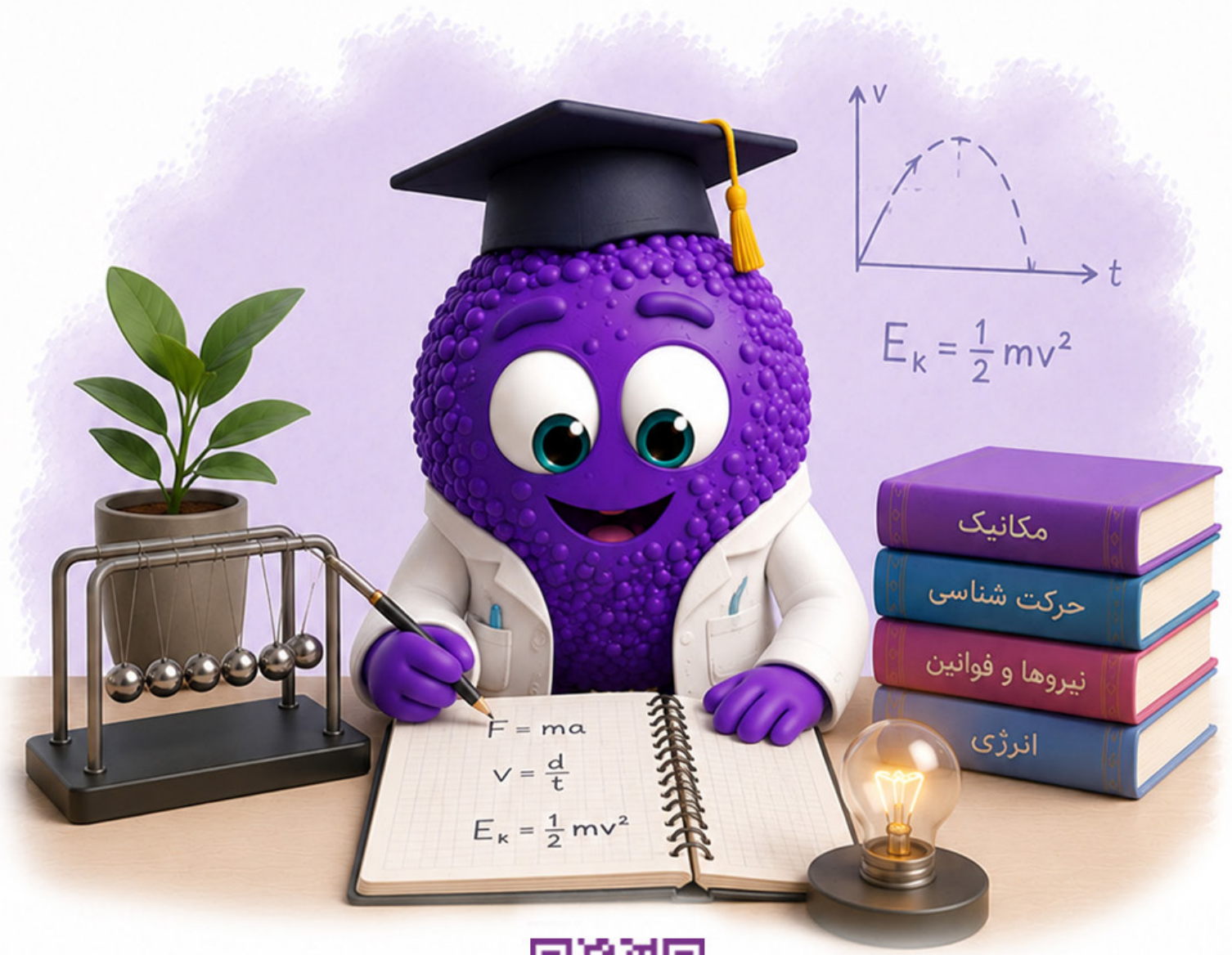
گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

درس

آمار و احتمال یازدهم ـ فصل۱

نوتروبیست



نوتروفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴

.تک رقمی نوتروفیل

رتبه ۸
ایمان نیک‌نام جهرمی

.دو رقمی‌های نوتروفیل

رتبه ۱۴
امیرمحمد کیانی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۷۵
محمدصالح عارفی

رتبه ۸۰
محمدمهدی شریفی

.سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصریان

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی

رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبداله آبادی

رتبه ۵۳۲
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا

رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمدصالح زارعی

رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

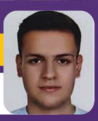
رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری


رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

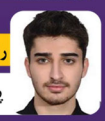
رتبه ۸۰۳
مائده رنجبر

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی


رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

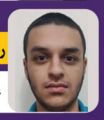
رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی

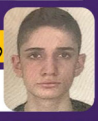
رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده


رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی


رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

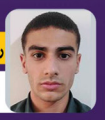
رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

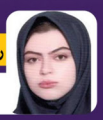
رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۵۳۴
فاطیما عبیری

رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی

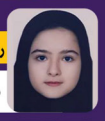
رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند


رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی


رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۷۳۱
محمدرضا محسنی

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی


رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۶۲۵
زهره مجمعی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

آمار و احتمال

فصل اول: آشنایی با مبانی ریاضیات و منطق و استدلال

☑**گزاره:** جمله‌ای است خبری که می‌تواند درست یا نادرست باشد هرچند ممکن است از درستی یا نادرستی آن اطلاعی نداشته باشیم

تذکر: جملات پرسشی، امری، عاطفی و... گزاره نیستند. چون خبری را به ما نمی‌رسانند. مانند جمله‌ی «بیش‌تر درس بخوان» که یک جمله‌ی امری است. یا «چه جزوه زیبایی!» که عاطفی و یا «شما امسال کنکور نمی‌دهید؟» که پرسشی است.

مثال: کدام‌یک از جملات زیر گزاره است؟ ارزش آن را مشخص کنید.

الف) کباب از ساندویچ خوشمزه‌تر است!

ب) $\sqrt{2}$ عددی گویا است.

ج) افلاطون شاگرد سقراط بود.

و) عدد $(-2)^n$ عددی منفی است. $(n \in \square)$

راه‌حل: الف) جمله عاطفی ✗ **ب)** جمله خبری ✓ با ارزش نادرست **ج)** جمله خبری ✓ با ارزش نامعلوم

و) جمله خبری ✓ با ارزش نادرست

← یک استدلال می‌تواند از چند جمله خبری تشکیل شود که دو جمله اول را فرض‌های استدلال و جمله خبری سوم را نتیجه استدلال می‌گویند. در واقع یک استدلال می‌تواند چندین جمله خبری داشته باشد که یکی از آن‌ها نتیجه و بقیه فرض است.

مثال: نتیجه استدلال زیر را بنویسید:

اگر هوا خیلی برفی باشد آن‌گاه مدارس ابتدایی تعطیل است، دیروز برف سنگینی بارید.

راه‌حل: نتیجه: دیروز مدارس ابتدایی تعطیل بوده است.

مثال: هیچ عدد مرکبی، عدد اول نیست، ۴ عددی مرکب است.

راه‌حل: نتیجه: ۴ عدد اول نیست.

☑جدول ارزش گزاره‌ها:

معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و... نشان می‌دهند.

ارزش درست گزاره‌ها را با نماد «د» و ارزش نادرست را با «ن» نشان می‌دهیم. اگر p یک گزاره باشد آن‌گاه ارزش آن ۲ حالت دارد:ارزش دو گزاره p و q طبق جدول ۴ حالت دارد:

← یعنی اگر n گزاره داشته باشیم، در این صورت جدول ارزش گزاره‌ها ۲^n حالت دارد.

به‌طور مثال جدول ارزش گزاره‌های p و q و q دارای $۲^۳ = ۸$ حالت است!

P
د
ن

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

☑ گزاره‌نما:

هر جمله خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیرهای به‌کاررفته در آن‌ها، یک متغیره، دومتغیره و... می‌نامند مثلاً «x یک عدد اول است» گزاره‌نمای یک متغیره و «$x - ۲y > ۳$» یک گزاره‌نمای دومتغیره است.

☑دامنه متغیر گزاره‌نما:

در هر گزاره‌نما، به مجموعه مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای آن قرار داد تا گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، دامنه متغیر گزاره‌نما می‌گویند. و با حرف D نمایش می‌دهند.

مثال: دامنه هریک از گزاره‌نماهای زیر را بنویسید.

الف) $x^۲ + ۵x - ۱$ ب) $\frac{۵}{x-۱} = ۱$ ج) $\sqrt{x-۲} = ۳$

راه‌حل:

الف) این عبارت، یک چندجمله‌ای است. دامنه عبارت‌های چندجمله‌ای برابر ℝ یعنی تمام اعداد حقیقی است.

ب) در کسرها مخرج کسر، نباید صفر شود، پس: $x - ۱ \neq ۰ \rightarrow x \neq ۱ \Rightarrow D = ℝ - \{۱\}$

ج) در رادیکال‌های فرجه زوج، زیر رادیکال نباید منفی شود، پس: $x - ۲ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۲ \rightarrow D = [۲, +\infty)$

← مجموعه جواب: در هر گزاره‌نما، به زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی متغیر که به‌ازای اعضای آن‌ها، گزاره‌نما به یک گزاره باارزش درست تبدیل شود، مجموعه جواب گزاره‌نما گویند و با حرف s نمایش می‌دهند.

پس همواره D یا S

☑ ترکیب گزاره‌ها:

در کتاب درسی ترکیب گزاره‌ها با ۴ رابطه «و»، «یا»، «اگر... آن‌گاه...»، «اگر... آن‌گاه... و برعکس» انجام می‌شود.

☑ نقیض یک گزاره:

گزاره‌ای است که ارزش آن دقیقاً مخالف ارزش گزاره اولیه باشد. نقیض گزاره p را با $\sim p$ نشان می‌دهند و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانند.

تذکر: ارزش گزاره p با ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ یکسان است. در این صورت گوییم دو گزاره هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم: $\sim(\sim p) \equiv p$

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

مثال: مثلاً گزاره p: «۹ عددی مربع کامل است.»

گزاره $\sim p$: «۹ عددی مربع کامل نیست.»

گزاره $\sim(\sim p)$: «۹ عددی مربع کامل است.»

☑ترکیب عطفی:

اگر دو گزاره‌ی ساده p، q با حرف «و» به هم مربوط شوند آن را ترکیب عطفی می‌نامند و با نماد $p \wedge q$ نشان می‌دهند.

جدول ارزش $p \wedge q$ به‌صورت مقابل است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

جمع‌بندی: در ترکیب عطفی «و» « $\wedge$ » تنها زمانی گزاره ارزش درست داره که هردوتا گزاره درست باشن در غیر این صورت بقیه همشون نادرستن!

☑ ترکیب فصلی:

اگر دو گزاره ساده p و q با حرف «یا» به هم مربوط شوند آن را ترکیب فصلی می‌نامند و با نماد $p \vee q$ نشان می‌دهند.

جدول ارزش $p \vee q$ به‌صورت مقابل است:

جمع‌بندی: در ترکیب فصلی «یا» « $\vee$ » تنها زمانی گزاره ارزش نادرست داره که هردوتا گزاره نادرست باشن در غیر این صورت بقیه همشون درستن!

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

مثال: ارزش گزاره عطفی روبه‌رو را مشخص کنید؟ «۹۰ مربع کامل است و کوچک‌ترین عدد طبیعی اول ۲ است»

p ∧ q

راه‌حل: ن = د ∧ ن → p ∧ q

مثال: ارزش گزاره فصلی روبه‌رو را مشخص کنید؟ «معادله‌ی $m^2 - ۴ = ۰$ در مجموعه اعداد حقیقی ۲ ریشه دارد یا ۲۵ مضرب ۵ است»

p ∨ q

راه‌حل: د = د ∨ د → p ∨ q

☑ ترکیب شرطی:

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $p \Rightarrow q$ که خوانده می‌شود: «اگر p آن‌گاه q» را ترکیب شرطی دو گزاره می‌گویند. P را مقدم «فرض» و q را تالی «حکم» می‌نامند.

جمع‌بندی: گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ فقط زمانی نادرست است که فرض اولیه درست و حکم نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

⇒ قانون انتفای مقدم

← **قانون انتفای مقدم:** اگر فرض اولیه نادرست باشد بدون توجه به حکم و گزاره دوم، می‌توان سریعاً گفت گزاره شرطی درست است.

تذکر:

۱. گزاره‌ی $q \Rightarrow p$ عکس ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است. همچنین گزاره‌ی $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکسِ نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

۲. همچنین ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ هم‌ارز منطقی $\sim p \vee q$ است.

☑ چند نکته مهم در رابطه با ترکیب شرطی:

۱ـ هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی «$p \Rightarrow p \vee q$» همواره درست است.

۲ـ هرگاه p و q دو گزاره باشند آن‌گاه ترکیب شرطی «$p \wedge q \Rightarrow p$» همواره درست است.

۳ـ ترکیب شرطی «$p \Rightarrow q$» با ترکیب فصلی «$\sim p \vee q$» هم‌ارز منطقی هستند.

۴ـ هر گزاره شرطی «$p \Rightarrow q$» با عکس نقیض خود یعنی «$\sim q \Rightarrow \sim p$» هم‌ارز منطقی هستند.

☑ ترکیب دوشرطی:

اگر p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p \Leftrightarrow q$» نوشته و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم و می‌خوانیم:

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس» یا «p اگر و تنها اگر q»

جمع‌بندی: گزاره دوشرطی $p \Leftrightarrow q$ فقط زمانی درست است که گزاره‌های p و q ارزش یکسان داشته باشند یعنی یا هردو درست یا هردو نادرست باشند.

در غیر این صورت این گزاره دوشرطی ارزشی نادرست خواهد داشت.

☑ چند هم‌ارزی منطقی بین گزاره‌های مرکب:

۱ـ قوانین جابه‌جایی:

$$\begin{cases} p \vee q \equiv q \vee p \\ p \wedge q \equiv q \wedge p \end{cases}$$

۲ـ قوانین شرکت‌پذیری:

$$\begin{cases} (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \\ (p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r) \end{cases}$$

۳ـ پخشی یا قوانین توزیع‌پذیری

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{cases}$$

☑ چند نکته که به‌خاطر سپردن آن‌ها در حل مسائل به شما سرعت می‌بخشد.

اگر F، یک گزاره همواره غلط «نادرست» و T؛ یک گزاره همواره درست باشد داریم:

۱. $p \vee F \equiv p$ ۲. $p \vee T \equiv T$ ۳. $p \wedge F \equiv F$ ۴. $p \wedge T \equiv p$

۵. $p \vee \sim p \equiv T$ ۶. $p \wedge \sim p \equiv F$

مثال: ارزش این ترکیب شرطی را مشخص کنید. «اگر چهارضلعی ABCD یک مستطیل باشد آن‌گاه قطرهایش با هم برابر است.»

$$\underbrace{\text{ABCD یک مستطیل باشد}}_{p} \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\Rightarrow} \quad \underbrace{\text{قطرهایش با هم برابر است}}_{q}$$

راه‌حل: د = د $\Rightarrow$ د $\rightarrow$ $p \Rightarrow q$

مثال: ارزش این ترکیب دوشرطی را مشخص کنید؟ $(x > 2) \Leftrightarrow (3x - 5 > 1)$

راه‌حل: این گزاره یعنی؛ اگر $x > 2$ باشد آن‌گاه $3x - 5 > 1$ است و برعکس.

از آن‌جایی که $3x - 5 > 1$ برابر $3x > 6$ و در نتیجه $x > 2$ است و از آن‌جایی که در ترکیب‌های دوشرطی تنها زمانی که ارزش دو گزاره یکسان باشد، ترکیب گزاره‌ها درست است و ما در این مسئله $p \Leftrightarrow p$ داریم؛ قطعاً این گزاره دوشرطی ارزش درست خواهد داشت.

☑ سورها:

سورها علامت‌هایی هستند که قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و متغیرهای گزاره‌نما را به یک مجموعه معین محدود می‌کنند و بدین‌ترتیب گزاره‌نما را به یک گزاره تبدیل می‌کنند که این گزاره می‌تواند ارزش درست یا نادرست داشته باشد. در ادامه با انواع سورها «عمومی یا وجودی» آشنا می‌شویم.

☑ سور عمومی « $\forall$ »:

به گزاره‌های زیر دقت کنید:

- هر عدد طبیعی مثبت است.
- هر مستطیل متوازی‌الاضلاع است.
- هر عدد اول، فرد است.

در هریک از این گزاره‌ها، در واقع خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت داده‌ایم. چنین گزاره‌هایی را گزاره‌های با سور عمومی می‌نامند. «هر xای خاصیت p را دارد.» $\forall x : p(x)$

تذکر: گزاره‌های با سور عمومی وقتی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنه متغیرشان یکسان باشد.

مثلاً گزاره «هر عدد اول فرد است» نادرست است زیرا عدد ۲، اول است درحالی‌که زوج است.

☑ سور وجودی « $\exists$ »:

گزاره‌هایی هستند که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت می‌دهند. «حداقل یک x هست که خاصیت p را دارد.» $\exists x : p(x)$

تذکر: گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها ناتهی باشد. یعنی حداقل یک $\square$ در آن صدق کند.

مثلاً گزاره‌ی « $\exists x \in \square \; ; \; x^2 = x$ » یک گزاره درست است زیرا برای اعداد صحیح $x = 0, 1$ برقرار است.

اما گزاره‌ی « $\exists x \in \square \; ; \; \sqrt{x} > x$ » یک گزاره نادرست است زیرا مجموعه جواب آن تهی است.

☑نقیض گزاره‌های سوری:

الف: نقیض گزاره‌های با سور عمومی: $\sim [\forall x : p(x)] \equiv \exists x : \sim p(x)$

به‌طور مثال نقیض گزاره‌ی «هر آسیایی ایرانی است» برابر است با «وجود دارد آسیایی که ایرانی نباشد»

ب: نقیض گزاره‌های با سور وجودی: $\sim [\exists x : p(x)] \equiv \forall x : \sim p(x)$

به‌طور مثال نقیض گزاره‌ی «بعضی از اعداد اول زوج‌اند» برابر است با «هر عدد اولی فرد است.»

مثال: ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کرده و سپس نقیض آن‌ها را بنویسید.

الف) $p : \exists x \in \square : 3 < x < 5$

ب) $q : \exists y \in \square : (y < 0) \wedge (y^2 \leq 1)$

ج) $r : \forall x \in \square : x + 1 \geq 2$

راه‌حل:

الف) گزاره p به‌ازای $x = 4$ درست است.

ب) گزاره q به‌ازای $y = -1$ درست است. $\sim q : \forall y \in \square : (y \geq 0) \vee (y^2 > 1)$

ج) گزاره r درست است «همواره درست» $\sim r : \exists x \in \square : x + 1 < 2$

☑مجموعه‌ها:

مفهوم مجموعه: دسته یا گروهی از اشیاء کاملاً مشخص را مجموعه گویند.

عضو: هر عدد یا شی داخل مجموعه را عضو می‌نامند، $x \in A$ یعنی x متعلق به مجموعه A است.

مرجع: مجموعه‌ای که تمام مجموعه‌های مسئله زیر مجموعه آن باشند و با M یا U نشان می‌دهیم.

تهی: مجموعه‌ای که عضو ندارد و با ϕ یا $\{\}$ نمایش داده می‌شود.

زیرمجموعه: مجموعه B زیرمجموعه A است هرگاه تمام اعضای B در A باشد.

$$(\forall x \in B \Rightarrow x \in A) \Leftrightarrow B \subseteq A$$

$$(\exists x \in B \wedge x \notin A) \Leftrightarrow B \not\subset A$$

زیرمجموعه سره: اگر $B \subseteq A$ ولی $B \neq A$ آن‌گاه B زیرمجموعه سره A نامیده می‌شود.

مجموعه توانی: مجموعه همه‌ی زیرمجموعه‌های A، مجموعه توانی A نامیده می‌شود و با $p(A)$ نمایش داده می‌شود

تذکر: اگر A یک زیرمجموعه nعضوی باشد، آن‌گاه:

۱ـ تعداد کل زیرمجموعه‌ها: ۲^n

۲ـ تعداد زیرمجموعه‌های سره‌ی □: $۲^n - ۱$

۳ـ تعداد زیرمجموعه‌های سره و ناتهی □: $۲^n - ۲$

۴ـ تعداد زیرمجموعه‌های □عضوی □: $\binom{n}{k}$

مثال: یک مجموعه □عضوی دارای ۳۵ زیرمجموعه ۳عضوی است. مطلوب است:

الف) n ب) تعداد زیرمجموعه‌ها ج) مقدار زیرمجموعه‌های سره د) تعداد زیرمجموعه‌های دوعضوی

راه‌حل:

الف) $\binom{n}{۳} = \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳\times۲} = ۳۵ \rightarrow n\times(n-۱)\times(n-۲) = ۷\times۶\times۵ \rightarrow n = ۷$

ب) $۲^۷ = ۱۲۸$

ج) $۱۲۸ - ۱ = ۱۲۷$

د) $\binom{۷}{۲} = \frac{۷\times۶}{۲} = ۲۱$

☑ افراز یک مجموعه:

فرض می‌کنیم A یک مجموعه ناتهی باشد. می‌گوییم A به m زیرمجموعه‌ی $A_۱, A_۲, \ldots, A_m$ افرازشده هرگاه:

۱ـ تمام A_iها ناتهی باشند.

۲ـ اشتراک هرکدام از زیرمجموعه‌ها با هم تهی باشد.

۳ـ اجتماع تمام A_iها برابر A باشد.

مثال: تمام افرازهای مجموعه $A = \{a,b,c\}$ را بنویسید؟

راه‌حل: افراز اول: $A_۱ = \{a\}$, $A_۲ = \{b\}$, $A_۳ = \{c\}$

افراز دوم: $A_۱ = \{a,b\}$, $A_۲ = \{c\}$

افراز سوم: $A_۱ = \{a,c\}$, $A_۲ = \{b\}$

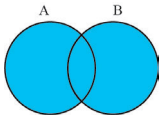
افراز چهارم: $A_۱ = \{b,c\}$, $A_۲ = \{a\}$

افراز پنجم: $A = \{a,b,c\}$

چند نکته مهم:

۱ـ اجتماع دو مجموعه: «حداقل یکی»

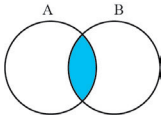
$A \cup B = \{m \in A \vee x \in B)$



۲

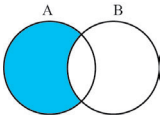
ـ اشتراک دو مجموعه: «هردو مجموعه با هم»

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$



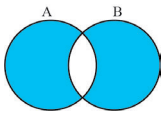
۳ـ تفاضل دو مجموعه: «فقط □»

$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$



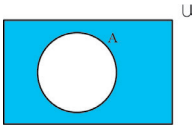
۴ـ تفاضل متقارن دو مجموعه: «فقط یکی»

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$



۵ـ متمم یک مجموعه:

$A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$



۶ـ دو مجموعه مساوی: دو مجموعه A و B برابرند اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد و می‌نویسیم $A = B$ و به عبارت ریاضی داریم:

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

۷ـ روش عضوگیری دلخواه: یک روش مفید برای این‌که نشان دهیم $A \subset B$ است این است که ثابت کنیم برای عضو دلخواه x از A، این عضو در B نیز قرار دارد.

مثال: به روش عضوگیری دلخواه نشان دهید:

الف) اگر $A \subset B$ آن‌گاه $B' \subset A'$

ب) اگر A و B دو مجموعه دلخواه از مجموعه مرجع □ باشد آن‌گاه $A \subset A \cup B$ است.

راه‌حل:

الف) عضو دلخواه x را در B' درنظر می‌گیریم. طبق تعریف متمم این عضو در B قرار ندارد. و چون $A \subset B$ پس $x \notin A$

یعنی $x \in A'$ $\quad x \in B' \Rightarrow x \notin B$

در نتیجه: $B' \subset A'$ است.

ب)

$x \in A \Rightarrow x \in A$ یا $x \in B$

طبق تعریف اجتماع خواهیم داشت: $x \in A \cup B$

در نتیجه: $A \subset A \cup B$

☑ جبر مجموعه‌ها:

۱) $\begin{cases} A \cup A = A \\ A \cup A' = U \\ A \cup \phi = A \end{cases}$

۲) $\begin{cases} A \cap A = A \\ A \cap A' = \phi \\ A \cap \phi = \phi \end{cases}$

۳) $\begin{cases} (A')' = A \\ U' = \phi \\ \phi' = U \end{cases}$

۴) $\begin{cases} (A \cap B)' = A' \cup B' \\ (A \cup B)' = A' \cap B' \end{cases}$ دمورگان

۵) $\begin{cases} A - B = A - (A \cap B) \\ A - B = A \cap B' \end{cases}$ تفاضل

۶) $\begin{cases} A \cap (A \cup B) = A \\ A \cup (A \cap B) = A \end{cases}$ جذب

۷) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \cap A \cup B = B$

۸) $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$ قوانین پخشی

۹) $\begin{cases} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C \\ A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C \end{cases}$ شرکت‌پذیری

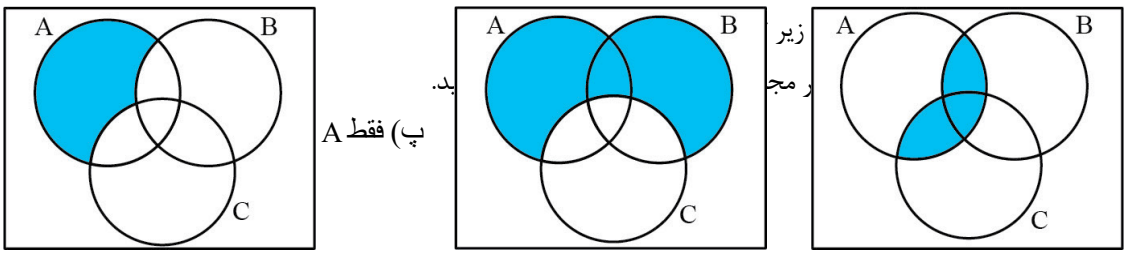
مثال: ثابت کنید $(A')' = A$

راه‌حل: اثبات به روش عضوگیری:

$$\begin{cases} x \in (A')' \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in A \Rightarrow (A')' \subseteq A \\ x \in A \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow x \in (A')' \Rightarrow A \subseteq A \end{cases}$$

در انتها پیشنهاد می‌کنم تمامی اثبات‌هایی که در کتاب درسی مطرح شده‌اند، چه در فعالیت‌ها و چه در کاردرکلاس‌ها و حتی تمرین‌ها را، با دقت هرچه تمام از فصل اول مطالعه کنید و به خاطر داشته باشید که سؤالات امتحان شما حتماً یکی از آن‌ها خواهد بود! مخصوصاً صفحات ۲۲ تا ۳۸! ☺

☑ نمودارهای ون سه‌تایی:



پ) فقط A

بد.

زیر
ر مج

☑ حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعه:

حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه A در B که با $A \times B$ نشان می‌دهیم، مجموعه همه زوج مرتب‌های (a,b) است که a عضوی از A و b عضوی از B است. یعنی: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A , b \in B\}$

اگر $A = B$ باشد، $A \times A$ را با A^2 نشان می‌دهیم و □×□ یا □ ۲ را صفحه مختصات می‌نامیم.

طبیعتاً با توجه به تعریف فوق، ضرب دکارتی $A \times B$ با $B \times A$ متفاوت است؛ مگر آن‌که یا $A = \phi$ باشد یا $B = \phi$ باشد یا A,B هردو تهی باشند و یا اصلا $A = B$ باشد.

مثال: اگر A و B و C سه مجموعه باشند به‌طوری‌که $C \neq \phi$ و $A \times C = B \times C$، ثابت کنید $A = B$؟

راه‌حل: برای آن‌که نشان دهیم $A = B$ باید ثابت کنیم $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$ است.

ابتدا ثابت می‌کنیم $A \subseteq B$ است. اگر $x \in A$ باشد آن‌گاه برای هر $y \in C$ داریم:

$$(x, y) \in A \times C$$

و طبق فرض داریم $A \times C = B \times C$ پس $(x, y) \in B \times C$ و از آن‌جا نتیجه می‌شود $x \in B$، پس $A \subseteq B$ است و همین‌طور برای $B \subseteq A$ عمل می‌کنیم تا ثابت شود $A = B$ است.

☑ رسم نمودارهای حاصل‌ضرب دکارتی:

برای رسم نمودارهای حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ باید به مجموعه‌های A و B توجه کنیم که به‌صورت نقطه «عدد روی محور حقیقی» داده شده‌اند یا به‌صورت بازه!

نکته مهم آن است که برای رسم $A \times B$ باید A را روی محور xها و B را روی محور yها درنظر بگیریم.

مثال: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ دو مجموعه مفروض باشند:

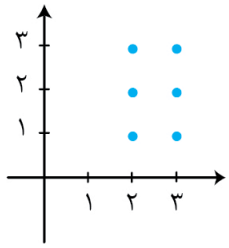
الف) نمودار $A \times B$ را رسم کنید.

ب) مجموعه $B^2 - A \times B$ را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

راه‌حل: الف) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ یا 3

$$\Rightarrow A = \{2, 3\} \quad , \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$A \times B = \{(2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (3,1), (3,3)\}$$



زوج مرتب‌ها را روی دستگاه مختصات پیدا می‌کنیم.

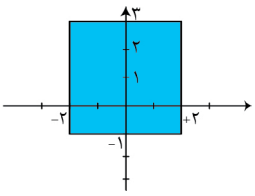
ب) $B^2 = B \times B \Rightarrow \begin{Bmatrix} (1,1) & , & (1,2) & , & (1,3) \\ (2,1) & , & (2,2) & , & (2,3) \\ (3,1) & , & (3,2) & , & (3,3) \end{Bmatrix}$ $\qquad A \times B = \begin{Bmatrix} (2,1) & , & (2,2) & , & (2,3) \\ (3,1) & , & (3,2) & , & (3,3) \end{Bmatrix}$

برای محاسبه $B^2 - A \times B$ کافیست از عضوهای داخل B^2 عضوهایی که در $A \times B$ هستند را حذف کنیم. در نتیجه:

$$B^2 - A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3)\}$$

مثال: اگر $i = 1, 2$، $A_i = [-i, 4-i]$ باشد، نمودار $A_2 \times A_1$ را روی محورهای مختصات نمایش دهید.

راه‌حل: A_2 را روی محور xها و A_1 را روی محور yها انتخاب می‌کنیم. $A_2 = [-2, 2]$ ، $A_1 = [-1, 3]$



$$A_2 \times A_1 = \{(x, y) \mid x \in A_2 \wedge y \in A_1\}$$