

نو تر و کرانچ

مشتق - رشته تجربی



یه گاز بزنی، یه فصل کنکور می پره!

 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com



کارخونه رتبه برتر سازی، نو تر و فیل!



نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۲



محمدعلی موسی پور

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۴۸



محمدحسین هاشمی

رتبه ۶۸



منیره زمانی

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۱۲



امیرمحمد شریفی کلوری

رتبه ۱۳۴



امیرمحمد ملکشاهی

رتبه ۱۹۵



سید حسین تقوی

رتبه ۳۵۷



فاطمه مروت بلسی

رتبه ۴۲۸



مهدیه اسدی ارزنده‌ئی

رتبه ۵۰۹



علیرضا شهنساری

رتبه ۵۷۵



هانیه گنجعلی

رتبه ۶۲۷



فریما آقاپور

رتبه ۶۳۹



هلیا رضایی

رتبه ۶۶۸



فائزه حیدری دهکردی

رتبه ۷۹۳



سارینا تقی‌زاده

رتبه ۸۰۵



لعیا زنگنه قاسم‌آبادی

رتبه ۸۸۱



حلما ناصری

رتبه ۹۹۵



جواد فلاحتی

رتبه ۱۰۲۰



سارا دهقان

رتبه ۱۰۲۰



مهسا پیری

رتبه ۱۰۴۹



محمد خرم‌آبادی

رتبه ۱۱۱۱



رضا نصیری‌مدیسه

رتبه ۱۱۲۵



سمیرا تباوار

رتبه ۱۲۲۵



مهدی فیض‌زاده

رتبه ۱۲۲۵



سید مهدی حیات‌غیبی

رتبه ۱۲۶۷



مهدی آزادبخت

رتبه ۱۳۰۶



مهتاب کامل

رتبه ۱۳۱۶



یسری ابوالمحمدی مله

رتبه ۱۴۰۹



غزل قبادی

رتبه ۱۴۳۹



ریحانه جعفری خیرخواه

رتبه ۱۵۸۷



مهدی تیموری

رتبه ۱۵۹۸



محمد رضا دادپور

رتبه ۱۶۶۹



مائده سادات حسینی

رتبه ۱۷۲۹



علیرضا انصاری

رتبه ۱۷۲۹



علی عزیززاده

رتبه ۱۷۴۲



الهه فکاری

رتبه ۱۷۷۶



علی عرب‌خانی

رتبه ۱۷۸۲



یاسین رئیسی زیدآبادی



مشاوره کنکور نوتروفیل

سوالات کنکور از مشتق -

نوتروفیل بهار ۱۴۰۴

مناسب تمام کنکوری های

رشته تجربی



مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

۱ مشتق چپ تابع $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}$ در نقطه‌ی $x = 0$ کدام است؟

$\sqrt{2}$ (۴)

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳)

$-\sqrt{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}\right)^3$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ ، کدام است؟

۱۵ (۴)

۱۲ (۳)

-۱۸ (۲)

-۲۱ (۱)

۳ منحنی‌های تابع $f(x) = -x^2 + bx + 3$ بر خط به معادله‌ی $y = 7$ مماس‌اند. فاصله‌ی دو نقطه‌ی تماس کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۴ تابع $f(x) = \frac{4x-5}{x+1}$ با دامنه‌ی $[0, 8]$ ، یکی از خطوط مماس بر نمودار موازی پاره‌خطی است که ابتدا و انتهای نمودار را به هم وصل کند.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

این خط مماس، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

-0.5 (۴)

-۱ (۳)

-1.5 (۲)

-۲ (۱)

۵ اگر $g(x) = \sqrt{2x}$ و $f(x) = x^2 - x$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x}$ برابر با کدام گزینه است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۷ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۶ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x}$ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4}$ ، کدام است؟

$\frac{5}{6}$ (۴)

$\frac{7}{12}$ (۳)

$\frac{5}{12}$ (۲)

$\frac{4}{9}$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

۷ اگر $f(x) = (x - 2)\sqrt[3]{x^2}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$ ، کدام است؟

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۸ مشتق تابع $f(x) = x\sqrt{\frac{3x+1}{x+2}}$ در نقطه‌ی $x = -3$ ، کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{4}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{2}{3}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

۹ مشتق تابع $f(x) = \frac{(x-1) \cdot \sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4}$ در نقطه‌ی $x = 1$ ، کدام است؟

$\frac{5}{16}$ (۴)

$\frac{3}{20}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{16}$ (۱)

۱۰ مشتق تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ در نقطه‌ی $x = 1$ برابر ۳ است. اگر $f(1) = 0$ و $f'(1) = -4$ و $g'(1)$ موجود باشد مقدار $g(1)$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

$\frac{4}{3}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$-\frac{3}{4}$ (۲)

$-\frac{4}{3}$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۱ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\frac{1}{4} + h) - f(\frac{1}{4})}{h}$ ، کدام است؟

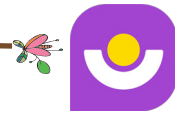
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)





مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱۲ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{x+3}}$ حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

۱/۶ (۴)

۷/۲۴ (۳)

۵/۲۴ (۲)

۷/۴۸ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۱۳ مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2 + 2x}}{x^2 - x} \right)^3$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟

-۱۵/۴ (۴)

-۵/۲ (۳)

-۵/۴ (۲)

-۳/۴ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۱۴ مشتق عبارت $y = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2} \right)^2$ به ازای $x = -8$ کدام است؟

-۱ (۴)

۱ (۳)

-۱/۲ (۲)

۲ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۱۵ اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$ کدام است؟

-۳/۴ (۴)

-۳/۲ (۳)

-۳ (۲)

-۶ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۶ مقدار مشتق تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{\left(\frac{2x - x^2}{3x + 5} \right)^2}$ در نقطه $x = -2$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۱۷ اگر تابع f در $x = 4$ مشتق پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $\frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ کدام است؟

۱/۲ (۴)

۱/۴ (۳)

-۱/۲ (۲)

-۱/۴ (۱)

۱۸ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $x^2 f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۱۴ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۸ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۱۹ اگر $f(x) = (x - 4)\sqrt[3]{x + 3}$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(5-h) - 3f(5-h) + 2}{h(5-h)}$ کدام است؟

۱۳/۱۵ (۴)

۵/۶ (۳)

-۵/۱۲ (۲)

۱۳/۳۰ (۱)

۲۰ خط d در نقطه $(-1, 5)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر شیب خط d برابر $-\frac{1}{2}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x}f(x)$ باشد، مقدار $g'(-1)$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۳/۶ (۴)

۷/۶ (۳)

-۱/۳ (۲)

-۴/۳ (۱)

۲۱ تابع f در $x = 2$ مشتق پذیر است. اگر $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - 9}{h} = \frac{3}{2}$ باشد، مشتق تابع $g(x) = x\sqrt{f(x)}$ در $x = 2$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

۲/۵ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۲۲ اگر $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f(x) - 1}{2(x - 1)}$ کدام است؟

۱ (۴)

۱/۲ (۳)

-۱/۲ (۲)

-۱ (۱)





مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۲۳ در تابع $f(x) = x\sqrt{x} + |x - 1|$ مقدار $f'_+(1) + 3f'_-(1)$ کدام است؟

- ۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۲

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

۲۴ در تابع با ضابطه $f(x) = |x| \cdot [x]$ مقدار $f'(\circ^+) - f'(\circ^-)$ کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۲

مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

۲۵ اگر $f(x) = |x - 2| + \sqrt{2x}$ حاصل $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$ کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۲۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - [x]} + |x|$ باشد، $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{5}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۲۷ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ [\frac{x}{4}](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(2) - f'(5)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۲۸ مشتق راست تابع $f(x) = ([x] - |x|)\sqrt[3]{9x}$ در نقطه $x = -3$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است)

- ۱) $-\frac{16}{3}$ ۲) -۵ ۳) -۴ ۴) $\frac{7}{3}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۲۹ در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & ; 0 \leq x < 4 \\ [\frac{x}{4}](x^2 - 9x) & ; 4 \leq x < 8 \end{cases}$ مقدار $f'(2) - f'(5)$ کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{3}{2}$

۳۰ خط مماس بر منحنی $y = x^3 + 3x^2 + 1$ بر خط $x - 3y = 2$ عمود است. کدام نقطه روی این خط مماس قرار دارد؟

- ۱) (۱ و ۳) ۲) (۱ و ۴) ۳) (۲ و -۴) ۴) (۲ و -۶)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۳۱ خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه $(\frac{1}{2}, 2)$ محور y ها را با کدام عرض قطع می کند؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{5}{6}$ ۳) $\frac{7}{6}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۳۲ خط مماس بر نمودار تابع $f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}$ در نقطه‌ای به طول α واقع بر آن، از نقطه $(-1, 0)$ می گذرد. α کدام است؟

- ۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

مرجع: سراسری - ۱۳۸۵

۳۳ به ازای کدام مقدار a ، منحنی به معادله $ay = x^2 + 5x + 4$ بر نیمساز ناحیه‌ی اول مماس است؟

- ۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۹

۳۴ خط مماس بر منحنی به معادله $y = x^3 - x^2$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن، منحنی را در نقطه دیگر به نام A قطع می کند. عرض

نقطه A کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

- ۱) -۳ ۲) -۲ ۳) ۲ ۴) ۳





۳۵ خط $f(x) = 2x - 5$ در نقطه‌ای به طول ۱ بر نمودار تابع $g(x) = ax^2 + bx + 1$ مماس است. مقدار a کدام است؟

- مرجع: سراسری - ۱۳۸۶
- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۶ ☐ ۴

۳۶ خطی که دو نقطه به طول‌های ۱ و -۱، روی نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 + 2x$ را به هم وصل کند، بر این نمودار مماس است، مقدار a کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

- ۱ ☐ -۱, ۱ ☐ ۲ ☐ -۱, ۲ ☐ ۳ ☐ ۱, ۲ ☐ ۴ ☐ -۲, ۱

۳۷ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \frac{5x-4}{\sqrt{x}}$ در نقطه $x = 4$ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض، قطع می‌کند؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

- ۱ ☐ -۴ ☐ ۲ ☐ -۱ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ ۴ ☐ ۳

۳۸ عرض از مبدأ خط مماس بر منحنی به معادله $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ واقع بر آن کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

- ۱ ☐ $-\frac{3}{5}$ ☐ ۲ ☐ $\frac{3}{4}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{3}{2}$ ☐ ۴ ☐ ۲

۳۹ به ازای کدام مقدار a ، خط به معادله $y = 5x + a$ ، بر نمودار تابع $y = 2x^2 - 3x + 6$ مماس است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

- ۱ ☐ -۳ ☐ ۲ ☐ -۲ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ ۴ ☐ ۳

۴۰ اگر $y = 2x + b$ بر نمودار $y = \frac{x+a}{ax+1}$ در نقطه‌ای به طول واحد مماس باشد، مقدار $a - b$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ ☐ صفر ☐ ۲ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ ۳ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ ۴ ☐ ۱

۴۱ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax + b$ و خط به معادله $y = -2x + b$ در نقطه‌ای به طول ۱ روی محور x ها متقاطع‌اند. طول‌های دو نقطه تقاطع دیگر این منحنی و خط کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

- ۱ ☐ ۱ و ۲ ☐ ۲ ☐ ۱ و ۳ ☐ ۳ ☐ -۱ و صفر ☐ ۴ ☐ ۲ و صفر

۴۲ خط گذرا بر دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ بر نمودار تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ای $x = 3$ مماس است. حد عبارت $\frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3 - x}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

- ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۵ ☐ ۶

۴۳ خط مماس بر نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ و $g(x) = ax^2 + bx$ در نقطه $x = 2$ ، مشترک‌اند. مقدار b ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱ ☐ ۴ ☐ ۵ ☐ ۶ ☐ ۷ ☐ ۸

۴۴ خط قائم بر نمودار $f(x) = \frac{\cos 2x}{2 - \sin x}$ ، در نقطه تلاقی منحنی با محور y ها، نیمساز ناحیه اول را با کدام طول، قطع می‌کند؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

- ۱ ☐ ۰,۱ ☐ ۲ ☐ ۰,۲ ☐ ۳ ☐ ۰,۳ ☐ ۴ ☐ ۰,۵

۴۵ خط مماس بر منحنی $y = \frac{x^2}{x-1}$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

- ۱ ☐ صفر ☐ ۲ ☐ ۱ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ ۴ ☐ ۴

۴۶ فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱ ☐ ۸ ☐ ۹ ☐ ۱۰ ☐ ۱۲ ☐ ۱۱

۴۷ در کدام نقطه از منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ ، خط مماس بر منحنی، بر $6y - 3x = 1$ عمود است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ ☐ $(-2, 17)$ ☐ ۲ ☐ $(-1, 10)$ ☐ ۳ ☐ $(1, 2)$ ☐ ۴ ☐ $(2, 1)$



۴۸ * معادله خط مماس بر نمودار $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$ در نقطه‌ای به طول واحد بر روی نمودار، به صورت $4y - 3x = n$ است. مقدار $m + n$ چقدر است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

- ۱ -۳ ۲ -۲ ۳ ۲ ۴ ۳

۴۹ * فرض کنید نمودارهای دو تابع $y = x\sqrt{x}$ و $y = x^2 + ax + b$ در یک نقطه مشترک، بر یک خط مماس باشند. اگر طول نقطه مشترک ۴ باشد، مقدار b کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱ ۸ ۲ ۹ ۳ ۱۰ ۴ ۱۲

۵۰ * خط $5y - x = 5$ در ناحیه اول صفحه مختصات بر منحنی $y = \frac{ax - 1}{3x + 1}$ مماس است. مقدار a کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ $\frac{4}{7}$ ۴ $\frac{9}{7}$

۵۱ * خط d موازی محور ox ها، قرینه سهمی $y = x^2 + 1$ نسبت به محور ox ها را در دو نقطه قطع می‌کند و مماس‌های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند. فاصله خط d از مبدأ مختصات کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ ۱٫۲۵ ۲ ۳٫۲۵ ۳ ۰٫۷۵ ۴ ۲٫۷۵

۵۲ * از محل تقاطع نمودار منحنی $f(x) = \sqrt{x} + 2$ با وارون آن دو خط مماس یکی بر f و دیگری بر f^{-1} رسم می‌کنیم. اگر زاویه حاده بین دو خط مماس باشد، مقدار $\sin(2\alpha)$ کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱ $\frac{7}{15}$ ۲ $\frac{8}{15}$ ۳ $\frac{225}{289}$ ۴ $\frac{240}{289}$

۵۳ * خط مماس بر منحنی $f(x) = \sqrt{ax - 1}$ در نقطه A از نقاط $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ۱ ۳ ۲ ۲ ۳ $\frac{\sqrt{23}}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{32}}{3}$

۵۴ * خط مماس بر منحنی $f(x) = \frac{a}{2x - 1}$ از نقاط $(2, 5, 6)$ و $(-5, -12)$ می‌گذرد. مقدار $f(5)$ کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

- ۱ $-\frac{1}{3}$ ۲ $\frac{1}{4}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{1}{6}$

۵۵ * تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ را در نظر بگیرید. شیب خط مماس بر منحنی $f^{-1}(x)$ در نقطه‌ای به طول ۲ واقع بر آن، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

- ۱ -۱۲ ۲ -۸ ۳ ۸ ۴ ۱۲

۵۶ * اگر $f(x) = \frac{4}{5}x - \frac{1}{5}|x|$ و $g(x) = 4x + |x|$ باشند، مشتق تابع $f \circ g$ ، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ مشتق ندارد.

۵۷ * اگر تابع f در $x = 4$ مشتق‌پذیر و $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{-3}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $y = \frac{f(2x)}{x}$ در $x = 2$ ، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

- ۱ $-\frac{1}{4}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{2}$

۵۸ * خط به معادله $y = 3x - 5$ در نقطه $x = 2$ بر نمودار تابع $y = g(x)$ مماس است. اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{2x - 2} = \frac{2}{3}$ باشد، $(f \circ g)'(2)$ کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴





۵۹ مشتق تابع $y = f(\sqrt[3]{6x+2})$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ برابر -2 است. شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ای به طول 2 کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

- ۱ ☐ -4 ۲ ☐ $\frac{1}{3}$ ۳ ☐ 3 ۴ ☐ 4

۶۰ اگر $g(x) = x + \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3}$ باشد، $(fog)'(1)$ کدام است؟ (در $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است). مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ ☐ $\frac{2}{3}$ ۲ ☐ $\frac{3}{2}$ ۳ ☐ 2 ۴ ☐ 3

۶۱ اگر $g(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ و $(fog)'(2) = 6$ باشد، $f'(5)$ کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ ☐ -2 ۲ ☐ -1 ۳ ☐ 2 ۴ ☐ 3

۶۲ اگر تابع f در $x = -2$ مشتق پذیر و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه مشتق $f(x)$ در $x = -2$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ۱ ☐ 8 ۲ ☐ 10 ۳ ☐ 12 ۴ ☐ 14

۶۳ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} -1 & ; x < -1 \\ x & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & ; x > 1 \end{cases}$ و $g(x) = 1 - x^2$ تعداد عناصر مجموعه نقاطی که gof یا fog در آن‌ها مشتق پذیر نیست کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- ۱ ☐ 2 ۲ ☐ 3 ۳ ☐ 4 ۴ ☐ 5

۶۴ اگر $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ و $g(x) = \frac{x+2}{x-4}$ تابع fog در کدام مجموعه نقاط مشتق پذیر نیست؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

- ۱ ☐ $\{4, -3\}$ ۲ ☐ $\{4, \frac{5}{2}\}$ ۳ ☐ $\{4, -3, \frac{5}{2}\}$ ۴ ☐ $\{4, -3, -6\}$

۶۵ اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ ، ضابطه مشتق تابع $y = f(x + \sqrt{1+x^2})$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

- ۱ ☐ $-x + \sqrt{1+x^2}$ ۲ ☐ $x - \sqrt{1+x^2}$ ۳ ☐ $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ۴ ☐ $\sqrt{1+x^2}$

۶۶ اگر $f(x) = \frac{3}{2} - \sqrt{x+2}$ ، مشتق تابع $y = f(xf(x))$ در نقطه $x = 2$ کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

- ۱ ☐ -1 ۲ ☐ $\frac{1}{2}$ ۳ ☐ $-\frac{1}{2}$ ۴ ☐ 1

۶۷ اگر $f(x) = \frac{x^3-2}{1+x^3}$ و $g(x) = \sqrt[3]{x-1}$ ، حاصل $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

- ۱ ☐ $\frac{3}{x}$ ۲ ☐ $\frac{3}{x^2}$ ۳ ☐ $\frac{1}{3x}$ ۴ ☐ $\frac{x-3}{x^2}$

۶۸ فرض کنید $f(x) = (x[x^2 + \frac{1}{2}])^2 + 1$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ ، مقدار مشتق تابع fog در $x = \frac{3}{\sqrt{8}}$ چند برابر $(-128\sqrt{2})$ است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- ۱ ☐ -4 ۲ ☐ 1 ۳ ☐ 2 ۴ ☐ 4





۶۹ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = 3x + |x|$ و $g(x) = \frac{3}{4}x + a|x|$ مفروض‌اند. به‌ازای کدام مقدار a ، تابع $g \circ f$ در مبداء مختصات، مشتق‌پذیر است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

هیچ مقدار a (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$-\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{4}$ (۱)

۷۰ اگر $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ و $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ، حاصل $f'(x) \cdot g'(f(x))$ کدام است؟

$\frac{1}{2}x$ (۴)

x (۳)

1 (۲)

-1 (۱)

۷۱ تابع f مشتق‌پذیر و با دوره تناوب ۵ است. اگر $f'(-1) = \frac{3}{2}$ ، $f(x) = f(x+1) + f(3x+10)$ باشد، حاصل $g'(-2)$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

$\frac{13}{2}$ (۴)

6 (۳)

$\frac{7}{2}$ (۲)

3 (۱)

۷۲ فرض کنید $f(x) = (x[x])^3$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ؛ مقدار مشتق چپ تابع $f \circ g$ در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ چند برابر $(-48\sqrt{5})$ است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

8 (۴)

4 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

۷۳ اگر $f(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{x+|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^5+|x^5|}$ باشد، مقدار $g'(\sqrt[5]{3})f'(g(\sqrt[5]{3}))$ کدام است؟

1 (۴)

-1 (۳)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

$\frac{1}{3}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۷۴ اگر $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3-|x^3|}$ باشد، مقدار $g'(-\sqrt[3]{2})f'(g(-\sqrt[3]{2}))$ کدام است؟

-1 (۴)

1 (۳)

$\frac{1}{2}$ (۲)

$-\frac{1}{2}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۷۵ مقدار مینیمم نسبی تابع $y = x^3 - 12x + 2$ ، کدام است؟

-7 (۴)

-9 (۳)

-11 (۲)

-14 (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۷۶ اگر $f'(0) = g(0) = 1$ و $f(x) = x + 1 + (g(x))^5$ ، مقدار $f''(0)$ برابر کدام است؟

$5g''(0) + 20$ (۴)

$4g''(0) + 20$ (۳)

$5g''(0)$ (۲)

$4g''(0)$ (۱)

۷۷ تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر از مرتبه دوم است. به‌ازای هر عدد حقیقی x تابع $g(x) = f(4-x^2)$ است. اگر $f'(1) = -5$ و $f''(1) = -1$ باشد، مقدار $g''(\sqrt{3})$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

3 (۴)

2 (۳)

-2 (۲)

-3 (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۷۸ در تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{8}{ax+b} & ; x > 2 \\ -x^3 + 6x & ; x \leq 2 \end{cases}$ ، اگر $f'(2)$ موجود باشد، a کدام است؟

4 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

1 (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۷۹ در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)^2} & ; x > 1 \\ ax+b & ; x \leq 1 \end{cases}$ ، مقدار $f'(1)$ موجود است. b کدام است؟

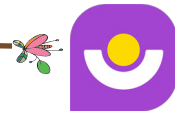
$\frac{10}{3}$ (۴)

$\frac{8}{3}$ (۳)

$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{4}{3}$ (۱)





مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۸۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4 & ; x \geq -2 \\ x^3 - x & ; x < -2 \end{cases}$ همواره مشتق پذیر باشد، $f(1)$ کدام است؟

- ۱) -۳ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

۸۱ تابع $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x-1| & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر است. مقدار a کدام است؟

- ۱) ۰ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) -۲

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۸۲ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & ; x \geq 2 \\ -x^2 + ax + b & ; x < 2 \end{cases}$ روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. مقدار b کدام است؟

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

۸۳ اگر $f(x) = x^3 - [2x^2]x$ باشد، مقدار $f'_+(\sqrt{2})$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) -۲ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۲

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

۸۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ مقدار $f'(1)$ موجود است، $f(1 - \sqrt{2})$ کدام می باشد؟

- ۱) $3 - \sqrt{2}$ ۲) $2 - \sqrt{2}$ ۳) $3 - 2\sqrt{2}$ ۴) $2 - \sqrt{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۸۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax^3 + bx & ; x < 1 \\ 2\sqrt{4x-3} & ; x \geq 1 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی مشتق پذیر است. b کدام است؟

- ۱) $\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۸۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x=2$ مشتق پذیر است. $a+b$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۸۷ فرض کنید $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)، $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \geq k \\ g'(x) & x < k \end{cases}$ باشد اگر f یک تابع مشتق پذیر باشد حداکثر

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

مقدار k با شرط $b+c=a$ کدام است؟

- ۱) $\frac{3}{4}$ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) ۴

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۸۸ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{5-2x} & ; x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x^2 + bx + c & ; x > -2 \end{cases}$ در $x=-2$ مشتق پذیر است. مقدار c کدام است؟

- ۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) $-\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{2}{3}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۸۹ اگر θ زاویه بین دو مماس چپ و راست در نقطه گوشه نمودار تابع $y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3}}$ باشد، $\tan \theta$ کدام است؟

- ۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{3}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۹۰ تابع با ضابطه $f(x) = \left[\frac{1}{x} \right]$ در کدام بازه مشتق پذیر است؟

- ۱) $[0, 1]$ ۲) $(-1, 0)$ ۳) $[1, +\infty)$ ۴) $(-\infty, -1)$



مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۹۱ تابع $f(x) = \begin{cases} |x^2 - 2x| & ; x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر است. حاصل $a + b$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۹۲ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} - 5 & x \geq 1 \\ x^2 + ax + b & x < 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است. b کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

۹۳ تابع با ضابطه $y = x\sqrt{x^2}$ از نظر پیوستگی و مشتق پذیری در $x = 0$ چگونه است؟

- ۱ پیوسته و مشتق پذیر است. ۲ پیوسته است ولی مشتق پذیر نیست. ۳ نه پیوسته است و نه مشتق پذیر. ۴ فقط از راست پیوسته و فقط از راست مشتق پذیر است.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۹۴ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x}}{x} & ; x \geq 1 \\ ax^2 + bx & ; x < 1 \end{cases}$ روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر است. b کدام است؟

- ۱ -۲ ۲ -۱ ۳ ۴ ۵

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۹۵ تابع $f(x) = \sqrt{1 + |x|}$ در نقطه $x = \alpha$ مشتق ندارد. مقدار $f'_+(\alpha) - f'_-(\alpha)$ کدام است؟

- ۱ -۱ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ ۱ ۴ تعریف نشده

۹۶ فرض کنید $g(x) = ax^2 + 5x + b$. اگر $f(x) = \begin{cases} g(x) & x \leq 2 \\ g'(x) & x > 2 \end{cases}$ مشتق پذیر باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{15}{2}$ ۲ $-\frac{5}{2}$ ۳ $\frac{5}{2}$ ۴ $\frac{15}{2}$

۹۷ اگر مماس چپ و مماس راست تابع $f(x) = |x|(x + a)$ در نقطه $x = a$ عمود بر هم باشند، مجموعه مقادیر a کدام است؟

- ۱ $\{-1\}$ ۲ $\{1\}$ ۳ $\{-1, 1\}$ ۴ $\emptyset$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۹۸ اگر $f(x) = 1 - |x|$ ، تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع با ضابطه $y = f(f(x))$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۹۹ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}$ در چند نقطه از دامنه اش مشتق ناپذیر است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۱۰۰ تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ x + 1 & 0 \leq x < 1 \\ 2x + 2 & 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 2 & x \geq 2 \end{cases}$ در چند نقطه ناپیوسته است و در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟

- ۱ یک نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر ۲ دو نقطه ناپیوسته و دو نقطه مشتق ناپذیر ۳ یک نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر ۴ دو نقطه ناپیوسته و سه نقطه مشتق ناپذیر

مرجع: سراسری - ۱۳۸۵

۱۰۱ تعداد نقاط مشتق ناپذیر تابع $f(x) = ||x| - 1|$ در روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۱۰۲ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [x + \frac{1}{3}] + [x]$ روی بازه $(0, 3)$ در چند نقطه مشتق پذیر نیست؟ [] علامت

(جزء صحیح است.)

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵





۱۰۳ در تابع با ضابطه $f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}}$ آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1 = 4$ تا $x_2 = 12$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = 4$ ، چقدر بیشتر است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

$\frac{11}{270}$ (۴)

$\frac{7}{270}$ (۳)

$\frac{11}{540}$ (۲)

$\frac{7}{540}$ (۱)

۱۰۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ ، اختلاف آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = 2$ ، از آهنگ تغییر متوسط در بازه $[1, 4]$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

0.75 (۴)

0.45 (۳)

0.5 (۲)

0.25 (۱)

۱۰۵ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در نقطه $x = 1$ با نمو متغیر 0.21 ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

$\frac{2}{21}$ (۴)

$\frac{3}{42}$ (۳)

$\frac{1}{21}$ (۲)

$\frac{1}{42}$ (۱)

۱۰۶ در تابع با ضابطه $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر از عدد ۲ به عدد $2 + h$ تغییر کند برابر $\frac{8}{9}$ است، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

۳ (۴)

2.5 (۳)

۲ (۲)

1.5 (۱)

۱۰۷ در تابع $f(x) = (x + 2)\sqrt{4x + 1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 2]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{4}$ چقدر بیشتر است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

0.25 (۴)

0.20 (۳)

0.15 (۲)

0.10 (۱)

۱۰۸ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر x ، در $x = 1$ با نمو 0.44 ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در این نقطه، چقدر کمتر است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

$\frac{1}{6}$ (۴)

$\frac{1}{12}$ (۳)

$\frac{1}{24}$ (۲)

$\frac{1}{30}$ (۱)

۱۰۹ اگر آهنگ لحظه‌ای تغییر f در واحد تغییر x در $x = 2$ برابر $-\frac{3}{2}$ باشد، آنگاه حد عبارت $\frac{f(2) - f(2+h)}{h}$ وقتی $h \rightarrow 0$ برابر کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۷۷

۳ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

$-\frac{3}{2}$ (۲)

-۳ (۱)

۱۱۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1}$ ، آهنگ تغییر متوسط تابع در بازه $[0, 4]$ از آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = \frac{3}{2}$ ، چقدر کمتر است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

0.06 (۴)

0.05 (۳)

0.04 (۲)

0.03 (۱)

۱۱۱ در تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از ۴ به ۲۵ تغییر کند برابر با آهنگ لحظه‌ای در نقطه‌ای به طول $x = a$ است، کدام می‌باشد؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

13.5 (۴)

12.5 (۳)

12.25 (۲)

11.75 (۱)

۱۱۲ آهنگ متوسط تغییر تابع با ضابطه $f(x) = \sqrt{x^2 + 144}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ای از $x_1 = 5$ تا $x_2 = 9$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

0.7 (۴)

0.6 (۳)

0.5 (۲)

0.4 (۱)

۱۱۳ آهنگ آنی تغییر مساحت یک دایره نسبت به شعاع r در $r_0 = 10$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۷۵

20π (۴)

25π (۳)

15π (۲)

10π (۱)





۱۱۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{36}{x^2}$ ، آهنگ متوسط تابع از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 3$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $\sqrt{12}$ بیشتر است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۱ ☐ ۴

۲ ☐ ۳

۱٫۵ ☐ ۲

۲٫۵ ☐ ۱

۱۱۵ نقطه‌ی $M(x, y)$ بر روی منحنی به معادله‌ی $y = \sqrt{x+8}$ در حرکت است. T فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدا مختصات است. آهنگ لحظه‌ای تغییر T در نقطه‌ای به طول $x = 7$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

۵ ☐ ۴

۳ ☐ ۷

۱۵ ☐ ۲

۱۵ ☐ ۱

۱۱۶ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$ نسبت به متغیر x روی بازه‌ی $[0, 3]$ ، از آهنگ لحظه‌ای تابع در $x = \sqrt{2}$ چقدر کمتر است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۱ ☐ ۹

۳ ☐ ۱۲

۲ ☐ ۱۸

۰ ☐ ۱

۱۱۷ در تابع $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، روی بازه‌ی $[2, 2.02]$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به متغیر x ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در $x = 2$ چه قدر بیش‌تر است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۲ ☐ ۵۱

۱ ☐ ۵۱

۱ ☐ ۱۰۱

۱ ☐ ۲۰۲

۱۱۸ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ، آهنگ متوسط از $x_1 = 2$ تا $x_2 = 5$ ، برابر آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \alpha$ است. α کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۴ ☐ ۴

۳ ☐ ۳

۱ + $\sqrt{3}$ ☐ ۲

۲٫۵ ☐ ۱

۱۱۹ آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sqrt{21 - x^2} + 4x$ در بازه‌ی $[5, 6]$ ، برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع، در کدام طول x است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۲ + $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ☐ ۴

۲ + $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ☐ ۳

۳ + $2\sqrt{2}$ ☐ ۲

۴ + $\sqrt{2}$ ☐ ۱

۱۲۰ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$ ، تفاضل آهنگ لحظه‌ای در $x = a + \frac{h}{2}$ از آهنگ متوسط تغییر تابع وقتی متغیر x از عدد a به عدد $h + a$ تغییر کند، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۰ ☐ ۴

۳ ☐ ۳h

۲ ☐ 2h

۱ ☐ h

۱۲۱ در تابع $f(x) = \sqrt{x}$ آهنگ متوسط تغییر تابع نسبت به تغییر متغیر، روی بازه‌ی $[2.25, 2.56]$ از آهنگ آنی در شروع این بازه چه قدر کمتر است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

۱ ☐ ۳۱

۳ ☐ ۶۲

۲ ☐ ۹۳

۱ ☐ ۹۳

۱۲۲ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \sqrt{x}$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع، از $x_1 = 4$ تا $x_2 = 6.25$ ، از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = 4$ چقدر کمتر است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۱ ☐ ۱۲

۳ ☐ ۷۲

۲ ☐ ۱۸

۱ ☐ ۳۶

۱۲۳ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3$ ، آهنگ متوسط تغییر این تابع وقتی $x = 3$ و $\Delta x = 0.1$ ، از آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه‌ای به طول $x = 3$ چه قدر بیش‌تر است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

۰٫۹۱ ☐ ۴

۰٫۶۲ ☐ ۳

۰٫۴۲ ☐ ۲

۰٫۳۱ ☐ ۱





۱۲۴ در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{240}{t}$ ، آهنگ آنی تغییر f در $t = 4$ چقدر از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه $t = 3$ تا $t = 5$ بیش تر است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۰

$$\frac{3}{2} \quad \text{۴}$$

$$2 \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$

۱۲۵ در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ ، آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin x \cos 2x$ چند برابر آهنگ متوسط تغییر تابع $y = \sin^4 x - \cos^4 x$ است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

$$\frac{1}{2} \quad \text{۴}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$1 \quad \text{۲}$$

$$-1 \quad \text{۱}$$

۱۲۶ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = (x^2 + 1)^3(ax + 1)$ در بازه $[-1, 0]$ برابر -11 است. آهنگ تغییر لحظه‌ای این تابع در نقطه $x = -2a$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

$$-8 \quad \text{۴}$$

$$8 \quad \text{۳}$$

$$-1 \quad \text{۲}$$

$$1 \quad \text{۱}$$



پاسخنامه تشریحی

گزینه ۱

با توجه به تعریف ریاضی مشتق داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'_-(0)$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}} \times \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}{x \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - (1 - x^2)}}{x \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x \cdot \sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۰-۷-۲۳

گزینه ۲

مشخص است که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$ می‌باشد. بنابراین، کافی است از تابع مشتق گرفته و به جای x عدد ۲ را قرار دهیم.

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^3 \rightarrow f'(x) = 3 \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right)^2 \left(\frac{\frac{1(2x-3) - 2(x+2)}{(2x-3)^2}}{2\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}}} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left(\sqrt{\frac{x+2}{2x-3}} \right) \left(\frac{-7}{(2x-3)^2} \right) \rightarrow f'(2) = \frac{3}{2} (2) (-7) = -21$$

۵۳-۱۱-۳۶

گزینه ۳

خط $y = 7$ بر سهمی f مماس است، این یعنی عرض رأس سهمی برابر ۷ است.

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 + 12}{-4} = \frac{b^2 + 12}{4} = 7 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

نقطه تماس به‌ازای $b = 4$ و $b = -4$ به‌ترتیب $(2, 7)$ و $(-2, 7)$ است که فاصله این دو نقطه برابر $4 - (-2) = 2$ است.

۷۱-۷-۲۲

گزینه ۴

ابتدا شیب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای منحنی را به هم وصل می‌کند را به دست می‌آوریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} 0 \\ -5 \\ 8 \\ 3 \end{array} \Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{-5 - 3}{0 - 8} = \frac{-8}{-8} = 1 \xrightarrow{\text{موازی}} m_{\text{مماس}} = 1$$

کافی است از تابع، مشتق گرفته و برابر یک قرار دهیم.

$$y' = \frac{4(x+1) - 1(4x-5)}{(x+1)^2} = \frac{9}{(x+1)^2} = 1 \Rightarrow (x+1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 3 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{\text{تابع}} y = 1 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \\ x+1 = -3 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

غرض (در بازه نیست). اکنون باید معادله خط مماس را در نقطه C و با شیب یک بنویسیم.

$$y - y_C = m(x - x_C) \Rightarrow y - 1 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 1$$

عرض از مبدأ این خط برابر -1 است.

۳۹-۳۹-۲۱

گزینه ۵

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x)g(2 + \Delta x) - f(2)g(2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \times g)(2 + \Delta x) - (f \times g)(2)}{\Delta x} = (f \times g)'(2)$$

حاصل عبارت، تعریف مشتق $f(x) \times g(x)$ در نقطه $2 = x_0$ است. یعنی مشتق اولی در دومی به اضافه‌ی مشتق دومی در اولی.

$$y' = (2x - 1)\sqrt{2x} + \frac{2}{2\sqrt{2x}}(x^2 - x) \Rightarrow y'(2) = (2(2) - 1)\sqrt{4} + \frac{2}{2\sqrt{4}}(4 - 2) = 6 + 1 = 7$$

۶۲-۹-۲۹

گزینه ۶ می‌دانیم $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ است، پس عبارت خواسته شده $f'(4)$ است.



$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 - 2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(5 - 2x) - (-2)(1 + \sqrt{x})}{(5 - 2x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(4) = \frac{\frac{1}{4}(-3) + 2(3)}{(-3)^2} = \frac{-\frac{3}{4} + 6}{9} = \frac{\frac{21}{4}}{9} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

۳۹-۲۴-۳۶

گزینه ۷

می‌دانیم: $(uv)' = u'v + v'u$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} = f'(-1)$$

کافی است که از تابع داده شده مشتق بگیریم و سپس $x = -1$ را جایگزین کنیم.

$$f(x) = (x - 2) \cdot \sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(1)}{3\sqrt[3]{x}}(x - 2)$$

$$\Rightarrow f'(-1) = 1 + \frac{-6}{3(-1)} = 1 + 2 = 3$$

۲۸-۱۱-۶۱

گزینه ۲

برای حل این سؤال از مشتق حاصل ضرب استفاده می‌کنیم. $((uv)' = u'v + v'u)$

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} \Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{1 \left(\frac{3(x+2) - 1(3x+1)}{(x+2)^2} \right)}{3\sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}} x = \sqrt[3]{\frac{3x+1}{x+2}} + \frac{\Delta x}{3(x+2)^2 \sqrt[3]{\left(\frac{3x+1}{x+2}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow f'(-3) = \sqrt[3]{8} + \frac{\frac{5}{1}}{3\sqrt[3]{64}}(-3) = 2 - \frac{15}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

۳۳-۳۱-۳۶

گزینه ۹

نکته: مشتق تابع $f(x) = g(x)h(x)$ در نقطه‌ای $x = a$ که در آن $g(x)$ در نقطه‌ای a مشتق پذیر و $g(a) = 0$ و h در a باشد، به صورت $f'(a) = g'(a)h(a)$ است.

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{\text{عامل صفرشونده}} \left(\frac{\sqrt[5]{3x-2}}{(5x-3)^4} \right) \Rightarrow f'(1) = \frac{1 \times \frac{5\sqrt[5]{3(1)-2}}{(5-3)^4} - \sqrt[5]{3(1)-2}}{(5-3)^4} = \frac{1}{16}$$

۳۸-۶-۵۶

گزینه ۱

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2} = 3 \Rightarrow \frac{f'(1)g(1) - g'(1)f(1)}{(g(1))^2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{-4g(1) - 0}{(g(1))^2} = 3 \Rightarrow 3g(1) = -4 \Rightarrow g(1) = -\frac{4}{3}$$

۴۵-۱۰-۴۵

می‌دانیم $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ است، پس عبارت خواسته شده $f'\left(\frac{1}{4}\right)$ است.

$$f(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(-x-1)}{x} \Rightarrow f'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{-\frac{1}{2} - (-\frac{5}{4})}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

۳۴-۳۷-۲۹

گزینه ۱۲

مشخص است که $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ می‌باشد، بنابراین کافی است از تابع، مشتق گرفته و به جای x آن عدد یک را قرار دهیم.

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+5}{x+3}} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{x+5}{x+3} - 1}{2\sqrt{\frac{x+5}{x+3}}} \rightarrow f'(1) = \frac{\frac{6}{4} - 1}{2\sqrt{\frac{6}{4}}} = \frac{\frac{2}{4}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

۴۸-۱۰-۴۲

گزینه ۴ ۱۳

$$f(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^2+2x}}{x^2-x} \right)^2 = \frac{x^2+2x}{(x^2-x)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x+2)(x^2-x)^2 - 2(x^2-x)(2x-2)(x^2-x)}{(x^2-x)^4} \rightarrow f'(2) = \frac{(6)(8) - 2(4)(3)(8)}{64} = \frac{48 - 96}{64} = \frac{-48}{64} = -\frac{3}{4}$$

۳۳-۳۴-۳۳

گزینه ۴ ۱۴

می‌دانیم: $y = u^n \rightarrow y' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$ و $y = \sqrt[n]{u^m} \rightarrow y' = \frac{m \cdot u'}{n \cdot \sqrt[n]{u^{n-m}}}$

$$y = \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2} \right)^2 \Rightarrow y' = 2 \left(\frac{-16}{x^2} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right) \left(\frac{16}{x} - \sqrt[3]{x^2} \right)$$

$$\Rightarrow y'(-8) = 2 \left(\frac{-16}{64} - \frac{2}{3 \times (-2)} \right) \left(\frac{16}{-8} - \sqrt[3]{8^2} \right) = -1$$

۵۷-۱۲-۳۰

گزینه ۱ ۱۵

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$$

$f(-1) = 0$ ، پس داریم:

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)\sqrt[3]{x^2-4x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x-2)\sqrt[3]{x^2-4x} = (-3) \times (2) = -6$$

۴۶-۷-۴۷

گزینه ۴ ۱۶

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-x^2}{3x+5}} \rightarrow f'(x) = \frac{2 \left(\frac{(1-2x)(3x+5) - 3(x-x^2)}{(3x+5)^2} \right)}{3\sqrt[3]{\frac{x-x^2}{3x+5}}} \rightarrow f'(-2) = \frac{2 \left(\frac{(6)(-1) - 3(-8)}{1} \right)}{3\sqrt[3]{\frac{-8}{-1}}} = \frac{2(18)}{6} = 6$$

۶۳-۱۱-۲۶

گزینه ۳ با توجه به حد $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)+7}{x-4} = -\frac{3}{2}$ و مشتق پذیری f در $x=4$ ، نتیجه می‌گیریم که $f(4) = -7$ و $f'(4) = -\frac{3}{2}$ است.

با توجه به اطلاعات کسب شده، مشتق $y = \frac{f(2x)}{x}$ را محاسبه می‌کنیم.

$$y = \frac{f(2x)}{x} \Rightarrow y' = \frac{2xf'(2x) - f(2x)}{x^2}$$

$$y'(2) = \frac{4f'(4) - f(4)}{4} = \frac{4(-\frac{3}{2}) - (-7)}{4} = \frac{1}{4}$$

۶۱-۶-۳۳

گزینه ۴ از عبارت $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h)+3}{h} = \frac{1}{2}$ و مشتق پذیری f در $x=-2$ نتیجه می‌گیریم که $f(-2) = -3$ و $f'(-2) = \frac{1}{2}$.

$$y = x^2 f(x) \Rightarrow y' = 2xf(x) + x^2 f'(x) \Rightarrow y'(-2) = -4f(-2) + 4f'(-2)$$

$$\Rightarrow y'(-2) = 12 + 2 = 14$$

۵۶-۱۰-۳۴

گزینه ۲ ۱۹

$$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3}$$

حد خواسته شده را به صورت تعریف مشتق می‌نویسیم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(\delta-h) - 3f(\delta-h) + 2}{h(\delta-h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(\delta-h)-1)(f(\delta-h)-2)}{h(\delta-h)}$$



چون $f(5) = 1 \times \sqrt[3]{8} = 2$ داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h) - 1}{5-h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h) - 2}{h} = \frac{f(5-h) - 2}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5-h) - 2}{h}$$

$$= \frac{2-1}{5} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+(-h)) - f(5)}{h} = -\frac{1}{5} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(5+(-h)) - f(5)}{-h}$$

با فرض $-h = t$ داریم:

$$-\frac{1}{5} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(5+t) - f(5)}{t} = -\frac{1}{5} f'(5)$$

$$f(x) = (x-4)\sqrt[3]{x+3} \Rightarrow f'(x) = 1 \times \sqrt[3]{x+3} + \frac{x-4}{3\sqrt[3]{(x+3)^2}}$$

$$f'(5) = \sqrt[3]{8} + \frac{1}{3\sqrt[3]{64}} = 2 + \frac{1}{3 \times 4} = 2 + \frac{1}{12} = \frac{25}{12}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$-\frac{1}{5} f'(5) = -\frac{1}{5} \times \frac{25}{12} = -\frac{5}{12}$$

۸۱-۵-۱۴

۲۰. گزینه ۴ طبق فرض، شیب خط مماس در نقطه $(-1, 5)$ از تابع برابر $\frac{-1}{2}$ است، پس:

$$\begin{cases} f(-1) = 5 \\ f'(-1) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

مشتق تابع g به صورت زیر می شود:

$$g(x) = \sqrt[3]{x} \cdot f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} f(x) + \sqrt[3]{x} f'(x)$$

$$\xrightarrow{x=-1} g'(-1) = \frac{1}{3} f(-1) - f'(-1) = \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{6}$$

۶۹-۶-۲۵

۲۱. گزینه ۳

با توجه به رابطه داده شده و مشتق پذیر f در $x=2$ مشخص است که $f(2) = 9$ و $f'(2) = \frac{3}{2}$.

$$g(x) = x\sqrt{f(x)} \Rightarrow g'(x) = \sqrt{f(x)} + \frac{x f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

$$\Rightarrow g'(2) = \sqrt{f(2)} + \frac{2 f'(2)}{2\sqrt{f(2)}} = 3 + \frac{3}{2} = 3 + \frac{1}{2} = 3.5$$

۵۸-۷-۳۶

۲۲. گزینه ۲ با فاکتور گرفتن ۲ از صورت کسر داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(f(x) - \frac{1}{2})}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{1}{2}}{x-1}$$

در تابع $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{2x^2 + x - 1}$ ، توجه کنید که $f(1) = \frac{1}{2}$ ، پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

حال مشتق f در $x=1$ را محاسبه می کنیم.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}})(2x^2 + x - 1) - (2x + 1)x\sqrt{x}}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

$$f'(1) = \frac{(1 + \frac{1}{2})(2 + 1 - 1) - (2 + 1) \times 1}{(2 + 1 - 1)^2} = \frac{\frac{3}{2} \times 2 - 3}{4} = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{2}$$

۵۹-۱۴-۲۷

۲۳. گزینه ۳ وقتی $x \rightarrow 1^+$ میل می کند، داخل قدرمطلق، مثبت است و وقتی $x \rightarrow 1^-$ میل می کند، داخل قدرمطلق، منفی است.

$$x \rightarrow 1^+ : f(x) = x\sqrt{x} + x - 1 = x^{\frac{3}{2}} + x - 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 1 \Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}$$

$$x \rightarrow 1^- : f(x) = x\sqrt{x} - x + 1 = x^{\frac{3}{2}} - x + 1 \Rightarrow f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 1 \Rightarrow f'_-(1) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f'_+(1) + 3f'_-(1) = \frac{5}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{2} = 4$$

۳۳-۱۳-۵۵

۲۴ گزینه ۳

دقت کنید که وقتی $x \rightarrow 0^-$ داخل قدر مطلق منفی و $[0^-] = -1$ است و وقتی $x \rightarrow 0^+$ داخل قدر مطلق مثبت و $[0^+] = 0$ است.

$$\left. \begin{aligned} x = 0^- \Rightarrow f(x) &= (-x)(-1) \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f'(0^-) = 1 \\ x = 0^+ \Rightarrow f(x) &= (x)(0) \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow f'(0^+) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 - 0 = 1$$

۲۶-۲۰-۵۴

۲۵ گزینه ۲

می‌دانیم که $\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'_-(2)$ است.

دقت کنید وقتی $x \rightarrow 2^-$ داخل قدر مطلق منفی است پس داریم:

$$f(x) = -x + 2 + \sqrt{2x} \Rightarrow f'(x) = -1 + \frac{1(2)}{2\sqrt{2x}} \Rightarrow f'_-(2) = -1 + \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}$$

۳۳-۹-۵۸

۲۶ گزینه ۳ می‌دانیم: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'_+(a)$ بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'_+(1)$$

برای محاسبه مشتق ابتدا باید براکت را تعیین عدد و قدر مطلق را تعیین علامت نماییم:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - [1^+]} + x = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x - 1}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{3}{2\sqrt{1}} = \frac{3}{2}$$

۳۸-۶-۵۶

۲۷ گزینه ۱ توجه کنید که وقتی $4 \leq x < 8$ است آن گاه $2 < \frac{x}{4} < 1$ بوده و $[\frac{x}{4}] = 1$ می‌باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & 0 \leq x < 4 \\ x^2 - 9x & 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

$$f'(2) = \frac{1(2x + 6)}{2\sqrt{x^2 + 6x}} = \frac{4 + 6}{2\sqrt{4 + 12}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$f'(5) = 2x - 9 = 10 - 9 = 1$$

$$\text{پس: } f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

۳۶-۶-۵۸

۲۸ گزینه ۲

در همسایگی راست $x = -3$ ابتدا براکت را تعیین عدد و قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x \rightarrow (-3)^+ \Rightarrow \{ [x] = -3, |x| = -x \} \Rightarrow f(x) = (-3 + x)\sqrt[3]{9x}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt[3]{9x} + \frac{9}{3\sqrt[3]{(9x)^2}}(-3 + x) \Rightarrow f'(-3) = \sqrt[3]{-27} + \frac{3}{(\sqrt[3]{-27})^2}(-3 - 3) = -3 - \frac{6}{3} = -5$$

۲۸-۸-۶۴

۲۹ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 6x} & 0 \leq x < 4 \\ [\frac{x}{4}](x^2 - 9x) & 4 \leq x < 8 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه تابع، برای محاسبه $f'(2)$ از ضابطه بالایی و برای محاسبه $f'(5)$ از ضابطه پایینی استفاده می‌کنیم:



$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x + 6}{2\sqrt{x^2 + 6x}} \Rightarrow f'(2) = \frac{4 + 6}{2 \times 4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

برای مشتق تابع در $x = 5$ باید از ضابطه پایینی استفاده کنیم:

$$f(x) = \left[\frac{x}{4}\right](x^2 - 9x)$$

ابتدا باید براکت را در $x = 5$ تعیین عدد کنیم و سپس مشتق بگیریم:

$$x = 5 : f(x) = x^2 - 9x \Rightarrow f'(x) = 2x - 9 \Rightarrow f'(5) = 1$$

$$f'(2) - f'(5) = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

۳۸-۶-۵۵

گزینه ۴

$$x - 3y = 2 \rightarrow m_{\text{خط}} = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{عمود}} m_{\text{مماس}} = -3$$

شیب خط مماس همان مشتق است، بنابراین کافی است که از تابع، مشتق گرفته و مساوی ۳- قرار دهیم.

$$y' = 3x^2 + 6x = -3 \Rightarrow 3x^2 + 6x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \xrightarrow{\text{تابع}} y = -1 + 3 + 1 = 3$$

حال معادله خط مماس را می‌نویسیم:

$$A \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix}^{-1}, m = -3 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) : y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow y = -3x$$

فقط مختصات نقطه گزینه‌ی چهارم در معادله این خط صدق می‌کند.

۲۷-۱۱-۶۳

برای تعیین عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{4x}}$ در نقطه $(2, \frac{1}{2})$ ، ابتدا باید معادله خط مماس در این نقطه را بنویسیم.

$$y' = \frac{-\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x)^2}}}{(\sqrt[3]{4x})^2} \Rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{-\frac{4}{12}}{4} = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{12}(x - 2) \xrightarrow{x=0} y - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow y = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۲۰-۱۰-۷۰

ابتدا شیب خط مماس بر منحنی را در نقطه به طول α محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \Rightarrow m = f'(\alpha) = \frac{3}{(\alpha+1)^2}$$

با توجه به اینکه این خط از نقطه $(\alpha, \frac{2\alpha-1}{\alpha+1})$ می‌گذرد، معادله‌ی خط موردنظر به صورت زیر می‌شود:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(x - \alpha)$$

نقطه $(-1, 0)$ روی خط فوق است؛ بنابراین با قرار دادن مختصات نقطه $(-1, 0)$ به جای x و y در معادله این خط داریم:

$$0 - \frac{2\alpha-1}{\alpha+1} = \frac{3}{(\alpha+1)^2}(-1 - \alpha) \Rightarrow 2\alpha - 1 = 3 \Rightarrow \alpha = 2$$

۱۵-۱۲-۷۳

گزینه ۴

منحنی داده شده و خط $y = x$ (نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم) را تلاقی می‌دهیم.

$$\begin{cases} ay = x^2 + 5x + 4 \\ y = x \end{cases} \rightarrow ax = x^2 + 5x + 4 \rightarrow x^2 + (5-a)x + 4 = 0 : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

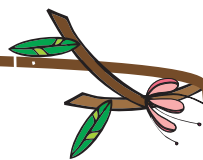
$$b^2 - 4ac = 0 \rightarrow (5-a)^2 - 16 = 0 \Rightarrow a - 5 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$a = 9 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)^2 = 0 \rightarrow x = 2 \checkmark$$

$$a = 1 \xrightarrow{\text{معادله‌ی تلاقی}} x^2 + 4x + 4 = 0 \rightarrow (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = -2 \times$$

دقت کنید در ناحیه‌ی اول، x مثبت است.

۲۵-۱۲-۶۳



۳۴ گزینه ۲ ابتدا معادله خط مماس بر منحنی در نقطه‌ای به طول $x = 1$ را نوشته و سپس معادله تلاقی این خط و منحنی را تشکیل داده و حل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} 1) \quad x = 1 &\xrightarrow{\text{تایع}} y = 0 \Rightarrow A \Big|_0^1 \\ 2) \quad y' = 3x^2 - 2x &\Rightarrow m_{\text{مماس}} = 3 - 2 = 1 \\ 3) \quad y - 0 &= 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1 \end{aligned}$$

حال معادله تلاقی را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \text{معادله خط مماس: } x^3 - x^2 = x - 1 &\Rightarrow x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \\ \Rightarrow x^2(x - 1) - (x - 1) &= 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{تایع}} y = -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

۶۵-۷-۲۸

۳۵ گزینه ۴ هرگاه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ بر هم مماس باشند آنگاه $\begin{cases} f(a) = g(a) \\ f'(a) = g'(a) \end{cases}$ است.

$$\begin{cases} f(1) = g(1) \Rightarrow 2 - 5 = a + b + 1 \Rightarrow a + b = -4 \\ f'(1) = g'(1) \Rightarrow 2 = 2ax + b \Rightarrow 2a + b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 6, b = -10$$

۵۲-۱۰-۳۸

۳۶ گزینه ۱ اگر دو نقطه A, B باشند آنگاه مختصات آن دو نقطه $B \Big|_{a-3}^{-1}$ ، $A \Big|_{a+3}^1$ می‌باشد.

اگر خطی بر منحنی مماس باشد معادله تلاقی آن با منحنی ریشه مضاعف دارد، پس ابتدا معادله خط مذکور را می‌نویسیم:

$$m_{AB} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{a + 3 - a + 3}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y - (a + 3) = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x + a$$

حال معادله این خط را با منحنی تلاقی می‌دهیم: (معادله تلاقی باید ریشه مضاعف داشته باشد).

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + 2x &= 3x + a \Rightarrow x^3 + ax^2 - x - a = x^2(x + a) - (x + a) = 0 \\ \Rightarrow (x + a)(x^2 - 1) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = -a \end{cases} \Rightarrow a = -1, a = 1 \end{aligned}$$

برای وجود ریشه مضاعف باید ریشه‌های دو پرانتز برابر باشند.

۷۳-۶-۲۱

$$1) \quad x = 4 \xrightarrow{\text{تایع}} y = 8 \Rightarrow A \Big|_8^4$$

$$2) \quad y' = \frac{5\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}(5x - 4)}{x} \xrightarrow{x=4} m_{\text{مماس}} = \frac{10 - \frac{1}{4}(16)}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$3) \quad y - 8 = \frac{3}{2}(x - 4) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 2 \xrightarrow{x=0} y = 2$$

۳۳-۳۳-۳۵

$$1) \quad x = 1 \rightarrow y = \sqrt{4} = 2 \rightarrow A \Big|_2^1$$

$$2) \quad y' = \frac{1(2x + 3)}{2\sqrt{x^2 + 3x}} \rightarrow m_{\text{مماس}} = \frac{5}{4}$$

$$3) \quad y - 2 = \frac{5}{4}(x - 1) \xrightarrow{x=0} y - 2 = -\frac{5}{4} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

۴۷-۱۱-۴۳

۳۹ گزینه ۲ شرط اینکه دو تابع بر هم مماس باشند آن است که معادله تلاقی آن‌ها دارای ریشه مضاعف باشد.

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 6 \\ y = 5x + a \end{cases} \xrightarrow{\text{تایع}} 2x^2 - 3x + 6 = 5x + a \rightarrow 2x^2 - 8x + 6 - a = 0$$

معادله تلاقی: $2x^2 - 8x + 6 - a = 0$

$$\text{شرط ریشه مضاعف: } \Delta = 0 \rightarrow b^2 - 4ac = 0 \rightarrow 64 - 8(6 - a) = 0$$

$$\rightarrow 8 - (6 - a) = 0 \rightarrow 8 - 6 + a = 0 \rightarrow a = -2$$

۵۸-۸-۳۴

۴۰ گزینه ۳ خط $y = 2x + b$ در نقطه‌ای به طول $x = 1$ بر تابع $y = \frac{x+a}{ax+1}$ مماسی است، پس خط مماس یعنی مشتق د $x = 1$ برابر ۲ است.



$$y' = \frac{1 \times (ax + 1) - a(x + a)}{(ax + 1)^2} = \frac{ax + 1 - ax - a^2}{(ax + 1)^2} = \frac{1 - a^2}{(ax + 1)^2}$$

$$y'(1) = \frac{1 - a^2}{(a + 1)^2} = 2 \Rightarrow 2(a^2 + 2a + 1) = 1 - a^2$$

$$2a^2 + 4a + 2 - 1 + a^2 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 4a + 1 = 0 \Rightarrow (a + 1)(3a + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

به ازای $a = -1$ تابع $y = \frac{x-1}{-x+1} = -1$ تابع ثابت است و خط $y = 2x + b$ نمی‌تواند بر آن مماس شود، پس $a = -\frac{1}{3}$ قابل قبول است و داریم:

$$y = \frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}x + 1} = \frac{3x - 1}{-x + 3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{3-1}{-1+3} = 1$$

نقطه $A(1, 1)$ بر روی خط $y = 2x + b$ نیز قرار دارد.

$$1 = 2 + b \Rightarrow b = -1 \Rightarrow a - b = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$$

۶۳-۱۱-۲۵

۴۱. گزینه ۳ چون نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax + b$ و خط به معادله $y + 2x = b$ در نقطه‌ای به طول یک روی محور x متقاطع هستند پس نقطه‌ی $\left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right|$ در ضابطه‌ی تابع و خط صدق می‌کند.

$$\left. \begin{aligned} f(x) = x^3 + ax + b &\xrightarrow{\left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right|} 0 = 1 + a + b \\ y + 2x = b &\xrightarrow{\left| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right|} 0 + 2 = b \end{aligned} \right\} \rightarrow b = 2, a = -3$$

برای پیدا کردن طول‌های دو نقطه‌ی تقاطع دیگر منحنی و خط، باید آنها را تلافی دهیم.

$$\begin{aligned} x^3 + ax + b &= b - 2x \xrightarrow{a=-3, b=2} x^3 - 3x + 2 = 2 - 2x \\ \rightarrow x^3 - x &= 0 \rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

۶۵-۵-۳۰

۴۲. گزینه ۲ ابتدا معادله‌ی خط گذرنده از دو نقطه $(1, 2)$ و $(-1, 3)$ را به دست می‌آوریم.

$$y - 2 = \frac{2-3}{1+1}(x-1) \Rightarrow y = \frac{-1}{2}x + \frac{5}{2}$$

این خط در $x = 3$ بر تابع f مماس است، بنابراین:

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{-3}{2} + \frac{5}{2} = 1, f'(3) = m = -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) + 4f(x) - 5}{3-x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x) + 5)(f(x) - 1)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} -(f(x) + 5) \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = (-6)f'(3) = 3 \end{aligned}$$

۶۴-۷-۲۹

۴۳. گزینه ۴ اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ بر هم مماس باشند، آن‌گاه $f(a) = g(a)$ و $f'(a) = g'(a)$ است.

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(x) = \frac{x+2}{x-1} \\ g(x) = ax^2 + bx \end{cases} &\rightarrow f(2) = g(2) \rightarrow 4 = 4a + 2b \quad (I) \\ f'(2) = g'(2) &\rightarrow \frac{1(x-1) - 1(x+2)}{(x-1)^2} = 2ax + b \rightarrow -3 = 4a + b \quad (II) \end{aligned}$$

از حل دستگاه $a = \frac{-5}{2}$ و $b = 7$ به دست می‌آید.

۶۳-۸-۲۹

۴۴. گزینه ۱ برای محاسبه نقطه تلافی با محور y باید $x = 0$ قرار دهیم.

$$f(0) = \frac{\cos(0)}{2 - \sin(0)} = \frac{1}{2} \Rightarrow (0, \frac{1}{2}) \text{ مختصات نقطه:}$$

$$f'(x) = \frac{-2 \sin 2x \cdot (2 - \sin x) - (-\cos x) \cdot \cos 2x}{(2 - \sin x)^2}$$

$$m = f'(\circ) = \frac{1}{4} \Rightarrow y - \frac{1}{4} = -4(x - \circ)$$

$$\text{معادله خط قائم: } y - y_0 = -\frac{1}{m} \cdot (x - x_0)$$

$$\text{پس خط قائم به صورت } y = -4x + \frac{1}{4} \text{ است.}$$

برای محاسبه نقطه برخورد این خط با نیم‌ساز ناحیه اول باید معادله زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} y = -4x + \frac{1}{4} \\ y = x \end{cases} \Rightarrow -4x + \frac{1}{4} = x \Rightarrow 5x = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{20}$$

۸۰-۷-۱۳

گزینه ۴۵

$$y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(2) = 0 \Rightarrow m_{\text{مماس}} = 0 \\ x = 2 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow \text{نقطه تماس: } (2, 4) \end{cases} \Rightarrow \text{معادله خط: } y - 4 = 0(x - 2) \Rightarrow y = 4$$

بنابراین خط مماس، محور yها را با عرض ۴ قطع می‌کند.

۴۸-۱۶-۳۷

گزینه ۴۶ اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ بر هم مماس باشند آن‌گاه $f(a) = g(a)$ و $f'(a) = g'(a)$ است. دو تابع $f(x) = x\sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + ax + b$ داده شده است.

$$f(4) = g(4) \rightarrow 8 = 16 + 4a + b \rightarrow 4a + b = -8$$

$$f'(4) = g'(4) \rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}x = 2x + a \rightarrow 2 + 1 = 8 + a \rightarrow a = -5 \xrightarrow{4a+b=-8} -20 + b = -8 \rightarrow b = 12$$

۶۸-۶-۲۶

گزینه ۳ شیب خط $1 - 3x = 6y$ را می‌یابیم:

$$6y = 3x + 1 \Rightarrow y = \frac{3}{6}x + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{6} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{2}$$

$$\text{شیب خط مماس} = -2$$

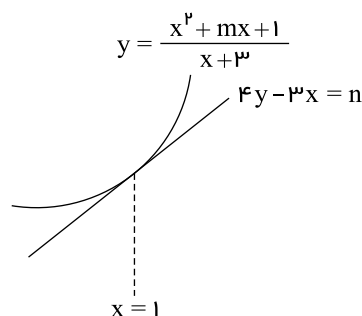
بنابراین در تابع $y = x^2 - 4x + 5$ باید نقطه‌ای را بیابیم که شیب خط مماس یعنی مشتق در آن برابر ۲- باشد.

$$y' = 2x - 4 = -2 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

۳۹-۱۹-۴۱

گزینه ۴۸

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید:



$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3}$$

$$4y - 3x = n$$

$$4y = 3x + n \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{n}{4} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{3}{4}$$

شیب خط مماس در $x = 1$ برابر $\frac{3}{4}$ است، پس:

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + 3} \Rightarrow y' = \frac{(2x + m)(x + 3) - 1 \times (x^2 + mx + 1)}{(x + 3)^2}$$



$$y'(1) = \frac{(2+m) \times 4 - (1+m+1)}{4^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4(m+2) - 2 - m = 12 \Rightarrow 4m + 8 - 2 - m = 12 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2$$

$$y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \xrightarrow{x=1} y = \frac{1 + 2 + 1}{1 + 3} = 1 \Rightarrow A(1, 1)$$

نقطه $A(1, 1)$ بر روی خط $4y - 3x = n$ نیز قرار دارد.

$$4 \times 1 - 3 \times 1 = n \Rightarrow n = 1 \Rightarrow m + n = 2 + 1 = 3$$

۷۹-۶-۱۵

۴۹ گزینه ۴ چون در $x = 4$ مماس مشترک دارند پس در این نقطه هم مقادیرشان با هم برابر است و هم مشتق این دو تابع در $x = 4$ با هم برابر هستند.

$$y_1 = f(x) = x\sqrt{x}, \quad y_2 = g(x) = x^2 + ax + b$$

$$f(4) = 4 \times \sqrt{4} = 8 \Rightarrow g(4) = 16 + 4a + b \Rightarrow \boxed{4a + b = -8} \quad (1)$$

$$f'(4) = g'(4) \Rightarrow f'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = 3$$

$$g'(x) = 2x + a \Rightarrow g'(4) = 8 + a \Rightarrow 8 + a = 3 \Rightarrow a = -5 \xrightarrow{(1)} \boxed{b = 12}$$

۳۱-۴۷-۲۲

۵۰ گزینه ۲ هرگاه دو نمودار برهم مماس باشند آنگاه معادله تلاقی آنها ریشه مضاعف دارد.

توجه: هرگاه یک معادله درجه دوم ریشه مضاعف داشته باشد. آنگاه $\Delta = 0$ است و آن معادله را می توان به صورت مربع کامل نوشت.

خط و منحنی را با هم تلاقی و ریشه مضاعف از آن می گیریم:

$$\begin{cases} y = \frac{x+5}{x} \\ y = \frac{ax-1}{3x+1} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+5}{x} = \frac{ax-1}{3x+1} \Rightarrow 3x^2 + 16x + 5 = 7ax - 7 \Rightarrow 3x^2 + (16-7a)x + 12 = 0 \quad (1)$$

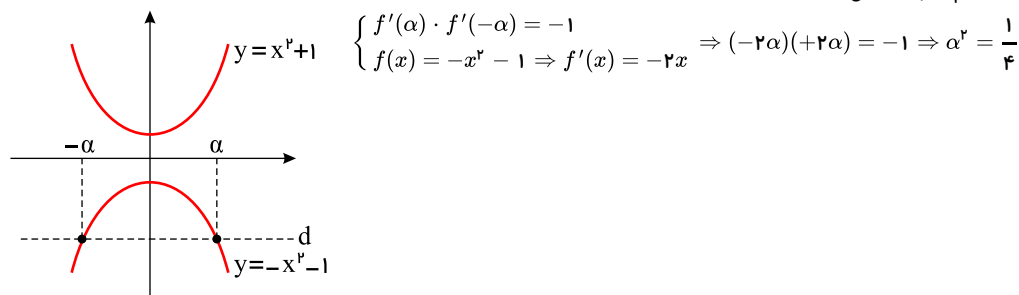
معادله (۱) چون ریشه مضاعف دارد را می توان به صورت مربع کامل نوشت بنابراین چون محل تلاقی ناحیه اول است، معادله فوق به صورت $3(x-2)^2$ است پس:

$$\Rightarrow 16 - 7a = -12 \Rightarrow 7a = 28 \Rightarrow a = 4$$

۳۶-۴۴-۲۰

۵۱ گزینه ۱ مطابق شکل، ضابطه قرینه سهمی نسبت به محور x ها برابر می شود با: $y = -x^2 - 1$ خط افقی d ، نمودار تابع را در نقطه به طول های α و $-\alpha$ قطع می کند؛ از

طرفی طبق فرض، مماس های رسم شده در این نقاط بر هم عمودند، یعنی:



عرض نقاط مورد نظر (نقاط به طول α و $-\alpha$) برابر می شود با:

$$f(\alpha) = f(-\alpha) = -\alpha^2 - 1 = \frac{-1}{4} - 1 = -\frac{5}{4}$$

یعنی معادله خط d به صورت $y = \frac{-5}{4}$ است و مبدأ مختصات به فاصله $1,25$ از خط d است.

۴۱-۳۴-۲۵

۵۲ گزینه ۴ تابع f اکیداً صعودی است؛ پس وارون خود را روی خط $y = x$ قطع می کند:

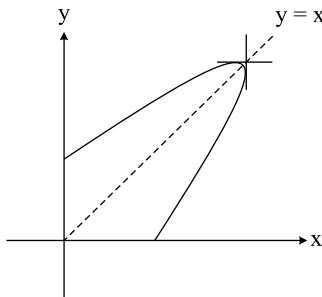
$$\begin{cases} y = \sqrt{x} + 2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \Rightarrow x = 4$$

پس نقطه تلاقی $(4, 4)$ است. شیب خط مماس بر منحنی f در $x = 4$ برابر $f'(4)$ است:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{4}$$

ضابطه تابع وارون را می یابیم:

$$f(x) = y = \sqrt{x} + 2 \Rightarrow y - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = (y - 2)^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = (x - 2)^2 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = 2(x - 2) \Rightarrow (f^{-1})'(4) = 4$$



پس شیب خط مماس بر منحنی f^{-1} در نقطه $(4, 4)$ برابر ۴ است. می‌دانیم شیب یک خط برابر تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور x هاست. اگر زاویه بین این دو مماس و محور x را به ترتیب α_1 و α_2 و زاویه بین این دو مماس را α بنامیم، داریم:

$$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \Rightarrow \tan \alpha = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_2 \tan \alpha_1} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 4 \times \frac{1}{4}} = \frac{\frac{15}{4}}{2} = \frac{15}{8}$$

بنابراین:

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 \times \frac{15}{8}}{1 + \frac{225}{64}} = \frac{240}{289}$$

۸۴-۶-۱۰

۵۳ گزینه ۱ ابتدا معادله خطی که از دو نقطه $(-1, 1)$ و $(2, 2)$ می‌گذرد را به عنوان معادله خط مماس می‌نویسیم:

$$\text{شیب } m = \frac{2 - 1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

$$\text{معادله خط مماس: } y - 1 = \frac{1}{3}(x + 1) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$$

حال اگر معادله خط مماس را با معادله منحنی قطع دهیم باید تقاطع آنها دارای ریشه مضاعف باشد پس داریم:

$$\sqrt{ax - 1} = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \Rightarrow 3\sqrt{ax - 1} = x + 4 \Rightarrow$$

$$9(ax - 1) = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 + (8 - 9a)x + 25 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow (8 - 9a)^2 - 4(25) = 0 \Rightarrow (8 - 9a)^2 = 100$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 - 9a = 10 \Rightarrow a = \frac{-2}{9} \\ 8 - 9a = -10 \Rightarrow a = \frac{18}{9} = 2 \end{cases}$$

اگر $a = \frac{-2}{9}$ باشد $f(5)$ تعریف نشده است پس به ازای $a = 2$ خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt{2x - 1} \Rightarrow f(5) = \sqrt{9} = 3$$

۷۳-۸-۱۹

۵۴ گزینه ۱

$$A = (-5, -12), B = (2, 5, 6) \Rightarrow m_{AB} = 6, y = 6x - 9$$

$$f'(x) = \frac{-2a}{(2x - 1)^2} = 6, f(x) = \frac{a}{2x - 1} = 6x - 9$$

$$\begin{cases} a = -3(2x - 1)^2 \\ a = (2a - 1)(6x - 9) \end{cases} \Rightarrow -3(2x - 1) = 6x - 9 \Rightarrow -6x + 3 = 6x - 9 \Rightarrow 12x = 12 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow a = -3 \Rightarrow f(5) = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

۷۶-۶-۱۸

۵۵ گزینه ۱ ابتدا ضابطه وارون تابع داده شده را به دست می‌آوریم.



$$y = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \rightarrow \sqrt{x}y - y = \sqrt{x} + 1 \rightarrow \sqrt{x}y - \sqrt{x} = y + 1 \rightarrow \sqrt{x}(y - 1) = y + 1 \rightarrow \sqrt{x} = \frac{y + 1}{y - 1} \rightarrow x = \left(\frac{y + 1}{y - 1}\right)^2 \rightarrow f^{-1}(x) = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2$$

اکنون از تابع معکوس، مشتق گرفته و به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم.

$$\text{مشتق} = 2 \left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^1 \left(\frac{1(x - 1) - 1(x + 1)}{(x - 1)^2} \right) \rightarrow m_{\text{مماس}} = 2(3)(-2) = -12$$

۳۴ - ۳۸ - ۲۸

۵۶ گزینه ۲ در ابتدا قدرمطلق‌های توابع f و g را از بین می‌بریم.

$$f(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{5}|x| = \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{1}{5}x & ; x \geq 0 \\ \frac{x}{5} + \frac{1}{5}x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = 3x + |x| = \begin{cases} 3x + x & ; x \geq 0 \\ 3x - x & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 : fog(x) = f(g(x)) = \frac{4x}{5} = \frac{4}{5}x$$

$$x < 0 : fog(x) = f(g(x)) = 2x$$

یعنی $fog(x) = 3x$ است، پس مشتق آن برابر ۳ می‌باشد.

۶۲ - ۱۱ - ۲۷

۵۷ گزینه ۳ می‌دانیم: $y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \frac{f(4) + 7}{0} \xrightarrow{\text{چون جواب حد، عدد شده است پس این کسر ۰ بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است}} f(4) + 7 = 0 \rightarrow f(4) = -7$$

$$\text{پس: } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) + 7}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - (-7)}{x - 4} \xrightarrow{\text{طبق تعریف مشتق}} f'(4) = -\frac{7}{4}$$

اکنون مشتق $y = \frac{f(2x)}{x}$ را حساب می‌کنیم.

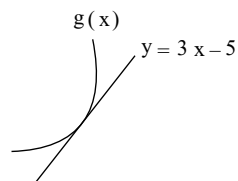
$$y = \frac{f(2x)}{x} \rightarrow y' = \frac{2f'(2x) \cdot x - 1f(2x)}{x^2}$$

$$\rightarrow y'(2) = \frac{2f'(4) - f(4)}{4} = \frac{2(-\frac{7}{4}) - (-7)}{4} = \frac{-\frac{7}{2} + 7}{4} = \frac{\frac{7}{2}}{4} = \frac{7}{8}$$

۷۰ - ۸ - ۲۲

۵۸ گزینه ۴

می‌دانیم که $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ و $(fog(x))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ است.



$$\Rightarrow g(2) = 1, \text{ شیب خط مماس } = 3 \Rightarrow g'(2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} f'(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow f'(1) = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow (fog)'(2) = g'(2) \cdot f'(g(2)) = 3f'(1) = 3 \times \frac{4}{3} = 4$$

۶۴ - ۸ - ۲۸

۵۹ گزینه ۱

می‌دانیم که شیب خط مماس بر نمودار f در $x = a$ ، $f'(a)$ است.

داریم:

$$y = f(\sqrt[3]{6x + 2}) \Rightarrow y' = \frac{6}{3\sqrt[3]{(6x + 2)^2}} f'(\sqrt[3]{6x + 2}) \xrightarrow{x=1} y' = \frac{6}{12} f'(2) = -2 \Rightarrow f'(2) = -4$$

۶۷ - ۷ - ۲۵

۶۰. گزینه ۳ می‌دانیم که $(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$, $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{4}{3} \Rightarrow f'(2) = \frac{4}{3}$$

$$(fog)'(1) = g'(1) \cdot f'(g(1)) \Rightarrow \begin{cases} g(1) = 1 + 1 = 2 \\ g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow g'(1) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g'(1) \cdot f'(g(1)) = \frac{3}{2} \times f'(2) = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$$

۳۵-۳۰-۳۵

۶۱. گزینه ۱ می‌دانیم $(f(g(x)))' = g'(x) \cdot f'(g(x))$ است.

$$(fog)'(2) = 6 \rightarrow g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6$$

توجه کنید :

$$\begin{cases} g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow g(2) = \frac{4+1}{2-1} = 5 \\ g(x) = \frac{2x+1}{x-1} \rightarrow g'(x) = \frac{2(x-1) - 1(2x+1)}{(x-1)^2} \rightarrow g'(2) = -3 \end{cases}$$

$$g'(2) \cdot f'(g(2)) = 6 \rightarrow -3f'(5) = 6 \rightarrow f'(5) = -2$$

۳۵-۳۰-۳۵

۶۲. گزینه ۴ می‌دانیم: $y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$

ابتدا حد عبارت داده شده را محاسبه کرده و اطلاعات مورد نظر را بدست می‌آوریم.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{f(-2) + 3}{0}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس این کسر $\frac{0}{0}$ بوده که پس از رفع ابهام جوابش عدد شده است.

$$f(-2) + 3 = 0 \rightarrow f(-2) = -3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) + 3}{h} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(-2+h)}{1} = f'(-2) = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2 \cdot f(x) \rightarrow y' = 2x \cdot f(x) + x^2 \cdot f'(x) \rightarrow y'(-2) = (-4)f(-2) + 4f'(-2)$$

$$\rightarrow y'(-2) = (-4)(-3) + 4\left(\frac{1}{2}\right) = 12 + 2 = 14$$

۶۵-۹-۲۶

۶۳. هر کدام از توابع fog و gof را تشکیل می‌دهیم:

$$(fog)(x) = \begin{cases} -1 & ; & 1 - x^2 < -1 \\ 1 - x^2 & ; & -1 \leq 1 - x^2 \leq 1 \\ 1 & ; & 1 - x^2 > 1 \end{cases} \Rightarrow fog(x) = \begin{cases} -1 & ; & x^2 > 2 \\ 1 - x^2 & ; & x^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (fog(x))' = \begin{cases} 0 & ; & x^2 > 2 \\ -2x & ; & x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow \text{این تابع در نقاط مرزی } \{\pm\sqrt{2}\} \text{ مشتق‌ناپذیر است.}$$

$$(gof)(x) = \begin{cases} 0 & ; & x < -1 \\ 1 - x^2 & ; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; & x > 1 \end{cases} \Rightarrow (gof(x))' = \begin{cases} -2x & ; & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \text{نقاط مشتق‌ناپذیر} = \{-1, 1\}$$

در مجموع ۴ نقطه مشتق‌ناپذیر در دو تابع وجود دارد.

۱۹-۴۹-۳۲

۶۴. گزینه ۲

$$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} - \{4\} | \frac{x+2}{x-4} \in \mathbb{R} - \{-3\}\}$$

$$D_{fog} = \mathbb{R} - \{4, \frac{5}{2}\}$$



پس تابع $f \circ g$ در $x = 4$ و $x = \frac{5}{2}$ مشتق پذیر نیست.

توجه: اگر ضابطه تابع $f \circ g$ را پیدا کنیم به همین نتیجه می‌رسیم.

۵۷-۱۵-۲۸

گزینه ۳

می‌دانیم:

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x)f'(g(x))$$

$$y = f(x + \sqrt{1+x^2}) \Rightarrow y' = \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) f'(x + \sqrt{1+x^2}) \quad (*)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x + \sqrt{1+x^2}) = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \xrightarrow{(*)} y' = \left(\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

۷۲-۶-۲۲

گزینه ۲

می‌دانیم:

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

$$y = f(xf(x)) \Rightarrow y' = (f(x) + xf'(x))f'(xf(x)) \Rightarrow y'(2) = (f(2) + 2f'(2))[f'(2f(2))] \quad (*)$$

$$f(2) = -\frac{1}{2}, \quad f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4}, \quad f'(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{(*)} y'(2) = \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)}_{-1} (f'(-1)) = (-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

۶۲-۱۰-۲۸

گزینه ۲

می‌دانیم:

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x^2 + 1}$$

می‌دانیم که عبارت $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ همان مشتق عبارت $f \circ g$ است؛ بنابراین داریم:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f(g(x)))' = \left(1 - \frac{3}{x}\right)' = \frac{3}{x^2}$$

۶۱-۷-۳۱

گزینه ۴ می‌دانیم: $(f \circ g)' = f'(g(x)) \times g'(x)$ پس ابتدا $g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)$ را حساب می‌کنیم:

$$g\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8} - 1}} = 2 \Rightarrow (f \circ g)' \left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) \cdot f'(2) \quad (*)$$

$$g(x) = (x^2 - 1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-\frac{4}{3}} \times 2x = \frac{-2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$$

$$\Rightarrow g'\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = \frac{-2 \times \frac{3}{\sqrt{8}}}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^4}} = \frac{-16}{\sqrt{2}} = -8\sqrt{2}$$

حال برای محاسبه $f'(2)$ ، در یک همسایگی $x = 2$ ضابطه f به صورت زیر است و داریم:

$$f(x) = (x^2)^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow f'(2) = 8$$

$$\xrightarrow{(*)} (f \circ g)' \left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right) = -8\sqrt{2} \times 8 = -64\sqrt{2}$$

۴۸-۳۵-۱۷

گزینه ۱

ابتدا تابع $f(x)$ و $g(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم و می‌دانیم:

$$y = g \circ f(x) \rightarrow y' = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

$$f(x) = 3x + |x| = \begin{cases} 4x & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \frac{3}{4}x + a|x| = \begin{cases} (\frac{3}{4} + a)x & x \geq 0 \\ (\frac{3}{4} - a)x & x < 0 \end{cases}$$

از آنجا که ضابطه‌های توابع f و g در $x = 0$ عوض می‌شود و مشتق‌پذیری تابع $g \circ f$ را در مبدأ مختصات خواسته است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(g \circ f)'(0) \Rightarrow \begin{cases} (g \circ f)'_+(0) = f'_+(0) \times g'(f(0^+)) = (4) \times (\frac{3}{4} + a) \\ (g \circ f)'_-(0) = f'_-(0) \times g'(f(0^-)) = (2) \times (\frac{3}{4} - a) \end{cases}$$

باید مشتق چپ و راست در $x = 0$ برابر باشند.

$$(g \circ f)'_-(0) = (g \circ f)'_+(0) \Rightarrow 3 + 4a = \frac{3}{2} - 2a \Rightarrow 6a = -\frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۷۴-۱۱-۱۶

گزینه ۲

می‌دانیم که عبارت $f'(x) \cdot g'(f(x))$ همان مشتق عبارت $g \circ f$ است، پس:

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1-x^2+x^2}{1-x^2}}} = x \Rightarrow (g(f(x)))' = 1$$

۷۱-۹-۲۰

گزینه ۳ چون f متناوب با دوره متناوب ۵ است، پس مشتق f نیز متناوب با دوره متناسب ۵ است، زیرا:

$$f(x+5) = f(x) \xrightarrow{\text{مشتق}} 1 \times f'(x+5) = f'(x) \Rightarrow f'(x+5) = f'(x)$$

حال مشتق تابع f را به دست می‌آوریم:

$$g(x) = f(x+1) + f(3x+10) \rightarrow g'(x) = f'(x+1) + 3f'(3x+10) \\ g'(-2) = f'(-2+1) + 3f'(-6+10) = f'(-1) + 3f'(4) \quad (1)$$

f' متناوب با دوره تناوب ۵ است، پس:

$$f'(4) = f'(4-5) = f'(-1) \xrightarrow{(1)} g'(-2) = 4f'(-1) = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

۴۰-۳۱-۲۹

گزینه ۴ می‌دانیم:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

ابتدا از تابع $g(x)$ در نقطه $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ مشتق می‌گیریم. دقت کنید تابع در این نقطه پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = (x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{3}{2}} \times 2x \Rightarrow g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} \times \sqrt{5} = -4\sqrt{5}$$

در قدم بعدی $g(x)$ را به ازای $x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-$ محاسبه می‌کنیم.

$$x \rightarrow \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^- \Rightarrow g(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^-}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^-} = 4^+$$

پس باید از تابع f به ازای $x \rightarrow 4^+$ مشتق بگیریم:

$$x \rightarrow 4^+ \Rightarrow [4^+] = 4 \Rightarrow f(x) = (2x)^2 = 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 8x \Rightarrow f'(4^+) = 32 = 8 \times 4$$

در نتیجه مقدار مشتق چپ تابع $f \circ g$ در $x = \frac{\sqrt{5}}{2}$ به صورت زیر می‌شود:

$$f'\left(g\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^-\right) \times g'\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 32 \times 4 \times (-4\sqrt{5}) = 8(-64\sqrt{5})$$

۸۳-۸-۹



گزینه ۳ ۷۳

$$g'(x) \times f'(g(x)) = (f \circ g)'(x)$$

$$x > 0 \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2x^5}, \quad x > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2x}}; \xrightarrow{x>0} (f \circ g)(x) = \frac{-1}{\sqrt[5]{2(\frac{1}{2x^5})}} \Rightarrow (f \circ g)(x) = -x$$

$$(f \circ g)'(x) = -1 \Rightarrow (f \circ g)'(\sqrt[5]{3}) = -1$$

۴۶-۳۹-۱۵

گزینه ۳ ۷۴

$$(f \circ g)'(-\sqrt[3]{2}) = g'(-\sqrt[3]{2}) \times f'(g(-\sqrt[3]{2})) \Rightarrow x = -\sqrt[3]{2} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}} \\ g(x) = \frac{1}{2x^3} \end{cases}$$

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1}{2x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{2}{2x^3}}} = x \Rightarrow (f \circ g)' = (x)' = 1$$

۸۵-۵-۱۰

۷۵ گزینه ۱ برای محاسبه طول نقاط max و min نسبی یک تابع پیوسته، ابتدا نقاط بحرانی را می‌یابیم و سپس مشتق تابع را در نقاط بحرانی تعیین علامت می‌کنیم در هر نقطه‌ای که علامت مشتق تابع از مثبت به منفی عوض شود آن نقطه طول max نسبی و اگر از منفی به مثبت عوض شود آن نقطه طول min نسبی است و برای محاسبه مقدار max و min نسبی، باید طول max یا min نسبی را در تابع اصلی قرار دهیم.

$$y = x^3 - 12x + 2 \rightarrow y' = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

x	-2	+2
y'	+	-
	↙	↘

max

$$f(2) = 8 - 24 + 2 = -14$$

۲۶-۲۲-۵۲

گزینه ۲ ۷۶

با توجه به فرض داریم:

$$f(x) = x + 1 + (g(x))^5 \Rightarrow f'(x) = 1 + 5g'(x) \cdot (g(x))^4 (*)$$

$$\xrightarrow{x=0} f'(0) = 1 + 5g'(0)(g(0))^4 \xrightarrow{f'(0)=g(0)=1} 1 = 1 + 5g'(0) \Rightarrow g'(0) = 0$$

حال از عبارت (*) مشتق می‌گیریم:

$$\Rightarrow f''(x) = 5g''(x)(g(x))^4 + 5g'(x)(4g'(x)(g(x))^3)$$

$$\xrightarrow{x=0} f''(0) = 5g''(0)(g(0))^4 + 5g'(0)(4g'(0)(g(0))^3) \xrightarrow{g'(0)=0} f''(0) = 5g''(0)(1)^4 + 20(0)^4(1)^3 = 5g''(0)$$

۶۴-۷-۲۹

گزینه ۲ ۷۷

می‌دانیم: $y = f(u) \rightarrow y' = u' \cdot f'(u)$

$$g'(x) = -2x \cdot f'(4 - x^2)$$

$$g''(x) = -2f'(4 - x^2) + 4x^2 \cdot f''(4 - x^2)$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{2}} g''(\sqrt{2}) = -2f'(1) + 12f''(1) = -2(-5) + 12(-1) = 10 - 12 = -2$$

۷۵-۴-۲۱

گزینه ۳ ۷۸

شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ باهم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\lambda}{ax + b} = \frac{\lambda}{2a + b} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + 6x) = -\lambda + 12 = \lambda \\ f(2) = -\lambda + 12 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda}{2a + b} = \lambda \Rightarrow 2a + b = 2$$

$$f'(2^+) = f'(2^-): \frac{-\lambda a}{(ax + b)^2} = -3x^2 + 6 \xrightarrow{x=2} \frac{-\lambda a}{(2a + b)^2} = -12 + 6$$

$$\frac{2a+b=2}{4} \rightarrow \frac{-8a}{4} = -6 \Rightarrow -8a = -24 \Rightarrow a = 3, b = -4$$

۴۴-۲۵-۳۰

۷۹. گزینه ۴ چون $f'(1)$ موجود است، لذا f در $x=1$ پیوسته است و مشتق چپ و راست f در $x=1$ با هم برابرند، پس داریم:

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{(2x+6)^2} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b \\ f(1) = a+b \end{cases} \Rightarrow a+b=4 \quad (*)$$

$$\left. \begin{aligned} x > 1 : f(x) &= \sqrt[3]{(2x+6)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(2)}{3\sqrt[3]{2x+6}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{4}{3(2)} = \frac{2}{3} \\ x < 1 : f(x) &= ax+b \Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow f'_-(1) = a \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = \frac{10}{3}$$

۵۸-۱۰-۳۲

۸۰. گزینه ۲ شرط مشتق پذیری تابع f در $x=a$ آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (ax^2 + bx + 4) = 4a - 2b + 4 \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} (x^2 - x) = -8 + 2 = -6 \\ f(-2) = 4a - 2b + 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{پیوستگی}} 4a - 2b + 4 = -6 \Rightarrow 4a - 2b = -10 \quad (1)$$

از طرفی برای مشتق های چپ و راست تابع در $x=-2$ داریم:

$$f'_+(-2) = f'_-(-2) \Rightarrow 2ax + b = 3x^2 - 1 \Rightarrow -4a + b = 11 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(1) &\stackrel{\text{ضابطه بالا}}{=} a + b + 4 = -3 - 1 + 4 = 0 \\ &\xrightarrow{(1),(2)} a = -3, b = -1 \end{aligned}$$

۵۶-۹-۳۵

۸۱. گزینه ۱ چون تابع در $x=1$ مشتق پذیر است. لذا تابع f در نقطه $x=1$ پیوسته خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \stackrel{\text{ضابطه ی بالا}}{=} 0 \Rightarrow f(1) = a = 0$$

۴۴-۸-۴۸

۸۲. گزینه ۲ شرط اینکه تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد آن است که تابع f در $x=a$ پیوسته باشد و مشتق های راست و چپ تابع f در $x=a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x^2 + ax + b) = -4 + 2a + b \\ f(2) = 1 \end{cases}$$

پس $2a + b = 5$ و در نتیجه $-4 + 2a + b = 1$ است.

$$f'(2^+) = f'(2^-) : \frac{-1}{(x-1)^2} \stackrel{x=2}{=} -2x + a \rightarrow -1 = -4 + a \Rightarrow a = 3$$

$$\frac{2a+b=5}{\rightarrow} 6 + b = 5 \Rightarrow b = -1$$

۳۰-۳۵-۳۶

۸۳. گزینه ۴ در یک همسایگی راست $x = \sqrt{2}$ ضابطه تابع f به صورت زیر به دست می آید:

$$x > \sqrt{2} \Rightarrow 2x^2 > 4 \Rightarrow [2x^2] = 4 \Rightarrow f(x) = x^3 - 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4$$

حال با جایگذاری $x = \sqrt{2}$ داریم:

$$f'_+(\sqrt{2}) = 3 \times 2 - 4 = 2$$

۵۷-۸-۳۵



گزینه ۳

۸۴

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - \frac{1}{x}) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b \Rightarrow 1 + a + b = 0 \\ f(1) = 1 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست و چپ: } f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} = 2x + a \rightarrow 1 + 1 = 2 + a \rightarrow a = 0, b = -1$$

$$\text{پس } f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ x^2 - 1 & x < 1 \end{cases} \text{ می‌باشد.}$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 1 = 1 + 2 - 2\sqrt{2} - 1 = 2 - 2\sqrt{2}$$

۵۷-۹-۳۴

گزینه ۲

۸۵

شرط مشتق پذیری تابع f در $x = a$ آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\text{شرط پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2\sqrt{4x-3} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax^2 + bx) = a + b \Rightarrow a + b = 2 \quad (I) \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

$$\text{تساوی مشتق‌های راست و چپ: } f'_+(1) = f'_-(1) \rightarrow 2 \times \frac{4}{2\sqrt{4x-3}} = 3ax^2 + b \rightarrow 4 = 3a + b \quad (II)$$

از I و II جواب $a = 1$ و $b = 1$ بدست می‌آید.

۶۰-۸-۳۲

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases} \text{ به‌ازای } x < 2 \text{ داخل قدرمطلق منفی است، پس:}$$

گزینه ۱

۸۶

شرط مشتق‌پذیر بودن تابع f در $x = a$ آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع f در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$x = 2 \text{ در پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (\frac{1}{2}x^2 + ax + b) = 2 + 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - x^2) = 4 - 4 = 0 \Rightarrow 2 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -2 \\ f(2) = 2 + 2a + b \end{cases}$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow x + a = 2 - 2x \rightarrow 2 + a = 2 - 4 \rightarrow a = -4, b = 6$$

پس $a + b = 2$ است.

۶۶-۶-۲۸

گزینه ۳

۸۷

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & x \geq k \\ 2ax + b & x < k \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2ax + b & x \geq k \\ 2a & x < k \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} (1) \text{ شرط پیوستگی: } ak^2 + bk + c &= 2ak + b \\ (2) \text{ شرط مشتق‌پذیری: } 2ak + b &= 2a \end{aligned} \right\} \Rightarrow ak^2 + bk + c = 2a$$

$$\xrightarrow{b=2a-2ak} ak^2 + (2a-2ak)k + a - (2a-2ak) = 2a$$

$$\xrightarrow{c=a-b} ak^2 + 2ak - 2ak^2 + a - 2a + 2ak = 2a \Rightarrow -ak^2 + 4ak - 3a = 0 \xrightarrow{\div(-a)} k^2 - 4k + 3 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر}} \begin{cases} k = 1 \\ k = 3(\max) \end{cases}$$

۴۹-۳۴-۱۷

شرط اینکه تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آن است که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ آن در $x = a$ با هم برابر باشند.

گزینه ۳

۸۸

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} (-\frac{1}{x}x^2 + bx + c) = -2 - 2b + c \\ \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \sqrt{5-2x} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow -2 - 2b + c = 3 \\ f(-2) = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3 \end{cases}$$

$$f'((-2)^+) = f'((-2)^-) \rightarrow -x + b = \frac{1(-2)}{2\sqrt{5-2x}} \rightarrow 2 + b = \frac{-2}{6} \rightarrow 12 + 6b = -2 \rightarrow 6b = -14 \rightarrow b = \frac{-7}{3} \xrightarrow{-2b+c=5} \frac{14}{3} + c = 5 \rightarrow c = \frac{1}{3}$$

۳۰-۳۷-۳۴

۸۹ گزینه ۳ می‌دانیم در تابع $f(x) = g(x)|x-a|$ به شرطی که ریشه $g(x)$ نباشد نقطه گوشه برای تابع $f(x)$ است. بنابراین در تابع $y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+3}}$ گوشه $x=1$ است.

$$y = |x-1| \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+3}} \right) \Rightarrow \begin{cases} y'(1^+) = \frac{1}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \\ y'(1^-) = \frac{-1}{\sqrt{x^2+3}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\tan \theta = \frac{|m_1 - m_2|}{1 + m_1 m_2} = \frac{\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right|}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

۸۰-۵-۱۵

۹۰ گزینه ۴ هر عددی که داخل براکت را صحیح کند تابع در آن ناپیوسته است و مشتق ندارد مگر آنکه آن عدد طول مینیمم نسبی تابع داخل براکت باشد. توجه کنیم که تابع $\frac{1}{x}$ مینیمم نسبی ندارد.

$$\frac{1}{x} = k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{1}{k} \quad \text{نقاط ناپیوستگی} = \left\{ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$

حال اگر $x < -1$ آنگاه $0 < \frac{1}{x} < -1$ است، پس تابع f در این بازه پیوسته و مشتق پذیر است.

۵۱-۲۳-۲۵

۹۱ گزینه ۱ ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه مرزی $x=2$ بررسی می‌کنیم و نیز می‌دانیم به ازای $x < 2$ داریم: $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ پس:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 + ax + b & x \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 2 \Rightarrow f(2^-) = 4 - 4 = 0 \\ x > 2 \Rightarrow f(2^+) = 2 + 2a + b \end{cases} \Rightarrow \boxed{2a + b = -2} \quad (1)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - 2x & x < 2 \\ x + a & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_-(2) = -2 \\ f'_+(2) = 2 + a \end{cases} \xrightarrow{(1)} \begin{cases} 2 + a = -2 \Rightarrow a = -4 \\ b = 6 \end{cases}$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = 2$$

۲۲-۴۳-۳۴

۹۲ گزینه ۲ برای مشتق پذیری در یک نقطه، تابع باید در آن نقطه پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ، در آن نقطه با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{3}{x} - 5 \right) = 3 - 5 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b \\ f(1) &= 3 - 5 = -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 + a + b = -2 \Rightarrow a + b = -3$$

$$\left. \begin{aligned} f'_+(1) &= -\frac{3}{x^2} = -3 \\ f'_-(1) &= 2x + a = 2 + a \end{aligned} \right\} \rightarrow 2 + a = -3 \rightarrow a = -5, b = 2$$

۵۶-۱۰-۳۴

$$f(x) = x\sqrt{x^2} = x|x|$$

در $x=0$ پیوسته است.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = 0 \\ f'_-(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{مشتق پذیر}$$

۴۲-۱۹-۳۹



۹۴ گزینه ۴ می‌دانیم تابع $y_1 = \frac{2\sqrt{x}}{x}$ روی بازه $(1, +\infty)$ و تابع $y_2 = ax^2 + bx$ روی بازه $(-\infty, 1)$ مشتق‌پذیر می‌باشد. برای اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد، لازم است که تابع f در $x = 1$ مشتق‌پذیر باشد. داریم:

(الف) شرط پیوستگی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow a + b = 2 \quad (I)$$

(ب) شرط برابری مشتق چپ و راست:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x\sqrt{x}} & ; x \geq 1 \\ 2ax + b & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(1) = -1 \\ f'_-(1) = 2a + b \end{cases} \Rightarrow -1 = 2a + b \quad (II)$$

(I), (II) $\Rightarrow a = -3, b = 5$

۶۴-۱۱-۲۶

۹۵ گزینه ۳

به دلیل وجود قدرمطلق ابتدا تابع $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{1-x}, & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, & x > 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & x < 0 \end{cases}$$

با توجه به ضابطه‌ی مشتق تابع f ، این تابع تنها در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است.

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \frac{1}{2} \\ f'_-(0) = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) - f'_-(0) = \frac{1}{2} - (-\frac{1}{2}) = 1$$

۶۸-۹-۲۳

۹۶ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 5x + b & x \leq 2 \\ 2ax + 5 & x > 2 \end{cases}$$

شرط مشتق‌پذیر بودن تابع f در $x = a$ آن است که تابع در $x = a$ پیوسته باشد و مشتق‌های راست و چپ تابع در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\text{پیوستگی: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4a + 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4a + 10 + b \end{cases} \rightarrow 4a + 10 + b = 4a + 5 \rightarrow b = -5$$

$$f(2) = 4a + 10 + b$$

$$f'(2^+) = f'(2^-) \rightarrow 2a = 2ax + 5 \rightarrow 2a = 4a + 5 \rightarrow a = -\frac{5}{2}$$

$$\text{پس } a + b = -\frac{5}{2} - 5 = -\frac{15}{2}$$

۳۱-۳۷-۲۲

۹۷ گزینه ۳

$x = 0$ ریشه‌ی درون قدرمطلق و نقطه زاویه‌دار تابع است.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+a) - 0}{x - 0} = a$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x(x+a) - 0}{x} = -a$$

چون دو خط بر هم عمودند بنابراین باید حاصل ضرب شیب‌ها عدد -1 شود، پس:

$$mm' = -1 \Rightarrow -a^2 = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

۶۹-۶-۲۵

۹۸ گزینه ۳

$$f(x) = 1 - |x| \Rightarrow f(f(x)) = 1 - |f(x)| = 1 - |1 - |x||$$

ابتدا تابع $y = f(f(x))$ را تشکیل می‌دهیم.

و می‌دانیم که توابع قدرمطلق به‌ازای ریشه‌های ساده داخل قدرمطلق مشتق ندارند.

در سه نقطه مشتق‌ناپذیر است.

$$y = 1 - |1 - \underbrace{|x|}_{x=0}| \Rightarrow 1 - |x| = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

۶۵-۱۲-۲۳

$$f(x) = \frac{|x^3 - 2x|}{x}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

ریشه‌های ساده قدرمطلق نقاط مشتق‌ناپذیر است، پس داریم:

$$x^3 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

بنابراین تابع در دو نقطه $x = \pm\sqrt{2}$ مشتق‌ناپذیر است.

۳۱-۴۱-۲۸

گزینه ۳ ابتدا شرط لازم برای مشتق‌پذیری (پیوستگی) را بررسی می‌کنیم.

$$f(0) = 0 + 1 = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \text{در } x = 0 \text{ پیوسته است}$$

$$f(1) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 \quad \text{در } x = 1 \text{ ناپیوسته است}$$

$$f(2) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 6 \quad \text{در } x = 2 \text{ پیوسته است}$$

پس تابع f در نقطه $x_0 = 1$ ناپیوسته است. حال باید مشتق‌پذیری تابع را در نقاط مرزی $x = 0$ ، $x = 2$ بررسی کنیم.

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \\ 2x & x > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = 1, f'_-(0) = 0 \\ f'_-(2) = 2, f'_+(2) = 4 \end{cases}$$

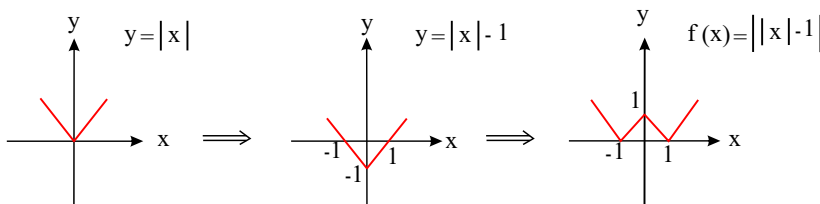
f در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ و $x = 2$ مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۵۸-۱۶-۲۶

گزینه ۴ راه اول: کلیه توابع قدرمطلق به‌ازای ریشه‌های ساده قدرمطلق مشتق‌ناپذیرند.

$$f(x) = ||x| - 1| \Rightarrow \begin{cases} |x| = 0 \Rightarrow x = 0 \\ |x| - 1 = 0 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases} \quad \text{در سه نقطه مشتق‌ناپذیرند}$$

به کمک رسم تابع $f(x)$ خواهیم داشت:



در نتیجه تابع در سه نقطه‌ی $x = -1$ ، $x = 0$ ، و $x = 1$ مشتق‌ناپذیر می‌باشد.

۴۹-۱۷-۳۴

گزینه ۲ با توجه به اینکه تابع داده‌شده مجموع دو تابع $y_1 = [x]$ و $y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right]$ می‌باشد، ابتدا نقاط مشتق‌ناپذیر دو تابع اخیر را در بازه $(0, 3)$ مشخص می‌کنیم. با

توجه به ساختار توابع y_1 و y_2 ، نقاط ناپیوستگی این دو تابع، همان نقاط مشتق‌ناپذیرشان هم هست:

$$y_1 = [x] \Rightarrow x = k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{x \in (0,3)} x = 1, 2$$

$$y_2 = \left[x + \frac{1}{3}\right] \Rightarrow x + \frac{1}{3} = k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k - \frac{1}{3} \xrightarrow{x \in (0,3)} x = \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}$$

y_2 در این سه نقطه ناپیوسته ولی y_1 در آن‌ها پیوسته است.

در هریک از نقاط به طول $\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{3}$ و $\frac{8}{3}$ یکی از دو تابع y_1 و y_2 پیوسته و دیگری ناپیوسته است. بنابراین تابع $f(x) = y_1 + y_2$ در هریک از این پنج نقطه ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر

است.

۶۸-۱۰-۲۲

گزینه ۲ ۱۰۳

$$f(x) = (2x + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{آهنگ متوسط از } ۱۲ \text{ تا } ۴ &= \frac{f(12) - f(4)}{12 - 4} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{3}}{8} = \frac{-\frac{2}{15}}{8} = -\frac{1}{60} \\ \text{آهنگ لحظه‌ای} &= \frac{-\frac{1}{2}}{2x + 1} \Big|_{x=4} = \frac{-\frac{1}{2}}{9} = -\frac{1}{18} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{1}{60} - \left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{11}{540}$$



۶۳-۵-۳۲

گزینه ۲ تابع داده شده $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ است.

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [1, 4] = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{(\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{1} - \frac{1}{4}) - (\frac{1}{2} - 1)}{3} = \frac{\frac{31}{4} + \frac{1}{2}}{3} = \frac{11}{4}$$

$$x = 2 \text{ آهنگ تغییر لحظه‌ای در } x = 2 \Rightarrow f'(2) = x + \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(2) = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

اختلاف این دو $\frac{11}{4} - \frac{9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ است.

۲۹-۲۱-۵۰

گزینه ۱ وقتی x اولیه، یک می‌باشد و نمو متغیر x است پس ثانویه $1, 21$ است.

$$\text{آهنگ متوسط } [1, 1, 21] = \frac{f(1, 21) - f(1)}{1, 21 - 1} = \frac{\sqrt{1, 21} - \sqrt{1}}{0, 21} = \frac{1, 1 - 1}{0, 21} = \frac{1, 0}{0, 21} = \frac{10}{21}$$

$$x = 1 \text{ آهنگ لحظه‌ای در } x = 1 \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

بنابراین تفاضل آنها $\frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$ است.

۷۰-۶-۲۴

گزینه ۳

$$\frac{f(2+h) - f(2)}{2+h-2} = \frac{2+h + \frac{1}{2+h} - 2 - \frac{1}{2}}{h} = \frac{h}{h} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2+h = 2 \Rightarrow h = 0$$

$$h = \frac{9}{2} - \frac{9}{2+h} \Rightarrow h = \frac{18 + 9h - 18}{2(2+h)} \Rightarrow 1 = \frac{9}{2(2+h)} \Rightarrow 4 + 2h = 9 \Rightarrow h = \frac{5}{2} = 2, 5$$

۷۰-۶-۲۵

گزینه ۴

$$\text{آهنگ تغییر متوسط} = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{12 - 2}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = f'(x) = \sqrt{4x+1} + \frac{4}{2\sqrt{4x+1}}(x+2) \Rightarrow f'(\frac{3}{4}) = 2 + \frac{11}{4} = \frac{19}{4} = 4, 75$$

پس $4, 75 - 4, 5 = 0, 25$ است.

۴۸-۶-۴۶

گزینه ۴ وقتی x اولیه، یک می‌شود و نمو متغیر x است پس ثانویه $1, 44$ است.

$$\text{آهنگ متوسط در } [1, 1, 44] = \frac{f(1, 44) - f(1)}{1, 44 - 1} = \frac{\frac{1, 44 - 1}{\sqrt{1, 44}} - 0}{0, 44} = \frac{0, 44}{0, 44} = \frac{0, 44}{0, 44} = \frac{440}{528} = \frac{5}{6}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{1(\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

بنابراین تفاضل آن دو $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ می‌شود.

۷۱-۷-۲۲

گزینه ۳ با توجه به اینکه آهنگ لحظه‌ای تغییر f در $x = 2$ برابر $-\frac{3}{2}$ است، در نتیجه $f'(2) = -\frac{3}{2}$ می‌باشد.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2+h)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = -f'(2) = -(-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}$$

۵۱-۱۲-۳۷

گزینه ۲ ۱۱۰

$$f(x) = \sqrt{2x+1} + \frac{1}{x+1} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 + 1 = 2 \\ f(4) = 3 + \frac{1}{5} = 3,2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{آهنگ تغییر متوسط تابع در } [0, 4] = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{3,2 - 2}{4} = \frac{1,2}{4} = 0,3$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر همان مشتق است:

$$f'(x) = \frac{1(2)}{2\sqrt{2x+1}} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3+1}} - \frac{1}{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{4}{25} = \frac{25-8}{50} = \frac{17}{50} = 0,34$$

بنابراین تفاضل آن‌ها برابر $0,34 - 0,3 = 0,04$ است.

۳۴ - ۳۹ - ۲۶

گزینه ۲ ۱۱۱

آهنگ لحظه‌ای تابع $y = f(x)$ در $x = a$ برابر $f'(a)$ است.

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(25) - f(4)}{25 - 4} = \frac{5 - 2}{21} = \frac{1}{7} \quad \text{و} \quad \text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{7} \Rightarrow \frac{1}{4a} = \frac{1}{49} \Rightarrow 4a = 49 \Rightarrow a = 12,25$$

۴۳ - ۸ - ۵۰

گزینه ۲ ۱۱۲

$$\frac{f(9) - f(5)}{9 - 5} = \frac{\sqrt{81 + 144} - \sqrt{25 + 144}}{9 - 5} = \frac{\sqrt{225} - \sqrt{169}}{4} = \frac{15 - 13}{4} = \frac{1}{2}$$

۴۵ - ۴ - ۵۰

گزینه ۴ ۱۱۳

از آن‌جا که مساحت دایره برابر $S = \pi r^2$ است و آهنگ آنی تغییر S نسبت به شعاع برابر مشتق S نسبت به r است، لذا داریم:

$$S = \pi r^2 \rightarrow \frac{dS}{dr} = 2\pi r \stackrel{r=10}{=} 20\pi$$

۳۷ - ۱۸ - ۴۵

گزینه ۴ ۱۱۴

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{4 - 9}{1} = -5$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{-72x}{x^4} = \frac{-72}{x^3} \stackrel{x=\sqrt[3]{12}}{=} \frac{-72}{12} = -6$$

پس آهنگ متوسط یک واحد از آهنگ آنی بیشتر است.

۳۲ - ۷ - ۶۲

گزینه ۱ ۱۱۵ فاصله‌ی نقطه‌ی M تا مبدأ مختصات از رابطه‌ی $\sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید و می‌دانیم آهنگ لحظه‌ای همان مشتق است.

$$T = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (\sqrt{x+8})^2} = \sqrt{x^2 + x + 8}$$

$$\rightarrow T'_x = \frac{1(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x+8}} \stackrel{x=7}{=} \frac{15}{2\sqrt{64}} = \frac{15}{16}$$

۱۶ - ۵ - ۷۹

گزینه ۱ ۱۱۶

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{5 - 4}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} \Rightarrow f'(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$



بنابراین تفاضل آهنگ متوسط و لحظه‌ای، برابر صفر است.

۴۴-۹-۴۷

گزینه ۳ ۱۱۷

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2.02) - f(2)}{2.02 - 2} = \frac{\frac{2.02}{2.02-1} - 2}{0.02} = \frac{\frac{2.02}{1.02} - 2}{0.02} = \frac{\frac{1.02}{1.02} - 2}{\frac{2}{100}} = \frac{50}{51}$$

$$x = 2 \text{ در } f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -1$$

$$\text{پس: } -\frac{50}{51} - (-1) = -\frac{50}{51} + 1 = \frac{1}{51}$$

۷۹-۶-۱۵

گزینه ۳ ۱۱۸

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{\frac{5}{4} - 2}{3} = \frac{5 - 8}{12} = \frac{-3}{12} = \frac{-1}{4}$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \xrightarrow[x=\alpha]{\text{آهنگ لحظه‌ای}} f'(\alpha) = \frac{-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{-1}{4} = \frac{-1}{(\alpha-1)^2} \Rightarrow (\alpha-1)^2 = 4$$

$$\alpha - 1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 + 1 = 3 \\ \alpha = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

۶۵-۷-۲۹

گزینه ۴ ۱۱۹

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [5, 6] = \frac{f(6) - f(5)}{6 - 5} = \frac{\sqrt{21 - 36 + 24} - \sqrt{21 - 25 + 20}}{1} = 3 - 4 = -1$$

$$\text{آهنگ تغییر لحظه‌ای} = y' = \frac{1(-2x+4)}{2\sqrt{21-x^2+4x}} = \frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}}$$

$$\xrightarrow{\text{برابری}} \frac{-x+2}{\sqrt{21-x^2+4x}} = -1 \Rightarrow -x+2 = -\sqrt{21-x^2+4x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} x^2 + 4 - 4x = 21 - x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 8x - 17 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

اما $x = 2 - \frac{5}{2}\sqrt{2}$ در معادله صدق می‌کند.

۷۱-۶-۲۳

گزینه ۴ ۱۲۰

$$x = a + \frac{h}{2} \xrightarrow{\text{مشتق}} 6x + 4 \rightarrow 6\left(a + \frac{h}{2}\right) + 4 = 6a + 3h + 4$$

$$\text{آهنگ متوسط از } a \text{ تا } a+h = \frac{f(a+h) - f(a)}{a+h-a} = \frac{3(a+h)^2 + 4(a+h) - 2 - 3a^2 + 4a - 2}{h}$$

$$= \frac{6ah + 3h^2 + 4h}{h} = 6a + 3h + 4$$

واضح است تفاضل این دو مقدار برابر صفر است.

روش دوم: در تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ آهنگ متوسط در هر بازه با مشتق تابع در وسط آن بازه برابر است. در تابع درجه‌ی دوم داده شده آهنگ متوسط در بازه‌ی $[a, a+h]$ با آهنگ لحظه‌ای در وسط این بازه $\left(a + \frac{h}{2}\right) \frac{a+a+h}{2}$ برابر است و تفاضل آن‌ها صفر است.

۷۱-۷-۲۳

گزینه ۱ ۱۲۱

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(2,56) - f(2,25)}{2,56 - 2,25} = \frac{\sqrt{2,56} - \sqrt{2,25}}{2,56 - 2,25} = \frac{1,6 - 1,5}{0,31} = \frac{0,1}{0,31} = \frac{10}{31}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(2,25) = \frac{1}{2 \times 1,5} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{10}{31} = \frac{1}{93}$$

۶۰-۳۴

گزینه ۱ ۱۲۲

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(6,25) - f(4)}{6,25 - 4} = \frac{\sqrt{6,25} - \sqrt{4}}{2,25} = \frac{2,5 - 2}{2,25} = \frac{0,5}{2,25} = \frac{2}{9}$$

$$\text{آهنگ لحظه‌ای} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

پس تفاضل آنها $\frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}$ می‌شود.

۵۳-۵۴۱

گزینه ۴ ۱۲۳

$$\text{آهنگ متوسط تغییر از } x \text{ تا } x + \Delta x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Big|_{x=3, \Delta x=0,1} = \frac{f(3,1) - f(3)}{0,1}$$

$$= \frac{(3,1)^3 - 3^3}{0,1} = \frac{29,791 - 27}{0,1} = 27,91$$

$$x = 3 \text{ آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در } x = 3 = f'(3) = 3x^2 \Big|_{x=3} = 27$$

بنابراین تفاضل آنها می‌شود $27,91 - 27 = 0,91$ است.

۷۵-۶۱۹

گزینه ۱ ۱۲۴ همانگونه که می‌دانیم آهنگ آنی تغییر تابع f در نقطه‌ی $t = 4$ برابر با مشتق تابع در این نقطه است. پس داریم:

$$f'(t) = -\frac{240}{t^2} \Rightarrow f'(4) = -\frac{240}{16} = -15$$

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{\frac{240}{5} - \frac{240}{3}}{2} = \frac{48 - 80}{2} = -16$$

پس آهنگ آنی یک واحد از آهنگ متوسط بیشتر است.

۵۸-۴۳۷

گزینه ۱ ۱۲۵ آهنگ تغییر متوسط دو تابع داده‌شده در بازه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ را می‌یابیم.

$$y = \sin x \cos 2x \Rightarrow \frac{y(\frac{\pi}{2}) - y(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2} \cos \pi - \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1 \times (-1) - 0}{\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}$$

$$y = \sin^2 x - \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = \sin^2 x - \cos^2 x = -\cos 2x$$

$$\frac{y(\frac{\pi}{2}) - y(\frac{\pi}{4})}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{-(-1) + 0}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{\pi}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{-\frac{4}{\pi}}{\frac{4}{\pi}} = -1$$

۷۰-۷-۲۴

گزینه ۳ ۱۲۶

$$\text{آهنگ تغییر متوسط در } [-1, 0] \Rightarrow \frac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \frac{1 - (\lambda(1 - a))}{1} = \lambda a - \gamma = -11$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{\gamma}$$

آهنگ لحظه‌ای تغییر در $x = 1$ برای تابع $f(x) = (x^2 + 1)^3 \left(-\frac{x}{2} + 1\right)$ مورد نظر است:



$$f'(x) = 3(2x)(x^2 + 1)^2 \left(-\frac{x}{2} + 1\right) - \frac{1}{2}(x^2 + 1)^2$$

$$\Rightarrow f'(1) = 3 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} - 4 = 12 - 4 = 8$$

۳۰ - ۳۹ - ۳۱



پاسخنامه کلیدی

۱	۳	۲۷	۱	۵۳	۱	۷۹	۴	۱۰۵	۱
۲	۱	۲۸	۲	۵۴	۱	۸۰	۲	۱۰۶	۳
۳	۲	۲۹	۱	۵۵	۱	۸۱	۱	۱۰۷	۴
۴	۳	۳۰	۴	۵۶	۲	۸۲	۲	۱۰۸	۴
۵	۴	۳۱	۱	۵۷	۳	۸۳	۴	۱۰۹	۳
۶	۳	۳۲	۴	۵۸	۴	۸۴	۳	۱۱۰	۲
۷	۲	۳۳	۴	۵۹	۱	۸۵	۲	۱۱۱	۲
۸	۲	۳۴	۲	۶۰	۳	۸۶	۱	۱۱۲	۲
۹	۱	۳۵	۴	۶۱	۱	۸۷	۳	۱۱۳	۴
۱۰	۱	۳۶	۱	۶۲	۴	۸۸	۳	۱۱۴	۴
۱۱	۳	۳۷	۳	۶۳	۳	۸۹	۳	۱۱۵	۱
۱۲	۱	۳۸	۲	۶۴	۲	۹۰	۴	۱۱۶	۱
۱۳	۴	۳۹	۲	۶۵	۳	۹۱	۱	۱۱۷	۳
۱۴	۴	۴۰	۳	۶۶	۲	۹۲	۲	۱۱۸	۳
۱۵	۱	۴۱	۳	۶۷	۲	۹۳	۱	۱۱۹	۴
۱۶	۴	۴۲	۲	۶۸	۴	۹۴	۴	۱۲۰	۴
۱۷	۳	۴۳	۴	۶۹	۱	۹۵	۳	۱۲۱	۱
۱۸	۴	۴۴	۱	۷۰	۲	۹۶	۱	۱۲۲	۱
۱۹	۲	۴۵	۴	۷۱	۳	۹۷	۳	۱۲۳	۴
۲۰	۴	۴۶	۴	۷۲	۴	۹۸	۳	۱۲۴	۱
۲۱	۳	۴۷	۳	۷۳	۳	۹۹	۲	۱۲۵	۱
۲۲	۲	۴۸	۴	۷۴	۳	۱۰۰	۳	۱۲۶	۳
۲۳	۳	۴۹	۴	۷۵	۱	۱۰۱	۴		
۲۴	۳	۵۰	۲	۷۶	۲	۱۰۲	۴		
۲۵	۲	۵۱	۱	۷۷	۲	۱۰۳	۲		
۲۶	۳	۵۲	۴	۷۸	۳	۱۰۴	۲		