

نو ترو کراچی

ریاضی - ارشتہ تجربی



یہ گاز بڑنی، یہ فصل کنکور می پرہ!

 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com



کارخونه رتبه برتر سازی، نو ترو فیل!



نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۲



محمدعلی موسی پور

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۴۸



محمدحسین هاشمی

رتبه ۶۸



منیره زمانی

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۱۲



امیرمحمد شریفی کلوری

رتبه ۱۳۴



امیرمحمد ملکشاهی

رتبه ۱۹۵



سید حسین تقوی

رتبه ۳۵۷



فاطمه مروت بلسی

رتبه ۴۲۸



مهدیه اسدی ارزنده

رتبه ۵۰۹



علیرضا شهنساری

رتبه ۵۷۵



هانیه گنجعلی

رتبه ۶۲۷



فریما آقاپور

رتبه ۶۳۹



هلیا رضایی

رتبه ۶۶۸



فائزه حیدری دهکردی

رتبه ۷۹۳



سارینا تقی زاده

رتبه ۸۰۵



لعیا زنگنه قاسم آبادی

رتبه ۸۸۱



حلما ناصری

رتبه ۹۹۵



جواد فلاحتی

رتبه ۱۰۲۰



سارا دهقان

رتبه ۱۰۲۰



مهسا پیری

رتبه ۱۰۴۹



محمد خرم آبادی

رتبه ۱۱۱۱



رضا نصیری مدیسه

رتبه ۱۱۲۵



سمیرا تباوار

رتبه ۱۲۲۵



مهدی فیض زاده

رتبه ۱۲۲۵



سید مهدی حیات غیبی

رتبه ۱۲۶۷



مهدی آزادبخت

رتبه ۱۳۰۶



مهتاب کامل

رتبه ۱۳۱۶



یسری ابوالمحمدی مله

رتبه ۱۴۰۹



غزل قبادی

رتبه ۱۴۳۹



ریحانه جعفری خیرخواه

رتبه ۱۵۸۷



مهدی تیموری

رتبه ۱۵۹۸



محمد رضا دادپور

رتبه ۱۶۶۹



مائده سادات حسینی

رتبه ۱۷۲۹



علیرضا انصاری

رتبه ۱۷۲۹



علی عزیززاده

رتبه ۱۷۴۲



الهه فکاری

رتبه ۱۷۷۶



علی عرب خانی

رتبه ۱۷۸۲



یاسین رئیسی زیدآبادی



مشاوره کنکور نوتروفیل

پیش نیاز های ریاضی کنکور -
بهار ۱۴۰۴

مناسب تمام کنکوری های
رشته تجربی



مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

۱ اگر $x = 7 - 2\sqrt{6}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x}$ ، کدام است؟

۱/۴ (۴)

۱/۲ (۳)

۵/۸ (۲)

۵/۶ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۲ در تجزیه عبارت $(x^2 - 4x + 4) - 1$ ، کدام عامل ضرب، موجود است؟

$x + 3$ (۴)

$x - 1$ (۳)

$x - 2$ (۲)

$x - 3$ (۱)

۳ مجموع سه عدد a, b, c برابر ۱۱ و مجموع حاصل ضرب دوی آن‌ها برابر ۳ می‌باشد. مجموع مجزورات این سه عدد کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱ ۱۱۵ (۴)

۱۱۰ (۳)

۱۰۵ (۲)

۹۰ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۴ در تجزیه عبارت $x^4 - 3x^3 + 8x - 24$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

$x + 3$ (۴)

$x + 2$ (۳)

$x - 2$ (۲)

$x - 4$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۵ حاصل عبارت $\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$ کدام است؟

صفر (۴)

-۱ (۳)

-۲ (۲)

-۳ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۶ اگر $a + 2b = 3$ باشد، حاصل $a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab$ ، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۷ اگر $4 = (5x - \frac{3}{2x})$ باشد، حاصل $(\frac{9}{4x^2} + 25x^2)$ کدام است؟

۳۲ (۴)

۳۱ (۳)

۲۹ (۲)

۲۴ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

۸ با افزودن کدام عدد به عبارت $\frac{1}{4} - 6x + 4x^2$ ، مربع یک دوجمله‌ای حاصل می‌شود؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

$\frac{15}{4}$ (۲)

۲ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۹ در تجزیه عبارت $16x^2 - (x^2 - 12)^2$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

$x + 6$ (۴)

$x + 3$ (۳)

$x + 2$ (۲)

$x - 6$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۱۰ اگر $\frac{4}{3} = xy^2$ باشد، حاصل $(x + 3y^2)^2 - (x - 3y^2)^2$ ، کدام است؟

۱۸ (۴)

۱۶ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱۱ اگر $5 = (3x + \frac{1}{2x})$ باشد، حاصل $(\frac{1}{4x^2} + 9x^2)$ ، کدام است؟

۲۲ (۴)

۲۱ (۳)

۲۰ (۲)

۱۸ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۱۲ در تجزیه عبارت $a(a - 3)(a - 4) - 12a + 36$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

$a + 2$ (۴)

$a - 2$ (۳)

$a - 3$ (۲)

$a - 6$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۱۳ در تجزیه عبارت $4x^3 - 6x^2 + 2x$ ، کدام عامل ضرب وجود دارد؟

$x + 2$ (۴)

$x + 1$ (۳)

$2x - 1$ (۲)

$2x + 1$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۱۴ در تجزیه عبارت $144 - (x^2 - 6x - 4)^2$ ، کدام عامل ضرب وجود ندارد؟

$x + 4$ (۴)

$x + 2$ (۳)

$x - 4$ (۲)

$x - 8$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۱۵ اگر $2 = \frac{1}{a^3 + 1} + \frac{1}{a^3 - 1}$ باشد، حاصل $(\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3 + 1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3 + 1}})^{1401}$ چقدر است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۲ (۲)

۲ (۱)





مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۶ اگر $B = \frac{\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}{\frac{8}{\sqrt{2}} + \sqrt{14}}$ باشد، حاصل $3B + 1$ کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $\sqrt{7}$ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ $2\sqrt{7}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

۱۷ ساده شده عبارت $\left(\sqrt[2]{5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 + (-\sqrt{2})^2}\right)^{-\frac{2}{3}} + \left(\sqrt[2]{\frac{1}{4}}\right)^3$ ، کدام است؟

- ۱ $3,25$ ۲ $3,5$ ۳ $3,75$ ۴ $4,5$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۱۸ خلاصه شده عبارت $\left(\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x}\right) \div \left(x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x}\right)$ ، کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{x-1}$ ۲ $\frac{-1}{x+1}$ ۳ 1 ۴ -1

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۹ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{27} - 1}{4 + \sqrt{3}} + (2 - \sqrt{3})^{-1}$ ، کدام است؟

- ۱ $1 + 2\sqrt{3}$ ۲ $2\sqrt{3}$ ۳ $1 + \sqrt{3}$ ۴ 1

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

۲۰ ساده شده عبارت $\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} + \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-0,25}$ ، کدام است؟

- ۱ $-2,5$ ۲ $-2,25$ ۳ $-1,75$ ۴ $-1,5$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۲۱ حاصل عبارت $\sqrt[2]{24} \times \sqrt[2]{9} + \frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{80}$ ، کدام است؟

- ۱ -4 ۲ -3 ۳ $-1 - 2\sqrt{5}$ ۴ $3 - 2\sqrt{5}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۲۲ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1}$ ، کدام است؟

- ۱ $1 + \sqrt{3}$ ۲ $-1 + \sqrt{2}$ ۳ $1 - \sqrt{2}$ ۴ $\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۲۳ اگر $A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}(12)^{-1,5}}$ باشد، حاصل عبارت $(1 + A^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ، کدام است؟

- ۱ 3 ۲ 4 ۳ 5 ۴ 6

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۲۴ اگر $A = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{48} - 3\sqrt{8}$ باشد، A^2 برابر کدام است؟

- ۱ 24 ۲ 30 ۳ 32 ۴ 36

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۲۵ خلاصه شده عبارت $\left(1 - \frac{6}{x+2}\right)\left(\frac{5x-2}{x-4} + x\right)$ ، کدام است؟

- ۱ $x-2$ ۲ $x-1$ ۳ $x+1$ ۴ $x+2$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۲۶ خلاصه شده عبارت $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 \times \left(2\frac{1}{4}\right) \times (0,75)^{-3}$ ، کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ 2 ۴ 3

مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

۲۷ حاصل عبارت $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)\left(\frac{x}{x^2 - 4x + 4} - \frac{1}{x-2}\right)$ ، کدام است؟

- ۱ $2x-4$ ۲ $2x-2$ ۳ $2x-1$ ۴ $2x$



مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۳۸ اگر $A = \sqrt[4]{4\sqrt[3]{16}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}$ باشد، حاصل $(2A)^{-\frac{1}{3}}$ ، کدام است؟

۱ (۴)

۰٫۷۵ (۳)

۰٫۵ (۲)

۰٫۲۵ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

۳۹ حاصل عبارت $\sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{50} - \frac{6}{\sqrt{3}}$ برابر کدام است؟

$\sqrt{12}$ (۴)

$\sqrt{8}$ (۳)

$\sqrt{6}$ (۲)

$\sqrt{3}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۳۰ فرض کنید $a = \sqrt[4]{\sqrt{6} - 2}$ و $b = \sqrt[4]{\sqrt{6} + 2}$ مقدار $(a^2 + b^2 - 2ab)^2(a^2 + b^2 + 2ab)^2$ کدام است؟

$16(2 - \sqrt{3})$ (۴)

$16(2 + \sqrt{3})$ (۳)

$4(2 - \sqrt{3})$ (۲)

$4(2 + \sqrt{3})$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

۳۱ اگر $x = 5 + \sqrt{17}$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{\frac{x-1}{16}} + \frac{1}{2x}$ ، کدام است؟

$1,5$ (۴)

$1,25$ (۳)

$0,75$ (۲)

$0,5$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۳۲ حاصل عبارت $(1 + \frac{3x}{x^2 - 4}) \times (1 - \frac{1}{x-1})$ ، کدام است؟

$\frac{x+4}{x-2}$ (۴)

$\frac{x-4}{x+2}$ (۳)

$\frac{x-4}{x-2}$ (۲)

$\frac{x+4}{x+2}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۳۳ حاصل $(x + \frac{2}{x-3}) \times (1 - \frac{1}{x-2})$ کدام است؟

$2x + 1$ (۴)

$x + 2$ (۳)

$x + 1$ (۲)

$x - 1$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۳۴ حاصل عبارت $\frac{3x(2x^2 - 1)}{2x + 2} - \frac{x-2}{2x+2} + 2x$ با شرط $x \neq -1$ ، برابر کدام سه جمله‌ای است؟

$3x^2 + 2x - 1$ (۴)

$3x^2 - 2x + 1$ (۳)

$3x^2 + x - 1$ (۲)

$3x^2 - x + 1$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۳۵ حاصل $\frac{6}{2 - \sqrt{7}} + (1 + \sqrt{7})^2$ کدام است؟

12 (۴)

$4 + \sqrt{7}$ (۳)

4 (۲)

$4 - \sqrt{7}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۳۶ حاصل عبارت $(2x + 1 - \frac{3}{x}) \div (2 + \frac{1}{x+1})$ کدام است؟

$x - \frac{1}{x}$ (۴)

$x + \frac{1}{x}$ (۳)

$2 + \frac{1}{x}$ (۲)

$2 - \frac{2}{x}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۳۷ حاصل $\frac{2}{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{20} + \sqrt{48} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$ ، کدام است؟

$\sqrt{5}$ (۴)

2 (۳)

1 (۲)

صفر (۱)

۳۸ فرض کنید x_1 و x_2 جواب‌های معادله $(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$ باشند مقدار $x_1 + x_2$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

2 (۴)

1 (۳)

صفر (۲)

-1 (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۳۹ حاصل عبارت $\frac{2}{3 - \sqrt{7}} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{28} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ ، کدام است؟

$2 + \sqrt{7}$ (۴)

4 (۳)

3 (۲)

$\sqrt{7}$ (۱)





مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۴۰ حاصل $\frac{2}{2 + \sqrt{6}} + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ کدام است؟

- ۱ -۲ (۱) ۲ -۱ (۲) ۳ ۱ (۳) ۴ ۲ (۴)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۴۱ اگر $A = \frac{2}{3}\sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 3\sqrt{200}$ باشد، A^2 برابر کدام است؟

- ۱ ۳۲ (۱) ۲ ۴۵ (۲) ۳ ۴۸ (۳) ۴ ۵۰ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

۴۲ حاصل عبارت $\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2 - 1} \left(1 + \frac{2}{x^2 + x^2}\right)$ ، برابر کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{x^2}$ (۱) ۲ ۱ (۲) ۳ $1 + \frac{1}{x^2}$ (۳) ۴ صفر (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۴۳ حاصل عبارت $\sqrt{25} \times \sqrt{40} + \frac{\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{72}$ کدام است؟

- ۱ ۴ (۱) ۲ $3 + \sqrt{2}$ (۲) ۳ ۵ (۳) ۴ ۶ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۴۴ خلاصه شده عبارت $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} \times (18)^{-2} \times (1,5)^4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ کدام است؟

- ۱ ۱,۵ (۱) ۲ ۲ (۲) ۳ ۲,۵ (۳) ۴ ۳ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۴۵ مجموع دو کسر تعریف شده $\frac{x^3 + 4}{x + 4}$ و $\frac{3x(x - 1)}{x + 4}$ ، برابر کدام سه جمله ای است؟

- ۱ $x^2 - x + 1$ (۱) ۲ $x^2 - x - 1$ (۲) ۳ $x^2 + x - 1$ (۳) ۴ $x^2 + x + 1$ (۴)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۴۶ حاصل عبارت $A = (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}) \cdot \sqrt[3]{2\sqrt{2}}$ ، کدام است؟

- ۱ $\sqrt{3}$ (۱) ۲ ۲ (۲) ۳ $1 + \sqrt{3}$ (۳) ۴ $2\sqrt{3}$ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۴۷ حاصل عبارت $\frac{\sqrt{8}}{2 - \sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{32}$ ، کدام است؟

- ۱ $-\sqrt{2}$ (۱) ۲ $1 - \sqrt{2}$ (۲) ۳ ۱ (۳) ۴ ۲ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۴۸ فرض کنید $a = \sqrt[4]{7 - 4\sqrt{3}}$ مقدار $(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2$ ، کدام است؟

- ۱ ۹ (۱) ۲ ۱۶ (۲) ۳ ۲۵ (۳) ۴ ۴۹ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۴۹ حاصل عبارت $\frac{x}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} - \frac{4x - 2}{x^2 - 1}$ برابر کدام است؟

- ۱ -۲ (۱) ۲ -۱ (۲) ۳ ۱ (۳) ۴ ۲ (۴)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۵۰ حاصل عبارت $\sqrt[4]{(4 + \sqrt{7})^{-1}} \sqrt{1 + \sqrt{7}}$ کدام است؟

- ۱ ۱ (۱) ۲ $\sqrt[4]{2}$ (۲) ۳ ۲ (۳) ۴ $2\sqrt[4]{2}$ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۵۱ خلاصه شده عبارت $(x + 3 + \frac{4}{x - 2}) \div (2 + \frac{2}{x - 2})$ ، کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}x - 2$ (۱) ۲ $\frac{1}{2}x + 1$ (۲) ۳ $\frac{1}{2}x + 2$ (۳) ۴ $x + \frac{1}{2}$ (۴)



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۵۲ ساده شده عبارت $(2 - \frac{4x-3}{x}) \div (\frac{4x^2-12x+9}{4x-6})$ کدام است؟

۱ $-\frac{x}{2}$

۲ $\frac{x}{2}$

۳ $\frac{-1}{2x}$

۴ $\frac{2x-3}{x}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

۵۳ خلاصه شده عبارت $(1 - \frac{1}{x+2}) \div (x - 5 + \frac{6}{x+2})$ کدام است؟

۱ $x+3$

۲ $x-3$

۳ $x-4$

۴ $x-6$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۵۴ ریشه هفتم عدد مثبت a ، مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{15}{7}$ است. $(\frac{1}{a} - 3)$ چند برابر $(1 + \sqrt{3})$ است؟

۱ $6 - 3\sqrt{3}$

۲ ۳

۳ ۶

۴ $6 + 3\sqrt{3}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۵۵ خلاصه شده عبارت $(\frac{x^2+9}{x+1} - 5)(x - \frac{x+6}{x-4})$ کدام است؟

۱ $x^2 + 3x - 4$

۲ $x^2 - 3x + 4$

۳ $x^2 + 5x + 6$

۴ $x^2 - 7x + 6$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

۵۶ حاصل عبارت $\frac{7-3\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ برابر کدام است؟

۱ -۲

۲ $1 - \sqrt{7}$

۳ ۲

۴ $2\sqrt{7}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

۵۷ حاصل $(2 + \frac{x^2}{x-4}) \div (1 + \frac{8}{x-4})$ کدام است؟

۱ $2x - 2$

۲ $x - 2$

۳ $x + 1$

۴ $x + 2$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۵۸ حاصل عبارت $\sqrt[3]{12} \times \sqrt[4]{54} \times \sqrt[2]{2\sqrt[4]{6}}$ کدام است؟

۱ $6\sqrt[3]{2}$

۲ $3\sqrt[6]{32}$

۳ $2\sqrt[3]{9}$

۴ ۶

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۵۹ حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{10}+2})(\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{3+\sqrt{5}})$ کدام است؟

۱ -۱

۲ $-\sqrt{2}$

۳ ۱

۴ $\sqrt{2}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

۶۰ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{27}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}} \times 81^{-\frac{3}{4}}}$ کدام است؟

۱ ۲۷

۲ ۸۱

۳ $27\sqrt[3]{3}$

۴ $81\sqrt[3]{3}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۶۱ حاصل عبارت $\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times 16^{-\frac{3}{4}}}$ کدام است؟

۱ $16\sqrt[3]{2}$

۲ $16\sqrt[3]{2}$

۳ $8\sqrt[3]{2}$

۴ $8\sqrt[3]{2}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

۶۲ اگر $\sqrt{x-a} + \sqrt{x-4} = 4$ باشد، حاصل عبارت $1 - \sqrt{x-a} + \sqrt{x-4}$ کدام است؟

۱ $\frac{a}{2}$

۲ $\frac{a}{4}$

۳ $\frac{1}{2}$

۴ $\frac{1}{4}$





مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۶۳ اگر حاصل عبارت $\sqrt[3]{\sqrt{2}} \times (\sqrt{3})^{\frac{4}{3}} (\sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}}$ ، به صورت $\sqrt[3]{A}$ باشد، کدام است؟

- ۱ $\sqrt{3} - 1$ ۲ $\sqrt{3}$ ۳ ۲ ۴ $\sqrt{3} + 1$

۶۴ فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می توان نوشت که فاصله حاصل ضرب ریشه های هر معادله با جمع ریشه های آن معادله، دو واحد باشد؟

- ۱ ۲۴ ۲ ۲۸ ۳ ۳۲ ۴ ۳۶

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۶۵ به ازای کدام مقادیر m ، از معادله $mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0$ فقط یک جواب برای x حاصل می شود؟

- ۱ $-\frac{3}{2} < m < 2$ ۲ $0 < m < 2$ ۳ $\frac{3}{2} < m < \frac{5}{2}$ ۴ $\frac{3}{2} < m < 2$

۶۶ به ازای کدام مقادیر m ، خط به معادله $y = mx + 2$ ، بر منحنی به معادله $x^2 + y^2 - 2x = 3$ مماس است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

- ۱ $-\frac{4}{3}$ و ۰ ۲ $\frac{4}{3}$ و ۰ ۳ $-\frac{2}{3}$ و ۱ ۴ $\frac{2}{3}$ و ۱

۶۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $(2m - 1)x^2 + 6x + m - 2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟ (با تغییر)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ $\{0\} - (-2, 2, 5)$ ۲ $\left\{\frac{1}{2}\right\} - (-2, 3, 5)$ ۳ $\left\{\frac{1}{2}\right\} - (-1, 3, 5)$ ۴ $\left\{\frac{1}{2}\right\} - (-1, 2, 5)$

۶۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $2x^2 + (m + 1)x + \frac{1}{2}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی است؟ (بزرگ ترین بازه ممکن را در نظر بگیرید).

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

- ۱ $-3 < m < 5$ ۲ $-3 < m < 4$ ۳ $-2 < m < 4$ ۴ $-1 < m < 5$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۶۹ به ازای کدام مقادیر a معادله درجه دوم $2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$ دارای دو ریشه حقیقی متمایز است؟

- ۱ $a < 2$ یا $a > 6$ ۲ $a < 3$ یا $a > 4$ ۳ $2 < a < 6$ ۴ $3 < a < 4$

۷۰ اگر $|x - 2| = 1$ باشد، نمودارهای دو تابع $f(x) = |x - 3| - |x - 4|$ و $g(x) = 2x^2 + x - 17$ در چند نقطه مشترک هستند؟ ([]، نماد جزء صحیح است).

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ فاقد نقطه مشترک

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۷۱ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1 - a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟

- ۱ $a < 1$ ۲ $a < -2$ ۳ $a > 3$ ۴ $-2 < a < 1$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۷۲ اگر عبارت $(a - 1)x^2 + (a - 1)x + 1$ به ازای هر مقدار x منفی باشد، a به کدام مجموعه تعلق دارد؟

- ۱ $\{a : 1 < a < 5\}$ ۲ $\{a : a < 1\}$ ۳ $\emptyset$ ۴ $\mathbb{R}$

۷۳ صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m + 2)x + m$ و نقطه تقاطع آن با محور عرض ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می تواند طول رأس سهمی $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ $-\frac{3}{4}$ ۴ $-\frac{1}{2}$

۷۴ خط به معادله $y = mx + 4$ با منحنی به معادله $y = -x^2 + 2x$ ، هیچ نقطه مشترکی ندارند. مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

- ۱ $m < 0$ ۲ $m > 4$ ۳ $-1 < m < 4$ ۴ $-2 < m < 6$





۷۵ به ازای کدام مقدار m نمودار تابع با ضابطه $y = (m - 2)x^2 - 3x + m + 2$ بالای محور x ها و مماس بر آن است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۳ (۴)

$\frac{5}{2}$ (۳)

$-\frac{5}{2}$ (۲)

-۳ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۵

۷۶ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m - 1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ ، همواره در زیر محور x ها است؟

$m > \frac{3}{2}$ (۴)

$1 < m < \frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2} < m < 1$ (۲)

$m < -\frac{1}{2}$ (۱)

۷۷ مجموع پول علی و اکرم ۱۰۰ تومان است. اگر علی ۱۰ تومان از پولش را به اکرم بدهد، آن گاه حاصل ضرب پول‌های باقیمانده آن‌ها ۴۷۵

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

تومان خواهد شد. پول اولیه اکرم کدام است؟

۹۱ (۴)

۸۵ (۳)

۱۵ (۲)

۹ (۱)

۷۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، هر نقطه از نمودار تابع $f(x) = (a - 1)x^2 + 2\sqrt{2}x + a$ بالای محور x ها است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

$1 < a < 2$ (۴)

$a > 2$ (۳)

$a > 1$ (۲)

$a < -1$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۷۹ به ازای کدام مقادیر m ، نمودار تابع $y = (m + 2)x^2 - 2mx + 1$ همواره در بالای محور x ها است؟

$-1 < m < 2$ (۴)

$-2 < m < 2$ (۳)

$-2 < m < -1$ (۲)

$m > -2$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۸۰ به ازای کدام مقادیر m ، عبارت $(m - 1)x^2 + 6x + 2m + 1$ ، برای هر مقدار دلخواه x مثبت است؟

$1 < m < 2.5$ (۴)

$1 < m < 2$ (۳)

$m > 2.5$ (۲)

$m < -2$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۸۱ به ازای کدام مقادیر m ، معادله درجه دوم $(m - 6)x^2 - 2mx - 3 = 0$ ، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

$3 < m < 6$ (۴)

$0 < m < 3$ (۳)

$m > 3$ (۲)

$m < -6$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۸۲ مجموع ریشه‌های حقیقی معادله $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ کدام است؟

-۴ (۴)

۲ (۳)

-۲ (۲)

۴ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

۸۳ اگر یکی از ریشه‌های معادله $x(ax^2 - x - 5) = 2$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۸۴ به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 - (m + 3)x + 5 = 0$ ، برابر ۶ می‌باشد؟

$-1, \frac{9}{5}$ (۴)

$-\frac{9}{5}, 1$ (۳)

۱ (۲)

$-\frac{9}{5}$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۸۵ به ازای کدام مقدار m ، ریشه‌های حقیقی معادله $mx^2 + 3x + m^2 = 2$ ، معکوس یک‌دیگرند؟

۲ (۴)

۱ (۳)

-۱ (۲)

-۲ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

۸۶ در معادله درجه دوم $2x^2 + ax + 9 = 0$ ، یک ریشه دو برابر ریشه دیگر است. مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

۱۰ (۴)

-۹ (۳)

-۸ (۲)

۷ (۱)

۸۷ به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه‌ی معادله‌ی درجه‌ی دوم $2x^2 - (m + 1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۸۸ معادله درجه دوم $2x^2 + mx + m + 6 = 0$ دارای دو ریشه مثبت است. بازه مقادیر m ، کدام است؟

$(-6, -4)$ (۴)

$(-6, 0)$ (۳)

$(-4, -2)$ (۲)

$(-4, 0)$ (۱)





۸۹. معادله درجه دوم $3x^2 + (2m - 1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، مقدار m کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۱. $\frac{7}{2}$ (۱) ۲. ۳ (۲) ۳. -۱ (۳) ۴. $-\frac{5}{2}$ (۴)

۹۰. به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a - 2)x + 14 - a = 0$ ، دارای دو ریشه متمایز مثبت است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۱. $-2 < a < 2$ (۱) ۲. $2 < a < 5$ (۲) ۳. $2 < a < 14$ (۳) ۴. $5 < a < 14$ (۴)

۹۱. فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ باشد. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان تشکیل داد به طوری که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل ضرب ریشه‌های همان معادله دو واحد بیشتر باشد؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۱. ۱۴ (۱) ۲. ۱۵ (۲) ۳. ۱۶ (۳) ۴. ۱۸ (۴)

۹۲. در معادله $3x^2 - 15x + m = 0$ ، اگر یکی از ریشه‌ها ۲ واحد از ریشه دیگر بیشتر باشد مقدار m کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۱. $\frac{59}{5}$ (۱) ۲. $\frac{63}{5}$ (۲) ۳. $\frac{59}{4}$ (۳) ۴. $\frac{63}{4}$ (۴)

۹۳. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، منحنی به معادله $y = (m + 2)x^2 + 3x + 1 - m$ محور x ها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱. $m > 1$ یا $m < -2$ (۱) ۲. $-2 < m < 1$ (۲) ۳. فقط $m < -2$ (۳) ۴. فقط $m > 1$ (۴)

۹۴. به ازای کدام مقدار a ، معادله درجه دوم $x^2 - 2(a - 2)x + 14 - a = 0$ ، دارای دو ریشه مثبت است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۱. $-2 < a < 2$ (۱) ۲. $2 < a < 5$ (۲) ۳. $2 < a < 14$ (۳) ۴. $5 < a < 14$ (۴)

۹۵. به ازای کدام m عدد $\frac{1}{8}$ واسطه عددی بین دو ریشه معادله $(m^2 - 4)x^2 - 3x + m = 0$ است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

۱. ۳ (۱) ۲. -۳ (۲) ۳. ۴ (۳) ۴. -۴ (۴)

۹۶. به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، معادله درجه دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ ، دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۱. $-1 < m < 0$ (۱) ۲. $m < 0$ (۲) ۳. $2 < m < 8$ (۳) ۴. $m > 8$ (۴)

۹۷. فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 5x = 0$ باشند و $\frac{1}{(x_1 + 1)^3}$ و $\frac{1}{(x_2 + 1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله هستند؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۱. $125x^2 + 16x = 1$ (۱) ۲. $125x^2 = 16x + 1$ (۲) ۳. $125x^2 = 12x + 1$ (۳) ۴. $125x^2 + 12x = 1$ (۴)

۹۸. α و β ریشه‌های معادله $ax^2 - 8x + 4 = 0$ است. اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ای با ریشه‌های برابر $\alpha\beta^2$ و $\alpha^2\beta$ باشند، مقدار $\log_{\sqrt{2}} a$ کدام است؟ ($a > 0$)
مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱. ۱ (۱) ۲. ۲ (۲) ۳. ۳ (۳) ۴. ۴ (۴)

۹۹. اگر α و β ریشه‌های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، مقدار $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چه قدر است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۱. ۲ (۱) ۲. ۳ (۲) ۳. ۴ (۳) ۴. ۶ (۴)

۱۰۰. به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m + 1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ می‌باشد؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۱. ۳ (۱) ۲. ۴ (۲) ۳. ۵ (۳) ۴. ۶ (۴)



۱۰۱ به ازای کدام مجموعه مقادیر m منحنی به معادله $y = (m - 2)x^2 - 2(m + 1)x + 12$ محور x ها را در دو نقطه به طولهای منفی، قطع می‌کند؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

- ۱ $m > 2$ ۲ $-1 < m < 2$ ۳ هر مقدار m ۴ هیچ مقدار m

۱۰۲ در معادله $3x^2 - 17x + m = 0$ یک ریشه از سه برابر ریشه دیگر ۳ واحد بیشتر است. مقدار m کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

- ۱ ۹ ۲ ۱۰ ۳ ۱۲ ۴ ۱۵

۱۰۳ اگر منحنی به معادله $y = 2x^2 - 4x + m - 3$ محور x ها را در دو نقطه به طولهای مثبت قطع کند، آنگاه مجموعه مقادیر m به کدام صورت است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

- ۱ $m > 3$ ۲ $3 < m < 4$ ۳ $3 < m < 5$ ۴ $4 < m < 5$

۱۰۴ اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + 2(a + 1)x + 2a - 1 = 0$ باشند، به ازای کدام مقدار a ، به ترتیب سه عدد α ، a و β تشکیل دنباله هندسی می‌دهند؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ -۲ ۲ ۲ ۳ -۱ ۴ ۱

۱۰۵ اگر a و b اعداد طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ باشند، مقدار $a + b$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ ۲ ۲ ۵ ۳ ۹ ۴ ۱۲

۱۰۶ به ازای دو مقدار a ، یک ریشه معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ ، سه برابر ریشه دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

- ۱ ۸ ۲ ۹ ۳ ۱۶ ۴ ۱۸

۱۰۷ در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

- ۱ ۱۰ ۲ ۱۲ ۳ ۱۴ ۴ ۱۵

۱۰۸ ریشه‌های معادله $x^2 - (a + 1)x + a = 0$ دو عدد متوالی طبیعی و ریشه‌های معادله $x^2 - (3a + 1)x + b = 0$ دو عدد زوج متوالی است. اختلاف حاصل ضرب ریشه‌های دو معادله کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

- ۱ ۳۳ ۲ ۲۱ ۳ ۱۳ ۴ ۹

۱۰۹ فرض کنید $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$. چند معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx - c = 0$ می‌توان نوشت که فاصله حاصل ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله دو واحد باشد؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱ ۲۴ ۲ ۲۸ ۳ ۳۲ ۴ ۳۶

۱۱۰ اگر α و β ریشه‌های متمایز معادله $ax^2 - ax - b = 0$ و $4\beta^2 + 2\alpha^2 - 2\beta = 17$ باشد، اختلاف ریشه‌های این معادله کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ $\frac{1}{5}$ ۲ $\frac{2}{5}$ ۳ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ۴ $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۱۱۱ فرض کنید x_1 و x_2 ریشه‌های معادله $x^2 - 4 = 0$ باشند، ریشه‌های کدام معادله $x_1^3 + \frac{1}{x_1}$ و $x_2^3 + \frac{1}{x_2}$ است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱ $4x^2 = 51x + 221$ ۲ $4x^2 + 51x = 221$ ۳ $4x^2 = 51x + 197$ ۴ $4x^2 + 51x = 197$

۱۱۲ نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طولهای α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ $-\frac{1}{3}$ ۲ $-\frac{2}{3}$ ۳ $\frac{1}{3}$ ۴ $\frac{2}{3}$

۱۱۳ ریشه‌های کدام معادله، از معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ ، یک واحد کمتر است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

- ۱ $x^2 - 3x + 1 = 0$ ۲ $x^2 + 3x + 1 = 0$ ۳ $x^2 - 5x + 2 = 0$ ۴ $x^2 + 5x + 2 = 0$





۱۱۴ اگر ریشه‌های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ دو برابر معکوس ریشه‌های معادله $4x^2 - 7x + 3 = 0$ باشد، مقدار a کدام است؟

- مرجع: سراسری - ۱۳۸۶
- ۱ -۱۴ ۲ -۱۲ ۳ -۸ ۴ -۶

۱۱۵ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. مقدار b کدام است؟

- مرجع: سراسری - ۱۳۸۷
- ۱ -۲ ۲ -۱ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{4}{3}$

۱۱۶ به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ۱ ۹ ۲ ۱۱ ۳ ۱۳ ۴ ۱۵

۱۱۷ اگر α, β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x - 4 = 0$ باشند، مجموعه جواب‌های کدام معادله، به صورت $\left\{1 + \frac{1}{\alpha}, 1 + \frac{1}{\beta}\right\}$ است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

- ۱ $4x^2 - 5x + 1 = 0$ ۲ $4x^2 - 3x + 1 = 0$ ۳ $4x^2 - 5x - 1 = 0$ ۴ $4x^2 - 3x - 1 = 0$

۱۱۸ ریشه‌های معادله $2x^2 - ax + b = 0$ نیم واحد از ریشه‌های معادله $2ax^2 + ax - 6 = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{4}\right]$ کدام است؟

- مرجع: سراسری - ۱۴۰۲
- ۱ -۴ ۲ -۳ ۳ -۲ ۴ -۱

۱۱۹ به ازای کدام مقدار m ، هر یک از ریشه‌های معادله درجه دوم $8x^2 - mx - 8 = 0$ ، توان سوم ریشه‌های معادله $x^2 - x - 2 = 0$ می‌باشد؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ۱ ۹ ۲ ۱۱ ۳ ۱۳ ۴ ۱۵

۱۲۰ اگر α و β ریشه‌های معادله $2x^2 - 3x = 1$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $8x^2 + kx - 1 = 0$ به صورت $\{\alpha^2\beta, \alpha\beta^2\}$ است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۹

۱۲۱ اگر α و β ریشه‌های معادله $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k مجموعه جواب‌های معادله $4x^2 - kx + 25 = 0$ به صورت $\left\{\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}\right\}$ است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

- ۱ ۲۷ ۲ ۲۸ ۳ ۲۹ ۴ ۳۱

۱۲۲ از تقسیم اندازه قطر یک مستطیل به طول آن، عدد طلایی حاصل می‌شود. مجذور نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

- ۱ $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ۲ $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ۳ $\frac{2}{1 + \sqrt{5}}$ ۴ $\frac{2}{3 + \sqrt{5}}$

۱۲۳ به ازای کدام مقادیر a ، معادله $x^3 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x = 4$ دارای سه ریشه حقیقی متمایز مثبت مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴ است؟

- ۱ $(-\infty, -4) - \{-5\}$ ۲ $(-\infty, -4)$ ۳ $(4, +\infty)$ ۴ $(4, +\infty) - \{5\}$

۱۲۴ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، از معادله $x - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ ، دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

- ۱ $m \geq 1$ ۲ $m < 2$ ۳ $1 \leq m < 2$ ۴ هیچ مقدار m

۱۲۵ منحنی به معادله $y = (x - 1)(x^2 - ax + a)$ محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. مجموعه مقادیر a به کدام صورت است؟

- مرجع: سراسری - ۱۳۸۳
- ۱ $-4 < a < 0$ ۲ $0 < a < 2$ ۳ $0 < a < 4$ ۴ $4 < a$



۱۲۶ اگر مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^4 - 7x^2 - 5 = 0$ به ترتیب s و p باشند حاصل عبارت $2sp^2 - 3sp + 2s$ کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- ۱ $59 - 7\sqrt{69}$ ۲ $7 + \sqrt{69}$ ۳ 50 ۴ $59 + 7\sqrt{69}$

۱۲۷ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + m$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند، طول‌های دو نقطه تلاقی دیگر آن با محور x ها کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

- ۱ 1 و $-\frac{1}{2}$ ۲ 1 و $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{3}{2}$ و -1 ۴ 3 و $-\frac{1}{2}$

۱۲۸ اگر یکی از ریشه‌های معادله $ax^2 - x - 5 = 0$ برابر ۲ باشد، مجموع دو ریشه دیگر آن کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

- ۱ -2 ۲ $-\frac{3}{2}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{3}{2}$

۱۲۹ اگر α و β ریشه‌های معادله $0 = 2 - 9x + kx^2 + 4x^3$ ، $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ باشد، مقدار k چقدر است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ $-\frac{27}{5}$ ۲ $\frac{27}{5}$ ۳ -3 ۴ 3

۱۳۰ معادله $(x^2 - 2x) = 2 - (x^2 - 2x)$ ، چند ریشه حقیقی متمایز دارد؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

- ۱ 1 ۲ 2 ۳ 3 ۴ 4

۱۳۱ معادله $x^5 - 3x + 1 = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

- ۱ 2 ۲ 3 ۳ 4 ۴ 5

۱۳۲ بُرد تابع $y = f(x)$ و $y = kf(x)$ برابر $[b, c]$ است. اگر $k = a^2 - 3a + 3$ باشد، حاصل ضرب مقادیر a کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

- ۱ 2 ۲ -2 ۳ 3 ۴ -3

۱۳۳ به ازای کدام مقدار m ، نمودار تابع $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ ، بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات، مماس است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

- ۱ -4 ۲ $-12, 4$ ۳ $12, -4$ ۴ 12

۱۳۴ اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+3)x^2 - 4x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

- ۱ -4 ۲ -1 ۳ 1 ۴ 4

۱۳۵ به ازای کدام مقادیر m ، منحنی $y = (m+2)x^2 - 2x + 1$ از هر چهار ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

- ۱ $m < -2$ ۲ $m < -1$ ۳ $-2 < m < -1$ ۴ $-4 < m < -2$

۱۳۶ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است، مثلی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیمم است. مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

- ۱ 30 ۲ 32 ۳ 34 ۴ 36

۱۳۷ اگر یکی از منحنی‌های تابع درجه‌ی دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با کدام طول مثبت قطع می‌کند؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

- ۱ 2 ۲ 3 ۳ 4 ۴ 6

۱۳۸ به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی به معادله $y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$ ، همواره پایین محور x ها است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ۱ $1 < m < 5$ ۲ $2 < m < 5$ ۳ $2 < m < 4$ ۴ $2 < m < 6$

۱۳۹ خط $y = -1$ بر نمودار تابع f ، $f(x) = 2x^2 - x + a$ مماس است. a کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۰

- ۱ $-\frac{9}{8}$ ۲ $-\frac{7}{8}$ ۳ $\frac{7}{8}$ ۴ $\frac{9}{8}$





۱۴۰ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ ، از ناحیه اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ مرجع: سراسری-۱۳۹۲

- ۱ $a \leq 2$ ۲ $0 < a \leq 2$ ۳ $2 < a < 3$ ۴ $0 < a < 2$

۱۴۱ اگر نمودارهای دوتابع با ضابطه‌های $y = 2x + b$ و $y = ax^2 + bx - 3$ روی محور x ها در نقطه‌ای به طول ۱- متقاطع باشند، a کدام است؟ مرجع: سراسری-۱۳۸۲

- ۱ 2 ۲ 3 ۳ 4 ۴ 5

۱۴۲ به ازای کدام مقادیر a ، منحنی $y = ax^2 - (a+2)x$ از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ مرجع: سراسری-۱۳۸۹

- ۱ $a \leq 2$ ۲ $a \leq -2$ ۳ $a > 0$ ۴ $-2 \leq a < 0$

۱۴۳ به ازای کدام مجموعه مقادیر a نمودار تابع $f(x) = ax^2 + (a+3)x - 1$ ، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های منفی قطع می‌کند؟ مرجع: خارج از کشور-۱۳۹۲

- ۱ $a < -9$ ۲ $a < -3$ ۳ $a > -1$ ۴ $-3 < a < 0$

۱۴۴ فرض کنید $A(-1, 9)$ رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه $(3, 1)$ باشد. این سهمی از کدام یک از نقاط زیر، می‌گذرد؟ مرجع: خارج از کشور-۱۳۹۹

- ۱ $(5, -7)$ ۲ $(5, -9)$ ۳ $(2, 5)$ ۴ $(1, 5)$

۱۴۵ فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 11)$ ، بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ مرجع: سراسری-۱۳۹۹

- ۱ $(-1, 3)$ ۲ $(-1, 4)$ ۳ $(2, 9)$ ۴ $(2, 15)$

۱۴۶ به ازای کدام مقدار a ، نمودار تابع $y = (1-a)x^2 + 2\sqrt{6}x - a$ ، همواره بالای محور x ها است؟ مرجع: خارج از کشور-۱۳۹۶

- ۱ $a < 1$ ۲ $a < -2$ ۳ $a > 3$ ۴ $-2 < a < 1$

۱۴۷ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶- قطع کرده و از نقطه $(-2, -6)$ می‌گذرد. $f(-1)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور-۱۳۸۹

- ۱ -8 ۲ -7 ۳ -5 ۴ -4

۱۴۸ منحنی $y = (2x+1)(x+8)$ با خطوط $y = mx$ نقطه مشترک ندارد. مجموعه مقادیر m چگونه است؟ مرجع: سراسری-۱۳۸۸

- ۱ $5 < m < 13$ ۲ $15 < m < 23$ ۳ $7 < m < 15$ ۴ $9 < m < 25$

۱۴۹ به ازای چند مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3+2a)x$ از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۱

- ۱ هیچ مقدار a ۲ تمام مقادیر a ۳ ۱ ۴ ۲

۱۵۰ رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد و برعکس. مقدار $b - a$ چقدر است؟ مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۱

- ۱ -6 ۲ 6 ۳ -18 ۴ 18

۱۵۱ کمترین مقدار تابع $y = mx^2 - 12x + 5m - 1$ برابر ۲ است. محور تقارن سهمی، کدام است؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۱

- ۱ $x = 2$ ۲ $x = 2,5$ ۳ $x = 3$ ۴ $x = 3,5$

۱۵۲ محور تقارن‌های سهمی‌های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط ۱ رسم شود، مقدار ab چقدر است؟ مرجع: سراسری-۱۴۰۲

- ۱ -8 ۲ -4 ۳ 8 ۴ 4



۱۵۳ سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ -1 را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره خط AB باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐

۱۵۴ اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ۱ ☐ اول ☐ دوم ☐ سوم ☐ چهارم ☐

۱۵۵ نمودار تابع $y = 3x^2 + (2m - 1)x + m + \frac{4}{3}$ در ناحیه دوم بر نیمساز آن ناحیه مماس است. طول رأس سهمی، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ ☐ $-\frac{1}{18}$ ☐ $-\frac{5}{18}$ ☐ $-\frac{7}{6}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۵۶ در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف a ، بیشترین مقدار سهمی $y = ax^2 + x + 2a$ برابر $-\frac{1}{2}$ است؟

- ۱ ☐ ۳ ☐ هیچ مقدار a ☐ ۲ ☐ ۴ ☐

۱۵۷ سهمی $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه سوم محورهای مختصات مماس است. مقدار a کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ۱ ☐ $-\frac{5}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{5}{2}$ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

۱۵۸ در یک دامنه محدود، برای چند مقدار مختلف a ، کمترین مقدار سهمی $y = ax^2 + 3x + a$ برابر $\frac{7}{8}$ است؟

- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ هیچ مقدار a ☐

۱۵۹ سهمی $y = ax^2 + 7x + 16a$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه چهارم محورهای مختصات مماس است. مقدار a ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

- ۱ ☐ $-\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ ۱ ☐ -۱ ☐

۱۶۰ صفرهای تابع $y = mx^2 - 4x - (m + 4)$ و نقطه تقاطع آن با محور y ها، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر ۳ باشد، اختلاف طول رأس سهمی‌های رسم شده توسط مقادیر مختلف m کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

- ۱ ☐ $\frac{9}{2}$ ☐ $\frac{9}{4}$ ☐ $\frac{9}{2}$ ☐ $\frac{9}{4}$ ☐

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۶۱ به ازای چند مقدار طبیعی از دامنه تابع $y = -\frac{1}{3-x}$ ، نمودار این تابع بالای $y = -4$ و پایین $y = 0$ قرار دارد؟

- ۱ ☐ ۴ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ ۱ ☐

۱۶۲ سهمی $y = -mx^2 + mx + 1$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ۱ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ صفر ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱۶۳ مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x-3}{x+1} < 3$ ، به کدام صورت است؟

- ۱ ☐ $\mathbb{R} - [-6, 4]$ ☐ $\mathbb{R} - [-4, 6]$ ☐ $x > 4$ ☐ $x < -6$ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۶۴ مجموعه جواب نامعادله $\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2}$ ، به صورت بازه، کدام است؟

- ۱ ☐ $(-4, 1) \cup (2, 3)$ ☐ $(2, 4)$ ☐ $(-1, 2) \cup (2, 4)$ ☐ $(-1, 2)$ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۶۵ مجموعه جواب نامعادله $\frac{2x-1}{x+1} < 3$ ، کدام است؟

- ۱ ☐ $(0, +\infty)$ ☐ $(4, +\infty)$ ☐ $\mathbb{R} - [-4, 0]$ ☐ $\mathbb{R} - [-4, -1]$ ☐



مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۱۶۶ مجموعه جواب نامعادله $1 < \frac{x+1}{2x-1} < 3$ کدام است؟

- ۱ (۰٫۶، ۱٫۵) ۲ (۰٫۸، ۱٫۲) ۳ (۱، ۲) ۴ (۰٫۸، ۲)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۱۶۷ مجموعه جواب نامعادله $3 < \frac{3x+1}{x-3} < -1$ به کدام صورت است؟

- ۱ $x < \frac{1}{2}$ ۲ $x < 3$ ۳ $-\frac{1}{2} < x < 3$ ۴ $\frac{1}{2} < x < 3$

۱۶۸ در بازه (a, b) عبارت $14x^2 + 73x + 15$ منفی و عبارت $|\frac{x-1}{2} - 1|$ بزرگتر از سه است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ $\frac{5}{3}$ ۲ $\frac{23}{3}$ ۳ $\frac{4}{15}$ ۴ $\frac{67}{15}$

۱۶۹ فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $0 < \frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(x - 3\sqrt{x} + 2)}{2x-3}$ به ازای $x > \frac{3}{2}$ بازه $[2, 4]$ باشد مقدار

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

 m کدام است؟

- ۱ -۲ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ ۲

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۱۷۰ اگر $0 < \frac{1-3x}{x+1} < -2$ باشد، مجموعه مقادیر $\left[\frac{x}{2}\right]$ چند عضو دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۱۷۱ فرض کنید مجموعه جواب نامعادله $0 \leq \frac{((m^2-1)x^2 - 4mx + 4)(2x-3)}{x-3\sqrt{x}+2}$ فقط یک بازه باشد. مقدار m کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱ -۱ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ ۲ ۴ $\frac{7}{3}$

۱۷۲ بازه $(-\frac{5}{4}, 0)$ بزرگترین بازه‌ای است که نمودار $y = -2x^2 - \frac{3}{2}x + c$ بالای نمودار $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

- ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{6}$

۱۷۳ بازه $(0, \frac{1}{2})$ بزرگترین بازه‌ای است که نمودار تابع $y = 2x^2 + \frac{3}{2}x + c$ پایین نمودار تابع $y = \frac{x}{|x|}$ قرار می‌گیرد. مقدار c کدام

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

است؟

- ۱ $-\frac{3}{4}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{1}{4}$ ۴ $-\frac{3}{8}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۷۴ مجموع ریشه‌های معادله $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{16}{9}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۱٫۷۵ ۳ ۲ ۴ ۲٫۲۵

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱۷۵ اگر $3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2$ باشد، حاصل $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

- ۱ ۱٫۵ ۲ ۲٫۵ ۳ ۳٫۵ ۴ ۴٫۵

مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

۱۷۶ حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- ۱ -۲ ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۴

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۷۷ اگر $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$ باشد، عدد $4a + 9$ کدام است؟

- ۱ ۴ ۲ ۶ ۳ ۱۵ ۴ ۲۱



مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۱۷۸ فاصله نقطه تلاقی منحنی‌های $y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ تا مبدأ مختصات کدام است؟

- ۱ $\sqrt{3}$ ۲ $\sqrt{6}$ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ $\sqrt{15}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۷۹ معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۱ ۴ ۰

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۱۸۰ معادله $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}+3} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۱ ۴ ۰

۱۸۱ تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x+\sqrt{-x^3+4x^2+25x-100}} + \sqrt{x^2+\sqrt{-x^2+6x-8}} = x+2$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۱ ۴ ۰

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۸۲ اگر $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$ باشد، حاصل عبارت $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} - 2$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۱ ۴ ۰

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۱۸۳ معادله $\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$ چند ریشه مثبت دارد؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۱ ۴ ۰

۱۸۴ سرعت یک قایق موتوری، در آب راکد ۱۰۰ متر در دقیقه است. این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه، چند متر در دقیقه است؟

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۵ ۳ ۲۰ ۴ ۲۵

۱۸۵ پرنده‌ای فاصله یک کیلومتر را در جهت موافق باد رفته و در جهت مخالف باد برگشته است. اگر سرعت باد ۵ کیلومتر در ساعت و مدت

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

رفت و برگشت ۹ دقیقه باشد، سرعت پرنده در هوای آرام، چند کیلومتر در ساعت است؟

- ۱ ۱۲ ۲ ۱۲٫۵ ۳ ۱۳٫۵ ۴ ۱۵

۱۸۶ بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام می‌شود. بهروز

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟

- ۱ ۳۲ ۲ ۳۳ ۳ ۳۵ ۴ ۳۶

۱۸۷ یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد با چهار کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده‌اند. با تبخیر چند کیلوگرم آن،

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

غلظت محلول به ۵۰ درصد می‌رسد؟

- ۱ ۰٫۴ ۲ ۰٫۵ ۳ ۰٫۶ ۴ ۰٫۸

۱۸۸ نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

به مستطیل اولیه کدام است؟

- ۱ $\sqrt{5} + ۰٫۳$ ۲ $\sqrt{5}(1 + ۰٫۲)$ ۳ $\sqrt{5} + ۰٫۲ + ۰٫۶$ ۴ $\sqrt{5}(1 + ۰٫۴)$

۱۸۹ اگر رابطه $|x+y+z| \leq |x| + |y| + |z|$ به رابطه‌ی تساوی تبدیل شود الزاماً سه عدد غیر صفر x, y, z چگونه‌اند؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

- ۱ مساوی هم ۲ هم علامت ۳ مثبت ۴ منفی

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۱۹۰ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ و $y = \frac{1}{2}x + 2$ ، کدام است؟

- ۱ ۸ ۲ ۹ ۳ ۱۰ ۴ ۱۲





۱۹۱ اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $g \circ f$ و خط به معادله $y = 3$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۴٫۵ ۴ ۶ مرجع: سراسری- ۱۳۹۵

۱۹۲ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = x + |x|$ و $y = 2 - |x|$ ، کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۷/۳ ۳ ۸/۳ ۴ ۳ مرجع: سراسری- ۱۳۹۵

۱۹۳ مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x) = |2x - 1|$ و محور x ها و دو خط $x = -1$ ، $x = 1$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۵/۲ ۴ ۳/۲ ۶ ۳ مرجع: سراسری- ۱۳۹۰

۱۹۴ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = |x| - x$ و $y = 2 - \frac{3}{2}x$ ، کدام است؟

- ۱ ۸/۳ ۴ ۲ ۱۶/۳ ۶ ۴ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۵

۱۹۵ مساحت ناحیه محدود به نمودارهای دو تابع $y = 5 - |x - 1|$ و $y = |x|$ ، کدام است؟

- ۱ ۸ ۹ ۲ ۱۰ ۱۲ ۴ مرجع: سراسری- ۱۳۹۷

۱۹۶ نمودارهای دو تابع $y = |x + 2| + |x - 1|$ و $3y + x = 17$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB کدام است؟

- ۱ ۲√۱۰ ۲ ۴√۵ ۳ ۲√۲ ۴ ۴√۳ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱۹۷ نمودار تابع $y = |2x - 6| - |x + 4| + x$ در یک بازه اکیداً نزولی است. ضابطه معکوس آن در این بازه کدام است؟

- ۱ $y = -x + 6; x < -4$ ۳ $y = -\frac{1}{2}x + 1; -4 < x < 3$ ۲ $y = -x + 5; x > 2$ ۴ $y = -\frac{1}{2}x + 1; -4 \leq x \leq 10$ مرجع: سراسری- ۱۳۹۴

۱۹۸ در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ ، بالاتر از نمودار تابع $y = 2x + |x|$ است. طول نقطه وسط این بازه کدام است؟

- ۱ -۲ ۲ -۱٫۵ ۳ -۱ ۴ -۰٫۵ مرجع: سراسری- ۱۳۹۷

۱۹۹ مجموع جواب‌های معادله $|2x - 1| + |x + 2| = 3$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{2}{3}$ ۳ ۱ ۴ $\frac{4}{3}$ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۵

۲۰۰ مجموعه جواب نامعادله $|x^2 + 1| > |x - 2| + 2x + 1$ ، به صورت کدام بازه‌ها است؟

- ۱ $(-2, 1)$ ۲ $(-1, 1)$ ۳ $(-1, 2)$ ۴ $(1, 2)$ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۵

۲۰۱ مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $1 > \left| \frac{2-x}{2x-3} \right|$ ، به صورت کدام بازه است؟ (با تغییر)

- ۱ $(1, \frac{3}{2})$ ۲ $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$ ۳ $(1, \frac{5}{3})$ ۴ $(\frac{5}{3}, 2)$ مرجع: سراسری- ۱۳۹۵

۲۰۲ در بازه (a, b) ، نمودار تابع با ضابطه $y = |2x^2 - 4|$ در زیر خط $y = 2x$ واقع است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۲۰۳ مجموعه جواب نامعادله $x^2 - 2x < |x - 2|$ ، به صورت کدام بازه است؟

- ۱ $(-1, 1)$ ۲ $(-1, 2)$ ۳ $(0, 2)$ ۴ $(1, 2)$ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۲

۲۰۴ در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = (x - 1)^2$ بالاتر از نمودار تابع $y = 4x^4$ است. بیش‌ترین مقدار $b - a$ ، کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ ۳/۲ ۳ ۲ ۴ ۵/۲ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

۲۰۵ مجموعه جواب نامعادله $x + |x| \leq \frac{1}{3}x + 3$ به کدام صورت است؟

- ۱ $[-4, 2]$ ۲ $[-6, 8]$ ۳ $[-6, 2]$ ۴ $[-2, 6]$

۲۰۶ نمودارهای دو تابع $y = |x - 2| + |x + 1|$ و $y = x + 7$ در دو نقطه A و B متقاطع هستند. اندازه پاره خط AB ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱ $8\sqrt{2}$ ۲ ۱۲ ۳ ۱۳ ۴ $10\sqrt{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۷۸

۲۰۷ مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x - 1) < |x| \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ $\{x : -1 < x < 1\}$ ۲ $\{x : -2 < x < 2\}$ ۳ $\{x : 0 < x < 2\}$ ۴ $\{x : -2 < x < 1\}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۲۰۸ مجموعه جواب نامعادله $(x - 4)|x| < 2x - 5$ به کدام صورت است؟

- ۱ $(1, 5)$ ۲ $(1 - \sqrt{6}, 1 + \sqrt{6})$ ۳ $(1, 5) \cup (1 + \sqrt{6}, +\infty)$ ۴ $(-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۲۰۹ اگر مجموعه جواب نامعادله $|x^2 - 2| < |x + 1| - 1$ بازه (a, b) باشد، طول وسط این بازه، کدام است؟

- ۱ $0,5$ ۲ ۱ ۳ $1,5$ ۴ ۲

۲۱۰ در بازه (a, b) ، نمودار تابع $y = \sqrt{x + 3}$ ، در بالای نمودار تابع $f(x) = |x - 1| - 2$ قرار دارد. بیشترین مقدار $(b - a)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

- ۱ ۶ ۲ ۷ ۳ ۸ ۴ ۹

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

۲۱۱ نامعادله $|2x - 3| < x$ معادل کدام نامعادله است؟

- ۱ $|x - 2| < 1$ ۲ $|x - 1| < 2$ ۳ $0 < |x - 2| < 1$ ۴ $0 < |x - 1| < 1$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۲۱۲ در بازه‌های مقادیر تابع با ضابطه $y = x^2$ کمتر از مقادیر تابع $y = |x - 2|$ است، آن بازه کدام است؟

- ۱ $(-2, 1)$ ۲ $(-1, 0)$ ۳ $(-1, 1)$ ۴ $(0, 1)$

۲۱۳ نمودار تابع $y = 4 - |x|$ در بازه (a, b) بالاتر از خط به معادله $2y + x = 5$ قرار دارد. بزرگ‌ترین مقدار $b - a$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

مرجع: سراسری - ۱۳۷۸

۲۱۴ مجموعه جواب دستگاه نامعادلات $\begin{cases} |x| < 2 \\ (2x - 1) < |x| \end{cases}$ کدام است؟

- ۱ $\{x : -1 < x < 1\}$ ۲ $\{x : -2 < x < 2\}$ ۳ $\{x : 0 < x < 2\}$ ۴ $\{x : -2 < x < 1\}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۲۱۵ تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2x - 3$ با دامنه $\{x : |x - 1| < 2\}$ همواره چگونه است؟

- ۱ منفی ۲ مثبت ۳ صعودی ۴ نزولی

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۲۱۶ در کدام بازه از مقادیر x ، نمودار تابع $f(x) = 5 - |x - 1|$ بالاتر از نمودار تابع $g(x) = |2x|$ قرار دارد؟

- ۱ $(-\frac{4}{3}, 1)$ ۲ $(-\frac{2}{3}, 1)$ ۳ $(-\frac{4}{3}, 2)$ ۴ $(-\frac{2}{3}, 2)$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۲۱۷ اگر جزء صحیح $(x^2 + x)$ برابر ۱ باشد، آن‌گاه $[x^2]$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ ۰ ۳ ۱ ۴ ۲

۲۱۸ برای هر عدد طبیعی $n > 2$ حاصل $\left[\sqrt{4n^2 - 3n + 1} \right] - 2 \left[\sqrt{n^2 - 2n} \right]$ کدام است؟ $([])$ ، نماد جزء صحیح است.

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴





مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

۲۱۹ تابع $f(x) = \frac{1}{[\cos \pi x]}$ در کدام بازه قابل تعریف است؟ $(\]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱ $(0, 1]$

۲ $(0, 1)$

۳ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

۴ $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۲۲۰ اگر $x^2 + x < 0$ باشد، حاصل $[x^4] + [x^3] + [x^2] + [x]$ کدام است؟

۱ -۲

۲ -۱

۳ ۰

۴ ۱

۲۲۱ نمودار تابع $y = x - [x]$; $x \in [-2, 3]$ از n پاره خط مساوی به اندازه l تشکیل شده است. دو تایی مرتب (n, l) کدام است؟

۱ $(4, 1)$

۲ $(4, \sqrt{2})$

۳ $(5, 1)$

۴ $(5, \sqrt{2})$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۲۲۲ اگر $f(x) = [x]$ ، مجموعه‌ی مقادیر $f(x - f(x))$ کدام است؟ $(\]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱ $\{0\}$

۲ $\{1\}$

۳ $\{0, 1\}$

۴ $\{-1, 0, 1\}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۲۲۳ در تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - 2[x]$ ، مقدار $f(-\frac{1}{2}f(\sqrt{3}))$ کدام است؟ $(\]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱ $1,75$

۲ $2,25$

۳ $2,5$

۴ $2,75$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۲۲۴ اگر $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$ باشد، مجموعه مقادیر $[3x]$ چند عضو دارد؟

۱ ۵

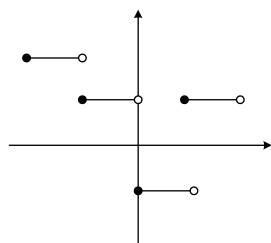
۲ ۶

۳ ۷

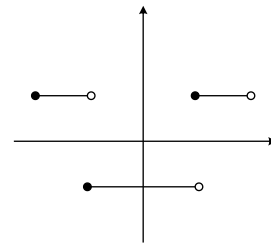
۴ ۸

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

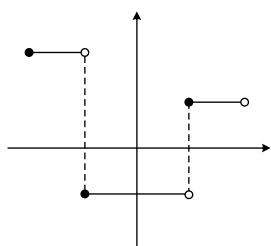
۲۲۵ نمودار تابع $y = 2|[3x]| - 1$ به ازای $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ کدام است؟



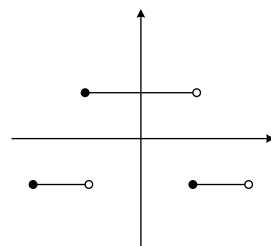
۲



۱



۴



۳

۲۲۶ نمودار تابع $y = 2[\frac{x}{2}] + 1$; $x \in [-2, 6)$ تشکیل شده است؟ $(\]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱ ۳

۲ ۴

۳ ۵

۴ ۶

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۲۲۷ نمودار تابع $y = [x^2]$ ، روی بازه $x \in (-2, 2)$ از چند پاره خط تشکیل شده است؟ $(\]$ ، نماد جزء صحیح است.)

۱ ۴

۲ ۵

۳ ۶

۴ ۷

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۲۲۸ دو ضلع یک مربع منطبق بر دو خط به معادلات $2x - 2y = 3$ و $y = x + 1$ هستند، مساحت این مربع کدام است؟

۱ $\frac{9}{8}$

۲ $\frac{9}{4}$

۳ $\frac{25}{8}$

۴ $\frac{25}{4}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲



۲۲۹ سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$, $AC: y - 2x = 5$, $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH از مثلث مفروض، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۳۷ + ۲x = ۹ (۴)

۳y - ۲x = ۷ (۳)

۹y - ۶x = ۱۷ (۲)

۶y - ۴x = ۱۵ (۱)

۲۳۰ معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$, $y = 2x$, و $x = 1$ است. معادله خطی که کوچک ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

$y + x = \frac{1}{3}$ (۴)

$y + x = \frac{2}{3}$ (۳)

$x = \frac{2}{3}$ (۲)

$y = \frac{2}{3}$ (۱)

۲۳۱ به ازای کدام مقدار a ، سه خط به معادلات $y + 2x = 0$, $2y + ax + 5 = 0$, $y + 3x = a$ همگی از یک نقطه می گذرند؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

نشدنی (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

-۱ (۱)

۲۳۲ نقطه $A(7, 6)$ رأس یک متوازی الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات $2y - 3x = 11$ و $3y + 4x = 8$ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

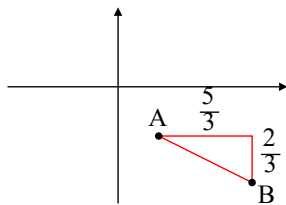
(۱, ۵) (۴)

(۳, ۵) (۳)

(۳, ۴) (۲)

(۴, ۳) (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۷۳



۲۳۳ در شکل زیر شیب خطی که از دو نقطه A , B می گذرد کدام است؟

$\frac{2}{5}$ (۲)

$\frac{5}{2}$ (۱)

$-\frac{5}{2}$ (۴)

$-\frac{2}{5}$ (۳)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

۲۳۴ مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$, $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

۷٫۵ (۴)

۷ (۳)

۶٫۵ (۲)

۶ (۱)

۲۳۵ مساحت متوازی الاضلاع محدود به خطوطی به معادلات $y = x + 3$ و $x = 4$ و محور y ها و نیمساز ناحیه اول برابر کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۷۷

مرجع: سراسری - ۱۳۷۷

۱۵ (۴)

۱۴ (۳)

۱۲ (۲)

۸ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۲۳۶ فاصله بین دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

$2 + \sqrt{3}$ (۴)

$\sqrt{3} + 1$ (۳)

$\sqrt{3} - 1$ (۲)

$2 - \sqrt{3}$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۲۳۷ به ازای کدام مقادیر a ، نقاط $(a, 3)$ و $(6, 4a + 1)$ و مبدأ مختصات در یک راستا قرار می گیرند؟

$2, -\frac{9}{4}$ (۴)

$-2, -\frac{3}{4}$ (۳)

$-2, \frac{3}{4}$ (۲)

$-2, \frac{9}{4}$ (۱)

۲۳۸ معادله خطی که به موازات نیمساز ناحیه اول و سوم بوده و نیمساز ناحیه دوم را در نقطه ای به طول $x = 2$ قطع می کند کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۷۸

مرجع: سراسری - ۱۳۷۸

$y - x = -4$ (۴)

$y - x = 4$ (۳)

$y + x = -4$ (۲)

$y + x = 4$ (۱)

۲۳۹ اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$, $2y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث در صفحه مختصات کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۶ (۴)

$3\sqrt{3}$ (۳)

۵ (۲)

$2\sqrt{5}$ (۱)

۲۴۰ مثلثی با رأس های $A(1, 5)$, $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

$4\sqrt{2}$ (۴)

۵ (۳)

$3\sqrt{2}$ (۲)

۴ (۱)



۲۴۱ دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

- ۱ ۷٫۲ ۲ ۹٫۶ ۳ ۱۱٫۴ ۴ ۱۲٫۸

۲۴۲ یک خط از دسته خطوط به معادله $(k+1)y + 2kx - k + 1 = 0$ بر خط گذرنده بر دو نقطه $(2, -1)$ و $(8, 3)$ عمود است، معادله آن خط کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

- ۱ $2y + 3x = 4$ ۲ $2y + 3x = 1$ ۳ $2y - 3x = -5$ ۴ $3y - 2x = -5$

۲۴۳ مساحت مثلثی که دو ضلع آن واقع بر خطوطی به معادلات $y + x = 2$ و $2y - x = 4$ و ضلع دیگر آن بر محور x قرار دارد کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۷۳

- ۱ ۵ ۲ ۶ ۳ ۷ ۴ ۸

۲۴۴ نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

- ۱ ۴۰ ۲ ۴۵ ۳ ۷۵ ۴ ۸۰

۲۴۵ دو نقطه بر خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند، که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

- ۱ $-15, 9$ ۲ $-15, 11$ ۳ $11, -9$ ۴ $-11, 15$

۲۴۶ شیب نیم‌خطی با نقطه شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است. مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم که نقطه B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-3, -1)$ باشد. محیط مستطیل کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- ۱ ۲۴ ۲ ۱۸ ۳ $6\sqrt{10}$ ۴ $3\sqrt{10}$

۲۴۷ نقطه $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم به‌طوری که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- ۱ $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ ۲ $(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2})$ ۳ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ ۴ $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۲۴۸ طول ارتفاع AH در مثلثی با رأس‌های $A(1, 9)$ ، $B(3, 3)$ و $C(7, 11)$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ $\sqrt{10}$ ۳ $2\sqrt{5}$ ۴ ۶

۲۴۹ فاصله نقطه A روی خط $x + y = a$ از دو نقطه $B(-3, 2)$ و $C(-1, 4)$ به‌ترتیب برابر $\sqrt{29}$ و ۵ است. مقدار a چقدر است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

- ۱ ۲ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ -2

۲۵۰ نقاط B ، C و $M(3, 2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازه میانه AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعده مثلث باشد. طول مختصات یک رأس A ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱ ۵ ۲ -2 ۳ -5 ۴ -8

۲۵۱ نقطه $(4, 5, 2)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن منطبق بر خطوط $4x + y = 3$ و $x - 4y = 5$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ $\frac{\sqrt{17}}{2}$ ۲ $\frac{\sqrt{17}}{4}$ ۳ $2\sqrt{17}$ ۴ $\sqrt{17}$

۲۵۲ دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه $(1, 2)$ یک رأس از مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ $2, 5$ ۲ $3, 5$ ۳ $\sqrt{46}$ ۴ $2\sqrt{34}$



۲۵۳ نقاط $A(2, 0)$ و $C(0, -1)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

مرجع: سراسری-۱۴۰۳

$(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$ ۴

$(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ ۳

$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ ۲

$(0, \frac{3}{2})$ ۱

۲۵۴ نقاط $A(-1, 4)$, $B(3, 1)$, $C(x, y)$ و $D(-1-x, y+3)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های D و C مجاور باشند، محیط

مرجع: سراسری-۱۴۰۲

مستطیل کدام است؟

۱۶ ۴

۱۵ ۳

۱۴ ۲

۱۳ ۱

۲۵۵ نقاط $A(x, y)$, $B(-1-x, y-3)$, $C(0, -3)$ و $D(-4, 0)$ رئوس یک مستطیل هستند. اگر رأس‌های A و B مجاور باشند،

مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۲

محیط مستطیل کدام است؟

۱۲٫۵ ۴

۱۵ ۳

۱۵٫۵ ۲

۱۲ ۱

۲۵۶ نقطه $A(4, 0)$ یک رأس مثلثی است که دو رأس دیگر آن روی خط $x - 3y = 1$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از

این خط بوده و نقطه $(\frac{7}{4}, \frac{1}{4})$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه اول محورهای مختصات کدام است؟

مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۳

۱٫۳۵ ۴

۱٫۶۵ ۳

$0.9\sqrt{0.9}$ ۲

$0.6\sqrt{0.6}$ ۱

۲۵۷ سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$, $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH .

مرجع: سراسری-۱۴۰۱

کدام است؟

۱ ۴

۲٫۵ ۳

۳ ۲

۴٫۴ ۱

۲۵۸ نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AC و BC مثلث ABC انتخاب شده‌اند. اگر $AM = 3CM$ و مساحت مثلث ABC ، ۲ برابر

مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۳

مساحت مثلث CMN باشد، مقدار $\frac{BN}{CN}$ کدام است؟

۰٫۲ ۴

۰٫۸ ۳

۰٫۷۵ ۲

۰٫۲۵ ۱

۲۵۹ نقطه $A(-5, -1)$ یک رأس مثلثی است که یک ضلع آن روی خط $x - 2y = 1$ قرار دارد. اگر طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از

این خط بوده و نقطه $(-4, -2)$ داخل این مثلث باشد، بیشترین مساحت چنین مثلثی در ناحیه سوم محورهای مختصات کدام است؟

مرجع: سراسری-۱۴۰۳

۶٫۴ ۴

۶ ۳

۴٫۲ ۲

۴ ۱



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۲ ابتدا طرفین تساوی داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} x = 7 - 2\sqrt{6} &\Rightarrow x^2 = (7 - 2\sqrt{6})^2 = 49 + 24 - 28\sqrt{6} = 73 - 28\sqrt{6} \\ \sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x} &= \sqrt{\frac{x^2 + 2x + 25}{25x}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73 - 28\sqrt{6} + 2(7 - 2\sqrt{6}) + 25}{7 - 2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{73 - 28\sqrt{6} + 14 - 4\sqrt{6} + 25}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{112 - 32\sqrt{6}}{7 - 2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{\frac{16(7 - 2\sqrt{6})}{7 - 2\sqrt{6}}} = \frac{\sqrt{16}}{5} = \frac{4}{5} = 0.8 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\sqrt{\frac{x+2}{25}} + \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{6}}{25}} + \frac{1}{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{6}}{25}} + \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25} = \sqrt{\frac{7 - 2\sqrt{6}}{25}} + \frac{7 + 2\sqrt{6}}{25} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۶۱-۱۳-۲۶

گزینه ۱ می‌دانیم که $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ است. داریم:

$$\begin{aligned} (x - 2)(x^2 - 4x + 4) - 1 &= (x - 2)(x - 2)^2 - 1 = (x - 2)^3 - 1 \\ &= ((x - 2) - 1)((x - 2)^2 + (x - 2) + 1) = (x - 3)(x^2 - 4x + 4 + x - 2 + 1) = (x - 3)(x^2 - 3x + 3) \end{aligned}$$

۴۱-۳۶-۲۳

گزینه ۴

باتوجه به صورت مسئله $a + b + c = 11$ و $ab + ac + bc = 3$ است.

طبق اتحاد مربع سه جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} (a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \Rightarrow (a + b + c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_x + 2(ab + ac + bc) \\ \Rightarrow (11)^2 &= x + 2(3) \Rightarrow 121 = x + 6 \Rightarrow 121 - 6 = x \Rightarrow x = 115 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 115 \end{aligned}$$

۴۲-۱۵-۴۳

گزینه ۳

$$\underbrace{x^3 - 3x^2}_{\text{فکتور از } x^3} + \underbrace{8x - 24}_{\text{فکتور از ۸}} = x^2(x - 3) + 8(x - 3) \xrightarrow{\text{فکتور از } (x-3)} (x - 3)(x^2 + 8) = (x - 3)(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

اتحاد جاق و لاغر

پس باتوجه به گزینه‌ها تنها، عامل $(x + 2)$ وجود دارد.

۲۹-۱۲-۵۹

گزینه ۱ ابتدا هر یک از کسرها را ساده می‌کنیم و مخرج آن‌ها را به صورت عددی گویا می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \times \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}} &= \frac{(1 - \sqrt{2})^2}{1 - 2} = -(1 - \sqrt{2})^2 = -(1 + 2 - 2\sqrt{2}) = -3 + 2\sqrt{2} \\ \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{12}} &= \frac{4\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2} \\ \Rightarrow \text{حاصل عبارت} &= -3 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -3 \end{aligned}$$

۴۷-۱۸-۳۶

گزینه ۶

$$a(a + 2) + 4b(b + 1) + 4ab = a^2 + 2a + 4b^2 + 4b + 4ab$$

با توجه به فرض مسئله که مقدار $a + 2b$ را داده است، بنابراین عبارت را باید طوری تجزیه کنیم که اتحادی حاصل شود که شامل عبارت $a + 2b$ باشد:

$$\underbrace{a^2 + 4ab + 4b^2}_{\text{اتحاد مربع کامل}} + \underbrace{2a + 4b}_2 = (a + 2b)^2 + 2(a + 2b) \xrightarrow{a+2b=3} (3)^2 + 2(3) = 9 + 6 = 15$$

۴۴-۹-۴۷

۷ گزینه ۳ می‌دانیم: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned} 5x - \frac{3}{2x} &= 4 \xrightarrow{\text{دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم}} \left(5x - \frac{3}{2x}\right)^2 = (4)^2 \rightarrow (5x)^2 - 2(5x)\left(\frac{3}{2x}\right) + \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 16 \\ \rightarrow 25x^2 - 15 + \frac{9}{4x^2} &= 16 \rightarrow 25x^2 + \frac{9}{4x^2} = 16 + 15 = 31 \end{aligned}$$

۵۱-۱۴-۳۵

۸ گزینه ۱

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad \text{و} \quad 4x^2 - 6x + \frac{1}{4}$$

$$4x^2 \xrightarrow{\text{جذر}} 2x$$

عبارت $6x$ برابر است با حاصل ضرب ۲ برابر جمله اول در جمله دوم. پس از عبارت اولی جذر می‌گیریم:

یعنی جمله اول اتحاد، $2x$ بوده است و حال اگر عبارت دوم را A در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$2(2x)(A) = 6x \xrightarrow{\text{حذف } x \text{ از طرفین}} 4A = 6 \Rightarrow A = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

یعنی جمله دوم اتحاد، $\frac{3}{2}$ بوده است. پس اتحاد دو جمله‌ای به صورت $\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2$ بوده است:

$$\left(2x - \frac{3}{2}\right)^2 = 4x^2 - 6x + \frac{9}{4}$$

حال باید دید به $\frac{1}{4}$ چه قدر اضافه کنیم تا برابر $\frac{9}{4}$ گردد:

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

۴۹-۹-۴۲

۹ گزینه ۳

$$(x^2 - 12)^2 - 16x^2 = (x^2 - 12)^2 - (4x)^2$$

$$= (x^2 - 12 - 4x)(x^2 - 12 + 4x) = (x^2 - 4x - 12)(x^2 + 4x - 12)$$

$$= (x - 6)(x + 2)(x + 6)(x - 2)$$

بنابراین گزینه ۳ بین عوامل تجزیه وجود ندارد.

۳۱-۱۹-۵۰

۱۰ گزینه ۳

$$(x + 3y^2)^2 - (x - 3y^2)^2$$

$$(x^2 + 6xy^2 + 9y^4) - (x^2 - 6xy^2 + 9y^4) = 6xy^2 + 6xy^2 = 12xy^2$$

ابتدا با اتحاد مربع دو جمله‌ای دو پرانتز را ساده می‌کنیم:

$$12xy^2 = 12\left(\frac{4}{3}\right) = 16$$

۳۴-۱۶-۵۰

۱۱ گزینه ۴ می‌دانیم: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$3x + \frac{1}{2x} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} \left(3x + \frac{1}{2x}\right)^2 = 5^2 \rightarrow (3x)^2 + 2(3x)\left(\frac{1}{2x}\right) + \left(\frac{1}{2x}\right)^2 = 25$$

$$\rightarrow 9x^2 + 3 + \frac{1}{4x^2} = 25 \rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 25 - 3 \rightarrow 9x^2 + \frac{1}{4x^2} = 22$$

۴۱-۱۸-۴۱

۱۲ گزینه ۳

$$a(a - 3)(a - 4) - \underbrace{12a + 36}_{\text{فاکتور از ۱۲}}$$



$$= \underbrace{a(a-3)(a-4)}_{\text{تجزیه از طریق اتحاد جمله مشترک}} - \underbrace{12(a-3)}_{\text{فاکتور از } a-3} = (a-3)[a(a-4)-12] = (a-3)[a^2-4a-12]$$

برای عبارت $a^2 - 4a - 12$ که آن را از طریق اتحاد جمله مشترک تجزیه می‌کنیم باید دو عدد پیدا کنیم که ضرب آن‌ها -12 و مجموع آن‌ها -4 باشد که این دو عدد، -6 و 2 می‌باشند پس داریم:

$$a-2 \text{ جزو عوامل تجزیه نمی‌باشد.} \rightarrow (a-3)(a-6)(a+2)$$

۴۹-۱۲-۳۹

گزینه ۲

$$4x^3 - 6x^2 + 2x \xrightarrow{\text{فاکتور از } 2x} 2x(2x^2 - 3x + 1)$$

عبارت داخل پرانتز را از طریق روش A تجزیه می‌کنیم:

$$A = 2x^2 - 3x + 1 \xrightarrow{\times 2} 2A = 4x^2 - 3(2x) + 2 \Rightarrow 2A = (2x-1)(2x-2) \\ \Rightarrow 2A = (2x-1)2(x-1) \rightarrow A = (2x-1)(x-1)$$

پس عبارت تجزیه شده‌ی نهایی به صورت $2x(2x-1)(x-1)$ است، که مشاهده می‌شود عامل $2x-1$ در تجزیه‌ی عبارت وجود دارد.

۴۴-۲۴-۳۴

۱۴ گزینه ۴ هر دو جمله‌ای که هر دو مربع کامل (مجذور کامل) باشند و بین آن‌ها علامت منفی وجود داشته باشد، را می‌توان از طریق اتحاد مزدوج؛ یعنی $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ تجزیه نمود.

$$(x^2 - 6x - 4)^2 - 144 = (x^2 - 6x - 4)^2 - (12)^2 = (x^2 - 6x - 4 + 12)(x^2 - 6x - 4 - 12) \\ = (x^2 - 6x + 8)(x^2 - 6x - 16)$$

حال هریک از عبارات را از طریق اتحاد جمله مشترک به دو عامل تجزیه می‌کنیم:

$$= (x-4)(x-2)(x+2)(x-8)$$

مشاهده می‌کنیم عامل $x+4$ بین عوامل تجزیه وجود ندارد.

۴۴-۲۵-۳۱

۱۵ گزینه ۳ در فرض سؤال در سمت چپ، مخرج مشترک گرفته و داریم:

$$\frac{1}{a^3+1} + \frac{1}{a^3-1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3-1+a^3+1}{(a^3+1)(a^3-1)} = 2 \Rightarrow \frac{2a^3}{a^6-1} = 2 \Rightarrow \frac{a^3}{a^6-1} = 1 \Rightarrow a^6-1 = a^3 \Rightarrow a^6 = a^3+1 \quad (1)$$

حال خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\frac{1}{a^3 - \sqrt{a^3+1}} + \frac{1}{a^3 + \sqrt{a^3+1}} \right)^{1401} = \left(\frac{a^3 + \sqrt{a^3+1} + a^3 - \sqrt{a^3+1}}{(a^3+1 - \sqrt{a^3+1})(a^3+1 + \sqrt{a^3+1})} \right)^{1401} = \left(\frac{2a^3+2}{(a^3+1)^2 - a^3} \right)^{1401} \xrightarrow{(1)} \left(\frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3} \right)^{1401} \\ \xrightarrow{(1)} \left(\frac{2a^3+2}{a^3+1+2a^3+1-a^3} \right)^{1401} = \left(\frac{2a^3+2}{2a^3+2} \right)^{1401} = 1^{1401} = 1$$

۳۷-۳۸-۲۵

گزینه ۲

$$B = \frac{2 + \sqrt{28}}{8 + \sqrt{28}} = \frac{2 + 2\sqrt{7}}{8 + 2\sqrt{7}} = \frac{1 + \sqrt{7}}{4 + \sqrt{7}}$$

$$3B+1 = \frac{3+3\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} + 1 = \frac{7+3\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}+3)}{4+\sqrt{7}} = \sqrt{7}$$

۳۱-۲۵-۴۴

۱۷ گزینه ۳ حاصل هر یک از پرانتزها را جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\left(\sqrt[3]{5 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3} + (-\sqrt{2})^2 \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[3]{5 + \frac{1}{9} + 2} \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\sqrt[3]{\frac{64}{9}} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ = \left(\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{9}} \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{\sqrt[3]{9}} \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[3]{3^2}} \right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{2}{3}}} \right)^{-\frac{3}{2}} = \frac{3^1}{3^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}} \right)^3 = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} \right)^3 = \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

پس داریم: $\frac{3}{8} + \frac{27}{8} = \frac{30}{8} = \frac{15}{4} = 3,75$

۷۰-۱۰-۲۰

گزینه ۴ روش اول:

هر عبارت را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} = \frac{(2x+1)^2}{x(2x+1)} = \frac{2x+1}{x}$$

$$x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{x(x-2) - (x^2 + 1)}{x} = \frac{x^2 - 2x - x^2 - 1}{x} = \frac{-2x - 1}{x} = \frac{-(2x+1)}{x}$$

$$\text{پس: } \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 + x} \div (x - 2 - \frac{x^2 + 1}{x}) = \frac{2x+1}{x} \div \left(\frac{-(2x+1)}{x} \right) = \frac{2x+1}{x} \times \frac{x}{-(2x+1)} = -1$$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً $x = 2$ را در عبارت قرار دهیم.

$$x = 2 \rightarrow \frac{16 + 8 + 1}{8 + 2} \div (2 - 2 - \frac{4 + 1}{2}) = \frac{25}{10} \div (-\frac{5}{2}) = \frac{25}{10} \times (-\frac{2}{5}) = -1$$

بنابراین گزینه‌ی چهارم صحیح است.

۳۷-۱۱-۵۲

گزینه ۱ ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}-1}{4+\sqrt{3}} \times \frac{4-\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}-9-4+\sqrt{3}}{16-3} = \frac{13\sqrt{3}-13}{13} = \frac{13(\sqrt{3}-1)}{13} = \sqrt{3}-1$$

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{27}-1}{4+\sqrt{3}} + (2-\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-1+2+\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3}$$

۶۶-۱۴-۲۰

گزینه ۱ ابتدا حاصل تک‌تک عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

(عدد مخلوط $3\frac{3}{8}$ را به کسر $\frac{27}{8}$ تبدیل می‌کنیم.)

$$\sqrt[3]{-3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{3^3}{2^3}} = \sqrt[3]{(-\frac{3}{2})^3} = -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2}} = \sqrt{1+2+2\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \sqrt{1+2-2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \overbrace{1-\sqrt{2}}^{\text{منفی}} = \sqrt{2}-1$$

$$(\frac{1}{4})^{-0,25} = 4^{0,25} = 4^{\frac{1}{4}} = (2^2)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{2}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل نهایی} = -\frac{3}{2} + (\sqrt{2}-1) - \sqrt{2} = -\frac{3}{2} - 1 = -\frac{5}{2} = -2,5$$

توجه کنید که: $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

۶۸-۸-۲۴

گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{24} &= \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3} \\ \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{3^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt[3]{24} \times \sqrt[3]{9} = 2\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{3^3} = 2 \times 3 = 6$$

مخرج کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \times \frac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} = \frac{(2-\sqrt{5})^2}{2^2-5} = \frac{4+5-4\sqrt{5}}{-1} = 4\sqrt{5}-9$$



$$\sqrt{80} = \sqrt{16 \times 5} = \sqrt{4^2 \times 5} = 4\sqrt{5}$$

$$\text{پس داریم: } = 6 + 4\sqrt{5} - 9 - 4\sqrt{5} = 6 - 9 = -3$$

۴۶-۱۱-۴۴

گزینه ۲

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{3}}{5 - \sqrt{6}} \times \frac{5 + \sqrt{6}}{5 + \sqrt{6}} = \frac{10\sqrt{2} + 2\sqrt{12} + 15\sqrt{3} + 3\sqrt{18}}{25 - 6} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 15\sqrt{3} + 9\sqrt{2}}{19} = \frac{19\sqrt{2} + 19\sqrt{3}}{19}$$

$$= \frac{19(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{19} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{2}{\sqrt[4]{3^2} - 1} = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \sqrt{3} + 1$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

روش دوم:

$$\frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{5 - \sqrt{6}} - 2(\sqrt[4]{9} - 1)^{-1} = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{27}}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2} \times \sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{8} + \sqrt{27})(\sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{8} + \sqrt{27}} - \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2}$$

$$= \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

۴۴-۳۶-۲۰

گزینه ۳

مقدار A را به ساده‌ترین حالت ممکن درمی‌آوریم:

$$A = \sqrt[5]{9\sqrt{3}(12)^{-1/5}} = \sqrt[5]{3^2 \times 3^{1/2} (2^2 \times 3)^{-1/5}} = \sqrt[5]{3^{5/2} (2^{-2} \times 3^{-1/5})}$$

$$= (3^{5/2})^{1/5} \times 2^{-2/5} \times 3^{-1/25} = 3^{1/2} \times 2^{-2/5} \times 3^{-1/25} = 3^{-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{پس: } (1 + A^{-1})^{1/2} = (1 + 24)^{1/2} = 25^{1/2} = (5^2)^{1/2} = 5$$

۴۶-۳۴-۳۰

گزینه ۳

ابتدا تک تک رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم.

$$\sqrt{50} = \sqrt{5^2 \times 2} = 5\sqrt{2}, \quad \sqrt{75} = \sqrt{3 \times 5^2} = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \times 3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}, \quad \sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

$$A = 2\sqrt{50} + 4\sqrt{75} - 5\sqrt{48} - 3\sqrt{8} \rightarrow A = 2(5\sqrt{2}) + 4(5\sqrt{3}) - 5(4\sqrt{3}) - 3(2\sqrt{2})$$

$$\rightarrow A = 10\sqrt{2} + 20\sqrt{3} - 20\sqrt{3} - 6\sqrt{2} \rightarrow A = 4\sqrt{2} \rightarrow A^2 = (4\sqrt{2})^2 = 16 \times 2 = 32$$

۵۲-۹-۳۹

گزینه ۲

روش اول:

ابتدا هر یک از پرانتزها را ساده می‌کنیم:

$$1 - \frac{6}{x+2} \stackrel{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{x+2-6}{x+2} = \frac{x-4}{x+2}$$

$$\frac{5x-2}{x-4} + x \stackrel{\text{مخرج مشترک}}{=} \frac{5x-2+x(x-4)}{x-4} = \frac{5x-2+x^2-4x}{x-4} = \frac{x^2+x-2}{x-4}$$



تجزیه صورت از طریق
اتحاد جمله مشترک

$$\frac{x-4}{x+2} \times \frac{(x+2)(x-1)}{x-4} = \frac{x-1}{1} = x-1$$

حال دو عبارت ساده شده را در هم ضرب می کنیم:

روش دوم:

یک عدد دلخواه، مثلاً $x = 1$ را در عبارت جایگزین می کنیم.

$$x = 1 \rightarrow (1 - \frac{6}{3})(\frac{3}{-3} + 1) = (1 - 2)(-1 + 1) = (-1)(0) = 0$$

فقط گزینه دوم است که اگر به جای x آن یک قرار دهیم حاصل برابر صفر می شود.

۴۱-۸-۵۱

گزینه ۱

$$\left. \begin{aligned} (\frac{\sqrt{2}}{2})^6 &= \frac{(\sqrt{2})^6}{2^6} = \frac{(\sqrt{2^3})^3}{2^6} = \frac{2^3}{2^6} = \frac{1}{2^3} \\ 2\frac{1}{4} &= \frac{9}{4} = \frac{3^2}{2^2} \\ (0,75)^{-3} &= (\frac{3}{4})^{-3} = (\frac{4}{3})^3 = \frac{(2^2)^3}{3^3} = \frac{2^6}{3^3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2^3} \times \frac{3^2}{2^2} \times \frac{2^6}{3^3} = \frac{3^2 \times 2^6}{2^5 \times 3^3} = \frac{2^{6-5}}{3^{3-2}} = \frac{2}{3}$$

۴۱-۱۳-۴۶

گزینه ۱

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab)$$

روش اول:

$$\begin{aligned} (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)(\frac{x}{(x-2)^2} - \frac{1}{x-2}) &= ((x^3 - 8) - 6x(x-2))\frac{x - (x-2)}{(x-2)^2} \\ &= ((x-2)(x^2 + 2x + 4) - 6x(x-2))\frac{x - x + 2}{(x-2)^2} = \underbrace{(x-2)(x^2 + 2x + 4 - 6x)}_{\text{فاکتور}} \frac{2}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2(x-2)(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2} = \frac{2(x-2)\cancel{(x-2)}^2}{\cancel{(x-2)}^2} = 2(x-2) = 2x - 4 \end{aligned}$$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً $x = 1$ را در عبارت جایگزین کنیم.

$$x = 1 \rightarrow (1 - 6 + 12 - 8)(\frac{1}{1-4+4} - \frac{1}{1-2}) = (-1)(1+1) = -2$$

تنها گزینه ی اول است که اگر به جای x آن عدد یک قرار دهیم حاصل برابر -2 می شود.

۴۴-۴-۵۲

گزینه ۲ می دانیم $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ است.

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[5]{4^3 \sqrt{16}} \times (\frac{1}{2})^{-\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^2 \sqrt{2^4}} \times 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^2 \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{4}{3}}} \times 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[5]{2^{\frac{10}{3}}} \times 2^{\frac{4}{3}} \\ &= (2^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{10}{15}} \times 2^{\frac{4}{3}} = 2^2 \end{aligned}$$

$$(2A)^{-\frac{1}{3}} = (2 \times 2^2)^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0,5$$

۷۳-۴-۲۳

گزینه ۳

حاصل هر یک از عبارت ها را جداگانه محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \sqrt{6}(\sqrt{2} - \sqrt{3}) &= \sqrt{12} - \sqrt{18} \stackrel{\text{ساده می کنیم}}{=} \sqrt{4 \times 3} - \sqrt{9 \times 2} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} \\ \sqrt{50} &= \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$



$$\frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

گویا می‌کنیم:

حال، حاصل عبارت خواسته شده را بدست می‌آوریم.

$$2\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} = 2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{8}$$

۴۰-۶-۵۴

گزینه ۴ برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته شده را کمی ساده می‌کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج مورد استفاده قرار می‌گیرند.

$$(a^2 + b^2 - 2ab)^2 (a^2 + b^2 + 2ab)^2 \stackrel{\text{مربع دو جمله‌ای}}{=} ((a-b)^2)^2 ((a+b)^2)^2 = (a-b)^4 (a+b)^4 = ((a-b)(a+b))^4 = (a^2 - b^2)^4$$

و اما $a^2 = \sqrt{\sqrt{6} - 2}$ و $b^2 = \sqrt{\sqrt{6} + 2}$ می‌شوند پس داریم:

$$((\sqrt{\sqrt{6} - 2} - \sqrt{\sqrt{6} + 2})^2)^2 = (\sqrt{6} - 2 + \sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{6 - 4})^2 = (2\sqrt{6} - 2\sqrt{2})^2 = 24 + 8 - 8\sqrt{12} = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3})$$

۴۷-۳۰-۲۳

گزینه ۲

$$\sqrt{\frac{x-1}{16} + \frac{1}{2x}} = \sqrt{\frac{x(x-1)+8}{16x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2-x+8}{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} + \frac{8}{x}} = \frac{1}{4}\sqrt{x-1+\frac{8}{x}}$$

از طرفی داریم:

$$x = 5 + \sqrt{17} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{5 + \sqrt{17}} \times \frac{5 - \sqrt{17}}{5 - \sqrt{17}} = \frac{5 - \sqrt{17}}{25 - 17} = \frac{5 - \sqrt{17}}{8}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = \frac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{17}) - 1 + 8(\frac{5 - \sqrt{17}}{8})} = \frac{1}{4}\sqrt{5 + \sqrt{17} - 1 + 5 - \sqrt{17}} = \frac{\sqrt{9}}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$$

۵۸-۹-۳۴

گزینه ۱

روش اول:

حاصل هر پرانتز را جداگانه حساب می‌کنیم.

$$1 + \frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{x^2 - 4 + 3x}{x^2 - 4} = \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4} = \frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$$

$$1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$$

$$\text{پس داریم: } \frac{(x+4)(x-1)}{(x-2)(x+2)} \times \frac{x-2}{x-1} = \frac{x+4}{x+2}$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x = 3$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم بنابراین داریم:

$$x = 3 \rightarrow (1 + \frac{9}{5}) \times (1 - \frac{1}{2}) = (\frac{14}{5}) \times (\frac{1}{2}) = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$$

فقط گزینه‌ی اول است که اگر به جای آن $x = 3$ قرار دهیم حاصلش برابر $\frac{7}{5}$ می‌شود.

۳۶-۹-۵۶

گزینه ۱ روش اول:

ابتدا در هر یک از پرانتزها مخرج مشترک می‌گیریم:

$$(x + \frac{2}{x-3}) \times (1 - \frac{1}{x-2}) = (\frac{x(x-3)+2}{x-3}) \times (\frac{x-2-1}{x-2})$$

اتحاد یک جمله‌ی مشترک

$$= \frac{x^2 - 3x + 2}{x-3} \times \frac{x-3}{x-2} = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} \times \frac{x-3}{x-2} = x-1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً $x = 1$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow (1 + \frac{2}{-2}) \times (1 - \frac{1}{-1}) = (1-1)(1+1) = 0$$

تنها در گزینه‌ی اول است که اگر به جای x عدد یک را قرار دهیم حاصل صفر می‌شود.

۳۹-۴-۵۷

گزینه ۱ روش اول:

$$\frac{3x(2x^2-1)}{2x+2} - \frac{x-2}{2x+2} + 2x = \frac{3x(2x^2-1) - (x-2) + 2x(2x+2)}{2x+2}$$

$$= \frac{6x^3 - 3x - x + 2 + 4x^2 + 4x}{2x+2} = \frac{6x^3 + 4x^2 + 2}{2x+2} = \frac{2(3x^3 + 2x^2 + 1)}{2(x+1)} = \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x+1}$$

حال با تقسیم صورت بر مخرج داریم:

$$\frac{3x^3}{x} = 3x^2, \quad 3x^2(x+1) = 3x^3 + 3x^2$$

$$\frac{-x^2}{x} = -x, \quad -x(x+1) = -x^2 - x$$

$$\frac{x}{x} = 1, \quad 1(x+1) = x+1$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 2x^2 + 1 \quad | \quad x+1 \\ \underline{3x^3 - x + 1} \\ -(2x^2 + 3x^2) \\ \underline{-x^2 + 1} \\ -(-x^2 - x) \\ \underline{x+1} \\ -(x+1) \\ \hline 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ حاصل عبارت $= 3x^2 - x + 1$

روش دوم: عدد دلخواهی مانند $x = 2$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 2 \rightarrow \frac{6(8-1)}{4+2} - \frac{0}{6} + 4 = \frac{42}{6} - 0 + 4 = 7 + 4 = 11$$

فقط گزینه‌ی اول است که اگر $x = 2$ را در آن قرار دهیم حاصل برابر ۱۱ می‌شود.

۷۱-۹-۱۹

۳۵ گزینه ۲ حاصل هر یک از عبارات را جداگانه به دست می‌آوریم. مخرج کسر اول را با استفاده از اتحاد مزدوج گویا می‌کنیم:

$$\frac{6}{2-\sqrt{7}} \times \frac{2+\sqrt{7}}{2+\sqrt{7}} = \frac{6(2+\sqrt{7})}{(2)^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{6(2+\sqrt{7})}{4-7} = \frac{6(2+\sqrt{7})}{-3} = -2(2+\sqrt{7}) = -4 - 2\sqrt{7}$$

حاصل عبارت دوم را با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست می‌آوریم:

$$(1+\sqrt{7})^2 = (1)^2 + 2(1)(\sqrt{7}) + (\sqrt{7})^2 = 1 + 2\sqrt{7} + 7 = 8 + 2\sqrt{7}$$

حال، این دو عبارت را با هم جمع می‌کنیم، در نتیجه داریم:

$$\text{حاصل نهایی عبارت} = -4 - 2\sqrt{7} + 8 + 2\sqrt{7} = 4$$

۴۴-۱۱-۴۵

۳۶ گزینه ۴

ابتدا در هر پرانتز، مخرج مشترک می‌گیریم.

روش اول:

$$(2x+1 - \frac{3}{x}) \div (2 + \frac{1}{x+1}) = (\frac{x(2x+1) - 3}{x}) \div (\frac{2(x+1) + 1}{x+1})$$

$$= \frac{2x^2 + x - 3}{x} \div \frac{2x+3}{x+1} = \frac{2x^2 + x - 3}{x} \times \frac{x+1}{2x+3}$$

$$\Rightarrow A = 2x^2 + x - 3 \xrightarrow{\times 2} 2A = 4x^2 + (2x) - 6 \Rightarrow 2A = (2x+3)(2x-2)$$

$$\Rightarrow 2A = (2x+3)2(x-1) \Rightarrow A = (2x+3)(x-1)$$

$$= \frac{(x-1)(\cancel{2x+3})}{x} \times \frac{x+1}{\cancel{2x+3}} = \frac{(x-1)(x+1)}{x} = \frac{x^2-1}{x} \stackrel{\text{تفکیک}}{=} \frac{x^2}{x} - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x}$$

روش دوم: کافی است یک عدد دلخواه مثلاً $x = 2$ را در عبارت جایگزین کنیم.

$$x = 2 \rightarrow (4+1 - \frac{3}{2}) \div (2 + \frac{1}{3}) = \frac{5}{2} \div \frac{7}{3} = \frac{5}{2} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{14}$$

فقط گزینه‌ی چهارم می‌باشد که اگر $x = 2$ را جایگزین کنیم حاصل برابر $\frac{15}{14}$ می‌شود.

۵۰-۵-۴۵



گزینه ۱ ۳۷ تک تک رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم و کسر اول را نیز گویا می‌کنیم.

$$\frac{2}{2 + \sqrt{5}} \times \frac{2 - \sqrt{5}}{2 - \sqrt{5}} = \frac{2(2 - \sqrt{5})}{4 - 5} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{-1} = 2\sqrt{5} - 4$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = 2\sqrt{5}$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{پس: } \frac{2}{2 + \sqrt{5}} - \sqrt{20} + \sqrt{48} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{5} - 4 - 2\sqrt{5} + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -4 + \frac{4 \times 3}{3} = -4 + 4 = 0$$

۳۴-۱۰-۵۶

گزینه ۴ ۳۸ داخل پرانتز اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x} = \frac{(\sqrt[3]{x^2} + 1 + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2} - 1)}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد جاق و لاغر}} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{x^2}} = 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow x^2 - 1 = 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

می‌دانیم معادله درجه ۲ به صورت $x^2 - sx + p$ است. درواقع مجموع ریشه‌ها ۲ خواهد بود.

داریم:

$$x_1 + x_2 = s = 2$$

۴۷-۳۵-۱۸

گزینه ۲ تک تک جملات را ساده کرده و حاصل عبارت را بدست می‌آوریم:

$$\frac{2}{3 - \sqrt{7}} = \frac{2}{3 - \sqrt{7}} \times \frac{3 + \sqrt{7}}{3 + \sqrt{7}} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{9 - 7} = \frac{2(3 + \sqrt{7})}{2} = 3 + \sqrt{7}$$

$$\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} = \underbrace{|2 - \sqrt{7}|}_{\text{منفی}} = -(2 - \sqrt{7}) = -2 + \sqrt{7}$$

$$\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = 2\sqrt{7}, \quad \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4 \times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\text{پس: } \frac{2}{3 - \sqrt{7}} + \sqrt{(2 - \sqrt{7})^2} - \sqrt{28} + \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{7} - 2 + \sqrt{7} - 2\sqrt{7} + 2 = 3$$

توجه کنید که $\sqrt{u^2} = |u|$ است.

۶۸-۶-۲۶

گزینه ۱ ۴۰ ابتدا کسر $\frac{2}{2 + \sqrt{6}}$ را گویا می‌کنیم:

$$\frac{2}{2 + \sqrt{6}} \times \frac{2 - \sqrt{6}}{2 - \sqrt{6}} = \frac{2(2 - \sqrt{6})}{(2)^2 - (\sqrt{6})^2} = \frac{2(2 - \sqrt{6})}{-2} = \frac{2 - \sqrt{6}}{-1} = -2 + \sqrt{6}$$

$$(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (2 \times 3) + 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} - (3 \times 2) = 6 - \sqrt{6} - 6 = -\sqrt{6}$$

$$\text{پس: } \frac{2}{2 + \sqrt{6}} + (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (-2 + \sqrt{6}) - \sqrt{6} = -2$$

۶۴-۷-۲۹

گزینه ۴ ابتدا تک تک رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم.

$$\sqrt{18} = \sqrt{3^2 \times 2} = 3\sqrt{2}, \quad \sqrt{27} = \sqrt{3^2 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{108} = \sqrt{3^2 \times 3 \times 2^2} = 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}, \quad \sqrt{200} = \sqrt{2 \times 10^2} = 10\sqrt{2}$$

$$A = \frac{2}{3}\sqrt{18} + 2\sqrt{27} - \sqrt{108} + 0.3\sqrt{200} \rightarrow A = \frac{2}{3}(3\sqrt{2}) + 2(3\sqrt{3}) - 6\sqrt{3} + \frac{3}{10}(10\sqrt{2})$$

$$\rightarrow A = 2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \rightarrow A = 5\sqrt{2} \rightarrow A^2 = (5\sqrt{2})^2 = 25 \times 2 = 50$$

۳۹-۶-۵۵

گزینه ۲ ۴۲

$$\left(1 - \frac{2}{x^2 + x^2}\right)\left(1 + \frac{2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2} = \left(\frac{x^2 + x^2 - 2}{x^2(x^2 + 1)}\right)\left(\frac{x^2 - 1 + 2}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2}$$

$$= \left(\frac{(x^2 + 2)(x^2 - 1)}{x^2(x^2 + 1)} \times \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right) - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 + 2 - 2}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

۲۸-۷-۶۵

گزینه ۴ ۴۳ هر کدام از سه عبارت را جداگانه محاسبه می کنیم:

$$\text{عبارت اول: } \sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{5^2} \times \sqrt[3]{2^3 \times 5} = \sqrt[3]{2^3 \times 5^3} = 2 \times 5 = 10$$

مخرج کسر را گویا می کنیم:

$$\text{عبارت دوم: } \frac{\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} \times \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2})}{(3)^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{9 - 8} = \frac{3\sqrt{2} - 4}{1} = 3\sqrt{2} - 4$$

$$\text{عبارت سوم: } \frac{1}{2}\sqrt{72} = \frac{1}{2}\sqrt{2^3 \times 3^2} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{حاصل نهایی: } 10 + 3\sqrt{2} - 4 - 3\sqrt{2} = 6$$

۳۳-۶-۶۲

گزینه ۱ ۴۴ هر عبارت را جداگانه محاسبه می کنیم:

$$\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{2^3}} = \frac{3}{2}, \quad (18)^{-2} = (2 \times 3^2)^{-2} = 2^{-2} \times 3^{-4} = \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^4}$$

$$(1/5)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)^4 = \frac{1}{5^4}, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = (2^2)^3 = 2^6$$

$$\text{پس داریم: } \frac{3}{2} \times \frac{1}{2^2} \times \frac{1}{3^4} \times \frac{3^6}{2^6 \times 3^4} = \frac{3^5 \times 3^6}{2^7 \times 3^4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

۲۹-۹-۶۲

گزینه ۱ ۴۵ روش اول:

$$\frac{x^2 + 4}{x + 4} + \frac{3x(x - 1)}{x + 4} = \frac{x^2 + 4 + 3x^2 - 3x}{x + 4} = \frac{x^2 + 3x^2 - 3x + 4}{x + 4}$$

حال کافی است صورت را بر مخرج تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x^2 - 3x + 4 & x + 4 \\ \hline x^2 + 4 & x^2 - x + 1 \\ \hline -x^2 - 3x + 4 & \\ \hline -(-x^2 - 4x) & \\ \hline x + 4 & \\ \hline -(x + 4) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{حاصل عبارت} = x^2 - x + 1$$

$$\frac{x^2}{x} = x^1, \quad x^2(x + 4) = x^3 + 4x^2$$

$$\frac{-x^2}{x} = -x, \quad -x(x + 4) = -x^2 - 4x$$

$$\frac{x}{x} = 1, \quad 1(x + 4) = x + 4$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً $x = 2$ را در عبارت جایگزین می کنیم.

$$\frac{3x(x - 1)}{x + 4} + \frac{x^2 + 4}{x + 4} \xrightarrow{x=2} \frac{6 \times 1}{2 + 4} + \frac{8 + 4}{2 + 4} = \frac{6}{6} + \frac{12}{6} = 1 + 2 = 3$$

فقط گزینه ی اول است که اگر در آن $x = 2$ را قرار دهیم حاصل ۳ می شود.

۲۳-۸-۶۹



گزینه ۴۶

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2+\sqrt{3}})^2 \sqrt{2}\sqrt{2} = A > 0$$

$$\Rightarrow A^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{4-3}) \times \left(\sqrt{2}\sqrt{2}\right)^2 = 6 \times 2 = 12 \Rightarrow A = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

۷۰-۷-۲۳

گزینه ۴۷ ابتدا کسر را گویا می‌کنیم (صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم):

$$\frac{\sqrt{8}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{8}(2+\sqrt{2})}{(2)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{8} + \sqrt{16}}{4-2}$$

$$= \frac{2\sqrt{4 \times 2} + 2}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 2}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{2} = 2\sqrt{2} + 1$$

از طرفی داریم:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{32} = -\frac{1}{2}\sqrt{16 \times 2} = -\frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

$$\text{پس: } \frac{\sqrt{8}}{2-\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} = 1$$

۴۵-۹-۴۶

گزینه ۴۸

$$a = \sqrt[4]{7-4\sqrt{3}} = \sqrt[4]{(2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

اکنون با استفاده از اتحادهای $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ و $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ به حل مسئله می‌پردازیم:

$$(a + \frac{1}{a} + \sqrt{2})^2 (a + \frac{1}{a} - \sqrt{2})^2 = [(a + \frac{1}{a})^2 - (\sqrt{2})^2]^2 = (a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 - 2)^2 = (2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}_{\text{گویا می‌کنیم}})^2$$

$$= (2 - \sqrt{3} + \underbrace{\frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}_{2-3})^2 = (2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3})^2 = 4^2 = 16$$

۳۳-۴۱-۲۶

گزینه ۴۹ روش اول: مخرج کسر سوم یعنی $x^2 - 1$ را طبق اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{x^2-1} = \frac{x}{x-1} + \frac{3}{x+1} - \frac{4x-2}{(x+1)(x-1)}$$

بین این سه مخرج، مخرج مشترک (ک.م.م) می‌گیریم:

$$= \frac{x(x+1) + 3(x-1) - (4x-2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + x + 3x - 3 - 4x + 2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)} = 1$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً $x = 2$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 2 \rightarrow \frac{2}{2-1} + \frac{3}{2+1} - \frac{6}{3} = 2 + 1 - 2 = 1$$

۵۸-۱۱-۳۱

گزینه ۵۰

$$\sqrt[4]{(4+\sqrt{7})^{-1}} \times \sqrt{1+\sqrt{7}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4+\sqrt{7}}} \times \sqrt[4]{(1+\sqrt{7})^2} = \frac{1}{\sqrt[4]{4+\sqrt{7}}} \times \sqrt[4]{1+7+2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt[4]{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt[4]{4+\sqrt{7}}} = \sqrt[4]{\frac{2(4+\sqrt{7})}{4+\sqrt{7}}} = \sqrt[4]{2}$$

۷۴-۶-۲۰

گزینه ۵۱ روش اول:

حاصل هر کسر را جداگانه محاسبه می‌کنیم. ابتدا عبارت اول:

$$x + 3 + \frac{4}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2) + 4}{x-2} = \frac{x^2 + x - 6 + 4}{x-2}$$

$$= \frac{x^2 + x - 2}{x-2} \stackrel{\text{اتحاد جمله‌ی مشترک}}{=} \frac{(x+2)(x-1)}{x-2}$$

حال عبارت دوم را ساده می‌کنیم:

$$2 + \frac{2}{x-2} = \frac{2(x-2) + 2}{x-2} = \frac{2x - 4 + 2}{x-2} = \frac{2x - 2}{x-2} = \frac{2(x-1)}{x-2}$$

برای تقسیم عبارت اول بر عبارت دوم، می‌توانیم عبارت اول را در معکوس عبارت دوم ضرب کنیم:

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-2} \times \frac{x-2}{2(x-1)} \stackrel{\text{ساده می‌کنیم}}{=} \frac{x+2}{2} \stackrel{\text{تفکیک می‌کنیم}}{=} \frac{x}{2} + \frac{2}{2} = \frac{1}{2}x + 1$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x = 3$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم:

$$(3 + 3 + \frac{4}{1}) \div (2 + \frac{2}{1}) = 10 \div 4 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2,5$$

تنها گزینه‌ی دوم است که اگر به جای x آن عدد ۳ قرار دهید حاصل برابر $2,5$ می‌شود.

۴۹-۵-۴۵

گزینه ۱

$$\frac{4x^2 - 12x + 9}{4x - 6} = \frac{(2x - 3)^2}{2(2x - 3)} = \frac{2x - 3}{2}$$

$$2 - \frac{4x - 3}{x} = \frac{2x - 4x + 3}{x} = \frac{-2x + 3}{x} = \frac{-(2x - 3)}{x}$$

$$\text{پس : } \frac{4x^2 - 12x + 9}{4x - 6} \div (2 - \frac{4x - 3}{x}) = \frac{2x - 3}{2} \div \frac{-(2x - 3)}{x} = \frac{2x - 3}{2} \times \frac{-x}{2x - 3} = \frac{-x}{2}$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً $x = 2$ را در عبارت قرار می‌دهیم:

$$x = 2 \Rightarrow \frac{16 - 24 + 9}{8 - 6} \div (2 - \frac{8 - 3}{2}) = \frac{1}{2} \div (\frac{-1}{2}) = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$$

تنها گزینه‌ای که به ازای $x = 2$ برابر -1 می‌شود گزینه‌ی اول است.

۵۵-۱۱-۳۴

گزینه ۳

روش اول:

$$\text{عبارت اول : } \frac{x-5}{1} + \frac{6}{x+2} = \frac{(x+2)(x-5) + 6}{x+2} = \frac{x^2 - 5x + 2x - 10 + 6}{x+2}$$

$$= \frac{x^2 - 3x - 4}{x+2} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+2}$$

$$\text{عبارت دوم : } 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+2-1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2}$$

برای محاسبه‌ی عبارت داده شده کافی است که عبارت اول را در عکس عبارت دوم ضرب کنیم.

$$\text{جواب} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+2} \times \frac{x+2}{x+1} = x-4$$

روش دوم:

عددی دلخواه مانند $x = 0$ در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow (0 - 5 + \frac{6}{2}) \div (1 - \frac{1}{2}) = (-5 + 3) \div (\frac{1}{2}) = (-2) \times 2 = -4$$

فقط گزینه‌ی سوم است که اگر $x = 0$ را در آن جایگزین کنیم حاصل برابر -4 می‌شود.

۵۴-۵-۴۱

گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$\frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = 27a^{\frac{10}{3}} \Rightarrow 27a^{\frac{1}{3}} = 1 \Rightarrow a^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{27} \xrightarrow{a>0} a = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$\text{عبارت مورد نظر : } \frac{\frac{1}{a} - 3}{1 + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{1 + \sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = \frac{3(4 - 2\sqrt{3})}{2} = 6 - 3\sqrt{3}$$



۷۴-۱۰-۱۶

گزینه ۴ ۵۵

روش اول:

ابتدا هریک از عبارات را جداگانه ساده می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{x}{1} - \frac{x+6}{x-4} & \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x(x-4) - (x+6)}{x-4} = \frac{x^2 - 4x - x - 6}{x-4} = \frac{x^2 - 5x - 6}{x-4} \xrightarrow{\text{تجزیه عبارت صورت از طریق اتحاد جمله‌ی مشترک}} \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \\ \frac{x^2+9}{x+1} - 5 & \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{x^2+9-5(x+1)}{x+1} = \frac{x^2+9-5x-5}{x+1} = \frac{x^2-5x+4}{x+1} \xrightarrow{\text{تجزیه عبارت صورت از طریق اتحاد جمله‌ی مشترک}} \frac{(x-1)(x-4)}{x+1} \end{aligned}$$

حالا عبارات ساده شده را جایگزین می‌کنیم:

$$\Rightarrow \left(x - \frac{x+6}{x-4}\right) \left(\frac{x^2+9}{x+1} - 5\right) = \frac{(x+1)(x-6)}{x-4} \times \frac{(x-1)(x-4)}{x+1} = (x-6)(x-1) = x^2 - x - 6x + 6 = x^2 - 7x + 6$$

روش دوم:

یک عدد دلخواه مثلاً $x = 2$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 2 \rightarrow \left(2 - \frac{2+6}{2-4}\right) \left(\frac{2^2+9}{2+1} - 5\right) = (2+4) \left(\frac{13-15}{3}\right) = (6) \left(\frac{-2}{3}\right) = -4$$

فقط گزینه‌ی چهارم است که اگر به جای x آن عدد ۲ قرار دهیم حاصل برابر -4 می‌شود.

۵۷-۷-۳۶

گزینه ۱ ۵۶ ابتدا حاصل تک تک عبارت‌ها را به دست آورده، سپس آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{7-3\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} & \xrightarrow{\text{مخرج را گویا می‌کنیم}} \frac{7-3\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} \times \frac{3+\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}} = \frac{(7-3\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}{3^2 - (\sqrt{7})^2} \\ & = \frac{21 + 7\sqrt{7} - 9\sqrt{7} - 3(\sqrt{7})^2}{9-7} = \frac{21 - 2\sqrt{7} - 21}{2} = \frac{-2\sqrt{7}}{2} = -\sqrt{7} \end{aligned}$$

از طرفی $\sqrt{a^2} = |a|$ و در نتیجه داریم:

$$\sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = |2-\sqrt{7}| \xrightarrow{\sqrt{7} \approx 2.6 \Rightarrow 2-\sqrt{7} < 0} -(2-\sqrt{7}) = \sqrt{7}-2$$

بنابراین حاصل نهایی عبارت برابر است با:

$$\frac{7-3\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}} + \sqrt{(2-\sqrt{7})^2} = -\sqrt{7} + \sqrt{7} - 2 = -2$$

۵۵-۱۰-۳۵

گزینه ۲ ۵۷ در هر پرازنز مخرج مشترک می‌گیریم:

روش اول:

$$\begin{aligned} \left(2 + \frac{x^2}{x-4}\right) + \left(1 + \frac{8}{x-4}\right) & = \frac{2(x-4) + x^2}{x-4} \div \frac{x-4+8}{x-4} = \frac{x^2+2x-8}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4} \\ & = \frac{(x+4)(x-2)}{x-4} \times \frac{x-4}{x+4} = x-2 \end{aligned}$$

روش دوم: یک عدد دلخواه مثلاً $x = 1$ را در عبارت جایگزین می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow \left(2 - \frac{1}{1}\right) \div \left(1 - \frac{8}{1}\right) = \frac{5}{3} \div \left(-\frac{5}{3}\right) = -1$$

تنها گزینه‌ی دوم است که اگر به جای x آن یک قرار دهیم حاصل برابر (-1) می‌شود.

۴۱-۵-۵۵

گزینه ۴ ۵۸

می‌دانیم: $2 = 3^2 \times 2 = 3^2 \times 2^1$, $54 = 27 \times 2 = 3^3 \times 2^1$, $12 = 3 \times 4 = 3 \times 2^2$

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{2^2 \times 3} \times \sqrt[4]{3^3 \times 2} \times \sqrt[4]{2^5 \times 3} & = \sqrt[4]{(2^2 \times 3)^4 \times (3^3 \times 2)^4 \times (2^5 \times 3)^4} \\ & = \sqrt[4]{2^8 \times 3^4 \times 3^{12} \times 2^8 \times 2^{10} \times 3^4} = \sqrt[4]{2^{24} \times 3^{24}} = 6 \end{aligned}$$

۶۴-۷-۲۹

گزینه ۱ ۵۹ می‌دانیم $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ پس عبارت $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + 2}$ را به صورت زیر ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + 2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

با فرض $A = \sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ داریم:

$$A^2 = (\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}})^2 = 3 - \sqrt{5} + 3 + \sqrt{5} - 2\sqrt{3 - \sqrt{5}} \times \sqrt{3 + \sqrt{5}}$$

$$A^2 = 6 - 2\sqrt{9 - 5} = 6 - 2\sqrt{4} = 6 - 4 = 2 \Rightarrow A^2 = 2 \Rightarrow A = \pm\sqrt{2}$$

توجه کنید که $\sqrt{3 - \sqrt{5}} < \sqrt{3 + \sqrt{5}}$ و $A < 0$ پس:

$$A = -\sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{10} + 2}\right) (\sqrt{3 - \sqrt{5}} - \sqrt{3 + \sqrt{5}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times (-\sqrt{2}) = -1$$

۷۰-۱۳-۱۷

گزینه ۲

$$\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{27}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3} \times 81^{-\frac{2}{3}}} = \frac{(3^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}} \times 3^{-\frac{2}{3}}} = \frac{3^{\frac{5}{9} + \frac{1}{9}}}{3^{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}}} = 3^{\frac{6}{9}} = 3^{\frac{2}{3}} = 81$$

۵۲-۱۱-۳۷

گزینه ۴

$$2\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{32}$$

$$2\sqrt{2} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{8}$$

$$16^{-\frac{3}{4}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}} \times 16^{-\frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{32}}}{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times 2^{-3}} = \frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[6]{8} \times \frac{1}{8}} = 8\sqrt[6]{\frac{32}{8}} = 8\sqrt[6]{4} = 8\sqrt[3]{2}$$

۵۷-۱۱-۳۲

گزینه ۲

$$(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-4})(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4}) = 4(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4})$$

$$\Rightarrow x - a - x + 4 = 4(\sqrt{x-a} - \sqrt{x-4})$$

$$\Rightarrow \frac{4-a}{4} = \sqrt{x-a} - \sqrt{x-4} \Rightarrow \frac{a-4}{4} = \sqrt{x-4} - \sqrt{x-a}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{a-4}{4} = 1 - \sqrt{x-a} + \sqrt{x-4}$$

$$\frac{a}{4} = 1 - \sqrt{x-a} + \sqrt{x-4}$$

۷۲-۷-۲۲

طبق فرض داریم: گزینه ۱

$$(2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times (2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[3]{A} \xrightarrow{\text{به توان سه}} (2 - \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} (2 + \sqrt{3})^{\frac{2}{3}} \times \sqrt{2} = A$$

$$\Rightarrow (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times (2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \cdot (2 + \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{2} = A$$

$$\Rightarrow A = ((2 - \sqrt{3})^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{2}) \times (4 - 3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

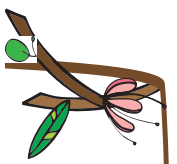
$$= \sqrt{3 + 1 - 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2} = |\sqrt{3} - 1| = \sqrt{3} - 1$$

۷۹-۷-۱۵

گزینه ۳

چون a و c مختلف‌العلامت هستند حتماً $\Delta > 0$ است. مجموع ریشه‌ها برابر $-\frac{b}{a}$ و حاصل ضرب ریشه‌ها برابر $-\frac{c}{a}$ است.

$$\text{فاصله} = \left| \frac{-c}{a} - \left(\frac{-b}{a} \right) \right| = \left| \frac{b-c}{a} \right| = 2 \Rightarrow |b-c| = 2a$$



بنابراین b و c باید طوری انتخاب شوند که تفاضلشان زوج باشد یعنی یا هر دو باید زوج باشند (دو زوج از بین ۲، ۴، ۶ و ۸) یا هر دو باید فرد باشند (دو فرد از بین ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹)

$$\binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 6 + 10 = 16$$

چون $b - c$ داخل قدرمطلق است پس b و c می‌توانند با هم جابه‌جا شوند یعنی ۳۲ حالت.

۲۲-۳۵-۴۴

گزینه ۲ ۶۵

$$mx - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \Rightarrow m(\sqrt{x})^2 - 3\sqrt{x} + m - 2 = 0 \quad (I)$$

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow mt^2 - 3t + m - 2 = 0$$

اگر این معادله دارای یک ریشه مثبت و یک ریشه منفی باشد، معادله I فقط یک ریشه دارد (زیرا امکان ندارد $\sqrt{x}$ برابر یک مقدار منفی باشد) و شرط آن که یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز مختلف‌العلامت باشد آن است که $\frac{c}{a} < 0$ باشد.

$$\frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-2}{m} < 0 \Rightarrow 0 < m < 2$$

دقت کنید اگر معادله $mt^2 - 3t + m - 2 = 0$ دارای یک ریشه مضاعف مثبت باشد نیز معادله I فقط یک جواب دارد.

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 9 - 4m(m-2) = 0 \Rightarrow 4m^2 - 8m - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \\ m = \frac{2 - \sqrt{13}}{2} \end{cases} \\ \frac{-b}{2a} > 0 \Rightarrow \frac{3}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0 \end{cases}$$

ریشه مضاعف

پس جواب می‌شود: $0 < m < 2 \cup \left\{ \frac{2 + \sqrt{13}}{2} \right\}$ بنابراین گزینه دوم می‌تواند صحیح باشد.

۱۲-۱۰-۷۸

گزینه ۲ ۶۶ هرگاه دو تابع برهم مماس باشند، معادله‌ی تلاقی آنها ریشه‌ی مضاعف دارد.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \\ y = mx + 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} x^2 + (mx + 2)^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + m^2 x^2 + 4 + 4mx - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (1 + m^2)x^2 + (4m - 2)x + 1 = 0 \quad \text{معادله‌ی تلاقی:}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (4m - 2)^2 - 4(1 + m^2)(1) = 0$$

$$\Rightarrow 16m^2 + 4 - 16m - 4 - 4m^2 = 0 \Rightarrow 12m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m(12m - 16) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{16}{12} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

۱۵-۹-۷۵

گزینه ۳ ۶۷ برای اینکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد باید $\Delta > 0$ باشد بنابراین:

$$\Delta \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m - 1)(m - 2) > 0 \Rightarrow 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = (m + 1)(2m - 7) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < m < 3,5$$

درضمن ضریب x^2 نباید صفر باشد یعنی $m \neq \frac{1}{2}$ است.

$$m \in (-1, 3,5) - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

۳۹-۲۷-۳۳

گزینه ۱ ۶۸ شرط آنکه معادله درجه دوم $2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2 = 0$ فاقد ریشه حقیقی باشد، آن است که دلتای معادله، منفی باشد. پس داریم:

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (m+1)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{4}m + 2\right) = (m^2 + 2m + 1) - 4m - 16 = m^2 - 2m - 15 = (m-5)(m+3) < 0$$

با توجه به جدول تعیین علامت زیر پاسخ مسئله بازه $(-3, 5)$ است:

$$\frac{m}{(m-5)(m+3)} \quad \begin{array}{c|ccc} -\infty & -3 & 5 & +\infty \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow -3 < m < 5$$

۳۸-۷-۵۶

گزینه ۱ ۶۹

اگر بخواهیم دو ریشه ی متمایز داشته باشیم Δ باید بزرگتر از صفر باشد پس داریم:

$$2x^2 + ax + a - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2 - 18a + 12 > 0 \Rightarrow (a-2)(a-6) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\text{عبارت}} \quad \begin{array}{c|ccc} -\infty & 2 & 6 & +\infty \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a > 6 \\ a < 2 \end{cases}$$

۵۵-۱۱-۳۴

می‌دانیم: $[x] = n, n \in \mathbb{Z} \rightarrow n \leq x < n+1$ گزینه ۴ ۷۰

$$[x-2] = 1 \rightarrow [x] - 2 = 1 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$$

در این بازه، قدر مطلق اول مثبت و قدر مطلق دوم منفی است.

$$f(x) = x - 3 - (-x + 4) = 2x - 7$$

اکنون باید توابع $f(x)$ و $g(x)$ را تلاقی دهیم.

$$2x^2 + x - 17 = 2x - 7 \rightarrow 2x^2 - x - 10 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 1 + 80 = 81$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ غلط} \\ x = \frac{1-9}{2} = -4 \text{ غلط} \end{cases}$$

هیچ کدام از دو x بدست آمده در بازه ی $3 \leq x < 4$ نمی‌باشد. بنابراین دو تابع فاقد نقطه ی مشترک در بازه ی داده شده هستند.

۷۶-۷-۱۷

توجه: تابع درجه دوم $y = Ax^2 + Bx + C$ همواره بالای محور x قرار دارد. هرگاه $\begin{cases} A > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ باشد. گزینه ۲ ۷۱

$$\begin{cases} 1-a > 0 \rightarrow a < 1 & (1) \\ \Delta < 0 \rightarrow 24 + 4a(1-a) < 0 \rightarrow 4a^2 - 4a - 24 > 0 \rightarrow a^2 - a - 6 > 0 \\ \rightarrow (a-3)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) = a < -2$$

۴۹-۲۳-۲۸

گزینه ۳ ۷۲

عبارت درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همواره منفی است هرگاه $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

باید $\Delta < 0$ و ضریب x^2 منفی باشد.

$$a - 1 < 0 \rightarrow a < 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (a-1)^2 - 4(a-1) < 0 \Rightarrow (a-1)(a-5) < 0 \Rightarrow 1 < a < 5$$

واضح است که دو بازه بالا هیچ اشتراکی با هم ندارند.

۳۸-۱۴-۴۸

$$y = 2x^2 - (m+2)x + m \Leftarrow \text{مجموع ضرایب معادله روبه‌رو صفر است.} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{m}{2} \end{cases} \text{گزینه ۴ ۷۳}$$

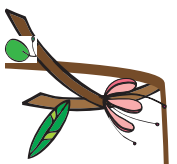
$$x = 0 \Rightarrow y = m \quad S = \frac{1}{2} \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{4} \Rightarrow \left| m \left(\frac{m}{2} - 1 \right) \right| = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |m(m-2)| = 3 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 3 \end{cases} \quad y = x^2 - mx + 1 \quad \begin{cases} \frac{m}{2} = -\frac{1}{2} \\ \frac{m}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

۸۱-۷-۱۲

یعنی اگر خط و منحنی را تلاقی دهیم معادله ی تلاقی نباید ریشه ی حقیقی داشته باشد. گزینه ۴ ۷۴

$$\begin{cases} y = -x^2 + 2x \\ y = mx + 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} -x^2 + 2x = mx + 4 \Rightarrow x^2 + (m-2)x + 4 = 0 \quad \text{معادله ی تلاقی:}$$



برای اینکه معادله‌ی تلافی ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد باید $\Delta < 0$ باشد.

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)^2 - 16 < 0 \Rightarrow (m-2)^2 < 16 \Rightarrow -4 < m-2 < 4 \Rightarrow -2 < m < 6$$

۶۱-۸-۳۲

گزینه ۳ ۷۵

هرگاه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ رو به بالا است $a > 0$ است و چون بر محور x مماس است $\Delta = 0$ است و معادله ریشه مضاعف دارد.

$$\text{شرط اول: } a > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\text{شرط دوم: } \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m-2)(m+2) = 0 \Rightarrow 25 - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{5}{2}$$

که با لحاظ کردن شرط $m > 2$ فقط حالت $m = \frac{5}{2}$ قابل قبول است.

۴۰-۷-۵۳

گزینه ۱ ۷۶

عبارت درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ همواره در زیر محور x ها است هرگاه $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$(1) \quad m-1 < 0 \Rightarrow m < 1 \quad (1)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow -4m^2 + 4m + 3 < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0 \Rightarrow (2m-1)^2 - 4 > 0 \Rightarrow |2m-1| > 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2m-1 > 2 \Rightarrow m > \frac{3}{2} \\ 2m-1 < -2 \Rightarrow m < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

۴۰-۱۸-۴۲

گزینه ۳ ۷۷ پول علی را x و پول اکرم را y فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ (x-10)(y+10) = 475 = 5 \times 95 \Rightarrow x = 15, y = 85 \end{cases}$$

بنابراین پول اکرم ۸۵ تومان بوده است.

البته می‌توانید از رابطه اول $x - y = 100$ را حساب کرده و در رابطه پایین قرار دهید که محاسبات وقت گیر و دشوار می‌شود.

۲۲-۳۹-۳۸

می‌دانیم تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور x ها قرار دارد، اگر $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد داریم:

$$\begin{cases} a-1 > 0 \Rightarrow a > 1 \quad (I) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (2\sqrt{2})^2 - 4(a-1)(a) < 0 \Rightarrow 8 - 4a^2 + 4a < 0 \Rightarrow a^2 - a - 2 = (a-2)(a+1) > 0 \\ \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -1 \quad (II) \end{cases}$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow a > 2$$

۴۹-۱۷-۳۴

توجه: شرط اینکه نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ همواره بالای محور x ها قرار گیرد. (همواره مثبت باشد) این است که $a > 0$ و $\Delta < 0$ باشد.

$$y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$$

$$\begin{cases} a = m+2 > 0 \Rightarrow m > -2 \quad I \\ \Delta = 4m^2 - 4(m+2) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m - 8 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 < m < 2 \Rightarrow (m-2)(m+1) < 0 \Rightarrow m^2 - m - 2 < 0$$

۴۱-۱۹-۴۰

برای این که عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت باشد، باید $a > 0$ و $\Delta < 0$ بنابر این داریم:

$$\begin{cases} m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I) \\ \Delta < 0 \Rightarrow 6^2 - 4(m-1)(2m+1) = -4(2m^2 - m - 10) < 0 \\ \Rightarrow 2m^2 - m - 10 = (2m-5)(m+2) > 0 \Rightarrow m < -2 \text{ or } m > \frac{5}{2} \quad (II) \end{cases}$$

از اشتراک روابط (I) و (II)، $m > \frac{5}{2}$ یا $m > 2.5$ به دست می‌آید.

۳۹-۱۴-۴۷

شرط آنکه یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > 0$ ، $S < 0$ و $P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac > 0} 4m^2 - 4(m-6)(-3) > 0 \Rightarrow m^2 + 3m - 18 > 0 \Rightarrow (m+6)(m-3) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -6 \text{ یا } m > 3 \quad (I)$$

$$S < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m}{m-6} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 0 < m < 6 \quad (II)$$

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-3}{m-6} > 0 \Rightarrow m-6 < 0 \Rightarrow m < 6 \quad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $3 < m < 6$ می‌رسیم.

۵۷-۱۶-۲۷

۸۲ گزینه ۲ $x^2 + x$ را متغیر جدید A در نظر می‌گیریم. معادله به صورت زیر خواهد شد:

$$A^2 - 18A + 72 = 0 \Rightarrow (A-12)(A-6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -1 \\ A=6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \alpha' + \beta' = -\frac{b}{a} = -1 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta + \alpha' + \beta' = -2$$

۵۶-۹-۳۵

۸۳ گزینه ۲ ابتدا با قرار دادن $x=2$ در معادله داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x-2$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x^2 - 5x - 2 \\ -(2x^3 - 4x^2) \\ \hline 3x^2 - 5x - 2 \\ -(3x^2 - 6x) \\ \hline x - 2 \\ -(x - 2) \\ \hline 0 \end{array}$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه دیگر که ریشه‌های معادله درجه دوم داخل پرانتز است، برابر با $-\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$ می‌شود.

۶۳-۱۷-۲۰

۸۴ گزینه ۱ اگر x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، داریم:

$$x' + x'' = -\frac{b}{a} = \frac{m+3}{m}, \quad x'x'' = \frac{c}{a} = \frac{5}{m}$$

$$\text{فرض مسأله: } x'^2 + x''^2 = 6 \Rightarrow (x' + x'')^2 - 2x'x'' = 6 \Rightarrow \left(\frac{m+3}{m}\right)^2 - \frac{10}{m} - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{m^2 + 6m + 9}{m^2} - \frac{10}{m} - 6 = 0 \xrightarrow{\times m^2} m^2 + 6m + 9 - 10m - 6m^2 = 0$$

$$\Rightarrow 5m^2 + 4m - 9 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} m=1 \xrightarrow{\text{معادله}} x^2 - 4x + 5 = 0 : \Delta = 16 - 20 < 0 \text{ غ ق} \\ m=-\frac{9}{5} \rightarrow \Delta > 0 \text{ است و نیازی به چک کردن گزینه ها نیست} \end{cases}$$

۵۷-۲۵-۱۸

۸۵ گزینه ۲ معادله را به صورت $mx^2 + 3x + m^2 - 2 = 0$ مرتب می‌کنیم.

$$x' = \frac{1}{x''} \Rightarrow x'x'' = 1 \Rightarrow \frac{c}{a} = 1 \Rightarrow \frac{m^2 - 2}{m} = 1 \Rightarrow m^2 - 2 = m \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m=2, m=-1$$

$$\text{معادله} \quad m=2 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 16 = -7 < 0 \text{ غیر قابل قبول}$$

$$\text{معادله} \quad m=-1 \rightarrow -x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0 \text{ قابل قبول}$$

۴۹-۲۰-۳۱

۸۶ گزینه ۳ ریشه‌های معادله داده شده را α و β در نظر می‌گیریم و طبق فرض $\alpha = 2\beta$ است.



$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 2\beta^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow \beta^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \beta = \pm \frac{3}{2} \Rightarrow a = \pm 3$$

می‌دانیم جواب‌های معادله برابر $\alpha + \beta = 3 + \frac{3}{2}$ است:

$$-\frac{a}{2} = \pm 2 \pm \frac{3}{2} = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \pm 9$$

۳۷-۵-۵۸

۸۷ گزینه ۴ اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را α و β بنامیم در این صورت $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$ است. $(\alpha, \beta > 0)$

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2} \\ P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{16} \end{cases} \rightarrow \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = 2 \rightarrow \sqrt{S + 2\sqrt{P}} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} S + 2\sqrt{P} = 4$$

$$\rightarrow \frac{m+1}{2} + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \rightarrow \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \rightarrow \frac{m+2}{2} = 4 \rightarrow m+2 = 8 \rightarrow m = 6$$

۵۸-۹-۳۳

۸۸ گزینه ۴ برای این منظور باید $\Delta > 0, S > 0, P > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow m^2 - 4(m+6) > 0 \rightarrow m^2 - 4m - 24 > 0 \rightarrow (m-12)(m+4) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -4 \text{ یا } m > 12 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -\frac{m}{2} > 0 \rightarrow -m > 0 \rightarrow m < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{m+6}{2} > 0 \rightarrow m+6 > 0 \rightarrow m > -6 \quad (III)$$

از اشتراک I, II, III به جواب $-6 < m < -4$ می‌رسیم.

۴۸-۱۸-۳۴

۸۹ گزینه ۱ اگر α و β ریشه‌های حقیقی معادله‌ی درجه‌دوم داده شده باشند طبق فرض داریم:

$$\alpha + \beta = \frac{1}{\alpha\beta} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{\frac{c}{a}} \rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{a}{c} \rightarrow a^2 = -bc \rightarrow a^2 + bc = 0 \rightarrow 9 + (2m-1)(2-m) = 0 \rightarrow 9 + 4m - 2m^2 - 2 + m = 0$$

$$\rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \xrightarrow{a+c=b} m = -1, m = -\frac{c}{a} = \frac{7}{2}$$

$$m = -1 \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 - 3x + 3 = 0 \rightarrow \Delta = 9 - 36 < 0 \text{ ریشه حقیقی ندارد}$$

$$m = \frac{7}{2} \xrightarrow{\text{معادله}} 3x^2 + 6x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow \Delta = 36 + 18 > 0 \text{ قابل قبول}$$

۳۷-۳۵-۲۸

۹۰ گزینه ۴ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} > 0$ باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \rightarrow (a-2)^2 - (14-a) > 0$$

$$\rightarrow a^2 + 4 - 4a - 14 + a > 0 \rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 5 : I$$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow 14 - a > 0 \rightarrow a < 14 : II$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \rightarrow 2(a-2) > 0 \rightarrow a-2 > 0 \rightarrow a > 2 : III$$

از اشتراک I و II و III به جواب $5 < a < 14$ می‌رسیم.

۵۱-۲۱-۲۸

۹۱ گزینه ۳

$$S = P + 2 \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{-c}{a} + 2 \xrightarrow{\times a} -b = -c + 2a \Rightarrow c - b = 2a$$

دقت کنید صورت سؤال $ax^2 + bx - c = 0$ داده شده است و با فرض مثبت بودن c معادله همواره جواب دارد $(\Delta > 0)$ در ضمن $P = \frac{-c}{a}$ می‌شود.

$$\text{if } a = 1 \Rightarrow \text{حالت ۷} \Rightarrow c \text{ باید ۲ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \begin{cases} c = 3, 4, \dots, 9 \\ b = 1, 2, \dots, 7 \end{cases}$$

$$\text{if } a = 2 \Rightarrow \text{حالت ۵} \Rightarrow c \text{ باید ۴ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد} \Rightarrow \begin{cases} c = 5, 6, 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

۳ حالت $\Rightarrow \begin{cases} c = 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3 \end{cases} \Rightarrow c$ باید ۶ واحد بزرگتر از b باشد. $\Rightarrow$ if $a = 3$

۱ حالت $\Rightarrow \begin{cases} c = 9 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow c$ باید ۸ واحد بزرگتر از b باشد. $\Rightarrow$ if $a = 4$

در مجموع ۱۶ حالت یا ۱۶ معادله خواهیم داشت.

۴۵-۳۷-۱۸

۹۲ گزینه ۴

اگر x' و x'' ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$d = |x' - x''| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

اختلاف جواب‌ها

راه حل دوم:

در این سؤال $d = 2$ است:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{225 - 12m}}{3} = 2 \Rightarrow \sqrt{225 - 12m} = 6$$

$$\Rightarrow 225 - 12m = 36 \Rightarrow m = \frac{63}{4}$$

۴۲-۹-۴۹

۹۳ گزینه ۱

یعنی این معادله درجه دوم باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد.

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1-m}{m+2} < 0 \Rightarrow m < -2 \text{ یا } m > 1$$

توجه کنید که چون $\frac{c}{a} < 0$ است، معادله قطعاً دو ریشه حقیقی دارد. پس $\Delta > 0$ بررسی نمی‌گردد.

۴۴-۱۵-۴۲

۹۴ گزینه ۴ شرط وجود دو ریشه مثبت در معادله درجه دوم این است که $\Delta, S, P > 0$ باشد:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4(a-2)^2 - 4(14-a) > 0 \Rightarrow 4a^2 - 12a - 40 > 0 \Rightarrow a^2 - 3a - 10 > 0 \Rightarrow (a-5)(a+2) > 0 \Rightarrow a < -2 \text{ یا } a > 5 \quad (I)$$

$$S > 0 \Rightarrow S = -\frac{2(a-2)}{1} > 0 \Rightarrow a > 2 \quad (II)$$

$$P > 0 \Rightarrow P = \frac{14-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 14 \quad (III)$$

$$I \cap II \cap III \Rightarrow 5 < a < 14$$

توجه: در معادله درجه دوم هرگاه $\frac{c}{a} > 0$ باید شرط $\Delta > 0$ بررسی گردد و اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، معادله دو ریشه حقیقی دارد و نیاز به بررسی $\Delta > 0$ نیست.

۴۲-۲۱-۳۸

۹۵ گزینه ۴

اگر x_1 و x_2 ریشه‌های معادله باشند، $x_1, \frac{1}{x_1}, x_2$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند. پس داریم:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{x_1} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{x_1} \xrightarrow{-\frac{b}{a} = \frac{1}{4}} \frac{3}{m^2 - 4} = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

باید $\Delta > 0$ باشد (x_1, x_2 ریشه‌های حقیقی معادله‌اند).

$$m = 4 \Rightarrow 12x^2 - 3x + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 192 < 0 : \text{ غ ق ق}$$

$$m = -4 \Rightarrow 12x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \Delta > 0 : \text{ ق ق ق}$$

۷۰-۸-۲۲

۹۶ گزینه ۱ شرط آنکه یک معادله‌ی درجه‌ی دوم دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز مثبت باشد آن است که $\Delta > 0$ و $S > 0$ و $P > 0$ باشد.

$$S > 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow -(m-2) > 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

بنابراین گزینه‌های سوم و چهارم حذف می‌شوند.

$$P > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \rightarrow \text{گزینه‌ی دوم حذف می‌شود}$$

بنابراین بدون اینکه شرط $\Delta > 0$ را اعمال کنیم گزینه‌ی اول انتخاب می‌شود.



۶۰-۲۵-۱۵

گزینه ۱ $x^2 + x = 5$ است که در آن $S = x_1 + x_2 = -1$ و $P = x_1 x_2 = 5$ است. از طرفی $x(x+1) = 5$ است.

$$\Rightarrow \frac{1}{x_1 + 1} = \frac{x_1}{5}, \quad \frac{1}{x_2 + 1} = \frac{x_2}{5}$$

پس معادله‌ای پیدا می‌کنیم که ریشه‌هایش $\frac{x_1^3}{125}$ و $\frac{x_2^3}{125}$ باشد:

$$\begin{cases} S' = \frac{1}{125}(x_1^3 + x_2^3) = \frac{1}{125}(S^3 - 3SP) = \frac{-16}{125} \\ P' = \frac{1}{5^3}(x_1 x_2)^3 = \frac{1}{5^3}P^3 = -\frac{1}{125} \end{cases}$$

پس معادله موردنظر به صورت $x^3 + \frac{16}{125}x - 1 = 0$ است:

$$\Rightarrow 125x^3 + 16x = 1$$

۴۱-۳۹-۲۱

گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} \alpha^r \beta + \alpha \beta^r &= \alpha^r \beta \cdot \alpha \beta^r \xrightarrow{\div \alpha \beta} \alpha + \beta = \alpha^r \beta^r \\ \Rightarrow S &= P^r \Rightarrow \frac{-b}{a} = \left(\frac{c}{a}\right)^r \\ \frac{-(-8)}{a} &= \left(\frac{4}{a}\right)^r \Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{16}{a^r} \Rightarrow a = 2 \\ \log_{\sqrt{2}} 2 &= 2 \text{ مقدار مورد نظر} \end{aligned}$$

۷۴-۶-۲۰

گزینه ۳ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با توجه به معادله داده شده داریم:

$$\begin{cases} S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = 3 \\ P = \alpha \beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} \Rightarrow k^2 = \beta + \alpha + 2\sqrt{\alpha\beta} = 3 + 2 \times \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow k = 2$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{4}}} = 4$$

۵۰-۱۰-۴۰

گزینه ۴ می‌دانیم که در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع جذر هر دو ریشه برابر است با:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}, \quad S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

پس در این سؤال داریم:

$$\begin{aligned} 2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} &= 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = \frac{m+1}{2}, \quad P = \frac{c}{a} = \frac{1}{16} \\ \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} &= \sqrt{\frac{m+1}{2} + 2\sqrt{\frac{1}{16}}} = 2 \xrightarrow{\text{به توان دو می‌رسانیم}} \frac{m+1}{2} + \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow m = 6 \end{aligned}$$

۴۹-۱۰-۴۱

گزینه ۴

سهمی موردنظر محور x ها را در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند، یعنی معادله زیر دو ریشه منفی دارد. پس باید سه شرط $\Delta > 0$ (زیرا دو ریشه دارد) و $\frac{c}{a} > 0$ (ضرب دو عدد منفی، مثبت است) و $-\frac{b}{a} < 0$ (جمع دو عدد منفی، منفی است) را لحاظ کنیم.



$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (-2(m+1))^2 - 4(m-2)(12) > 0$$

$$\Rightarrow 4(m^2 + 2m + 1 - 12m + 24) > 0 \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} (m^2 - 10m + 25) > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0$$

$$\Rightarrow m \in \mathbb{R} - \{5\}$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2 \quad (1)$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2(m+1)}{m-2} < 0 \xrightarrow{m-2 > 0} m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (2)$$

مجموعه‌های (۱) و (۲) هیچ اشتراکی ندارد.

۵۶-۱۷-۲۶

گزینه ۲

اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

در اینگونه تست‌ها ابتدا با توجه به صورت سوال رابطه‌ای بین x_1 و x_2 می‌نویسیم و سپس یک رابطه‌ی دیگر بین x_1 و x_2 از خود معادله می‌یابیم:

$$x_1 = 3x_2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -3 \\ x_1 + x_2 = \frac{17}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5$$

$$4x_2 = \frac{8}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}$$

$x_1 = 5$ را در معادله جای گذاری می‌کنیم:

$$f(5) = 3(5)^2 - 17(5) + m = 75 - 85 + m = 0 \Rightarrow m = 10$$

۵۹-۶-۳۵

باید معادله $2x^2 - 4x + m - 3 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت باشد.

گزینه ۳

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(m-3) = 40 - 4m$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 40 - 4m > 0 \Rightarrow m < 10$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ضرب دو ریشه مثبت است} \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m-3 > 0 \Rightarrow m > 3 \\ \text{جمع دو ریشه مثبت است} \Rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow 2 > 0 \end{array} \right\}$$

۵۴-۱۲-۳۴

با نوشتن شرط تشکیل دنباله هندسی داریم:

گزینه ۴

$$x^2 + 2(a+1)x + 2a - 1 = 0$$

$$\alpha, a, \beta \xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} a^2 = \alpha \cdot \beta = p \Rightarrow a^2 = \frac{2a-1}{1} = 2a-1 \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Rightarrow (a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

توجه کنید که به ازای $a = 1$ معادله حاصل دارای دو ریشه متمایز است.

$$x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0$$

۴۰-۱۹-۴۱

چون a و b ریشه‌های معادله $x^2 - (a^2 + b^2 - 12)x + a + b - 1 = 0$ هستند، داریم:

گزینه ۲

$$a - b = \frac{a + b - 1}{1} \Rightarrow ab = a + b - 1 \quad (1)$$

$$a + b = \frac{-(a^2 + b^2 - 12)}{1} = a^2 + b^2 - 12$$

از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$a + b = (a+b)^2 - 2ab - 12 \xrightarrow{(1)} a + b = (a+b)^2 - 2(a+b-1) - 12$$

با فرض $a + b = t$ داریم:

$$t = t^2 - 2(t-1) - 12 = t^2 - 2t + 2 - 12 \Rightarrow t^2 - 3t - 10 = 0$$

$$(t-5)(t+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = -2 \end{cases}$$

۷۵-۵-۲۰

اگر α و β ریشه‌های معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ باشند، داریم:

گزینه ۳

$$\alpha = 3\beta, \alpha\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow 3\beta^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow \beta^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \beta = \pm \frac{2}{3}$$

ریشه معادله در معادله صدق می‌کند، پس:



$$\beta = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x^2 - ax + 4 = 0 \Rightarrow 3 \times \frac{4}{9} - \frac{2a}{3} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{2a}{3} + 4 = 0 \xrightarrow{\times 3} 4 - 2a + 12 = 0 \Rightarrow 16 = 2a \Rightarrow a = 8$$

$$\beta = -\frac{2}{3} \Rightarrow 3x^2 - ax + 4 = 0 \Rightarrow 3 \times \frac{4}{9} + \frac{2a}{3} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2a}{3} + 4 = 0 \xrightarrow{\times 3} 4 + 2a + 12 = 0 \Rightarrow a = -8$$

$$\text{اختلاف مقادیر} = 8 - (-8) = 16$$

روش دوم:

نکته: در معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ اگر یکی از ریشه‌ها k برابر ریشه دیگر باشد، داریم:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

طبق نکته فوق $k = 3$ است و داریم:

$$3x^2 - ax + 4 = 0, k = 3 \Rightarrow \frac{(-a)^2}{3 \times 4} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{12} = \frac{16}{3} \Rightarrow a^2 = \frac{12 \times 16}{3} = 64 \Rightarrow a = \pm 8$$

۶۲-۹-۲۹

۱۰۷ گزینه ۲ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با فرض این که x' و x'' ریشه‌های معادله باشند، رابطه $\frac{x''}{2} + 5 = x'$ بین آنها برقرار است.

$$x^2 - 8x + m = 0 \Rightarrow \begin{cases} S = x' + x'' = 8 \Rightarrow \frac{3x''}{2} + 5 = 8 \Rightarrow \frac{3x''}{2} = 3 \Rightarrow x'' = 2 \Rightarrow x' = \frac{2}{2} + 5 = 6 \\ P = x'x'' = m \Rightarrow 6 \times 2 = m \Rightarrow m = 12 \end{cases}$$

۵۲-۱۰-۳۸

۱۰۸ گزینه ۲

$$x^2 - (a+1)x + a = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = a \end{cases} \xrightarrow{\text{دو ریشه فرد متوالی}} a = 3$$

$$x^2 - (3a+1)x + b = 0 \xrightarrow{a=3} x^2 - 10x + b = 0 \xrightarrow{\text{دو ریشه زوج متوالی}} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 6 \end{cases} \xrightarrow{S=10}$$

$$y_1 \times y_2 - x_1 \times x_2 = 24 - 3 = 21$$

۳۹-۳۵-۲۶

۱۰۹ گزینه ۳

$$|S - P| = 2 \Rightarrow \left| -\frac{b}{a} - \left(-\frac{c}{a}\right) \right| = 2 \xrightarrow{a > 0} |c - b| = 2a$$

دقت کنید در صورت سؤال $ax^2 + bx - c = 0$ داده شده است و با فرض مثبت بودن c معادله همواره جواب دارد ($\Delta > 0$) در ضمن $p = -\frac{c}{a}$ می‌شود تعداد حالاتی که $c - b = 2a$ قابل قبول می‌شود را محاسبه می‌کنیم به همین تعداد نیز برای $b - c = 2a$ جواب خواهیم داشت.

$$ifa = 1 \Rightarrow \begin{cases} c = 3, 4, \dots, 9 \\ b = 1, 2, \dots, 7 \end{cases} \Rightarrow \text{حالت ۷} \Rightarrow c \text{ باید ۲ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد}$$

$$ifa = 2 \Rightarrow \begin{cases} c = 5, 6, 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3, 4, 5 \end{cases} \Rightarrow \text{حالت ۵} \Rightarrow c \text{ باید ۴ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد}$$

$$ifa = 3 \Rightarrow \begin{cases} c = 7, 8, 9 \\ b = 1, 2, 3 \end{cases} \Rightarrow \text{حالت ۳} \Rightarrow c \text{ باید ۶ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد}$$

$$ifa = 4 \Rightarrow \begin{cases} c = 9 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{حالت ۱} \Rightarrow c \text{ باید ۸ واحد بزرگتر از } b \text{ باشد}$$

پس در مجموع $32 = 16 \times 2$ حالت خواهیم داشت.

۸۶-۴-۱۱

۱۱۰ گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$ax^2 - ax - b = 0 (*) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-(-a)}{a} = 1 \\ \alpha\beta = \frac{-b}{a} \end{cases}$$

$$40\beta^2 + 20\alpha^2 - 20\beta = 17 \xrightarrow{\alpha=1-\beta} 40\beta^2 + 20 + 20\beta^2 - 40\beta - 20\beta = 17 \Rightarrow 60\beta^2 - 60\beta + 3 = 0 \quad (1)$$

معادله (*) را ساده کرده و از رابطه استفاده می‌کنیم:

$$a(x^2 - x) - b = 0 \xrightarrow{\text{ریشه } \beta} a(\beta^2 - \beta) - b = 0 \xrightarrow{(1)} a\left(-\frac{3}{6}\right) = b \Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{1}{2} = \alpha\beta$$

مقدار $|\alpha - \beta|$ برابر است با:

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{1^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

۳۵-۳۸-۲۷

گزینه ۱ در معادله اولیه $x^2 - x - 4 = 0$ داریم: $P = -4$ و $S = 1$

$$S' = x_1^2 + \frac{1}{x_1} + x_2^2 + \frac{1}{x_2} = (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = (S^2 - 2PS) + \frac{S}{P} \xrightarrow{P=-4, S=1} S' = 1 + 12 - \frac{1}{4} = \frac{51}{4}$$

نکته: اگر x_1 و x_2 ریشه‌های یک معادله درجه ۲ باشند داریم:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P \\ x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS \end{cases}$$

$$P' = (x_1^3 + \frac{1}{x_1})(x_2^3 + \frac{1}{x_2}) = (x_1 x_2)^3 + x_1^2 + x_2^2 = P^3 + S^2 - 2P = \frac{1}{P} = -64 + 1 + 8 - \frac{1}{4} = -\frac{221}{4}$$

$$x^2 - \frac{51}{4}x - \frac{221}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 51x - 221 = 0$$

۶۷-۸-۲۵

گزینه ۳ می‌دانیم که نمودار سهمی، نسبت به محور تقارن سهمی (که از رأس می‌گذرد)، متقارن است. دو نقطه $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ که عرض برابری دارند نسبت به

$$\text{محور تقارن سهمی باید متقارن باشند، پس: } x_s = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_s = \frac{-5 + 3}{2} = -1$$

همچنین عرض رأس برابر ۱ است، پس معادله سهمی به صورت روبه‌رو است:

$$y = a(x - (-1))^2 + 1 = a(x + 1)^2 + 1$$

معادله سهمی را با محور x ‌ها تلاقی می‌دهیم:

$$a(x + 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow ax^2 + 2ax + (a + 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-2a}{a} = -2 \\ \alpha\beta = \frac{a+1}{a} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \Rightarrow 5 = 4 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) \Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{-1}{2} \Rightarrow 2a + 2 = -a \Rightarrow a = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \text{معادله سهمی: } y = \frac{-2}{3}(x + 1)^2 + 1 \xrightarrow{\text{تلاقی با محور } y\text{ ها}} y = \frac{-2}{3}(0 + 1)^2 + 1 = \frac{-2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

۴۲-۳۵-۲۴

گزینه ۴ روش اول:

می‌دانیم برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش عکس ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد باید جای a و c را عوض کنیم و برای نوشتن معادله درجه دومی که ریشه‌هایش k واحد کمتر از ریشه‌های معادله درجه دوم داده شده‌ای باشد، باید x را به $x + k$ تبدیل کنیم.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x - 1 = 0 &\xrightarrow[\text{جای } a, c \text{ عوض}]{\text{معکوس}} -x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow[\text{یک واحد کمتر}]{x \rightarrow x+1} -(x+1)^2 - 3(x+1) + 2 = 0 \\ &\Rightarrow -x^2 - 2x - 1 - 3x - 3 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \end{aligned}$$

۵۳-۱۰-۳۶

گزینه ۱

روش اول: اگر t ریشه معادله جدید و x ریشه معادله قدیم باشد، داریم:

$$t = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{t} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله قدیم}} \frac{16}{t^2} - \frac{14}{t} + 3 = 0 \xrightarrow{\times t^2} 16 - 14t + 3t^2 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 14t + 16 = 0$$

$$\frac{3x^2 + ax + 1}{3x^2 + ax + 1} = 0 \Rightarrow a = -14, b = 16$$

روش دوم: ابتدا معادله درجه دومی مینویسیم که ریشه‌هایش معکوس ریشه‌های معادله درجه دوم اولیه باشد، سپس معادله درجه دومی می‌نویسیم که ریشه‌هایش دو برابر ریشه‌های

معادله ثانویه باشد پس جای a ، c را عوض کرده و سپس b را در ۲ و c را در ۲ ضرب کنیم:

$$4x^2 - 7x + 3 = 0 \xrightarrow{\text{معکوس کردن ریشه}} 3x^2 - 7x + 4 = 0 \xrightarrow{\text{دو برابر کردن}} 3x^2 - 14x + 16 = 0$$

این معادله را با $3x^2 + ax + b = 0$ مقایسه می‌کنیم و داریم:

$$a = -14, b = 16$$

توجه کنید ریشه‌های معادله $cx^2 + bx + a = 0$ عکس ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است و ریشه‌های معادله $kax^2 + bkbx + ck^2x^2 = 0$ برابر ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ می‌باشند.

۴۹-۷-۴۴



گزینه ۲ ۱۱۵

معادله درجه دومی که ریشه هایش k واحد بیشتر از ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشد، به صورت زیر است:

$$a(x-k)^2 + b(x-k) + c = 0$$

پس کافی است x را به $x-1$ تبدیل کنیم.

$$3(x-1)^2 + 7(x-1) + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 3 + 7x - 7 + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x - 3 = 0$$

برای مقایسه با $x^2 + ax + b = 0$ معادله را بر ۳ تقسیم می کنیم.

$$x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -1$$

۳۵-۹-۵۶

گزینه ۳ ۱۱۶

اگر ریشه های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ را α و β در نظر بگیریم در این صورت ریشه های معادله $8x^2 - mx - 8 = 0$ برابر α^3 و β^3 هستند.

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$\alpha^3 \cdot \beta^3 = (\alpha \cdot \beta)^3 = (-1)^3 = -1$$

$$x^2 - Sx + P = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \Rightarrow 8x^2 - 13x - 8 = 0$$

$$\frac{8x^2 - mx - 8 = 0}{\text{مقایسه با}} \rightarrow m = 13$$

۲۳-۹-۶۸

گزینه ۳ ۱۱۷

روش اول: ریشه های معادله جدید از معکوس ریشه های معادله قبلی یک واحد بیشتر است.

$$2x^2 - 3x - 4 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه ها معکوس شده}} -4x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{یک واحد به ریشه ها اضافه شده}} -4(x-1)^2 - 3(x-1) + 2 = 0$$

$$-4x^2 + 8x - 4 - 3x + 3 + 2 = 0 \Rightarrow -4x^2 + 5x + 1 = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

روش دوم:

ریشه های معادله قدیم را α و β و ریشه های معادله جدید را α' و β' می نامیم:

$$\alpha + \beta = \frac{3}{2}, \alpha\beta = -2, \alpha' = \frac{1}{\alpha} + 1, \beta' = \frac{1}{\beta} + 1$$

$$S' = \alpha' + \beta' = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P' = \alpha'\beta' = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 5x - 1 = 0$$

۳۴-۷-۵۸

گزینه ۳ ۱۱۸

با توجه به اینکه ریشه های معادله اولی، نیم واحد از ریشه های معادله دومی بیشتر است بنابراین مجموع ریشه های معادله اولی، یک واحد از مجموع ریشه های معادله دومی بیشتر است.

$$\alpha + \beta = \frac{a}{2}, \alpha' + \beta' = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 1$$

$$\alpha\beta = \frac{b}{2}, \alpha'\beta' = (\alpha - 0.5)(\beta - 0.5) = \alpha\beta - 0.5(\alpha + \beta) + 0.25 = -\frac{6}{2\alpha} = -3$$

$$\Rightarrow \alpha\beta = \frac{b}{2} = -3 \Rightarrow b = -6 \Rightarrow \left[\frac{ab}{4}\right] = \left[-\frac{6}{4}\right] = -\frac{3}{2}$$

۲۰-۹-۷۱

گزینه ۳ ۱۱۹

فرض کنیم x_1 و x_2 ریشه های معادله $8x^2 - mx - 8 = 0$ و α و β ریشه های معادله $2x^2 - x - 2 = 0$ باشند.

$$x_1 = \alpha^3, x_2 = \beta^3 \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{2}, P = \alpha\beta = \frac{c}{a} = -1$$

$$x_1 + x_2 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{13}{8}$$

$$x_1 x_2 = \alpha^3 \beta^3 = (\alpha\beta)^3 = -1$$

$$x^2 - \frac{13}{8}x - 1 = 0 \xrightarrow{\times 8} 8x^2 - 13x - 8 = 0$$

با مقایسه این معادله و معادله صورت سؤال، مشخص می‌شود که $m = 13$ است.

$$30 - 8 - 62$$

گزینه ۲

اگر α و β ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

با مرتب کردن معادله داده شده به معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ می‌رسیم. بنابراین:

$$S = \alpha + \beta = \frac{3}{2}, \quad P = \alpha \cdot \beta = -\frac{1}{2}$$

هم چنین اگر S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل ضرب ریشه‌ها باشند، معادله مورد نظر را می‌توان به صورت $x^2 - Sx + P = 0$ نوشت.

ریشه‌های معادله $0 = 1 + kx + 8x^2 + \alpha\beta^2 \cdot \alpha^2\beta$ هستند، داریم:

$$S' = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta(\alpha + \beta) = P \cdot S = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

$$P' = \alpha^2\beta \times \alpha\beta^2 = \alpha^3\beta^3 = (\alpha\beta)^3 = P^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

بنابراین معادله متناظر به صورت $0 = \frac{3}{4}x - \frac{1}{8} + x^2$ می‌باشد. با ضرب طرفین معادله در عدد ۸، این معادله به صورت $0 = 8x^2 + 6x - 1$ درمی‌آید و لذا $k = 6$ است.

$$31 - 4 - 65$$

گزینه ۳ اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

$$\alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

می‌توانیم معادله داده شده را حل کنیم و ریشه‌های آن را به سادگی به دست آوریم:

$$5x^2 + 3x = 2 \Rightarrow 5x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow a + c = b \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha = -1 \\ x_2 = \beta = \frac{-c}{a} = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} = 1 \\ \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = 1 + \frac{25}{4} = \frac{29}{4} \\ P = \frac{1}{\alpha^2} \times \frac{1}{\beta^2} = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - \frac{29}{4}x + \frac{25}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 29x + 25 = 0 \Rightarrow k = 29$$

$$22 - 33 - 44$$

گزینه ۳

$$\text{به } \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ عدد طلایی گویند.}$$

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{(\cdot)^2} \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{6 + 2\sqrt{5}}{4} \Rightarrow \frac{a^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}}$$

$$23 - 33 - 44$$

گزینه ۱

$$x^2 + (a - 1)x^2 + (4 - a)x - 4 = 0$$

چون جمع ضرایب این معادله صفر است پس حتماً یک ریشه معادله $x = 1$ است و داریم:

$$(x - 1)(x^2 + ax + 4) = 0$$

بنابراین عبارت درجه سوم به صورت $0 = (x - 1)(x^2 + ax + 4)$ تجزیه می‌شود یک ریشه این معادله $x = 1$ است پس معادله درجه دوم در پرانتز دوم باید دارای ۲ ریشه متمایز

مثبت باشد (چون سوال گفته معادله دارای ۳ ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد)

$$\Delta > 0 \rightarrow b^2 - 4ac > 0 \rightarrow a^2 - 16 > 0 \rightarrow a^2 > 16 \rightarrow a > 4 \text{ یا } a < -4 \quad (I)$$

$$S > 0 \rightarrow -\frac{b}{a} > 0 \rightarrow -a > 0 \rightarrow a < 0 \quad (II)$$

$$P > 0 \rightarrow \frac{c}{a} > 0 \rightarrow 4 > 0 \quad (III) \text{ همواره برقرار است}$$

از اشتراک I, II, III به جواب $a < -4$ می‌رسیم.

توجه نمایید که به ازای $a = -5$ معادله دارای دو ریشه خواهد بود.

$$16 - 12 - 72$$



گزینه ۳ - ۱۲۴

برای حل معادله $x^2 - 2\sqrt{x} + m - 1 = 0$ از روش تغییر متغیر بهره می‌گیریم. اگر به جای عبارت $\sqrt{x}$ ، t قرار دهیم، داریم:

$$(\sqrt{x})^2 - 2(\sqrt{x}) + m - 1 = 0 \xrightarrow{\sqrt{x}=t} t^2 - 2t + m - 1 = 0$$

برای اینکه معادله داده شده در تست، دو جواب متمایز برای x داشته باشد، باید در معادله $t^2 - 2t + m - 1 = 0$ یکی از حالات زیر اتفاق بیفتد:

۱- دارای دو ریشه حقیقی متمایز مثبت باشد، برای این منظور داریم:

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4 - 4(m - 1) > 0 \Rightarrow 8 - 4m > 0 \Rightarrow m < 2$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m - 1}{1} > 0 \Rightarrow m - 1 > 0 \Rightarrow m > 1$$

$$\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{1} > 0 \Rightarrow 2 > 0$$

شرط وجود دو ریشه مثبت $\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \\ \frac{b}{a} > 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} 1 < m < 2$

۲- دارای یک ریشه صفر و یک ریشه مثبت باشد. برای این منظور باید $c = 0$ و $\frac{b}{a} > 0$ باشد. داریم:

$$m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

حال از اجتماع مقادیر به دست آمده در (۱) و (۲)، حدود m برابر است با: $1 \leq m < 2$

۶۳ - ۲۲ - ۱۶

گزینه ۳ - ۱۲۵

منحنی محور x ها را فقط در یک نقطه قطع می‌کند، به این معنی است که معادله فقط یک ریشه دارد و از آنجا که $x = 1$ ریشه معادله است پس عبارت درجه دوم ریشه ندارد.

$$x^2 - ax + a = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow a^2 - 4a < 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

توجه کنیم که $x = 1$ ریشه عبارت درجه دوم نیست.

۵۹ - ۱۴ - ۲۷

گزینه ۴ - ۱۲۶

برای حل معادله دو مجذوری از تغییر متغیر استفاده می‌کنیم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = \sqrt{69} \Rightarrow t = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \xrightarrow{t=x^2 > 0} x^2 = \frac{7 + \sqrt{69}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

چون دو ریشه قرینه یکدیگرند پس جمع آنها صفر است و برای حاصلضرب داریم:

$$P = x_1 \cdot x_2 = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s = 0 \\ p = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2} \end{cases} \Rightarrow p^2 = \frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4} = \frac{59 + 7\sqrt{69}}{2} \Rightarrow 2p^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

توجه: چون $S = 0$ است بنابراین $2P^2 - 3(0)P + 2(0) = 2P^2$

۱۸ - ۴۹ - ۳۴

گزینه ۳ - ۱۲۷ نقطه به طول $x = 2$ ریشه تابع f است، بنابراین $f(2) = 0$ می‌باشد. داریم:

$$f(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 - (2) + m = 0 \Rightarrow m = 6$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ است. با توجه به این که $x = 2$ یک ریشه تابع f است، بنابراین می‌توان گفت که چند جمله‌ای $f(x)$ بر $(x - 2)$ بخشپذیر است، با تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ ، سایر عامل‌ها (فاکتورها) را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = (x - 2)(2x^2 - x - 3) = (x - 2)(2x - 3)(x + 1)$$

بنابراین دو عامل دیگر چند جمله‌ای $f(x)$ عبارتند از $(x + 1)$ و $(2x - 3)$ ، لذا ریشه‌های تابع f را به دست می‌آوریم. داریم:

$$f(x) = (x - 2)(2x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ یا } x = \frac{3}{2} \text{ یا } x = -1$$

بنابراین دو ریشه دیگر تابع f ، $x = -1$ ، $x = \frac{3}{2}$ است.

توجه کنیم که در سطح دبیرستان روشی برای حل معادله درجه ۳ مطرح نشده است و چنانچه دانش آموز با معادله درجه ۳ روبرو شود پیشنهاد می‌کنیم که یکی از اعداد ۱، ۰، -۱ را در معادله چک کند. احتمالاً یکی از این اعداد یکی از ریشه‌های معادله است.

۴۶ - ۶ - ۴۹

۱۲۸ گزینه ۲ توجه: هرگاه $x = k$ یکی از ریشه‌های معادله $P(x) = 0$ باشد، آنگاه تابع $P(x)$ بر $(x - k)$ بخش پذیر است.

ابتدا با قرار دادن $x = 2$ در معادله داده شده، a را می‌یابیم:

$$x(ax^2 - x - 5) = 2 \xrightarrow{x=2} 2(4a - 2 - 5) = 2 \Rightarrow 4a - 7 = 1 \Rightarrow a = 2$$

پس معادله به صورت $2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$ می‌شود. حال با تقسیم معادله بر $x - 2$ آن را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$2x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(2x^2 + 3x + 1) = 0$$

می‌دانیم مجموع دو ریشه دیگر که ریشه‌های معادله درجه دوم داخل پرانتز می‌باشند، برابر با $-\frac{3}{2}$ می‌شود.

$$50 - 13 - 37$$

۱۲۹ گزینه ۳ از روی $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha\beta = -2$ دو تا از ریشه‌ها یعنی α و β به دست می‌آیند.

$$x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$x = -1$ را در معادله $4x^3 + kx^2 - 9x - 2 = 0$ قرار می‌دهیم.

$$4(-1)^3 + k(-1) - 9(-1) - 2 = 0 \Rightarrow -4 + k + 9 - 2 = 0 \Rightarrow k = -3$$

$$35 - 36 - 29$$

۱۳۰ گزینه ۳ با انتخاب تغییر متغیر $t = x^2 - 2x$ خواهیم داشت:

$$t^2 - t = 2 \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \xrightarrow{a+c=b} t_1 = -1, t_2 = -\frac{c}{a} = 2$$

$$t_1 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x = -1 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

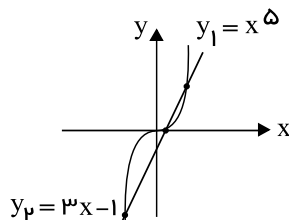
$$t_2 = 2 \Rightarrow x^2 - 2x = 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 + 8 = 12 > 0 \text{ ریشه } 2$$

جمعاً ۳ ریشه متمایز دارد.

$$42 - 21 - 37$$

۱۳۱ گزینه ۲ ابتدا این معادله را به دو تابع ساده‌تر تقسیم می‌کنیم: دو تابع $y_1 = x^5$ و $y_2 = 3x - 1$ را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و نقاط تلاقی آنها را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} x^5 - 3x + 1 &= 0 \\ x^5 = 3x - 1 &\Rightarrow \begin{cases} y_1 = x^5 \\ y_2 = 3x - 1 \end{cases} \end{aligned}$$



با توجه به شکل روبه‌رو این دو نمودار ۳ بار یکدیگر را قطع می‌کنند.

$$79 - 11 - 10$$

۱۳۲ گزینه ۱

$$b \leq f(x) \leq c \xrightarrow{\times k} b = kb \leq kf(x) \leq ck = c$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$\Rightarrow 1 = a^2 - 3a + 3 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \times 1 = 2 \text{ ضرب مقادیر ممکن برای } a$$

$$66 - 9 - 25$$

۱۳۳ گزینه ۱ کافی است نمودار تابع درجه‌ی دوم داده شده را با نیمساز ناحیه اول ($y = x$) تلاقی دهیم و معادله تلاقی باید ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$\begin{cases} y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6 \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} 2x^2 + (m+1)x + m + 6 = x \Rightarrow \boxed{2x^2 + mx + m + 6 = 0} \text{ معادله تلاقی:}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 4(2)(m+6) = m^2 - 8m - 48 = 0$$

$$\Rightarrow (m - 12)(m + 4) = 0 \Rightarrow m = 12, -4$$

حال باید بررسی کنیم به ازای کدام مقدار m ، طول نقطه تماس مثبت است (در ناحیه اول x مثبت است).

$$m = 12: 2x^2 + 12x + 18 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x = -3$$
 غ ق

$$m = -4: 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$
 ق ق

$$65 - 21 - 13$$

۱۳۴ گزینه ۱ بیشترین مقدار تابع درجه دوم همان عرض رأس سهمی است.



$$y_s = \frac{4ac - b^2}{4a} = 0 \Rightarrow 4ac - b^2 = 0 \Rightarrow 4(k+3)(k) - 16 = 0 \Rightarrow k^2 + 3k - 4 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} k = 1 \\ k = \frac{c}{a} = -4 \end{cases}$$

تابع درجه دوم وقتی دارای Max است که ضریب x^2 منفی باشد، پس فقط $k = -4$ قابل قبول است.

۵۹-۱۸-۲۳

گزینه ۱ $\frac{c}{a} < 0$ ، $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشد. (یعنی a و c مختلف علامه باشند). تابع درجه دوم از ۴ ناحیه می گذرد. بنابراین باید $m + 2 < 0$ و در

نتیجه $m < -2$ باشد.

۴۳-۲۱-۳۶

گزینه ۲ اگر در این مثلث طول قاعده a و ارتفاع وارد بر آن را h بنامیم، در این صورت $a + h = 16$ است.

$$S = \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a) = \frac{1}{2}a(16-a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$$

تابع $S = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$ یک تابع درجه دوم برحسب a است که چون ضریب a^2 منفی است، پس تابع ماکزیم دارد. عرض رأس این سهمی که بیشترین مقدار آن نیز هست برابر با

$$\frac{\Delta}{4a'}$$

$$S_{Max} = \frac{-\Delta}{4a'} = \frac{4a'c' - b'^2}{4a'} = \frac{4(-\frac{1}{2})(0) - 64}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-64}{-2} = 32$$

۴۵-۴-۵۱

گزینه ۴

خط $x = 2$ محور تقارن تابع درجه دوم داده شده است.

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = 2 = -\frac{1}{2a-2} \Rightarrow 4a - 4 = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 \xrightarrow[y=0]{\times(-4)} y = x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 6 \end{cases}$$

چون طول مثبت را خواسته پس $x = 6$ جواب مسأله است.

۶۵-۱۳-۲۲

گزینه ۲

شرط آنکه سهمی همواره پایین محور x ها باشد، آن است که $a < 0$ و $\Delta < 0$ باشد:

$$a < 0 \Rightarrow 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac < 0} 4(m-3)^2 - 4(1-m)(-1) < 0 \xrightarrow{\div 4} (m-3)^2 + (1-m) < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0 \Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $2 < m < 5$ می رسیم.

۲۸-۳۸-۲۳

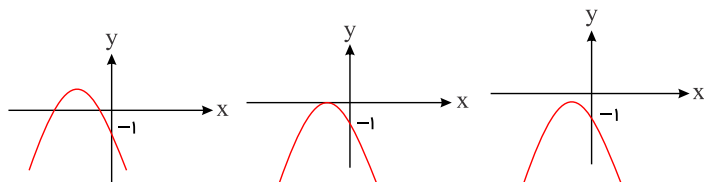
گزینه ۲ با توجه به اینکه خط $y = -1$ بر نمودار تابع $f(x)$ مماس است، لذا معادله تلاقی خط و تابع درجه دوم، ریشه مضاعف دارد.

$$2x^2 - x + a = -1 \Rightarrow 2x^2 - x + (a+1) = 0 \quad \text{معادله تلاقی:}$$

$$\Delta = 0 \xrightarrow{b^2 - 4ac = 0} (-1)^2 - 4(2)(a+1) = 0 \Rightarrow 1 - 8a - 8 = 0 \Rightarrow a = -\frac{9}{8}$$

۴۸-۱۰-۴۲

گزینه ۱ در سه حالت زیر نمودار سهمی داده شده در ناحیه اول نمی گذرد:



$$x^2 < 0 \Rightarrow a - 3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

اگر دو ریشه داشته باشد (شکل ۱) باید هر دو منفی باشد که داریم:

$$\Delta = a^2 + 4a - 12 > 0 \Rightarrow (a - 2)(a + 6) > 0 \Rightarrow a > 2 \text{ یا } a < -6 \quad (2)$$

$$P = \alpha\beta > 0 \Rightarrow P = \frac{-1}{a-3} > 0 \Rightarrow a-3 < 0 \Rightarrow a < 3 \quad (1)$$

$$S = \alpha + \beta < 0 \Rightarrow S = \frac{-a}{a-3} < 0 \Rightarrow a > 3 \text{ یا } a < 0 \quad (3)$$

که اشتراک (۱) و (۲) برابر $a < -6$ می شود.

حال اگر سهمی ریشه مضاعف داشته باشد (شکل ۲) یا ریشه حقیقی نداشته باشد (شکل ۳)، داریم:

$$\Delta = (a - 2)(a + 6) \leq 0 \Rightarrow -6 \leq a \leq 2 \quad (4)$$

که اشتراک (۱) و (۴) برابر $-6 \leq a \leq 2$ است و اجتماع دو بازه جواب برابر $a \leq 2$ می باشد.

۵۹-۲۲-۱۹

گزینه ۴ ۱۴۱

چون دو نمودار در یک نقطه متقاطع اند، پس مختصات این نقطه‌ی مشترک $(A | -1)$ در هر دو تابع صدق می کند.

$$A \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases} \xrightarrow{y=2x+b} 0 = -2 + b \rightarrow b = 2$$

$$A \begin{cases} -1 \\ 0 \end{cases} \xrightarrow{y=ax^2+bx-3} 0 = a + 2(-1) - 3 \rightarrow a = 5$$

۵۹-۸-۳۳

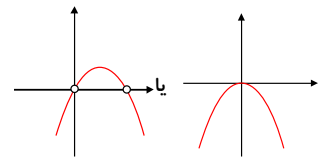
گزینه ۲ ۱۴۲

برای اینکه سهمی از ناحیه دوم عبور نکند، دهانه آن باید رو به پایین رسم شود یعنی $a < 0$ باشد و برای این تابع داریم:

$$y = ax^2 - (a + 2)x = x(ax - a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0}, \quad \boxed{x = \frac{a+2}{a}}$$

چون یکی از ریشه‌ها $x = 0$ است پس باید از مبدأ عبور کند و برای اینکه از ناحیه دوم عبور نکند ریشه بعدی باید نامنفی باشد، یعنی شکل سهمی به یکی از این صورت‌ها باشد



دقت کنید که به ازای $a = 0$ نیز خط $y = -2x$ از ربع دوم می گذرد.

$$x = \frac{a+2}{a} \geq 0 \xrightarrow{a < 0} a+2 \leq 0 \Rightarrow a \leq -2$$

۵۲-۱۷-۳۲

گزینه ۱ ۱۴۳

معادله دو ریشه منفی دارد، بنابراین $\Delta > 0$ ، $P > 0$ و $S < 0$ است.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow (a+3)^2 - 4(-1)(a) = a^2 + 10a + 9 = (a+1)(a+9) > 0 \Rightarrow a > -1 \text{ یا } a < -9 \quad (1) \\ P > 0 \Rightarrow \frac{-1}{a} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (2) \\ S < 0 \Rightarrow -\frac{a+3}{a} < 0 \xrightarrow{a < 0} a+3 < 0 \Rightarrow a < -3 \quad (3) \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های: (۱)، (۲)، (۳) به صورت (۳) $a < -9$ است.

۴۹-۲۵-۲۵

گزینه ۲ ۱۴۴

در تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ رأس سهمی از رابطه $x_S = -\frac{b}{2a}$ به دست می آید و این طول را در تابع قرار می دهیم عرض آن به دست می آید.

$$-\frac{b}{2a} = -1 \rightarrow 2a = b$$

$$f(-1) = 9 \rightarrow a - b + c = 9 \xrightarrow{b=2a} -a + c = 9$$

$$\begin{cases} 3 \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \\ -1 \xrightarrow{\text{صدق}} 1 = 9a + 3b + c \xrightarrow{b=2a} 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a + c = 9 \\ 15a + c = 1 \end{cases} \rightarrow 16a = -8 \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = -1, c = \frac{17}{2}$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{17}{2}$ است که نقطه $\begin{pmatrix} 5 \\ -9 \end{pmatrix}$ روی این تابع قرار دارد.

۶۴-۱۰-۲۶

گزینه ۱ ۱۴۵

کافی است که مختصات سه نقطه داده شده را در تابع صدق دهیم.

$$A \begin{cases} 0 \\ 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{صدق}} 5 = 0 + 0 + c \rightarrow c = 5$$



$$\left. \begin{array}{l} B \begin{array}{l} -2 \\ 5 \end{array} \xrightarrow{\text{صنق}} 5 = 4a - 2b + 5 \rightarrow 4a - 2b = 0 \\ C \begin{array}{l} 1 \\ 11 \end{array} \xrightarrow{\text{صنق}} 11 = a + b + 5 \rightarrow a + b = 6 \end{array} \right\} \rightarrow a = 2, b = 4$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت $f(x) = 2x^2 + 4x + 5$ است که نقطه $\left(-\frac{1}{2}, \frac{19}{2}\right)$ روی این تابع قرار دارد.

۳۳-۳۶-۳۲

گزینه ۲ شرط آنکه یک تابع درجه‌ی دوم همواره مثبت باشد (بالای محور x ها باشد) آن است که $a > 0$ (ضریب x^2) و $\Delta < 0$ باشد.

$$a > 0 \rightarrow 1 - a > 0 \rightarrow a < 1 : I$$

$$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow 2^2 - 4(1-a)(-a) < 0 \rightarrow 2^2 + 4a - 4a^2 < 0$$

$$\xrightarrow{\div (-4)} a^2 - a - 6 > 0 \rightarrow (a-3)(a+2) > 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} a < -2 \text{ یا } a > 3 : II$$

از اشتراک I و II به جواب $a < -2$ می‌رسیم.

۴۴-۲۶-۳۰

گزینه ۱

$$(1, 0) \in f \Rightarrow 0 = a + b + c \quad (1)$$

$$(0, -6) \in f \Rightarrow -6 = c \quad (2)$$

$$(-2, -6) \in f \Rightarrow -6 = 4a - 2b + c \quad (3)$$

حال از دستگاه شامل معادلات (۱) و (۲) و (۳) مقادیر a, b, c را مشخص می‌کنیم:

$$(1), (2), (3) \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ c = -6 \\ 4a - 2b + c = -6 \end{cases} \xrightarrow{c=-6} \begin{cases} a + b + (-6) = 0 \\ 4a - 2b + (-6) = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 6 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = 4$$

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 + 4(-1) - 6 = -8$$

۶۲-۱۱-۲۷

گزینه ۴

معادله حاصل از تلاقی دو منحنی ریشه ندارد، پس Δ ی آن باید منفی باشد:

$$(2x+1)(x+8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 16x + x + 8 = mx \Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\Delta = (17-m)^2 - 64 < 0 \Rightarrow |m-17| < 8 \Rightarrow -8 < m-17 < 8 \Rightarrow 9 < m < 25$$

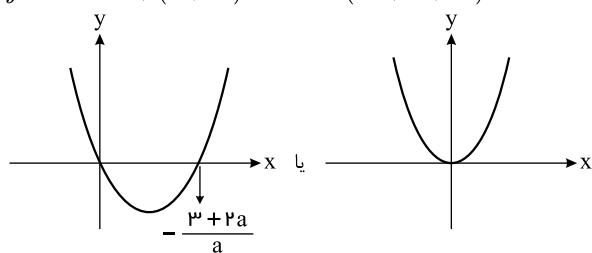
۶۷-۴-۳۰

گزینه ۱ سهمی $y = ax^2 + (3+2a)x$ مبدأ گذر است، زیرا:

$$y = 0 \Rightarrow ax^2 + (3+2a)x = 0 \Rightarrow x(ax + 3+2a) = 0 \Rightarrow x = 0, ax + 3+2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{3+2a}{a}$$

برای آن که سهمی از ناحیه سوم عبور نکند، باید رو به بالا بوده و ریشه معادله $y = 0$ یعنی

$$x = -\frac{3+2a}{a} \text{ بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.}$$



$$\text{سهمی رو به بالا} \Rightarrow a > 0 \Rightarrow -\frac{3+2a}{a} \geq 0 \Rightarrow \frac{3+2a}{a} \leq 0 \xrightarrow{a>0} 3+2a \leq 0 \Rightarrow 2a \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{3}{2}$$

چون اشتراک $a > 0$ و $a \leq -\frac{3}{2}$ سهمی است، پس هیچ مقداری برای a وجود ندارد.

۵۹-۹-۳۲

گزینه ۲ رأس سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ را می‌یابیم:

$$\text{رأس } x = -\frac{a}{2(-a)} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + 2 = \frac{a}{4} + 2$$

$$\text{رأس } \left(\frac{1}{2}, \frac{a}{4} + 2\right)$$

نقطه فوق بر روی سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ قرار دارد.

$$\frac{a}{4} + 2 = 2b \times \frac{1}{4} - \frac{b}{2} - 1 \Rightarrow \frac{a}{4} + 2 = -1 \Rightarrow \frac{a}{4} = -3 \Rightarrow a = -12$$

حال رأس سهمی $y = 2bx^2 - bx - 1$ را می‌یابیم:

$$x \text{ رأس} = -\frac{-b}{2 \times 2b} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = 2b \times \frac{1}{16} - \frac{b}{4} - 1 = \frac{b}{8} - \frac{b}{4} - 1 \Rightarrow y = -\frac{b}{8} - 1 \Rightarrow \text{رأس} \left(\frac{1}{4}, -\frac{b}{8} - 1 \right)$$

نقطه فوق بر روی سهمی $y = -ax^2 + ax + 2$ قرار دارد.

$$-\frac{b}{8} - 1 = -\frac{9}{16} + \frac{9}{4} + 2 = \frac{39}{16} + 2 \xrightarrow{a=-12} -\frac{b}{8} - 1 = \frac{-36}{16} + 2 \Rightarrow -\frac{b}{8} - 1 = -\frac{9}{4} + 2 \Rightarrow -\frac{b}{8} = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow b = -6 \Rightarrow b - a = -6 - (-12) = 6$$

۷۱-۷-۲۲

۱۵۱. گزینه ۱ عرض رأس سهمی $y = \frac{-\Delta}{4a}$ است پس:

$$y = mx^2 - 12x + 5m - 1$$

$$\frac{-\Delta}{4a} = 2 \Rightarrow \Delta = -8a \Rightarrow 144 - 4m(5m - 1) = -8m \Rightarrow 144 - 20m^2 + 4m = -8m$$

$$\Rightarrow 20m^2 - 12m - 144 = 0 \xrightarrow{\div 4} 5m^2 - 3m - 36 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 9 - 4 \times 5 \times (-36) = 729 \Rightarrow m = \frac{3 \pm 27}{10} \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{24}{10} \end{cases}$$

چون سهمی دارای کمترین مقدار است پس $m = 3$ و $m > 0$ قابل قبول است.

$$y = 3x^2 - 12x + 14 \Rightarrow \text{محور تقارن} : x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 3} = 2$$

۲۶-۴۱-۳۲

۱۵۲. محور تقارن دو سهمی یکسان است، پس:

$$\begin{cases} y = x^2 + ax - 2 \rightarrow \text{محور تقارن} : x = \frac{-a}{2(1)} \\ y = -x^2 - 2x + b \rightarrow \text{محور تقارن} : x = \frac{-(-2)}{2(-1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

طبق فرض، دو سهمی در دو نقطه به عرض ۱ مشترک‌اند، پس:

$$y = x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

جایگذاری $x=1$ در سهمی دوم

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} 1 = -1^2 - 2(1) + b \Rightarrow b = 4$$

توجه: می‌توانستیم به جای $x = 1$ ، ریشه $x = -3$ را در معادله سهمی دوم جایگذاری کنیم.

۲۰-۱۱-۶۹

۱۵۳. گزینه ۴

$$y = -x^2 + 2x + 1 \rightarrow S \left| \begin{array}{c} -\frac{b}{2a} \\ 4ac - b^2 \\ 4a \end{array} \right| = S \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right|$$

معادله خط گذرنده از نقطه $\left| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right|$ و عرض از مبدأ -1 به صورت $y = x - 1$ است.

$$\text{تلاقی} : x - 1 = -x^2 + 2x + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow x = 2, x = -1 \rightarrow x_M = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{y=x-1} y_M = -\frac{1}{2}$$

$$S \left| \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right|, M \left| \begin{array}{c} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right| \rightarrow SM = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$$

بنابراین این اندازه $\frac{1}{2}$ برابر $\sqrt{26}$ است.

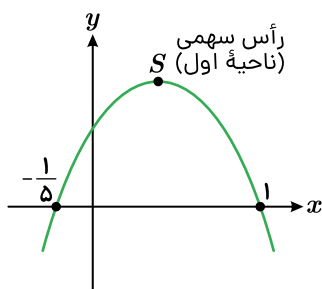
۳۰-۴۳-۲۸

۱۵۴. ابتدا به کمک مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها، α و β را محاسبه می‌کنیم.



$$y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta \Rightarrow \begin{cases} \text{ضرب : } \alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{25} \\ \text{جمع : } \alpha + \beta = \frac{-4}{25\alpha} * \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{5} \rightarrow \frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{5} \Rightarrow \beta = -1 & \text{غرض } (\beta > \alpha) \\ \alpha = -\frac{1}{5} \rightarrow -\frac{1}{5} + \beta = \frac{-4}{-5} \Rightarrow \beta = 1 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \text{معادله سهمی } y = -5x^2 + 4x + 1$$

توجه: چون جمع ضرایب صفر است یک ریشه ۱ و بعدی $\frac{c}{a} = -\frac{1}{5}$ است.

۳۲-۴۰-۲۸

گزینه ۳ *۱۵۵ معادله تلاقی سهمی داده شده و خط $y = -x$ باید ریشه مضاعف بدهد.

$$\begin{cases} y = 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + (2m-1)x + m + \frac{4}{3} = -x \Rightarrow 3x^2 + 2mx - x + m + \frac{4}{3} = -x$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2mx + m + \frac{4}{3} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 4m^2 - 4 \times 3(m + \frac{4}{3}) = 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 3(m + \frac{4}{3}) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ m = -1 \end{cases}$$

ریشه مضاعف معادله (۱) باید در ناحیه دوم باشد، پس داریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m}{2 \times 3} = -\frac{m}{3} < 0 \Rightarrow m > 0$$

بنابراین $m = 4$ قابل قبول است و داریم:

$$y = 3x^2 + (2 \times 4 - 1)x + 4 + \frac{4}{3} = 3x^2 + 7x + \frac{16}{3}$$

$$\text{رأس } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{7}{2 \times 3} = -\frac{7}{6}$$

۲۸-۴۰-۳۱

گزینه ۴ *۱۵۶ با توجه به گزینه‌های داده شده، به نظر می‌رسد، منظور طراح این بوده که سهمی رو به پایین است و بیشترین مقدار سهمی یعنی عرض رأس سهمی برابر $-\frac{1}{2}$ است:

بنابراین خواهیم داشت:

$$\text{رأس } y = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4a(2a) - 1}{4a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8a^2 - 1 = -2a \Rightarrow$$

$$8a^2 + 2a - 1 = 0$$

چون $\frac{c}{a} < 0$ است پس معادله فوق دارای یک ریشه منفی و یک ریشه مثبت است و بنابراین فقط مقدار منفی a قابل قبول است یعنی فقط یک مقدار برای a وجود دارد که به ازای آن

بیشترین مقدار سهمی برابر $-\frac{1}{2}$ است.

۶۲-۱۳-۲۵

گزینه ۲ *۱۵۷ چون سهمی $y = 2ax^2 - 5x + 18a$ در نقطه A بر نیمساز ناحیه سوم محورهای مختصات مماس است: پس باید تلاقی آنها دارای ریشه مضاعف باشد یعنی

داریم:

$$\begin{cases} y = 2ax^2 - 5x + 18a \Rightarrow 2ax^2 - 5x + 18a = x \\ y = x \end{cases}$$

$$2ax^2 - 6x + 18a = 0 \Rightarrow ax^2 - 3x + 9a = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4a(9a) = 0 \Rightarrow 1 - 4a^2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{اگر } a = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad \text{غ ق ق}$$

چون منحنی در ناحیه سوم بر خط $y = x$ مماس است پس باید طول نقطه تماس منفی باشد به همین دلیل $a = \frac{1}{2}$ غیر قابل قبول است و باید $a = -\frac{1}{2}$ باشد.

۷۴-۷-۱۹

گزینه ۱ ۱۵۸

$$y = ax^2 + 3x + a, y_{\min} = y_s = \frac{9}{4a}$$

از آنجایی که سهمی دارای کمترین مقدار است، a باید مثبت باشد.

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{9a^2 - 9}{4a} = \frac{9}{4a} \Rightarrow 4a^2 - 9a - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (a-3)(4a+6) = 0 \Rightarrow a = 3 \checkmark, a = -\frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق}$$

۶۱-۱۹-۲۰

گزینه ۴ ۱۵۹ معادله حاصل از برخورد خط و سهمی باید ریشه مضاعف داشته باشد، پس:

$$-x = ax^2 + 7x + 16a \Rightarrow ax^2 + 8x + 16a = 0$$

$$\Delta = 64 - 4a \times 16a \Rightarrow 64 - 64a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

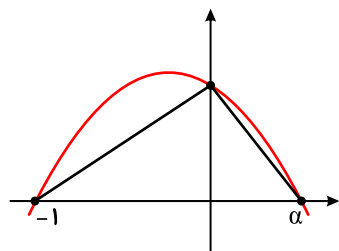
به ازای $a = 1$ ریشه مضاعف مقداری منفی است. پس نقطه مماس در ناحیه چهارم قرار نمی گیرد. پس $a = 1$ غیر قابل قبول است.

به ازای $a = -1$ طول نقطه مماس مثبت و در ناحیه چهارم است.

۶۱-۱۷-۲۲

گزینه ۳ ۱۶۰ با توجه به آنکه مجموع ضرایب جمله درجه دوم و عدد ثابت با ضرایب جمله درجه یک برابر است، از این رو یکی از

ریشه ها ۱- و دیگری $\frac{m+4}{m}$ است و داریم:



$$f(0) = -(m+4); |a - (-1)| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{16 + 4m^2 + 16m}}{|m|} = \frac{2|m+2|}{|m|}$$

$$S = \frac{|a - (-1)| \times |-(m+4)|}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\left| \frac{2(m+2)}{m} \times (m+4) \right|}{2} \Rightarrow m^2 + 6m + 8 = 3|m| \xrightarrow{m < 0} \begin{cases} m = -1 \\ m = -8 \end{cases}$$

$$y = mx^2 - 4x - (m+4) \begin{cases} \xrightarrow{m=-1} y = -x^2 - 4x - 3 \Rightarrow x_A = -3 \\ \xrightarrow{m=-8} y = -8x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x_A = -\frac{1}{4} \end{cases} \rightarrow \left| -3 - \left(-\frac{1}{4}\right) \right| = \frac{13}{4}$$

۵۱-۳۵-۱۴

گزینه ۳ ۱۶۱ ضابطه تابع را بین ۴- و صفر قرار می دهیم و نامعادله را حل می کنیم.

$$-4 < \frac{-1}{3-x} < 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - \frac{1}{3-x} > 0 \Rightarrow \frac{11-4x}{3-x} > 0 \quad (1) \\ \frac{-1}{3-x} < 0 \quad (2) \end{cases}$$



$$\frac{11-4x}{3-x} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & & \frac{11}{4}=2.75 & 3 \\ \hline & + & - & + \end{array} \Rightarrow (-\infty, 2.75) \cup (3, +\infty) \quad (1)$$

$$\frac{-1}{3-x} < 0 \Rightarrow \frac{1}{3-x} > 0 \Rightarrow 3-x > 0 \Rightarrow x < 3 \quad (2)$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \rightarrow x \in \mathbb{R} - [2.75, 3] \\ (2) \rightarrow x < 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x < 3 \xrightarrow{\text{اعداد طبیعی}} x = 1, 2$$

۳۹-۲۱-۴۰

گزینه ۴ ۱۶۲ معادله تلاقی خط و سهمی نباید ریشه داشته باشد:

$$\begin{cases} y = -mx^2 + mx + 1 \\ y = -m - x \end{cases} \Rightarrow -mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow -mx^2 + (m+1)x + (m+1) = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow (m+1)^2 + 4m(m+1) < 0 \Rightarrow (m+1)(\underbrace{m+1+4m}_{5m+1}) < 0$$

شرط ریشه نداشتن

$$\begin{array}{c|ccc} x & & -1 & -\frac{1}{5} \\ \hline & + & 0 & - \end{array} \quad -1 < m < -\frac{1}{5} \Rightarrow \text{هیچ مقدار صحیح}$$

ریشه‌ها

$m = -1, m = -\frac{1}{5}$

۳۲-۳۵-۳۳

گزینه ۱ ۱۶۳ هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-3}{x+1} > 1 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} > 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 4$$

$$\frac{2x-3}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-3}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-6}{x+1} < 0 \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -6 & -1 & +\infty \\ \hline & - & + & - & \end{array} \Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1$$

$$\Rightarrow x < -6 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > 4$ یا $x < -6$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-6, 4]$ است.

۳۶-۲۹-۳۵

گزینه ۳ ۱۶۴ روش اول:

$$\frac{7x-8}{x^2-x-2} > \frac{x}{x-2} \rightarrow \frac{7x-8}{(x-2)(x+1)} - \frac{x}{x-2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{7x-8-x^2-x}{(x-2)(x+1)} > 0 \rightarrow \frac{-x^2+6x-8}{(x-2)(x+1)} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x^2-6x+8}{(x-2)(x+1)} < 0 \rightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{(x-2)(x+1)} < 0$$

$$\rightarrow \frac{x-4}{x+1} < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & -1 & 4 & +\infty \\ \hline & + & - & + & \end{array}$$

توجه کنید $x=2$ مخارج را صفر می‌کند.

$$\rightarrow -1 < x < 2 \text{ یا } 2 < x < 4 \rightarrow x \in (-1, 2) \cup (2, 4)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 0 \rightarrow \frac{-8}{-2} > 0 : \text{درست} \rightarrow \text{گزینه دوم حذف می‌شود}$$



گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند $\rightarrow$ درست : $x = 3 \rightarrow \frac{13}{4} > 3$

۳۸-۲۷-۳۶

گزینه ۳ ۱۶۵

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1}{1} > 0 \Rightarrow \frac{2x-1+x+1}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -1 & 0 & +\infty \\ \hline & + & - & + & + \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \quad (I)$$

$$\frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - \frac{3}{1} < 0 \Rightarrow \frac{2x-1-3x-3}{x+1} < 0 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & -4 & -1 & +\infty \\ \hline & - & + & - & - \end{array} \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > -1 \quad (II)$$

$$\text{اشتراک } II, I \Rightarrow \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \quad \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \quad \text{---} \circ \text{---} \\ \text{---} \circ \text{---} \quad \text{---} \circ \text{---} \end{array} \Rightarrow x < -4 \text{ یا } x > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-4, 0]$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

نامعادله
گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند. $\Rightarrow$ درست : $x = -5 \rightarrow -1 < \frac{11}{4} < 3$

نامعادله
گزینه چهارم حذف می‌شود. $\Rightarrow$ نادرست : $x = 0 \rightarrow -1 < -1 < 3$

۳۲-۲۶-۳۲

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم. گزینه ۴ ۱۶۶

$$\frac{x+1}{2x-1} > 1 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{1} > 0 \rightarrow \frac{x+1-2x+1}{2x-1} > 0 \rightarrow \frac{-x+2}{2x-1} > 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & 2 & +\infty \\ \hline & - & + & - & - \end{array} \rightarrow \frac{1}{2} < x < 2 \quad (I)$$

$$\frac{x+1}{2x-1} < 3 \rightarrow \frac{x+1}{2x-1} - \frac{3}{1} < 0 \rightarrow \frac{x+1-6x+3}{2x-1} < 0 \rightarrow \frac{-5x+4}{2x-1} < 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & +\infty \\ \hline & - & + & - & - \end{array} \rightarrow x > \frac{1}{5} \text{ یا } x < \frac{4}{5} \quad (II)$$

$\frac{4}{5} < x < 2$ (از اشتراک I و II به جواب $\frac{4}{5} < x < 2$ می‌رسیم)

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم

نامعادله
گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند $\rightarrow$ درست : $x = 1,5 \rightarrow 1 < \frac{2,5}{2} < 3$

نامعادله
گزینه سوم حذف می‌شود $\rightarrow$ درست : $x = 1 \rightarrow 1 < 2 < 3$

۳۹-۳۳-۲۸

گزینه ۱ ۱۶۷ روش اول:

نامعادله‌ی داده شده را به دو نامعادله تبدیل کرده و از جواب‌های آن‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\frac{3x+1}{x-3} > -1 \rightarrow \frac{3x+1}{x-3} + \frac{1}{1} > 0 \rightarrow \frac{3x+1+x-3}{x-3} > 0 \rightarrow \frac{4x-2}{x-3} > 0$$



$$\rightarrow \begin{array}{c|cccc} x & -\infty & \frac{1}{2} & 3 & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & + & 0 & - & + \end{array} \rightarrow x < \frac{1}{2} \text{ یا } x > 3 \quad (I)$$

$$\frac{3x+1}{x-3} < 3 \rightarrow \frac{3x+1}{x-3} - 3 < 0 \rightarrow \frac{3x+1-3x+9}{x-3} < 0 \rightarrow \frac{10}{x-3} < 0 \rightarrow x-3 < 0 \rightarrow x < 3 \quad (II)$$

از اشتراک I و II به جواب $x < \frac{1}{2}$ می‌رسیم.

روش دوم:

تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 1 \xrightarrow{\text{نماینده}} -1 < \frac{4}{-2} < 3 \rightarrow \text{نادرست است (گزینه‌های دوم و سوم و چهارم حذف می‌شوند).}$$

۴۲-۱۹-۳۹

گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$15x^2 + 73x + 14 < 0 \Rightarrow \underbrace{(5x+1)}_{x=-\frac{1}{5}} \underbrace{(3x+14)}_{x=-\frac{14}{3}} < 0 \Rightarrow \frac{-14}{3} < x < \frac{-1}{5} \quad (I)$$

$$\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| > 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{2} - 1 > 3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} > 4 \Rightarrow x > 9 \\ \frac{x-1}{2} - 1 < -3 \Rightarrow \frac{x-1}{2} < -2 \Rightarrow x < -3 \end{array} \right\} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک (I), (II)}} -\frac{14}{3} < x < -3 \Rightarrow \max(b-a) = -3 - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

۷۶-۹-۱۵

گزینه ۲ البته مجموعه نامعادله باید بازه $(2, 4)$ باشد نه $[2, 4]$ از طرفی مخرج کسر به ازای $x > \frac{3}{2}$ همواره مثبت است.

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

در بازه $(1, 4)$ عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادله $(2, 4)$ باشد در این بازه پیرامون اول نیز باید منفی باشد. در ضمن $x = 2$ ریشه این عبارت است.

$$x = 2 \Rightarrow 4m^2 - 4 - 8m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$$

$$\text{if } m = 0 \Rightarrow (-x^2 + 4)$$

این عبارت در بازه $(2, 4)$ همواره منفی است و قابل قبول است.

$$\text{if } m = 2 \Rightarrow (3x^2 - 8x + 4)$$

این عبارت در بازه $(2, 4)$ مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط $m = 0$ مورد قبول است.

۱۹-۴۹-۳۲

گزینه ۲ ابتدا نامعادله دوطرفه $0 < \frac{1-3x}{x+1} < 2$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{1-3x}{x+1} < 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & \frac{1}{3} & \\ \hline \frac{1-3x}{x+1} & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\frac{1-3x}{x+1} > -2 \Rightarrow \frac{1-3x}{x+1} + 2 > 0 \Rightarrow \frac{1-3x+2x+2}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+1} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -1 & 3 & \\ \hline \frac{3-x}{x+1} & - & 0 & + \end{array} \Rightarrow -1 < x < 3 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب نامعادله است.

$$(1) \cap (2) : \frac{1}{3} < x < 3$$

حال حدود $\frac{x}{2}$ و سپس $\left[\frac{x}{2}\right]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{1}{6} < \frac{x}{2} < \frac{3}{2} \Rightarrow \left[\frac{x}{2}\right] = 0, 1$$

۵۳-۱۳-۳۴

گزینه ۲ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. توجه کنید که به دلیل وجود $\sqrt{x}$ باید $x \geq 0$ باشد.



$$m = -1 \Rightarrow P = \frac{\overbrace{(4x+4)(2x-3)}^{\text{مثبت}}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	4
P	+	-	+	-

⇒ جواب : $(1, \frac{3}{2}] \cup (4, +\infty)$

$$m = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{(-\frac{8}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(-\frac{9}{4})} P = \frac{(2x^2 + 3x - 9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0$$

عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس $x = \frac{3}{2}$ یکی از جواب‌های نامعادله است. از طرفی به دلیل $x \geq 0$ ، عبارت $x+3$ مثبت است، پس:

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) < 0 \Rightarrow 1 < x < 4$$

$x = \frac{3}{2}$ در بازه $(1, 4)$ قرار دارد، پس این بازه جواب نامعادله است.

$$m = 1 \Rightarrow P = \frac{(-4x+4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

x	0	1	$\frac{3}{2}$	4
P	+	-	-	+

⇒ جواب : $[\frac{3}{2}, 4)$

$$m = \frac{5}{3} \Rightarrow P = \frac{(\frac{40}{9}x^2 - \frac{28}{3}x + 4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(\frac{9}{4})} P = \frac{(10x^2 - 21x + 9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{(5x-3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس:

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}} \frac{5x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow P = \frac{5x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow \text{جواب : } [\frac{3}{5}, 1) \cup (4, +\infty) \cup \{\frac{3}{2}\}$$

۸۳-۵-۱۲

گزینه ۳

$$y = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$$

$$x \in (-\frac{5}{4}, 0) \Rightarrow -2x^2 - \frac{3}{2}x + c > -1 \\ \Rightarrow 4x^2 + 3x - (2c+2) < 0$$

$$4(-\frac{5}{4})^2 + 3(-\frac{5}{4}) - (2c+2) = 0$$

$$\frac{25}{4} - \frac{15}{4} - 2 = 2c \Rightarrow c = \frac{1}{4}$$

با توجه به بازه داده شده $-\frac{5}{4}$ باید ریشه عبارت درجه دوم بالا باشد.

۸۰-۶-۱۵

گزینه ۳

چون در بازه $(0, \frac{1}{2})$ مقادیر x مثبت است؛ پس تابع $y = \frac{x}{|x|}$ به تابع ثابت $y = 1$ تبدیل می‌شود. حال چون نمودار تابع $y = 2x^2 + \frac{3}{2} + c$ پایین خط $y = 1$ قرار دارد پس باید



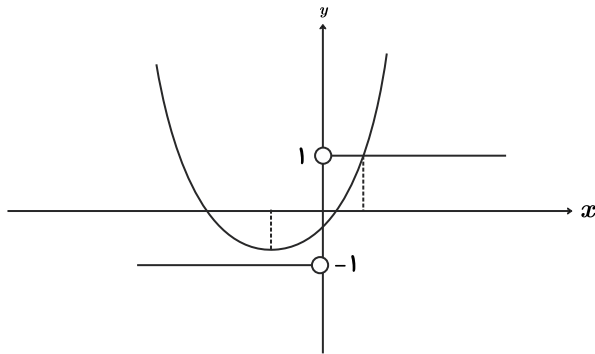
داشته باشیم:

$$2x^2 + \frac{3}{2}x + c < 1 \Rightarrow 2x^2 + \frac{3}{2}x + c - 1 < 0$$

حال باید با توجه به بازه داده شده، مقدار $x = \frac{1}{2}$ ریشه عبارت درجه دوم $(2x^2 + \frac{3}{2}x + c - 1)$ باشد یعنی باید داشته باشیم:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + c - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + c - 1 = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$$



توجه شود که با توجه به شکل فوق جواب به دست آمده با اطلاعات مسئله مطابقت دارد.

۷۹-۷-۱۴

گزینه ۳ طرف سمت چپ را مخرج مشترک می گیریم:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{x^2 + (x^2 - 2x + 1)}{[x(1-x)]^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2(x^2 - x) + 1}{(x - x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\xrightarrow{x^2 - x = t} \frac{2t + 1}{t^2} = \frac{160}{9} \xrightarrow{\text{توکیب در صورت}} \frac{t^2 + 2t + 1}{t^2} = \frac{160 + 9}{9} \Rightarrow \left(\frac{t+1}{t}\right)^2 = \frac{169}{9}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{t} = \frac{13}{3} \\ 1 + \frac{1}{t} = \frac{-13}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{t} = \frac{10}{3}, \frac{-16}{3} \Rightarrow t = \frac{3}{10}, \frac{-3}{16} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x = \frac{3}{10} \\ x^2 - x = -\frac{3}{16} \end{cases}$$

هر دو معادله $x^2 - x - \frac{3}{10} = 0$ و $x^2 - x - \frac{3}{16} = 0$ دارای جواب هستند و مجموع ریشه های هر کدام برابر ۱ است، پس مجموع جواب های معادله برابر $1 + 1 = 2$ است.

۴۳-۴۰-۱۷

گزینه ۴ برای حل معادلات گنگ طرفین را به توان مناسب می رسانیم تا رادیکال ها از بین بروند.

$$3a + \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a \Rightarrow 7a^2 - 16a + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 256 - 112 = 144 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{16 + 12}{14} = 2 \text{ (در معادله صدق نمی کند.)} \\ a = \frac{16 - 12}{14} = \frac{2}{7} \text{ ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7} + 1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4,5$$

۳۵-۴۰-۲۵

گزینه ۲ با استفاده از تغییر متغیر $x^2 + 4x + 5 = t$ داریم:

$$x^2 + 4x + 5 - 2 = \sqrt{x^2 + 4x + 5} \Rightarrow t - 2 = \sqrt{t} \quad (I)$$

چون عبارت سمت راست همواره مثبت است باید عبارت سمت چپ هم همواره مثبت باشد.

$$t - 2 \geq 0 \Rightarrow t \geq 2$$

حال طرفین عبارت I را به توان ۲ می رسانیم.

$$(t-2)^2 = (\sqrt{t})^2 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = t \Rightarrow t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 1 \rightarrow \text{با توجه به اینکه } t \geq 2 \text{ است، پس غیر قابل قبول است.} \\ t = \frac{c}{a} = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 5 = 4 \rightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 > 0 \end{cases}$$

$$\text{حاصل ضرب ریشه‌ها: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1$$

۵۹-۲۰-۲۰
گزینه ۱

$$2a + \sqrt{3a+16} = 1 \rightarrow \sqrt{3a+16} = 1-2a \xrightarrow{\text{توان ۲}} 3a+16 = 1+4a^2-4a$$

$$\rightarrow 4a^2 - 7a - 15 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 49 + 240 = 289} \begin{cases} a = \frac{7+17}{4} = 3 \text{ (در معادله صدق نمی‌کند)} \\ a = \frac{7-17}{4} = -\frac{5}{4} \text{ قی} \end{cases}$$

$$\text{پس: } 4a + 9 = 4\left(-\frac{5}{4}\right) + 9 = 4$$

۳۷-۳۵-۲۸

گزینه ۴ کافی است دو معادله را در یک دستگاه حل کنیم تا محل تلاقی به دست آید. دقت کنید $y \geq 3$ است.

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3} \end{cases} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 = y+3 + y-3 - 2\sqrt{y^2-9} \xrightarrow{x^2=2y} \sqrt{y^2-9} = 0 \Rightarrow y = \pm 3 \xrightarrow{y \geq 3} y = 3 \Rightarrow x = \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \text{محل تلاقی: } A(\sqrt{6}, 3)$$

نکته: فاصله هر نقطه با فرم $A(x, y)$ تا مبدأ مختصات برابر است با: $\sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\text{فاصله} \rightarrow d = \sqrt{(\sqrt{6})^2 + 3^2} = \sqrt{15}$$

۴۷-۳۱-۲۱

گزینه ۴ می‌دانیم عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج، مقداری نامنفی است، پس:

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} \rightarrow x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \\ \sqrt{2-x} \rightarrow 2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

یعنی فقط $x = 2$ می‌تواند قابل قبول باشد که آن را امتحان می‌کنیم.

$$\sqrt{2 \times 2 - 3} = \sqrt{2 + \sqrt{2-2}} - \sqrt{2-2} \quad \times \text{ غ ق}$$

در نتیجه معادله داده شده، فاقد ریشه حقیقی است.

۶۶-۱۰-۲۵

گزینه ۲ $x > 1$: شرط معادله

$$\frac{\sqrt{x+1}}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{3-\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \Rightarrow \sqrt{x+1} \left(\frac{1}{3+\sqrt{x-1}} - \frac{1}{3-\sqrt{x-1}} \right) = \frac{x-1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \sqrt{x+1} \left(\frac{3-\sqrt{x-1}-3-\sqrt{x-1}}{(3+\sqrt{x-1})(3-\sqrt{x-1})} \right)$$

$$= (x-1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{x+1} \times \frac{-2\sqrt{x-1}}{9-(x-1)} = \sqrt{x-1} \Rightarrow \frac{-2\sqrt{x-1} \times \sqrt{x+1}}{9-x+1} = \sqrt{x-1}$$

با توجه به معادله اصلی $x \neq 1$ است و می‌توان $\sqrt{x-1}$ را در معادله فوق از طرفین ساده کرد.

$$\frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x+1} = x-10 \quad \text{توان ۲} \rightarrow 4(x+1) = (x-10)^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 = 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 24x + 96 = 0 \Rightarrow \Delta = (-24)^2 - 4 \times 1 \times 96 = 192$$

$$x = \frac{24 \pm \sqrt{192}}{2} = \frac{24 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 12 \pm 4\sqrt{3}$$

در معادله (۱) باید $x \geq 10$ باشد که در این صورت فقط $x = 12 + 4\sqrt{3}$ قابل قبول است. پس معادله فوق فقط یک ریشه مثبت دارد.

۷۶-۱۱-۱۳

گزینه ۳ لازم است زیر رادیکال‌ها نامنفی باشد، بنابراین داریم:

$$1) -x^3 + 4x^2 + 25x - 100 \geq 0 \Rightarrow -x^2(x-4) + 25(x-4) \geq 0 \Rightarrow (x-4)(-x^2+25) \geq 0 \Rightarrow (x-4)(5+x)(5-x) \geq 0$$



$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & -5 & & 4 & & 5 \\ & & + & \circ & - & \circ & + \\ & & & & & & - \end{array} \Rightarrow x \leq -5 \quad 4 \leq x \leq 5 \quad (I)$$

$$(2) -x^2 + 6x - 8 \geq 0 \Rightarrow (x-2)(-x+4) \geq 0$$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & & 2 & & 4 & & \\ & & - & \circ & + & \circ & - \end{array} \Rightarrow 2 \leq x \leq 4 \quad (II)$$

لازم است ریشه متعلق به اشتراک جواب‌های به دست آمده باشد. اشتراک این دو جواب $\{4\}$ است؛ پس معادله نمی‌تواند ریشه‌ای غیر از $x=4$ داشته باشد. به ازای $x=4$ معادله به تساوی درست $6 = 4 + 2$ تبدیل می‌شود، پس $x=4$ تنها ریشه معادله است.

۸۱-۷-۱۲

۱۸۲ گزینه ۴ طبق فرض $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2$ است. حال اگر فرض کنیم $\sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} = t$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \sqrt{x+a} - \sqrt{x-4} = 2 \\ \sqrt{x+a} + \sqrt{x-4} = t \end{cases} \xrightarrow{\text{در هم ضرب}} (x+a) - (x-4) = 2t$$

$$a+4 = 2t \Rightarrow t = \frac{a+4}{2}$$

حاصل عبارت مطلوب برابر $2-t$ است که خواهیم داشت:

$$t-2 = \frac{a+4}{2} - 2 = \frac{a}{2}$$

۶۳-۱۲-۲۵

۱۸۳ گزینه ۱

$$\frac{1}{\sqrt{2-x}+2} - \frac{1}{2-\sqrt{2-x}} = \frac{2-x}{5\sqrt{2-x}}$$

با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{2-x} = t$ داریم:

$$\frac{1}{2+t} - \frac{1}{2-t} = \frac{t^2}{5t} = \frac{t}{5} \Rightarrow \frac{2-t-(2+t)}{(2+t)(2-t)} = \frac{t}{5} \Rightarrow \frac{-2t}{4-t^2} = \frac{t}{5}$$

یکی از ریشه‌های معادله فوق $t=0$ است، داریم:

$$\frac{-2}{4-t^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow 4-t^2 = -10 \Rightarrow t^2 = 14 \Rightarrow t = \pm\sqrt{14}$$

چون $t = \sqrt{2-x} \geq 0$ پس $t = -\sqrt{14}$ غیر قابل قبول است، داریم:

$$t=0 \Rightarrow \sqrt{2-x}=0 \Rightarrow x=2$$

$$t=\sqrt{14} \Rightarrow \sqrt{2-x}=\sqrt{14} \Rightarrow 2-x=14 \Rightarrow x=-12$$

توجه کنید که $x=2$ غیر قابل قبول است، زیرا در سمت راست معادله مخرج را صفر می‌کند، بنابراین معادله جواب مثبت ندارد.

۶۰-۱۲-۲۸

۱۸۴ گزینه ۳ می‌دانیم که $x=vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت جریان آب را v در نظر بگیریم سرعت قایق در جهت حرکت آب $100+v$ و در خلاف جهت حرکت

آب $100-v$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1200}{100+v} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1200}{100-v} \end{cases} \Rightarrow t_2 - t_1 = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-v} - \frac{1200}{100+v} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{1200(100+v) - 1200(100-v)}{(100-v)(100+v)} = \frac{120000 + 1200v - 120000 + 1200v}{10000 - v^2} = 5$$

$$\Rightarrow 2400v = 5(10000 - v^2) \Rightarrow 480v = 10000 - v^2$$

$$\Rightarrow v^2 + 480v - 10000 = (v-20)(v+500) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v = 20 \text{ قق} \\ v = -500 \text{ غقق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v=20$ برسید.

۵۵-۲۴-۲۱

۱۸۵ گزینه ۴ می‌دانیم که $x = vt$ و از آنجا $t = \frac{x}{v}$ است. اگر سرعت پرواز پرنده را v در نظر بگیریم، در این صورت سرعت رفت $v + ۵$ و سرعت برگشت $v - ۵$ است.

$$\begin{cases} \text{مسیر رفت } t_1 = \frac{1}{v+5} \\ \text{مسیر برگشت } t_2 = \frac{1}{v-5} \end{cases} \Rightarrow t_1 + t_2 = \underbrace{9}_{\text{دقیقه}} \rightarrow \frac{1}{v+5} + \frac{1}{v-5} = \underbrace{\frac{9}{60}}_{\text{ساعت}}$$

$$\Rightarrow \frac{v-5+v+5}{(v+5)(v-5)} = \frac{2v}{v^2-25} = \frac{3}{20} \Rightarrow 3v^2 - 75 = 40v$$

$$\Rightarrow 3v^2 - 40v - 75 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 1600 + 900 = 2500} \begin{cases} v_1 = \frac{40+50}{6} = 15 \text{ قق} \\ v_2 = \frac{40-50}{6} = -\frac{5}{3} \text{ غق} \end{cases}$$

البته اصلاً نیازی به این همه محاسبات نمی‌باشد و می‌توانید گزینه‌ها را چک کنید و به راحتی به جواب $v = 15$ برسید.

۵۰-۳۱-۱۹

۱۸۶ گزینه ۴ اگر بهروز بتواند به تنهایی این کار را در k ساعت انجام دهد، فرهاد همان کار را به تنهایی در $k+9$ ساعت انجام می‌دهد؛ آنگاه داریم:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{k+9} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2k+9}{k \cdot (k+9)} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow k^2 + 9k = 40k + 180 \Rightarrow k^2 - 31k - 180 = (k-36)(k+5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 36 \\ k = -5 \text{ غ ق} \end{cases}$$

۳۱-۲۸-۴۱

۱۸۷ گزینه ۳

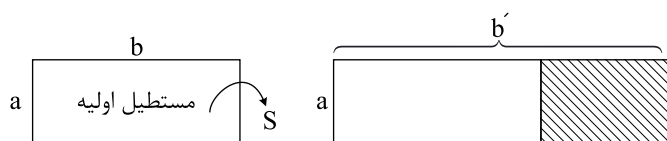
$$\begin{cases} 11 \times \frac{40}{100} = 4,4 \\ 4 \times \frac{70}{100} = 2,8 \end{cases} \rightarrow 4,4 + 2,8 = 7,2 \text{ جرم کل رنگ‌ها}$$

با فرض اینکه با تبخیر شدن x کیلوگرم رنگ، غلظت رنگ به ۵۰٪ می‌رسد، داریم:

$$\frac{7,2}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow 15-x = 14,4 \Rightarrow x = 0,6 \text{ کیلوگرم}$$

۴۳-۳-۵۴

۱۸۸ گزینه ۴



$$\frac{b}{a} = \frac{5}{4}, \text{ مستطیل طلایی } \frac{b'}{a} = \frac{b'+a}{b'} \Rightarrow b'^2 - ab' - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = a^2 + 4a^2 = 5a^2 \Rightarrow b' = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = a \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

$$\Rightarrow b' = a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ ق ق} \quad \frac{s'}{s} = \frac{ab'}{ab} = \frac{a \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)}{\frac{5}{4}a} = \frac{2}{5} (1 + \sqrt{5}) = 0,4(1 + \sqrt{5})$$

۸۰-۴-۱۶

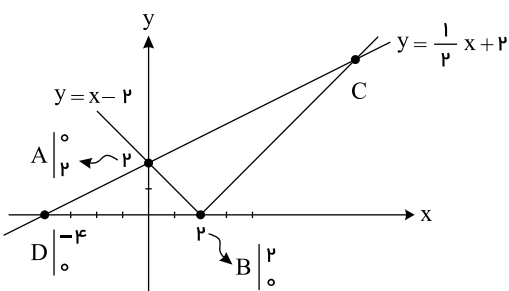
۱۸۹ گزینه ۲ نامساوی مثلثی برای n عدد وقتی به تساوی تبدیل می‌شود که همگی هم علامت باشند.

$$|x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n|$$

$$\xrightarrow{\text{همگی هم علامت باشند}} |x_1 + x_2 + \dots + x_n| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

۳۲-۱۲-۵۶

$$190 \text{ گزینه ۴ دو تابع } y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ و } y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| \text{ را رسم می‌کنیم.}$$



نقطه C محل برخورد شاخه $y = x - 2$ با خط $y = \frac{1}{3}x + 2$ است:

$$\frac{1}{3}x + 2 = x - 2 \Rightarrow x = 6, y = 6 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 6 \\ 6 \end{vmatrix}$$

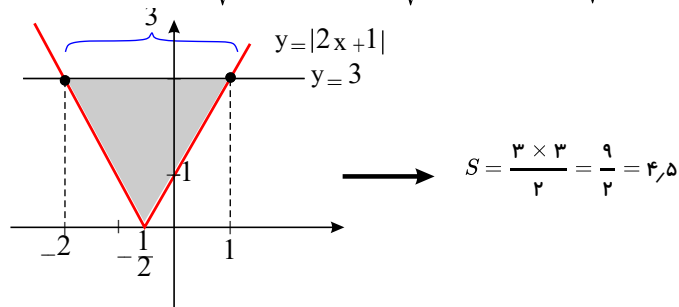
پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle BDC} - S_{\triangle ABD} \\ &= \left(\frac{1}{2}BD \times y_C\right) - \left(\frac{1}{2}BD \times y_A\right) = \frac{1}{2}BD(y_C - y_A) \\ &= \frac{1}{2}(2 - 4)(6 - 2) = 12 \end{aligned}$$

۷۰-۹-۲۱

گزینه ۳ ابتدا تابع $g \circ f$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{4(x^2 + x) + 1} = \sqrt{4x^2 + 4x + 1} = \sqrt{(2x + 1)^2} = |2x + 1|$$

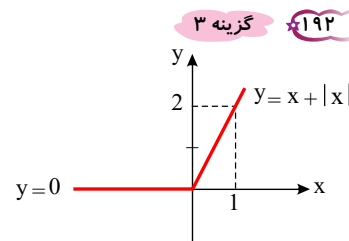


دقت کنید که نقاطی به طول‌های $x = -2$ و $x = 1$ از تلاقی تابع $y = |2x + 1|$ با خط $y = 3$ به دست آمده‌اند.

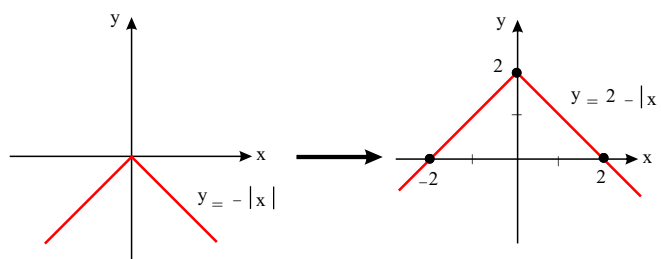
$$|2x + 1| = 3 \rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \rightarrow 2x = 2 \rightarrow x = 1 \\ 2x + 1 = -3 \rightarrow 2x = -4 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

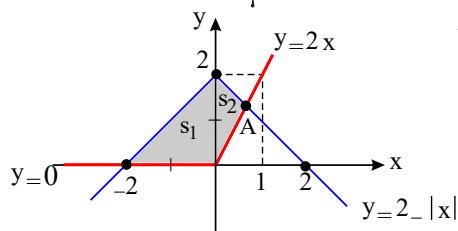
۶۶-۸-۲۶

$$y = x + |x| \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow y = x + x \rightarrow y = 2x, & A \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \end{vmatrix} \\ x < 0 \rightarrow y = x - x \rightarrow y = 0 \end{cases}$$



$$y = 2 - |x| \rightarrow$$



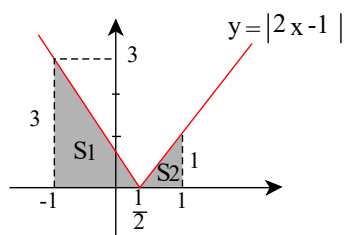


حال، کافی است این دو شکل را با هم رسم کنیم. برای پیدا کردن طول نقطه A ، کافی است که خط $y = 2x$ و $y = 2 - x$ را با هم تلاقی دهیم.

$$2x = 2 - x \rightarrow 3x = 2 \rightarrow x_A = \frac{2}{3}$$

$$S_1 = \frac{2 \times 2}{2} = 2, \quad S_2 = \frac{\frac{2}{3} \times 2}{2} = \frac{2}{3} \rightarrow S_{\text{کل}} = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

۶۱-۱۰-۲۹



گزینه ۳ نمودار تابع داده شده را رسم می کنیم.

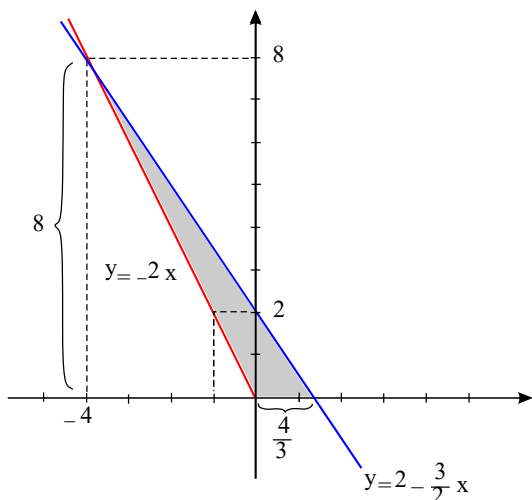
$$\rightarrow \left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{\frac{3}{2} \times 3}{2} = \frac{9}{4} \\ S_2 &= \frac{\frac{1}{2} \times 1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \rightarrow S_{\text{کل}} = \frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

۷۲-۱۰-۱۹

$$y = |x| - x = \begin{cases} x - x & x \geq 0 \\ -x - x & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$

خط افقی $y = 0$ را به شرط $x \geq 0$ و خط $y = -2x$ با شرط $x < 0$ رسم می کنیم. برای رسم خط $y = -2x$ دو نقطه دلخواه $\begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ را روی آن در نظر می گیریم و برای

رسم خط $y = 2 - \frac{3}{2}x$ دو نقطه دلخواه $\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}$ را روی آن در نظر می گیریم.



$$\Rightarrow S = \frac{8 \times \frac{4}{3}}{2} = \frac{16}{3}$$

دقت کنید برای پیدا کردن محل برخورد دو خط به معادلات $y = 2 - \frac{3}{2}x$ و $y = -2x$ ، آنها را تلاقی می دهیم.

$$2 - \frac{3}{2}x = -2x \xrightarrow{\times 2} 4 - 3x = -4x \rightarrow x = -4$$

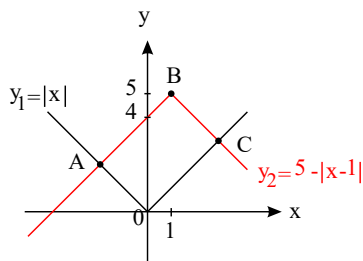
و بدست آمده را در معادلات یکی از دو خط، قرار دهیم، عرض نقطه تلاقی ۸ می شود.

۷۲-۷-۲۰



گزینه ۴ ۱۹۵

ابتدا نمودار این دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم تا شکل ناحیه محدود مشخص شود.



با توجه به شکل، ناحیه محدود به دو تابع یک مستطیل است که برای محاسبه مساحت آن باید ابتدا نقاط برخورد آنها را بیابیم:

$$y_1 = y_2 \Rightarrow |x| = 5 - |x-1|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{نقطه } C \xrightarrow{x > 1} x = 5 - (x-1) \rightarrow x = 3 \Rightarrow C(3, 3) \\ \text{نقطه } A \xrightarrow{x < 0} -x = 5 + (x-1) \rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2, -2) \end{cases}$$

$$OC = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18}, OA = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$$

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} = \sqrt{18} \times \sqrt{8} = \sqrt{144} = 12$$

۷۹-۶-۱۵

گزینه ۱ ۱۹۶ نمودارهای دو تابع به صورت زیر هستند.

$$y = |x+2| + |x-1| = \begin{cases} x+2+x-1=2x+1, & x \geq 1 \\ x+2-(x-1)=3, & -2 \leq x < 1 \\ -x-2-x+1=-2x-1, & x < -2 \end{cases}$$

$$3y+x=17 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{17}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x+1 \\ 3y+x=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(2x+1)+x=17 \\ 7x=14 \rightarrow x=2 \\ y=2 \times 2+1=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-2x-1 \\ 3y+x=17 \end{cases} \Rightarrow 3(-2x-1)+x=17 \Rightarrow -5x=20 \Rightarrow x=-4$$

$$y=-2(-4)-1=7 \Rightarrow A \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(2+4)^2 + (5-7)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

۶۶-۶-۲۷

گزینه ۴ ۱۹۷ ابتدا عبارت قدر مطلق را تعیین علامت نموده و به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای می‌نویسیم.

$$y = |2x-6| - |x+4| + x$$

$$x > 3 \rightarrow y = 2x-6-x-4+x = 2x-10 \rightarrow \text{صعودی اکید}$$

$$-4 \leq x \leq 3 \rightarrow y = -2x+6-x-4+x = -2x+2 \rightarrow \text{نزولی اکید}$$

$$x < -4 \rightarrow y = -2x+6+x+4+x = 10 \rightarrow \text{ثابت}$$

تابع در بازه $(-4, 3)$ تابع نزولی اکید است. معکوس تابع را در این بازه تعیین می‌کنیم.

$$y = -2x+2 \rightarrow y-2 = -2x \rightarrow \frac{y-2}{-2} = x \Rightarrow \frac{x-2}{-2} = y \Rightarrow f^{-1}(x) = 1 - \frac{x}{2}$$

برای محاسبه دامنه تابع f^{-1} برد تابع $f(x)$ را می‌یابیم.

$$\begin{cases} y = -2x+2 \\ -4 \leq x \leq 3 \end{cases} \xrightarrow{+2} \begin{cases} -6 \leq -2x \leq 8 \\ -4 \leq -2x+2 \leq 10 \end{cases} \Rightarrow R_f = D_{f^{-1}} = [-4, 10]$$

۵۹-۱۸-۲۳

گزینه ۳ ۱۹۸ برای این منظور باید نامعادله $2x + |x| > -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ را حل کنیم.



$$x \geq 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x + x \rightarrow x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{9}{2}$	1	$+\infty$
عبارت < 0		+	0	-
		+	0	+

$$\rightarrow \frac{-9}{2} < x < 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x < 1 \quad (I)$$

$$x < 0 \rightarrow -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} > 2x - x \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} < 0$$

x	$-\infty$	-3	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
عبارت < 0		+	0	-
		+	0	+

$$\rightarrow -3 < x < \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -3 < x < 0 \quad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $-3 < x < 1$ می‌رسیم که طول نقطهٔ وسط بازهٔ $-1 = \frac{-3+1}{2}$ است.

۸۳-۷-۱۰

گزینه ۲

ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها $x = -2$ و $x = \frac{1}{2}$ هستند.

x	$-\infty$	-2	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$		-	0	+
$x+2$		-	0	+

$$x < -2 \Rightarrow -2x + 1 - x - 2 = 3 \Rightarrow -3x = 4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$$
 غ ق

$$-2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2x + 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow -x = 0 \Rightarrow x = 0$$
 ق ق

$$x > \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 1 + x + 2 = 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$
 ق ق

$$\text{مجموع جواب‌ها} = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

۲۹-۴۰-۳۱

گزینه ۴

روش اول:

$$2x + 1 - |x - 2| > \underbrace{|x^2 + 1|}_+ \rightarrow 2x + 1 - |x - 2| > x^2 + 1$$

$$x \geq 2: 2x + 1 - (x - 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 - x + 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x - 2)(x + 1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 2: 2x + 1 - (-x + 2) > x^2 + 1 \rightarrow 2x + 1 + x - 2 > x^2 + 1 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow (x - 1)(x - 2) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < 2 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $1 < x < 2$ یا $x \in (1, 2)$ می‌رسیم.

روش دوم:

در نامعادلهٔ داده‌شده به جای x ، عدد صفر قرار می‌دهیم.

$$x = 0 \rightarrow 0 + 1 - 2 > 1 \rightarrow -1 > 1$$

به نتیجهٔ غلطی رسیدیم، پس گزینه‌های ۱ و ۳ که همگی شامل صفر هستند حذف می‌شوند و گزینهٔ چهارم، جواب صحیح است.

۵۷-۱۹-۲۴

گزینه ۲ می‌دانیم که $\left|\frac{f}{g}\right| = \frac{|f|}{|g|}$ است.



$$\frac{|2-x|}{|2x-3|} > 1 \rightarrow |2-x| > |2x-3| \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + x^2 - 4x > 4x^2 + 9 - 12x$$

$$\rightarrow 3x^2 - 8x + 5 < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < \frac{5}{3}$$

ولی دقت کنید که $x = \frac{3}{2}$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}) \cup (1, \frac{3}{2})$ در می‌آید.

۵۷-۱۸-۲۵

۲۰۲ گزینه ۱ روش اول: باید نامعادله $|2x^2 - 4| < 2x$ را حل کنیم می‌دانیم که ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{2}$ هستند.

$$x < -\sqrt{2}: 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset$$

$$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}: -2x^2 + 4 < 2x \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 > 0 \rightarrow x^2 + x - 2 > 0 \rightarrow (x+2)(x-1) > 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -2 \text{ یا } x > 1 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 1 < x < \sqrt{2}$$

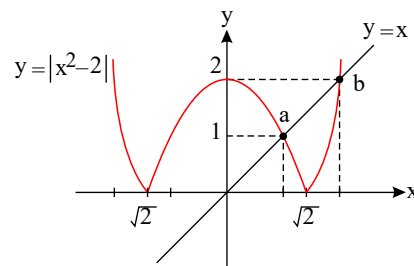
$$x > \sqrt{2}: 2x^2 - 4 < 2x \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 < 0 \rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \sqrt{2} < x < 2$$

از اجتماع جواب‌های بدست آمده به جواب $x \in (1, 2)$ می‌رسیم بنابراین $b - a = 1$ است.

روش دوم: تابع $y = |2x^2 - 4|$ و $y = 2x$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم در چه بازه‌ای تابع $y = |2x^2 - 4|$ زیر تابع $y = 2x$ قرار دارد.

$$|2x^2 - 4| < 2x \rightarrow |2(x^2 - 2)| < 2x \rightarrow |x^2 - 2| < x$$



برای این منظور باید نقاط a, b را پیدا کنیم.

$$|x^2 - 2| = x \rightarrow \begin{cases} x^2 - 2 = x \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 & b \\ x=-1 & \text{غ ق} \end{cases} \\ x^2 - 2 = -x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 & \text{غ ق} \\ x=1 & a \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب مسأله بازه $(1, 2)$ است و $b - a = 1$ است.

۳۹-۴۲-۱۹

۲۰۳ گزینه ۲ روش اول:

قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x \geq 2 \Rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-2) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} 1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 2 \Rightarrow x^2 - 2x < -x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < 2 \quad (II)$$

$$(I) \cup (II): -1 < x < 2$$

روش دوم:

نامعادله را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$$x = 0 \xrightarrow{\text{نامعادله}} 0 < 2 \quad \text{درست است گزینه‌های (۳ و ۴ حذف می‌شوند)}$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{نامعادله}} -1 < 1 \quad \text{درست است (گزینه ۱ حذف می‌شود)}$$

۴۴-۲۶-۳۱

۲۰۴ گزینه ۲ باید نامعادله $(x-1)^2 > 4x^2$ را حل کنیم.

$$(x-1)^2 > 4x^2 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2} > \sqrt{4x^2} \rightarrow |x-1| > 2x^2$$

$$x \geq 1 : x-1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 - x + 1 < 0 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط } a>0, \Delta < 0} \emptyset \xrightarrow{\text{همواره مثبت}} \emptyset \quad (I)$$

$$x < 1 : -x+1 > 2x^2 \rightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
		+	-	+

$$\rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -1 < x < \frac{1}{2} \quad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $x \in (-1, \frac{1}{2})$ می‌رسیم و بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{3}{2} - (-1) = \frac{5}{2}$ است.

۲۳-۱۳-۶۴

۲۰۵ گزینه ۳ داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow x + x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 2x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 4x \leq x + 6$$

$$\rightarrow 3x \leq 6 \rightarrow x \leq 2 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} 0 \leq x \leq 2 \quad (I)$$

$$x < 0 \rightarrow x - x \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq \frac{1}{2}x + 3 \rightarrow 0 \leq x + 6$$

$$\rightarrow x \geq -6 \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -6 \leq x < 0 \quad (II)$$

از اجتماع جواب‌های I و II به جواب $-6 \leq x \leq 2$ یا $x \in [-6, 2]$ می‌رسیم.

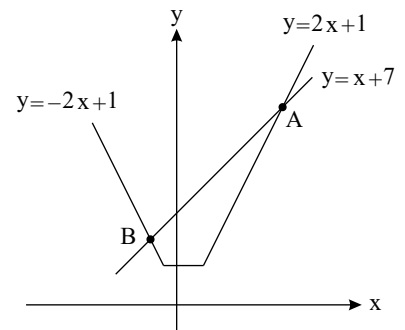
۳۸-۱۱-۵۱

۲۰۶ گزینه ۴ تابع $y = |x-2| + |x+1|$ یک تابع گلدانی است که به‌ازای $x < -1$ اکیداً نزولی و به‌ازای $x > 2$ اکیداً صعودی و در فاصله $-1 \leq x \leq 2$ ثابت است.

$$x < -1 : y = -x + 2 - x - 1 \rightarrow y = -2x + 1$$

$$-1 \leq x \leq 2 : y = -x + 2 + x + 1 \rightarrow y = 3$$

$$x > 2 : y = x - 2 + x + 1 \rightarrow y = 2x - 1$$



$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = 8, y = 15 \rightarrow A \begin{vmatrix} 8 \\ 15 \end{vmatrix}, \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x + 7 \end{cases} \rightarrow x = -2, y = 5 \rightarrow B \begin{vmatrix} -2 \\ 5 \end{vmatrix}$$

$$\text{پس: } AB = \sqrt{(8+2)^2 + (15-5)^2} = \sqrt{100 + 100} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$$

۳۲-۳۸-۳۰

۲۰۷ گزینه ۴

روش اول:

$$\begin{cases} |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 \quad (1) \\ (2x-1) < |x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 : 2x-1 < x \Rightarrow x < 1 \\ x < 0 : 2x-1 < -x \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ x < \frac{1}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} x < \frac{1}{3} \quad (2) \end{cases}$$

از اشتراک روابط ۱ و ۲ به جواب $-2 < x < 1$ می‌رسیم.

روش دوم:

تست را به روش عدد گذاری حل می‌کنیم.

$$x = 1 \rightarrow \begin{cases} 1 < 2 \quad \checkmark \\ 2-1 < 1 \quad \times \end{cases} \rightarrow \text{گزینه‌های ۲ و ۳ که شامل } x = 1 \text{ می‌باشند حذف می‌شوند.}$$



گزینه ۱ شامل $x = -1$ نمی باشد حذف می شود. $x = -1 \rightarrow \begin{cases} 1 < 2 \checkmark \\ -2 - 1 < 1 \checkmark \end{cases}$

۵۴-۱۸-۲۸

گزینه ۴

با کمک ریشه داخل قدر مطلق که $x = 0$ است بازبندی را به صورت زیر انجام می دهیم:

	1	5
$x-5$	-	-
$x-1$	-	+
p	+	+

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 - 4x < 2x - 5$$

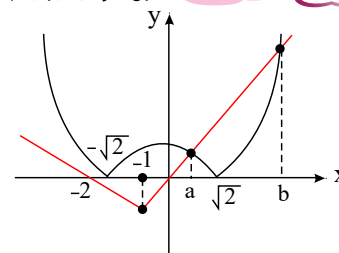
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 5 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-5) < 0 \Rightarrow x \in (1, 5)$$

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 + 4x < 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 > 0 \xrightarrow{x < 0} x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6})$$

مجموعه جواب: $x \in (-\infty, 1 - \sqrt{6}) \cup (1, 5)$

۶۳-۹-۲۸

گزینه ۳ طبق نمودار در بازه (a, b) این نامساوی برقرار است و a در بازه $(\sqrt{2}, 0)$ و b در بازه $(\sqrt{2}, +\infty)$ قرار دارد.



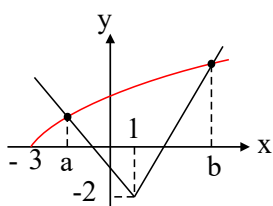
$$a: x = 2 - x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ غ ق} \\ x = 1 \end{cases}$$

$$b: x = x^2 - 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ غ ق} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$(a, b) = (1, 2) \rightarrow m = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$$

۷۵-۱۲-۱۴

گزینه ۳ نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x+3}$ و $f(x) = |x-1| - 2$ را رسم می کنیم. با توجه به شکل a محل تلاقی شاخه منفی $f(x)$ با تابع y و b محل تلاقی شاخه مثبت $f(x)$ با تابع y است.



$$\begin{aligned} \sqrt{x+3} &= -x-1 \xrightarrow{\text{توان دو}} x+3 = x^2+2x+1 \\ \Rightarrow x^2+x-2 &= 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow a = -2 \\ \sqrt{x+3} &= x-3 \rightarrow x+3 = x^2-6x+9 \rightarrow x^2-7x+6 = 0 \\ \Rightarrow (x-1)(x-6) &= 0 \Rightarrow b = 6 \rightarrow b-a = 6+2 = 8 \end{aligned}$$

۶۱-۱۰-۲۹

گزینه ۱ اگر به نمودار ۲ تابع توجه کنیم معلوم می شود که مجموع جواب نامعادله در x های مثبت رخ می دهد پس می دانیم $x > 0$ است و خواهیم داشت:

$$|2x-3| < x \Rightarrow -x < 2x-3 < x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-3 < x \Rightarrow x < 3 \\ -x < 2x-3 \Rightarrow 3 < 3x \Rightarrow 1 < x \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3 \Rightarrow -1 < x-2 < 1 \Rightarrow |x-2| < 1$$

۵۶-۱۵-۲۹

گزینه ۱ بر اساس ریشه داخل قدر مطلق که $x = 2$ است معادله را بازبندی می کنیم:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 < |x-2| \Rightarrow \begin{cases} x^2 < x-2 & x \geq 2 \\ x^2 < -x+2 & x < 2 \end{cases}$$

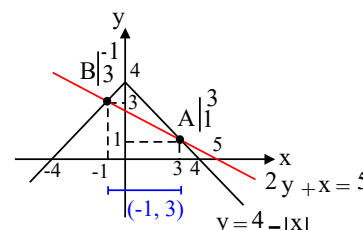
$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x + 2 < 0 & x \geq 2 \rightarrow \Delta < 0, a > 0 \text{ غ ق} \\ x^2 + x - 2 < 0 & x < 2 \rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \xrightarrow{x < 2} x \in (-2, 1) \end{cases}$$

۴۷-۱۵-۳۸

گزینه ۲ روش اول: با توجه به نمودار دو تابع، منحنی تابع $y = 4 - |x|$ در بازه $(-1, 3)$ از خط $2y + x = 5$ بالاتر قرار دارد، پس گزینه (۲) پاسخ صحیح تست می باشد. توجه داشته باشید که طول محلهای تلاقی دو منحنی از حل کردن معادله تلاقی، به صورت زیر به دست آمده است:

$$\begin{cases} y = 4 - |x| \\ y = \frac{5-x}{2} \end{cases} \Rightarrow 4 - |x| = \frac{5-x}{2}$$

$$\Rightarrow 8 - 2|x| = 5 - x \begin{cases} x \geq 0 \rightarrow 8 - 2x = 5 - x \Rightarrow x = 3 \\ x < 0 \rightarrow 8 + 2x = 5 - x \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$



روش دوم: با حل نامعادله زیر، محدوده جواب را به عنوان بازه موردنظر تست در نظر گرفته و طول بازه را به دست می آوریم:

طرفین ضرب در $(+2)$ $4 - |x| > \frac{5-x}{2} \rightarrow 8 - 2|x| > 5 - x$

الف) $x \geq 0 \Rightarrow 8 - 2x > 5 - x \Rightarrow x < 3$

$x \geq 0 \cap x < 3 \Rightarrow 0 \leq x < 3$

ب) $x < 0 \Rightarrow 8 + 2x > 5 - x \Rightarrow x > -1$

$x < 0 \cap x > -1 \Rightarrow -1 < x < 0$

بزرگترین مجموعه جواب، اجتماع دو بازه $[0, 3]$ و $(-1, 0)$ ، یعنی بازه $(-1, 3)$ است بنابراین $b - a = 3 - (-1) = 4$ است.

۶۶-۷-۲۷

گزینه ۴: معادله اول را با کمک ویژگی‌های نامعادلات و نامعادله دوم را با کمک بازه‌بندی به صورت زیر تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{cases} |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2 & (1) \\ (2x-1) < |x| \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0: 2x-1 < x \Rightarrow x < 1 \xrightarrow{\cap x \geq 0} 0 \leq x < 1 \\ x < 0: 2x-1 < -x \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \xrightarrow{\cap x < 0} x < 0 \end{cases} \Rightarrow x < 1 & (2) \end{cases}$$

$-2 < x < 1$

از روابط ۱ و ۲ داریم:

۵۶-۱۰-۳۳

گزینه ۱: ۲۱۵

ابتدا دامنه تابع یعنی $|x-1| < 2$ را باز می‌کنیم، سپس داریم:

$|x-1| < 2 \Rightarrow (x-1)^2 < 4 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 < 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 < 0$

۴۳-۱۸-۳۹

گزینه ۳: ۲۱۶

با توجه به نمودارهای دو تابع f و g ، یک نقطه تقاطع مثبت (که عددی بزرگ‌تر از ۱ است)، و یک نقطه تقاطع منفی وجود دارد که آنها را به

دست می‌آوریم:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \rightarrow 5 - (x-1) = 2x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2 \\ x < 0 \rightarrow 5 + (x-1) = -2x \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

با توجه به نمودار، در بازه $(-\frac{4}{3}, 2)$ نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g قرار دارد.

۶۷-۶-۲۶

گزینه ۲: ۲۱۷

$$[x^2 + x] = -1 \Rightarrow -1 \leq x^2 + x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -1 < x < 0 \\ -1 \leq x^2 + x \Rightarrow x^2 + x + 1 \geq 0 \xrightarrow{a > 0, \Delta < 0} x \in R \end{cases}$$

همواره مثبت

اشتراک $\rightarrow -1 < x < 0$

توان ۲: $-1 < x < 0 \rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = 0$

۵۳-۱۸-۳۰

گزینه ۳: روش اول: ۲۱۸

$$\begin{aligned} \sqrt[n^2]{4n^2 - 4n + 1} &< \sqrt[n^2]{4n^2 - 3n + 1} < \sqrt[n^2]{4n^2} \rightarrow 2n - 1 < \sqrt{4n^2 - 3n + 1} < 2n \Rightarrow \lfloor \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \rfloor = 2n - 1 \\ \sqrt[n^2]{n^2 - 4n + 4} &< \sqrt[n^2]{n^2 - 2n} < \sqrt[n^2]{n^2 - 2n + 1} \rightarrow n - 2 < \sqrt{n^2 - 2n} < n - 1 \Rightarrow \lfloor \sqrt{n^2 - 2n} \rfloor = n - 2 \\ \lfloor \sqrt{4n^2 - 3n + 1} \rfloor - 2 \lfloor \sqrt{n^2 - 2n} \rfloor &= (2n - 1) - 2(n - 2) = 3 \end{aligned}$$

روش دوم: کافی است یک عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۲ مثلاً $n = 3$ را قرار دهیم.

$$n = 3 \rightarrow \lfloor \sqrt{36 - 9 + 1} \rfloor - 2 \lfloor \sqrt{9 - 6} \rfloor = \underbrace{\lfloor \sqrt{28} \rfloor}_{5, \dots} - 2 \underbrace{\lfloor \sqrt{3} \rfloor}_{1, \dots} = 5 - 2(1) = 3$$

۵۴-۱۳-۳۳

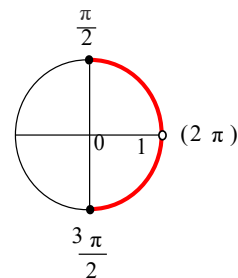
گزینه ۳: ۲۱۹

$[\cos \pi x] = 0 \Rightarrow 0 \leq \cos \pi x < 1$

بازه‌ای را قبول می‌کنیم که در آن، $\cos \pi x$ در رابطه $0 \leq \cos \pi x < 1$ صدق نکند.



$$\circ \leq \cos \pi x < 1 \Rightarrow \text{با توجه به دایرهٔ مثلثاتی} \Rightarrow \begin{cases} \circ < \pi x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{3\pi}{2} \leq \pi x < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \circ < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \leq x < 2 \end{cases}$$



این بازه ریشه‌های مخرج هستند و می‌دانیم که در توابع کسری ریشه‌های مخرج نباید در دامنهٔ تابع باشند. با توجه به گزینه‌ها، در گزینهٔ ۳ ریشه‌های مخرج وجود ندارد.

۶۲-۱۵-۲۳

گزینه ۱ اگر $x^2 + x < \circ$ باشد، نتیجه می‌گیریم که $\circ < x < -1$ است.

$$x^2 + x < \circ \Rightarrow x(x+1) < \circ \Rightarrow \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & -1 & \circ & +\infty \\ \hline \text{عبارت} & + & - & + & + \end{array} \Rightarrow -1 < x < \circ$$

حال برای تعیین حاصل $[x] + [x^2] + [x^3] + [x^4]$ کافی است حدود عبارت‌های داخل جزء صحیح را مشخص کنیم. داریم:

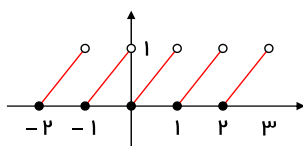
$$\begin{cases} -1 < x < \circ \Rightarrow [x] = -1 \\ \circ < x^2 < 1 \Rightarrow [x^2] = \circ \\ -1 < x < \circ \Rightarrow -1 < x^3 < \circ \Rightarrow [x^3] = -1 \\ \circ < x^4 < 1 \Rightarrow [x^4] = \circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow [x] + [x^2] + [x^3] + [x^4] = (-1) + \circ + (-1) + \circ = -2$$

۴۴-۱۹-۳۷

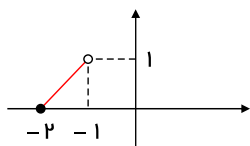
گزینه ۴

نمودار تابع $y = x - [x]$ به صورت زیر است واضح است در فاصله‌ی $(-2, 3)$ ، ۵ پاره‌خط به اندازه‌ی $\sqrt{2}$ وجود دارد.



اینگونه توابع به توابع دندان اره‌ای معروف هستند.

توجه:



$$\text{طول پاره‌خط} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

۶۰-۱۵-۲۶

گزینه ۱

$$f(x - f(x)) = f(x - [x]) = [x - [x]] = \circ \quad (\text{چون } \circ \leq x - [x] < 1 \text{ است})$$

۴۷-۱۵-۳۸

گزینه ۲

$$f(x) = x^2 - 2[x] \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 3 - 2[1,7] = 3 - 2(1) = 1$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \stackrel{f(\sqrt{2})=1}{=} f\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\left[\frac{-1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{1}{2} - 2(-1) = 2,25$$

۴۹-۱۳-۳۸

گزینه ۴

$$\frac{4-2x}{3x+1} \geq \circ$$

با تعیین علامت عبارت $\frac{4-2x}{3x+1}$ نامعادلهٔ داده‌شده را حل می‌کنیم:

$$4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	2	$+\infty$
$4-2x$		-	+	-
$3x+1$	-	+	+	-

بنابراین $-\frac{1}{3} < x \leq 2$ و داریم:

$$-\frac{1}{3} < x \leq 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \leq 6 \Rightarrow [3x] = -1, 0, 1, 2, \dots, 6$$

مجموعه مقادیر $[3x]$ شامل ۸ عضو است.

۵۵-۱۹-۲۶

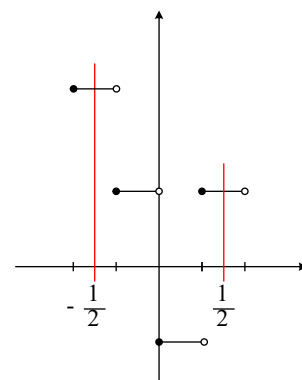
۲۲۵ گزینه ۲ روش اول: چون داخل براکت $3x$ داریم طول پله‌ها $\frac{1}{3}$ است تابع را در بازه $-\frac{2}{3} \leq x < \frac{2}{3}$ رسم می‌کنیم که بازه سؤال را شامل می‌شود.

$$\text{اگر } -\frac{2}{3} \leq x < -\frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = -2 \Rightarrow y = 3$$

$$\text{اگر } -\frac{1}{3} \leq x < 0 \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{اگر } 0 \leq x < \frac{1}{3} \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

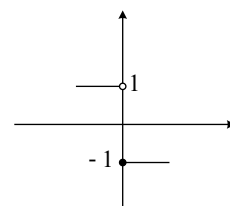
$$\text{اگر } \frac{1}{3} \leq x < \frac{2}{3} \Rightarrow [3x] = 1 \Rightarrow y = 1$$



روش دوم: کافی است در حوالی صفر تابع را بررسی کنیم:

$$\text{if: } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow [3x] = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{if: } x \rightarrow 0^- \Rightarrow [3x] = -1 \Rightarrow y = 1$$



فقط در گزینه ۲ تابع در نقطه $x = 0$ ناپیوسته است.

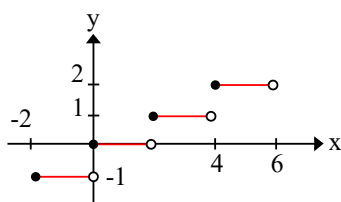
۳۱-۳۰-۳۹

۲۲۶ گزینه ۲

$$y = 2\left[\frac{x}{2}\right] + 1 \quad x \in [-2, 6)$$

کافی است تعداد پاره خط‌های تابع $y = \left[\frac{x}{2}\right]$ را در بازه $[-2, 6)$ به دست آوریم زیرا ضرب پشت جزء صحیح و عدد ۱ تأثیری روی تعداد پاره خط‌ها ندارند برای این که ضریب، عرض‌ها را دو برابر کرده و عدد یک، شکل را یک واحد بالا می‌برد.

توجه کنید در تابع $y = [nx]$ اگر $n > 0$ باشد پلکان صعودی و طول هر پله $\frac{1}{|n|}$ و ارتفاع پله‌ها یک واحد است.

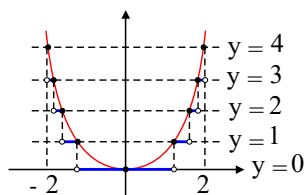


۶۱-۱۲-۲۸



گزینه ۴ ۲۲۷

همان طور که مشاهده می کنید، تابع $y = [x^2]$ روی بازه $(-2, 2)$ از ۷ پاره خط تشکیل شده است.



۵۷-۲۲-۲۲

گزینه ۳ ۲۲۸

شیب هر دو خط یک است یعنی این دو خط موازی اند یعنی دو ضلع مقابل یک مربع هستند و فاصله بین این دو ضلع مربع را می دهد.

$$\begin{aligned} x - y + 1 &= 0 \\ x - y - \frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

(در محاسبه فاصله بین دو خط موازی حتماً ضرایب x و y در هر دو معادله خط باید یکسان باشند.)

$$\begin{aligned} \text{ضلع مربع} = d &= \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-\frac{3}{2})|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \\ S_{\text{مربع}} &= (\text{ضلع})^2 = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8} \end{aligned}$$

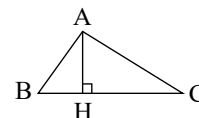
برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ استفاده می کنیم.

۵۹-۷-۳۴

گزینه ۲ ۲۲۹

با توجه به مثلث زیر خواهیم داشت:

$$BC : 2y + 3x = 6 \rightarrow m_{BC} = -\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ارتفاع } AH \text{ بر ضلع } BC \text{ عمود است}} m_{AH} = \frac{2}{3}$$



برای پیدا کردن مختصات نقطه A کافی است معادلات خطوط اضلاع AB و AC را تلافی دهیم.

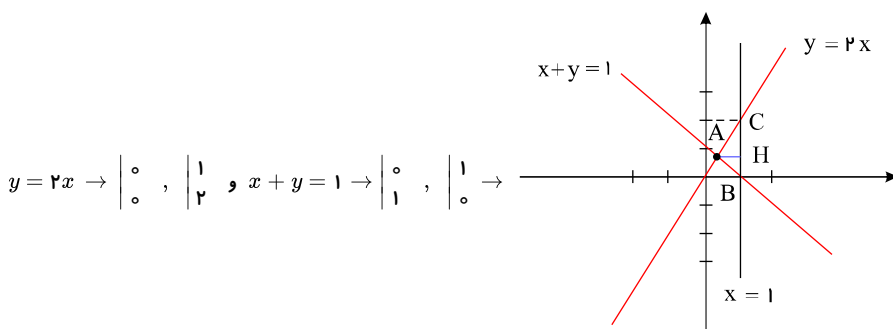
$$\begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه}} x = -\frac{7}{3}, y = \frac{1}{3}$$

حال، معادله ارتفاع AH را با داشتن شیب و یک نقطه می نویسیم.

$$A \left(-\frac{7}{3}, \frac{1}{3} \right), m_{AH} = \frac{2}{3} \rightarrow y - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \left(x + \frac{7}{3} \right) \rightarrow 3y - 1 = 2x + \frac{14}{3} \xrightarrow{\times 3} 9y - 3 = 6x + 14 \rightarrow 9y - 6x = 17$$

۶۸-۹-۲۳

گزینه ۱ ۲۳۰ سه خط داده شده را رسم می کنیم.



کوچک ترین ارتفاع مثلث ABC پاره خط AH است که معادله اش $y = \frac{2}{3}x$ است، زیرا اگر با دو خط $x + y = 1$ و $y = 2x$ تشکیل دهیم، داریم:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$$

یعنی مختصات نقطه A به صورت $A \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ است، پس معادله ارتفاع AH به صورت $y = \frac{2}{3}$ است.

۶۰-۱۰-۳۰

گزینه ۴ شرط آنکه سه خط در یک نقطه همدیگر را قطع کنند آن است که محل تلاقی دو خط در معادله خط سوم صدق کند.

$$-\begin{cases} y + 2x = 0 \\ y + 3x = a \end{cases} \Rightarrow x = a, y = -2a$$

$$A \begin{pmatrix} a \\ -2a \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{صدق در خط سوم}} -4a + a^2 + 5 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 5 = 0$$

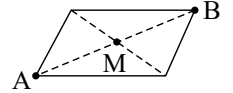
این سه خط هیچگاه متقارب نیستند. $\rightarrow$ ریشه حقیقی ندارد $\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$

۶۸-۱۱-۲۱

گزینه ۳

مختصات نقطه A در هیچ یک از معادلات دو خط صدق نمی کند پس نقطه A روی این دو خط قرار ندارد و چون این دو خط، موازی نیستند کافی است با این دو خط تشکیل دستگاه دهیم تا مختصات نقطه B به دست آید.

$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \rightarrow -17x = 17 \Rightarrow x = -1, y = 4 \Rightarrow B \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

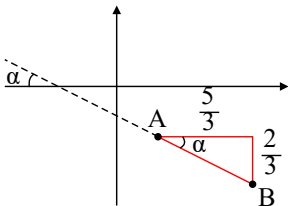


می دانیم نقطه M وسط پاره خط AB قرار دارد یعنی:

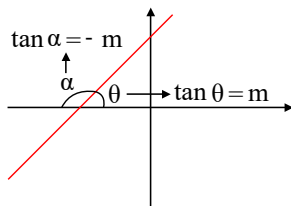
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{7 - 1}{2} = 3, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6 + 4}{2} = 5$$

۷۲-۵-۲۳

گزینه ۳



شیب خط عبارت است از تانژانت زاویه ای که خط با سمت راست محور طول ها تشکیل می دهد.



$$\tan \alpha = -m = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{5} \rightarrow m = -\frac{2}{5}$$

۳۸-۱۳-۴۹

روش اول: هرگاه مختصات سه رأس یک مثلث را داشته باشیم می توانیم مساحت مثلث را از این رابطه حساب کنیم.

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$= \frac{1}{2} |2(0 - 2) + 3(2 - 5) + 0(5 - 0)| = \frac{1}{2} |-4 - 9 + 0| = \frac{13}{2} = 6,5$$

روش دوم: ابتدا طول یکی از اضلاع مانند BC را به دست می آوریم و آن را به عنوان قاعده مثلث در نظر می گیریم. سپس با پیدا کردن معادله ضلع BC فاصله A را تا این خط پیدا می کنیم تا ارتفاع مثلث (AH) معلوم شود و در نهایت مساحت مثلث به دست آید.

$$B(3, 0), C(0, 2) \quad m_{BC} = \frac{2 - 0}{0 - 3} = -\frac{2}{3}$$

$$BC \text{ معادله خط: } y - 0 = -\frac{2}{3}(x - 3) \Rightarrow y + \frac{2}{3}x - 2 = 0$$

$$AH = \frac{|\frac{2}{3} + (\frac{2}{3} \times 2) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (\frac{2}{3})^2}} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - 2}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

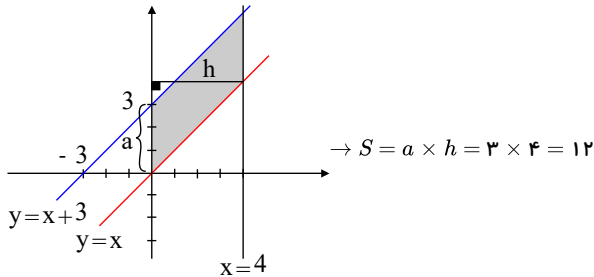


$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} \times \sqrt{13} \times \sqrt{13} = \frac{13}{2} = 6,5$$

۴۳-۹-۴۹

گزینه ۲ بهترین روش برای حل این تست رسم شکل است.



۲۴-۶-۷۱

گزینه ۳ شیب هر دو خط $\sqrt{3}$ است پس با هم موازی‌اند و می‌دانیم برای محاسبه فاصله بین دو خط موازی به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از

$$\text{رابطه } d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ استفاده می‌کنیم (ضرایب } x, y \text{ در هر دو معادله خط باید یکسان باشند).}$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 2 \xrightarrow{\times \sqrt{3}} 3x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \rightarrow 3x - \sqrt{3}y - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{3} - (-6)|}{\sqrt{9+3}} = \frac{2\sqrt{3}+6}{\sqrt{12}} = \frac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}} = 1 + \frac{3}{\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$$

۳۰-۱۰-۶۰

گزینه ۴

برای آنکه ۳ خط در یک امتداد باشند، شیب دوه‌دوی آنها باید با هم برابر باشد:

$$\text{سه نقطه } A \left(\frac{a}{3}, \frac{6}{4a+1} \right), B \left(\frac{6}{4a+1}, \frac{6}{4a+1} \right), C \left(\frac{6}{4a+1}, \frac{6}{4a+1} \right) \text{ را در نظر می‌گیریم.}$$

$$\text{شرط هم‌راستا بودن: } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \rightarrow \frac{3-4a-1}{a-6} = \frac{4a+1}{6-0} \rightarrow \frac{2-4a}{a-6} = \frac{4a+1}{6}$$

$$\rightarrow 4a^2 + a - 24a - 6 = 12 - 24a \rightarrow 4a^2 + a - 18 = 0$$

$$\rightarrow \Delta = 1 - 4(4)(-18) = 289 \rightarrow a = \frac{-1 \pm 17}{8} = 2, -\frac{9}{4}$$

۳۴-۹-۵۷

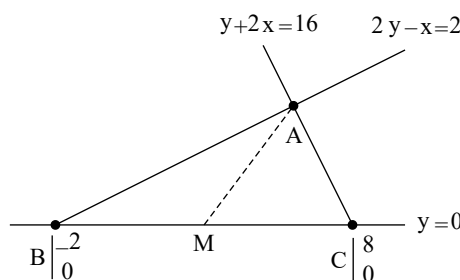
گزینه ۴ معادله خط نیمساز ناحیه اول و سوم $y = x$ است که شیب آن یک است و چون خط باید با نیمساز ناحیه اول و سوم موازی باشد پس شیب خط مطلوب هم، یکاست. چون این خط، نیمساز ناحیه دوم و چهارم ($y = -x$) را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ قطع می‌کند پس عرض آن $y = -2$ است.

$$A \left(\frac{2}{-2}, m \right), m = 1 \rightarrow y - (-2) = 1(x - 2) \rightarrow y + 2 = x - 2 \rightarrow y - x = -4$$

۳۴-۱۷-۴۹

گزینه ۲

شکل فرضی زیر را در نظر می‌گیریم:

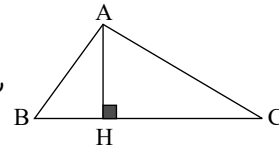
خطوط $y + 2x = 16$ و $2y - x = 2$ را تلاقی می‌دهیم تا مختصات نقطه A به دست آید.

$$\times 2 \begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \rightarrow 5y = 20 \rightarrow y = 4, x = 6 \rightarrow A \left(\frac{6}{4}, \frac{6}{4} \right)$$

$$BC \text{ وسط } M \left| \begin{array}{c} x_B + x_C \\ 2 \\ y_B + y_C \\ 2 \end{array} \right| \rightarrow M \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \end{array} \right|, A \left| \begin{array}{c} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{array} \right| \rightarrow AM = \sqrt{(6-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

۷۵-۸-۱۷

را در نظر می‌گیریم. ابتدا معادله خطی را که از دو نقطه B و C می‌گذرد می‌نویسیم و سپس فاصله نقطه A از



شکل فرضی گزینه ۴

خط را به دست می‌آوریم.

$$BC: \frac{y - y_B}{x - x_B} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} \Rightarrow \frac{y - 3}{x - 7} = \frac{3 + 2}{7 - 2} = 1 \Rightarrow y - 3 = x - 7 \Rightarrow x - y - 4 = 0$$

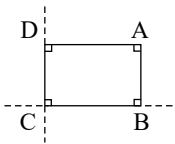
$$\left\{ \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{c} 1 \\ 5 \end{array} \right| \\ x - y - 4 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow AH = \frac{|1 - 5 - 4|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right|$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۴۱-۲۹-۳۰

گزینه ۲

$$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$$



چون شیب‌ها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی A در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array} \right|, \quad x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AD = \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \left| \begin{array}{c} 8 \\ 5 \end{array} \right|, \quad 2x - y - 7 = 0 \rightarrow AB = \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9,6$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right|$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۶۳-۱۰-۲۷

ابتدا شیب خط گذرنده از دو نقطه $A \left| \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \right|$ و $B \left| \begin{array}{c} 8 \\ 3 \end{array} \right|$ را به دست می‌آوریم.

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-1 - 3}{2 - 8} = \frac{-4}{-6} = \frac{2}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{خط}} = -\frac{3}{2}$$

$$m_{\text{خط}} = -\frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \rightarrow 4k = 3k + 3 \rightarrow k = 3$$

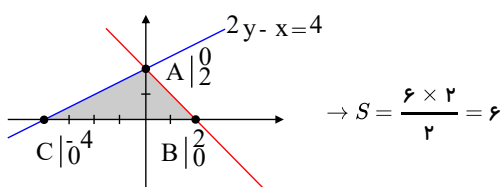
$$k = 3 \xrightarrow{\text{معادله دسته خطوط}} 4y + 6x - 2 = 0 \rightarrow 2y + 3x = 1$$

۵۵-۱۵-۳۰

ابتدا محل برخورد این خطوط را با محورهای مختصات پیدا می‌کنیم.

$$y + x = 2 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}, \quad 2y - x = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ y = 0 \rightarrow x = -4 \end{cases}$$

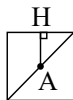
سپس با رسم این خطوط، مساحت مثلث را بدست می‌آوریم.





گزینه ۴ ۲۴۴

فاصله وسط یک قطر مربع از یکی از اضلاع آن برابر نصف ضلع مربع است.



$$A \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}, x - 2y + 5 = 0 \rightarrow AH = \text{نصف ضلع مربع} = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \rightarrow \text{ضلع مربع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت مربع} = (\text{ضلع مربع})^2 = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{vmatrix}$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۵۱-۸-۴۲

گزینه ۲ ۲۴۵ نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{vmatrix}$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر گرفته و فاصله آن را از خط $2x - 3y = 5$ به دست آورده و مساوی $\sqrt{13}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} A \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha - 1 \end{vmatrix} \\ 2x - 3y - 5 = 0 \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|2\alpha - 3\alpha + 3 - 5|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{|-\alpha - 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \rightarrow |-\alpha - 2| = 13$$

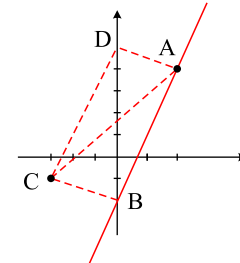
$$-\alpha - 2 = 13 \rightarrow \alpha = -15, -\alpha - 2 = -13 \rightarrow \alpha = 11$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۵۵-۷-۳۸

گزینه ۳ ۲۴۶ ابتدا معادله خط گذرنده از A را می‌یابیم: $A(2, 4)$ و $m = 3$

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2$$



حال فاصله نقطه C از خط فوق که A و B روی آن قرار دارند محاسبه می‌کنیم.
این مقدار طول یا عرض مستطیل است.

$$|CH| \text{ یا } |CB| = \frac{|y - 3x + 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{|(-1) - 3(-1) + 2|}{\sqrt{10}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

قطر مستطیل AC است آن را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$|AC| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-1))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{50}$$

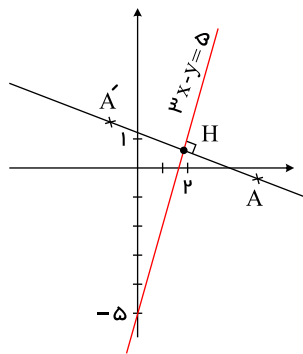
$$\triangle ABC: AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow 50 = AB^2 + 10 \Rightarrow |AB| = \sqrt{40}$$

و در آخر محیط مستطیل برابر است با:

$$\text{محیط} = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{40} = 2\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

۳۹-۴۱-۲۰

گزینه ۲ ۲۴۷



محیط مثلث مدنظر $\sqrt{290} = 3\sqrt{30}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{30}$ خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{30} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

ضلع است یعنی:

پس باید فاصله A تا H برابر با $\frac{\sqrt{90}}{2}$ باشد. دقت کنید A روی خط عمود بر $3x - y = 5$ است.

$$\Rightarrow y = 3x - 5 \Rightarrow m = 3 \xrightarrow{\text{عکس و قرینه}} m' = -\frac{1}{3}$$

معادله خط گذرنده از A و H را می‌یابیم مختصات $H(2, 1)$ و $m' = -\frac{1}{3}$ را داریم.

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + x = 5$$

پس A روی خط $3y + x = 5$ است که می‌توان مختصات A را به صورت پارامتری $(\alpha, \frac{5-\alpha}{3})$ در نظر گرفت AH را برابر با $\frac{\sqrt{90}}{2}$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow |AH| \Rightarrow (\alpha - 2)^2 + \left(\frac{5-\alpha}{3} - 1\right)^2 = \frac{90}{4} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{90}{4}$$

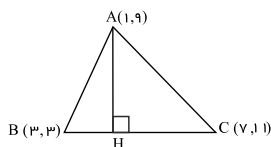
$$\left(\frac{2-\alpha}{3}\right)$$

$$\Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{81}{4} \Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{13}{2} \Rightarrow A\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \text{در گزینه ها نیست.} \end{cases}$$

۱۱-۴۰-۴۹

گزینه ۳ ۲۴۸

با توجه به شکل فرضی مقابل، ابتدا معادله ضلع BC را می‌یابیم.



$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{1 - 3}{7 - 3} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$B(3, 3) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3) \Rightarrow 2y - 6 = -x + 3 \Rightarrow x + 2y - 9 = 0$$

فاصله نقطه $A(1, 9)$ از خط فوق همان ارتفاع AH است.

$$AH = \frac{|2 \times 1 + 9 - 9|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۴۶-۸-۴۶

گزینه ۱ ۲۴۹

$$x + y = a \Rightarrow y = a - x$$

نقطه A روی خط $y = a - x$ به صورت $A(k, a - k)$ است. حال طبق فرض سؤال داریم:



$$B(-3, 2) \Rightarrow AB = \sqrt{29} \Rightarrow \sqrt{(k+3)^2 + (a-k-2)^2} = \sqrt{29} \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k+3)^2 + (a-k-2)^2 = 29 \quad (1)$$

$$C(-1, 4) \Rightarrow AC = 5 \Rightarrow \sqrt{(k+1)^2 + (a-k-4)^2} = 5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} (k+1)^2 + (a-k-4)^2 = 25 \quad (2)$$

طرفین روابط ۱ و ۲ را از هم کم می‌کنیم.

$$k^2 + 6k + 9 + (a-k-2)^2 - (k^2 + 2k + 1 + (a-k-4)^2) = 29 - 25$$

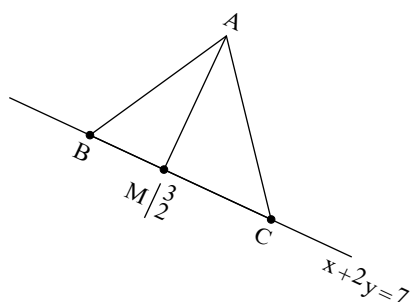
$$\Rightarrow k^2 + 6k + 9 + (a-k-2)^2 - k^2 - 2k - 1 - (a-k-4)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 4k + 8 + (a-k-2)^2 - (a-k-4)^2 = 4 \Rightarrow 4k + 8 + (a-k-2-a+k+4)(a-k-2+a-k-4) = 4$$

$$\Rightarrow 4k + 8 + 2(2a-2k-6) = 4 \Rightarrow 4k + 8 + 4a - 4k - 12 = 4 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

۸۱-۵-۱۴

گزینه ۲ ۲۵۰



چون فاصله نقطه A از دو رأس B و C با هم برابر است بنابراین نقطه A روی عمود منصف پاره خط BC قرار دارد.

$$x + 2y = 7 \rightarrow m_{\text{خط}} = -\frac{1}{2} \rightarrow m_{\text{عمود منصف}} = 2$$

بنابراین معادله عمود منصف $y - 2 = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x - 4$ است. نقطه A را روی آن در نظر می‌گیریم که فاصله اش از نقطه $M \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right)$ باید برابر $5\sqrt{5}$ باشد.

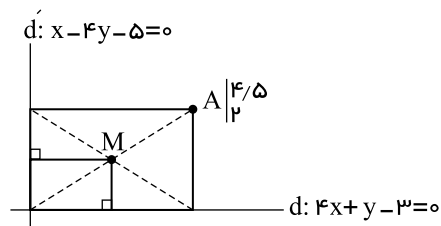
$$AM = 5\sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 4 - 3)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 7)^2} = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + 4(\alpha - 3)^2} = \sqrt{5(\alpha - 3)^2} = \sqrt{5}|\alpha - 3| = 5\sqrt{5}$$

$$\rightarrow |\alpha - 3| = 5 \rightarrow \begin{cases} \alpha - 3 = 5 \rightarrow \alpha = 8 \\ \alpha - 3 = -5 \rightarrow \alpha = -2 \end{cases}$$

۳۵-۴۶-۱۹

مختصات نقطه $(4, 5, 2)$ در هیچ یک از معادلات داده شده، صدق نمی‌کند و شکل به صورت روبه‌روست:

گزینه ۱ ۲۵۱



مطابق شکل فاصله M (وسط قطر) از اضلاع برابر نصف طول و عرض مستطیل است. لذا طول و عرض مستطیل را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \frac{|4 \cdot 5 - 8 - 5|}{\sqrt{1 + (-4)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2} \\ \frac{|18 + 2 - 3|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow \text{فاصله } M \text{ از اضلاع} \begin{cases} \frac{\sqrt{17}}{4} : \min \\ \frac{\sqrt{17}}{2} : \max \end{cases}$$

۴۱-۳۵-۲۴

با توجه به فرض، باید دو خط داده شده با هم موازی باشند:

گزینه ۲ ۲۵۲

$$\begin{cases} d_1 : y - ax = 1 \Rightarrow m_1 = a \\ d_2 : ay - x = a - 1 \Rightarrow m_2 = \frac{1}{a} \end{cases} \xrightarrow{d_1 \parallel d_2} m_1 = m_2 \Rightarrow a = \frac{1}{a} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

نقطه $(1, 2)$ یک رأس مستطیل است، پس روی یکی از خطوط d_1 و d_2 قرار دارد:

$$a = 1 : \begin{cases} y = x \\ y = x + 1 \xrightarrow{\text{شامل } (1,2)} 2 = 1 + 1 \end{cases}$$

$$a = -1 : \begin{cases} y = -x + 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \rightarrow \text{غ قق}$$

اندازه یک ضلع مستطیل، برابر با فاصله دو خط $y = x + 1$ و $y = x$ است:

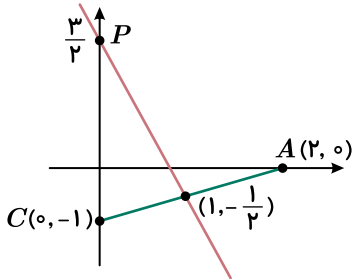
$$h = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

قطر مستطیل برابر ۵ است، لذا اندازه ضلع دیگر مستطیل را از قضیه فیثاغورس به دست می آوریم:

$$k^2 + h^2 = 5^2 \Rightarrow k = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = k \cdot h = \frac{7}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3,5$$

۷۹-۷-۱۴

گزینه ۲: ۲۵۳



$$\begin{aligned} \text{معادله خط } AC: \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} &= 1 \\ \Rightarrow x - 2y - 2 &= 0 \\ \text{شیب } AC &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \text{شیب قطر دیگر} &= -2 \\ \text{معادله قطر دیگر: } y &= -2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

نقاط $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$ و $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ روی خط بالا نیستند پس حذف می شوند. نقطه $(0, \frac{3}{2})$ نیز حذف می شود زیرا زاویه بین AC و PC از 45° بیشتر است پس گزینه ۲ درست است.

۳۶-۳۷-۲۷

گزینه ۳: ۲۵۴



$$\begin{aligned} \text{شیب خط } AB &= \frac{4-1}{-1-3} = -\frac{3}{4} \\ \text{شیب خط } CD &= \frac{y+3-y}{-1-x-x} = \frac{3}{-1-2x} = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

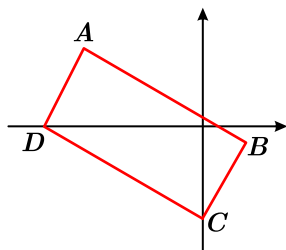
$$\text{شیب خط } BC = \frac{y-1}{x-3} = \frac{y-1}{-\frac{3}{2}} \xrightarrow{AB \perp BC} \frac{y-1}{-\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} \Rightarrow y = -1$$

$$\text{طول } AB = \sqrt{(3+1)^2 + (4-1)^2} = 5 \quad \text{طول } BC = \sqrt{(1+1)^2 + (3-\frac{3}{2})^2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{محیط } ABCD = 2(5 + \frac{5}{2}) = 15$$

۷۶-۹-۱۵

گزینه ۳: ۲۵۵



$$m_{AB} = m_{CD} \Rightarrow \frac{y-y+3}{x+1+x} = \frac{-3-0}{0-(-4)} \Rightarrow 2x+1 = -4 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$BC \perp CD \Rightarrow m_{BC} \times m_{CD} = -1 \Rightarrow \frac{y}{-1+\frac{5}{2}} \times \frac{-3}{4} = -1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow$$

$$A(-\frac{5}{2}, 2), B(\frac{3}{2}, -1)$$

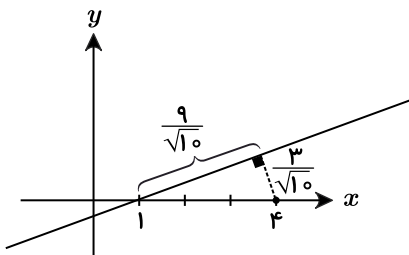
$$BC = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-3+1)^2} = \frac{5}{2}, \quad AB = \sqrt{(\frac{3}{2}+\frac{5}{2})^2 + (-1-2)^2} = 5;$$

$$\text{محیط} = 2(\frac{5}{2} + 5) = 15$$

۳۹-۳۷-۲۵



گزینه ۴ ۲۵۶

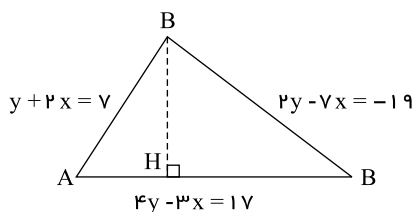


$$\frac{|4 - 0 - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}; \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2} = \frac{9}{\sqrt{10}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{9}{\sqrt{10}} = 1,35$$

۸۵-۵-۱۰

گزینه ۱ ۲۵۷

با توجه به شکل فرضی مقابل ابتدا مختصات نقطه B یعنی نقطه برخورد دو خط $y + 2x = 7$, $2y - 7x = -19$ را می‌یابیم.



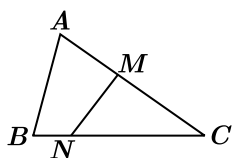
$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2y - 4x = -14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \Rightarrow -11x = -33 \Rightarrow x = 3 \xrightarrow{y+2x=7} y + 6 = 7 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow B(3, 1)$$

فاصله نقطه $B(3, 1)$ از خط $4y - 3x = 17$ برابر با ارتفاع BH است.

$$3x - 4y + 17 = 0 \Rightarrow BH = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 1 + 17|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|9 - 4 + 17|}{\sqrt{25}} = \frac{22}{5} = 4,4$$

۷۲-۵-۲۳

گزینه ۱ ۲۵۸



$$\Delta AM = 3CM \Rightarrow AM = \frac{3}{5}CM \Rightarrow AM + MC = \frac{8}{5}CM$$

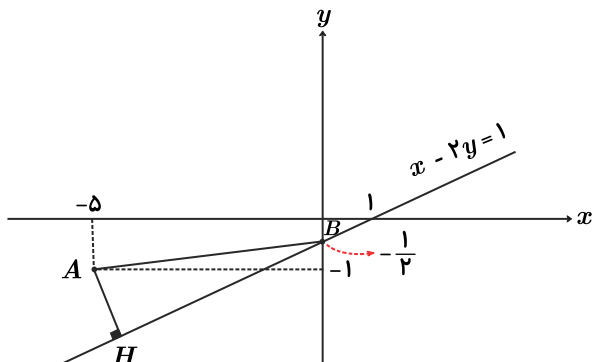
$$\Rightarrow AC = \frac{8}{5}CM$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{BC \cdot AC \cdot \sin \hat{C}}{CN \cdot CM \cdot \sin \hat{C}} = \frac{BC}{CN} \cdot \frac{8}{5} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{CN} = \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{1}{4} = 0,25$$

۷۴-۷-۱۹

گزینه ۲ ۲۵۹





چون طبق فرض طول یک ضلع برابر فاصله رأس A از خط $x - 2y = 1$ است در واقع منظور طراح این بوده که اگر از نقطه A بر خط $x - 2y = 1$ عمود رسم کنیم یکی از اضلاع مثلث، پاره خط AH خواهد بود. حال با فرض اینکه نقطه $(-4, -2)$ داخل این مثلث قرار دارد، برای اینکه بزرگ‌ترین مثلث (یعنی مثلثی با بیشترین مساحت) در ناحیه سوم محورهای مختصات داشته باشیم باید رأس دیگر این مثلث نقطه $(0, -\frac{1}{2})$ باشد (یعنی محل برخورد خط با محور عرض‌ها)

در این صورت خواهیم داشت:

$$AH = \frac{|-5 + 2 - 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

فاصله نقطه A از خط $x - 2y = -1 = 0$

از طرفی طبق شکل داریم:

$$AB = \sqrt{25 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{101}}{2}$$

$$BH = AB^2 - AH^2 = \frac{101}{4} - \frac{16}{5} = \frac{441}{20} \Rightarrow BH = \frac{21}{2\sqrt{5}}$$

$$S = \text{مساحت مثلث} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{21}{2\sqrt{5}} \times \frac{1}{2} = 4,2$$

۸۷-۴-۹



پاسخنامه کلیدی

۱	۲	۴۲	۲	۸۳	۲	۱۲۴	۳	۱۶۵	۲
۲	۱	۴۳	۴	۸۴	۱	۱۲۵	۳	۱۶۶	۴
۳	۴	۴۴	۱	۸۵	۲	۱۲۶	۴	۱۶۷	۱
۴	۳	۴۵	۱	۸۶	۳	۱۲۷	۳	۱۶۸	۱
۵	۱	۴۶	۴	۸۷	۴	۱۲۸	۲	۱۶۹	۲
۶	۱	۴۷	۴	۸۸	۴	۱۲۹	۳	۱۷۰	۲
۷	۳	۴۸	۲	۸۹	۱	۱۳۰	۳	۱۷۱	۲
۸	۱	۴۹	۳	۹۰	۴	۱۳۱	۲	۱۷۲	۳
۹	۳	۵۰	۲	۹۱	۳	۱۳۲	۱	۱۷۳	۳
۱۰	۳	۵۱	۲	۹۲	۴	۱۳۳	۱	۱۷۴	۳
۱۱	۴	۵۲	۱	۹۳	۱	۱۳۴	۱	۱۷۵	۴
۱۲	۳	۵۳	۳	۹۴	۴	۱۳۵	۱	۱۷۶	۲
۱۳	۲	۵۴	۱	۹۵	۴	۱۳۶	۲	۱۷۷	۱
۱۴	۴	۵۵	۴	۹۶	۱	۱۳۷	۴	۱۷۸	۴
۱۵	۳	۵۶	۱	۹۷	۱	۱۳۸	۲	۱۷۹	۴
۱۶	۲	۵۷	۲	۹۸	۲	۱۳۹	۲	۱۸۰	۲
۱۷	۳	۵۸	۴	۹۹	۳	۱۴۰	۱	۱۸۱	۳
۱۸	۴	۵۹	۱	۱۰۰	۴	۱۴۱	۴	۱۸۲	۴
۱۹	۱	۶۰	۲	۱۰۱	۴	۱۴۲	۲	۱۸۳	۱
۲۰	۱	۶۱	۴	۱۰۲	۲	۱۴۳	۱	۱۸۴	۳
۲۱	۲	۶۲	۲	۱۰۳	۳	۱۴۴	۲	۱۸۵	۴
۲۲	۲	۶۳	۱	۱۰۴	۴	۱۴۵	۱	۱۸۶	۴
۲۳	۳	۶۴	۳	۱۰۵	۲	۱۴۶	۲	۱۸۷	۳
۲۴	۳	۶۵	۲	۱۰۶	۳	۱۴۷	۱	۱۸۸	۴
۲۵	۲	۶۶	۲	۱۰۷	۲	۱۴۸	۴	۱۸۹	۲
۲۶	۱	۶۷	۳	۱۰۸	۲	۱۴۹	۱	۱۹۰	۴
۲۷	۱	۶۸	۱	۱۰۹	۳	۱۵۰	۲	۱۹۱	۳
۲۸	۲	۶۹	۱	۱۱۰	۴	۱۵۱	۱	۱۹۲	۳
۲۹	۳	۷۰	۴	۱۱۱	۱	۱۵۲	۳	۱۹۳	۳
۳۰	۴	۷۱	۲	۱۱۲	۳	۱۵۳	۴	۱۹۴	۳
۳۱	۲	۷۲	۳	۱۱۳	۴	۱۵۴	۱	۱۹۵	۴
۳۲	۱	۷۳	۴	۱۱۴	۱	۱۵۵	۳	۱۹۶	۱
۳۳	۱	۷۴	۴	۱۱۵	۲	۱۵۶	۴	۱۹۷	۴
۳۴	۱	۷۵	۳	۱۱۶	۳	۱۵۷	۲	۱۹۸	۳
۳۵	۲	۷۶	۱	۱۱۷	۳	۱۵۸	۱	۱۹۹	۲
۳۶	۴	۷۷	۳	۱۱۸	۳	۱۵۹	۴	۲۰۰	۴
۳۷	۱	۷۸	۳	۱۱۹	۳	۱۶۰	۳	۲۰۱	۲
۳۸	۴	۷۹	۴	۱۲۰	۲	۱۶۱	۳	۲۰۲	۱
۳۹	۲	۸۰	۲	۱۲۱	۳	۱۶۲	۴	۲۰۳	۲
۴۰	۱	۸۱	۴	۱۲۲	۳	۱۶۳	۱	۲۰۴	۲
۴۱	۴	۸۲	۲	۱۲۳	۱	۱۶۴	۳	۲۰۵	۳



۲۰۶	۴	۲۱۷	۲	۲۲۸	۳	۲۳۹	۲	۲۵۰	۲
۲۰۷	۴	۲۱۸	۳	۲۲۹	۲	۲۴۰	۴	۲۵۱	۱
۲۰۸	۴	۲۱۹	۳	۲۳۰	۱	۲۴۱	۲	۲۵۲	۲
۲۰۹	۳	۲۲۰	۱	۲۳۱	۴	۲۴۲	۲	۲۵۳	۲
۲۱۰	۳	۲۲۱	۴	۲۳۲	۳	۲۴۳	۲	۲۵۴	۳
۲۱۱	۱	۲۲۲	۱	۲۳۳	۳	۲۴۴	۴	۲۵۵	۳
۲۱۲	۱	۲۲۳	۲	۲۳۴	۲	۲۴۵	۲	۲۵۶	۴
۲۱۳	۲	۲۲۴	۴	۲۳۵	۲	۲۴۶	۳	۲۵۷	۱
۲۱۴	۴	۲۲۵	۲	۲۳۶	۳	۲۴۷	۲	۲۵۸	۱
۲۱۵	۱	۲۲۶	۲	۲۳۷	۴	۲۴۸	۳	۲۵۹	۲
۲۱۶	۳	۲۲۷	۴	۲۳۸	۴	۲۴۹	۱		