455}$$

ج) یعنی صفر یا ۱ یا ۲ مهره سفید باشند. حالتی را درنظر می‌گیریم که ۳ مهره سفید باشند!

$$\binom{5}{3}=10\quad n(F)=455-10$$

$$\rightarrow P(F)=\frac{445}{455}$$

تذکر: همان‌طورکه (ب و پ) ملاحظه کردید، هرگاه کلمه «و» دیدیم باید ضرب کنیم و هرگاه کلمه «یا» دیدیم باید جمع کنیم. هم‌چنین در (ث و ج) از متمم استفاده کردیم.

☑ **احتمال غیرهم‌شانس:** هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{S_1,S_2,\dots,S_n\}$ احتمال نابرابری داشته باشد، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم. نکته مهم برای حل این‌گونه سؤالات آن است که یکی از احتمال‌ها را x فرض کرده و احتمال بقیه اعضا را برحسب x بازنویسی می‌کنیم. سپس مجموع همه‌ی احتمال‌ها را برابر یک قرار داده تا مقدار x به‌دست آید.

مثال: در یک آزمایش $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(P\{x,y\})=\frac{2}{3}$ و $P(\{x,z\})=\frac{1}{2}$ باشد، احتمال وقوع هریک از پیشامدها را به‌دست آورید.

راه‌حل: اول آن‌که می‌دانیم $P(x)+P(y)+P(z)=1$. هم‌چنین با توجه به فرض $P(\{x,y\})=\frac{2}{3}$، پس $P(x)+P(y)=\frac{2}{3}$ و در نتیجه $P(z)=\frac{1}{3}$ است. و با توجه به فرض دوم یعنی $P(\{x,z\})=\frac{1}{2}$ داریم $P(x)+P(z)=\frac{1}{2}$ که یعنی $P(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ در نتیجه $P(x)=\frac{1}{6}$. و با توجه به $P(x)+P(y)+P(z)=1$، $P(y)$ هم برابر $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

مثال: سه دونده به نام‌های A و B و C در یک مسابقه شرکت کرده‌اند. شانس برنده شدن A و B با هم برابر است و شانس بردن C دو برابر هریک از آن‌هاست. مطلوب است:

الف) احتمال آن‌که C برنده شود.

ب) احتمال آن‌که C یا A برنده بشوند.

راه‌حل:

الف) $P(A)=P(B)\quad,\quad P(C)=2P(A)$

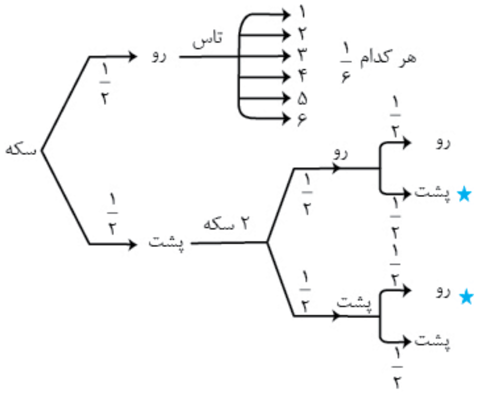
اگر P(A) را x درنظر بگیریم؛ با توجه به این‌که $P(A)+P(B)+P(C)=1$ است داریم:

$$x+x+2x=1\;\rightarrow\; x=\frac{1}{4}\;\rightarrow\; P(A),P(B)=\frac{1}{4},P(B)=\frac{1}{2}$$

همان‌طورکه در تذکر صفحه قبل گفتیم: کلمه «یا» یعنی جمع:

ب) $P(A)+P(C)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

مثال: سکه سالمی را پرتاب می‌کنیم. اگر پشت بیاید ۲بار دیگر سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر رو بیاید، تاس سالمی را می‌ریزیم. مطلوب است آن‌که:



الف) احتمال تاس زوج بیاید.

ب) سکه فقط ۲بار پشت بیاید.

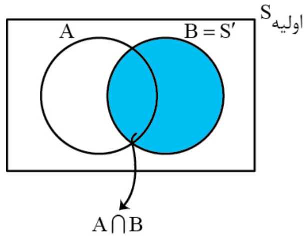
راه‌حل: الف) $P(\text{تاس زوج}) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۴}$

برای قسمت (ب) در شاخه‌هایی که ✻ زدیم، احتمال‌ها را درهم ضرب می‌کنیم و در پایان با هم جمع می‌کنیم.

$$P(\text{سکه فقط ۲بار پشت بیاید}) = (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}) = \frac{۱}{۴}$$

☑ **احتمال شرطی:** احتمال وقوع پیشامد A به شرط آن‌که بدانیم پیشامد B به وقوع پیوسته است را احتمال A به شرط B نامیده و با نماد $P(A|B)$ نشان می‌دهیم.

تذکر: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و B پیشامدی باشد که مطمئن هستیم رخ داده است (B را شرط می‌نامیم) فضای نمونه‌ها دیگر کل S نخواهد بود بلکه فضای نمونه برابر با B است که آن را فضای نمونه کاهش یافته نامیده و با شرطی S یا S' نشان می‌دهند. در ادامه باید احتمال وقوع پیشامد A را در S' بررسی می‌کنیم. (به شکل مقابل توجه کنید)



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

اگر تساوی فوق را طرفین وسطین کنیم، آن‌گاه $P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B)$

این فرمول را قاعده ضرب احتمال‌ها می‌گوییم.

مثال: در یک خانواده سه فرزندی می‌دانیم فرزند اول پسر است. مطلوب است احتمال آن‌که این خانواده فقط همین یک پسر را داشته باشد؟

راه‌حل: فرزند اول پسر $= S' = S_{\text{شرطی}} = B$

$\Rightarrow \{PPP, PPd, PdP, Pdd\}$

$$S_{\text{اولیه}} = \begin{Bmatrix} PPP, PPd, PdP, dPP \\ ddd, ddP, dPd, Pdd \end{Bmatrix}$$

$$\to A = \{Pdd\} \Rightarrow P(A) = \frac{۱}{۴}$$

مثال: اگر $P(A) = \frac{۱}{۴}$ و $P(A' \cap B) = \frac{۱}{۳}$. مطلوب است $P(B|A')$.

راه‌حل:

$$P(B|A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(A' \cap B)}{۱ - P(A)} = \frac{\frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۱}{۴}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۳}{۴}} = \frac{۴}{۹}$$

مثال: اگر $P(A \cup B) = ۰/۶$، $P(A) = ۰/۲$ و $P(B|A) = ۰/۱$، مطلوب است $P(B)$؟

راه‌حل:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \frac{۱}{۱۰} = \frac{P(A \cap B)}{۲} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{۲}{۱۰۰} = ۰/۰۲$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow ۰/۶ = ۰/۲ + P(B) - ۰/۰۲ \Rightarrow P(B) = ۰/۴۲$$

تذکر: قاعده ضرب احتمال‌ها برای سه پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$:

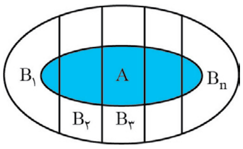
$$P(A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳) = P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|(A_۱ \cap A_۲))$$

مثال: جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که ۳تای آن‌ها سوخته‌اند. به تصادف ۳ لامپ را متوالی و بدون جایگذاری از جعبه برمی‌داریم. احتمال این‌که هر ۳ لامپ سوخته باشد، چقدر است؟

راه‌حل: $P(\text{هرسه لامپ سوخته باشد}) = \frac{۳}{۱۲} \times \frac{۲}{۱۱} \times \frac{۱}{۱۰}$

☑ **قانون احتمال کل:** اگر S فضای نمونه و پیشامدهای $B_۱, B_۲, \dots, B_n$ یک افراز برای S باشند و A پیشامد تصادفی دلخواه در S باشد آن‌گاه داریم:

$$P(A) = P(A \cap B_۱) + P(A \cap B_۲) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

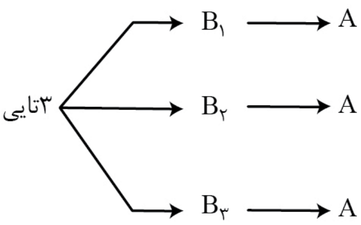


و طبق قانون ضرب احتمال‌ها:

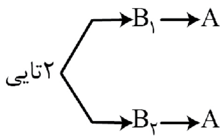
$$P(B_۱) \times P(A | B_۱) + P(B_۲) \times P(A | B_۲) + \cdots + P(B_n) \times P(A | B_n)$$

فرمول بالا؛ به فرمول احتمال کل معروف است.

تذکر: معمولاً افرازهای ۲تایی و ۳تایی در احتمال کل مطرح می‌شود که با استفاده از نمودار درختی قابلیت حل آسان‌تری دارند.



یا



مثال: دو ظرف مشابه داریم. در ظرف اول ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و در ظرف دوم ۷ مهره سفید و ۲ مهره سیاه وجود دارد. از ظرف اول ۳ مهره و از ظرف دوم ۲ مهره برداشته در ظرف جدیدی می‌ریزیم. سپس از ظرف جدید مهره‌ای برمی‌داریم. احتمال این‌که مهره سفید باشد چقدر است؟

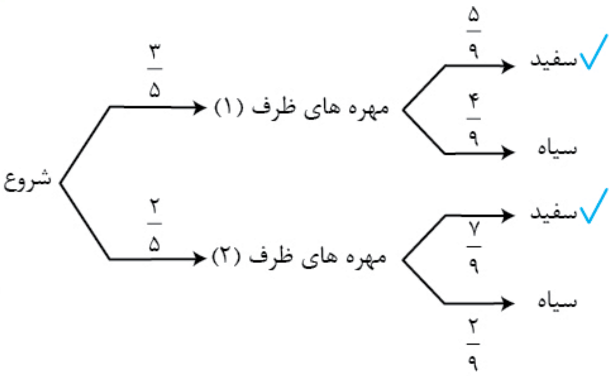
راه‌حل:

۳ مهره از ظرف (۱)
۲ مهره از ظرف (۲)

ظرف جدید $\Rightarrow$ کل $=$ ۵

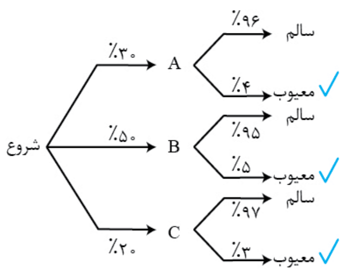
ظرف (2): ۷ سفید، ۲ سیاه

ظرف (1): ۵ سفید، ۴ سیاه



$$P(\text{سفید}) = \frac{۳}{۵} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۷}{۹} \Rightarrow \frac{۲۹}{۴۵}$$

مثال: اگر محصولات یک کارخانه توسط سه دستگاه C, B, A با میزان ۳۰٪، ۵۰٪ و ۲۰٪ تولید شود و بدانیم به‌ترتیب ۴٪ و ۵٪ و ۳٪ تولیدات این دستگاه‌ها معیوب هستند، احتمال آن‌را بیابید که در انتخاب یک محصول از این کارخانه، آن محصول معیوب باشد؟



راه‌حل: $P(\text{معیوب}) = \frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۴}{۱۰۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۲۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰} = \frac{۴۳}{۱۰۰۰}$

☑ فرض کنید B پیشامدی باشد که $۰ < P(B) < ۱$، در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم:

$$P(A) = P(B)P(A | B) + P(B')P(A | B')$$

مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دورو قرمز و ۸ کارت یک‌رو قرمز یک‌رو سبز، یک‌رو قرمز وجود دارد. کارتی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و یک‌روی آن را می‌بینیم. احتمال این‌که آن رو قرمز باشد چقدر است؟

! راه‌حل: این‌که رنگ قرمز دیده شود را پیشامد A و این‌که دوروی کارت انتخابی قرمز باشد را B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(A)=P(B)P(A\mid B)+P(B')P(A\mid B')$$

واضح است که $P(A\mid B)=۱$ و $P(A\mid B')$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است. و با توجه به تعداد دو نوع کارت داریم:

$$P(B)=\frac{۲}{۲+۸}=۰/۲\,,\ P(B')=۱-۰/۲=۰/۸\ \Rightarrow P(A)=(۰/۲\times ۱)+(۰/۸\times\frac{۱}{۲})=۰/۶$$

☑ **قانون بیز:** فرض کنید $B_۱, B_۲, \dots, B_n$ یک افراز برای فضای نمونه S و A یک پیشامد دلخواه باشد.

در این صورت داریم:

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)\times P(A\mid B_i)}{P(A)}$$

در بیان ساده‌تر داریم:

قانون بیز =	مسیر مطلوب
	احتمال کل

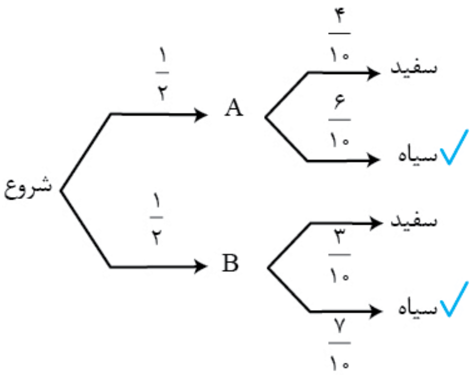
قانون بیز توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ها بعد از مشاهده رخ دادن پیشامد A، به $(B_i\mid A)$ها تبدیل می‌شوند.

ساده‌ترین قانون بیز به شکل زیر خواهد بود:

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(B')P(A\mid B')}$$

مثال: دو ظرف مشابه A و B داریم. دو ظرف A، ۴ مهره سفید و ۶ مهره سیاه و در ظرف B، ۳ مهره سفید و ۷ مهره سیاه داریم. به تصادف یک ظرف انتخاب و مهره‌ای برمی‌داریم. اگر مهره انتخابی سیاه باشد، با چه احتمالی از ظرف B انتخاب شده است؟

راه‌حل:



$$P(\text{سیاه})=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۰}=\frac{۱۳}{۲۰}$$

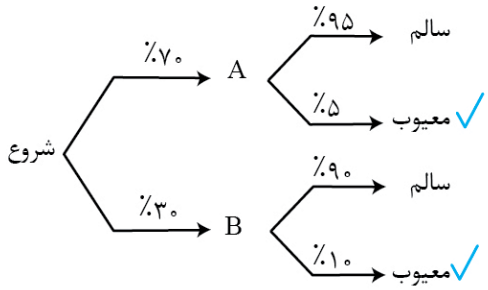
$P(B\mid\text{سیاه})=$	مسیر ظرف B و سیاه
	احتمال کل

$$\Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۱۰}}{\frac{۱۳}{۲۰}}=\frac{۷}{۱۳}$$

مثال: محصولات یک کارخانه توسط دو دستگاه A و B به میزان ۷۰% و ۳۰% تولید می‌شود. اگر به‌ترتیب ۵% و ۱۰% محصولات این دو دستگاه معیوب باشند و یک محصول معیوب از این کارخانه به تصادف انتخاب شده باشد، احتمال آن را بیابید که این محصول معیوب توسط دستگاه B تولید شده باشد.

راه‌حل:

$$P(\text{معیوب}) = \frac{۷۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۱۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۶۵}{۱۰۰۰} = ۰/۰۶۵$$



$$P(\text{معیوب} \mid \text{دستگاه } B) = \frac{\text{مسیر دستگاه B و معیوب}}{\text{احتمال کل}} = \frac{\frac{۱۰}{۱۰۰} \times \frac{۳۰}{۱۰۰}}{\frac{۶۵}{۱۰۰۰}} = \frac{۶}{۱۳}$$

☑ **پیشامد مستقل:** پیشامدهای A و B را مستقل می‌گوییم هرگاه وقوع یکی از آن‌ها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشند. به‌عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند اگر و تنها اگر:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

همچنین به دو پیشامدی که مستقل نباشند، وابسته می‌گوییم.

همچنین اگر $P(A)$ و $P(B)$ ناصفر باشند، برقراری تساوی $P(A \mid B) = P(A)$ و یا تساوی $P(B \mid A) = P(B)$ نیز مستقل بدون A و B را نتیجه می‌دهد.

مثال: یک سکه را ۹۹بار انداخته‌ایم و هر ۹۹بار پشت آمده است. احتمال این‌که در صدمین‌بار باز هم پشت بیاید؟

راه‌حل: پرتاب‌های سکه مستقل از هم هستند لذا باز هم احتمال $\frac{۱}{۲}$ است زیرا پشت آمدن‌های قبل تأثیری در پشت آمدن بار صدم ندارد.

مثال: در پرتاب سه تاس، احتمال آن‌که عدد ظاهرشده هرسه مضرب ۳ باشند چقدر است؟

راه‌حل: احتمال مضرب ۳ بودن تاس $P(A) = \frac{۱}{۳} \quad A = \{۳,۶\} \quad S = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$

تاس‌ها مستقل از هم هستند. پس: احتمال هرسه تاس مضرب ۳ $= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲۷}$

تذکر: اگر A و B دو پیشامد مستقل از هم باشند. آن‌گاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

$$P(A - B) = P(A) - P(A) \times P(B)$$

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - ۲P(A)P(B)$$

مثال: احتمال قبولی علی و حسن در کنکور امسال ۰/۸ و ۰/۷ است. مطلوب است احتمال آن‌که:

الف) هردو قبول شوند.

ب) حداقل یکی قبول شود.

پ) فقط علی قبول شود.

ت) فقط یکی از این دو نفر قبول شوند.

راه‌حل: قبولی علی و حسن مستقل از هم هستند پس: $P(\text{علی}) = P(A) = ۰/۸ \quad P(\text{حسن}) = P(B) = ۰/۷$

$$\text{الف)}\ P(\text{قبولی هردو}) = P(A \cap B) \xrightarrow{\text{سؤال}} P(A) \times P(B) = ۰/۸ \times ۰/۷ = ۰/۵۶$$

ب) حداقل یکی یعنی اجتماع:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۸ + ۰/۷ - ۰/۵۶ = ۰/۹۴$$

پ) فقط علی یعنی فقط A:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۰/۸ - ۰/۵۶ = ۰/۲۴$$

$$\text{ت)}\ P(A \Delta B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) \quad \Rightarrow \quad ۰/۹۴ - ۰/۵۶ = ۰/۳۸$$

تذکر: اگر دو پیشامد A و B مستقل باشند، آن‌گاه پیشامدهای (A', B')، (A', B) و (A, B') نیز مستقل هستند.

مثال: اگر پیشامدهای A و B مستقل بوده و $P(A) = ۲P(B) = \frac{۱}{۴}$ باشد، مطلوب است $P(A \cup B')$؟

راه‌حل:

$$P(A) = \frac{۱}{۴} \quad , \quad P(B) = \frac{۱}{۸} \Rightarrow P(B') = ۱ - \frac{۱}{۸} = \frac{۷}{۸}$$

چون A و B مستقل‌اند ← A و B' هم مستقل‌اند: $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

$$P(A \cup B') = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B') \quad \Rightarrow \quad \frac{۱}{۴} + \frac{۷}{۸} - (\frac{۱}{۴} \times \frac{۷}{۸}) = \frac{۲۹}{۳۲}$$

مثال: در یک امتحان با ۱۰ سؤال ۵ گزینه‌ای، اگر دانش‌آموزی به تمام سؤالات به تصادف پاسخ دهد؛ احتمال آن را بیابید که

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) فقط به ۴ سؤال اول پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

راه‌حل: در سؤال‌های ۵ گزینه‌ای یک گزینه درست است. پس: $P(\text{پاسخ درست در هر سؤال}) = \frac{۱}{۵} = ۰/۲$

$$P(\text{پاسخ غلط در هر سؤال}) = ۱ - ۰/۲ = ۰/۸$$

الف) پاسخ صحیح به هر ۱۰ سؤال: $\underbrace{۰/۲ \times ۰/۲ \times ۰/۲ \ldots \times ۰/۲}_{۱۰} = (۰/۲)^{۱۰}$

ب) پاسخ صحیح برای ۴ سؤال اول و پاسخ نادرست برای ۶ سؤال بعدی

$$\underbrace{۰/۲ \times \ldots ۰/۲}_{۴} \times \underbrace{۰/۸ \times \ldots \times ۰/۸}_{۶} = (۰/۲)^۴ \times (۰/۸)^۶$$

پ) ابتدا ۵ سؤال انتخاب شود که پاسخ صحیح دهیم، سپس به باقی سؤالات پاسخ غلط: $\binom{۱۰}{۵}(۰/۲)^۵(۰/۸)^۵$

☑ **انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری:** برای درک بهتر این عنوان به مثال زیر با دقت توجه کنید.

مثال: از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره آبی و ۸ مهره قرمز است، دو مهره به‌صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری، بیرون می‌آوریم اگر A پیشامد آبی بودن مهره اول و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد،

الف) احتمال این‌که دو پیشامد رخ دهند چقدر است؟

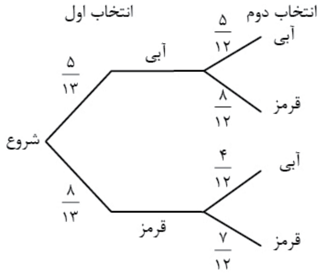
ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

راه‌حل: با توجه به رابطه‌ی $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ دو احتمال شرطی داریم:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

برای بررسی وابستگی یا انتقال این پیشامدها، $P(B)$ و $P(B|A)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. برای محاسبه $P(B)$ از قانون احتمال کل استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره‌ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده‌ایم

$$\begin{aligned}P(B)&=P\,(\text{مهره دوم قرمز})\\&=P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')\\&=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}\\&=\frac{۸}{۱۳}\end{aligned}$$



از سوی دیگر $P(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$، پس $P(B|A)\neq P(B)$، بنابراین A و B وابسته‌اند. ☺

☑ سه پیشامد C,B,A را مستقل گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند:

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$

$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

درحالت کلی، n پیشامد $A_۱,A_۲,\dots,A_n$ را مستقل گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل‌ضرب احتمال آن‌ها برابر باشد.