

نوتروکرانچ

کاربرد مشتق - رشته تجربی



یه گاز بزنی، یه فصل کنکور می پره!

 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com



کارخونه رتبه برتر سازی، نوتروفیل!



نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



رتبه ۲



محمد علی موسی پور

تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۶۸



منیره زمانی

رتبه ۴۸



محمد حسین هاشمی

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۹۵



سید حسین تقوی

رتبه ۱۳۴



امیر محمد ملک شاهی

رتبه ۱۱۲



امیر محمد شریفی کلوری

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۵۷۵



هانیه گنجعلی

رتبه ۵۰۹



علیرضا شهنساری

رتبه ۴۲۸



مهدیه اسدی ارزنده

رتبه ۳۵۷



فاطمه مروت بلسی

رتبه ۶۶۸



فائزه حیدری دهکردی

رتبه ۶۳۹



هلیا رضایی

رتبه ۶۲۷



فریما آقا پور

رتبه ۶۰۳



ریحانه فلاح امینی

رتبه ۸۸۱



حلما ناصری

رتبه ۸۰۵



لعیا زنگنه قاسم آبادی

رتبه ۷۹۳



سارینا تقی زاده

رتبه ۶۷۴



علی اسدی

رتبه ۱۰۲۰



مهسا پیری

رتبه ۱۰۲۰



سارا دهقان

رتبه ۹۹۵



جواد فلاحتی

رتبه ۹۱۴



کیانا شیرین فر

رتبه ۱۱۲۵



سمیرا تباوار

رتبه ۱۱۱۱



رضا نصیری مدیسه

رتبه ۱۰۴۹



محمد خرم آبادی

رتبه ۱۰۲۴



ژینو نادری

رتبه ۱۲۶۷



مهدی آزادبخت

رتبه ۱۲۲۵



سید مهدی حیات غیبی

رتبه ۱۲۲۵



مهدی فیض زاده

رتبه ۱۲۰۴



یکتا سلیمانی پور

رتبه ۱۴۰۹



غزل قبادی

رتبه ۱۳۱۶



یسری ابوالمحمدی مله

رتبه ۱۳۰۶



مهتاب کامل

رتبه ۱۲۷۲



نرگس جوانی

رتبه ۱۵۹۸



محمد رضا دادپور

رتبه ۱۵۸۷



مهدی تیموری

رتبه ۱۴۳۹



ریحانه جعفری خیرخواه

رتبه ۱۴۱۶



زینب پارسا صفت

رتبه ۱۷۲۹



علی عزیززاده

رتبه ۱۷۲۹



علیرضا انصاری

رتبه ۱۶۶۹



مائده سادات حسینی

رتبه ۱۶۱۹



مehشید خانی

رتبه ۱۷۸۲



یاسین رئیسی زیدآبادی

رتبه ۱۷۷۶



علی عرب خانی

رتبه ۱۷۴۲



الهه فکاری



مشاوره کنکور نوتروفیل

سوالات کنکور کاربرد مشتق -

نوتروفیل بهار ۱۴۰۴

مناسب تمام کنکوری های

رشته تجربی



مرجع: سراسری- ۱۳۸۵

۱ نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^2(x-2)^2$ سه رأس یک مثلث اند. نوع این مثلث کدام است؟

۴ قائم الزاویه و متساوی الساقین

۳ فقط قائم الزاویه

۲ فقط متساوی الساقین

۱ متساوی الاضلاع

مرجع: سراسری- ۱۳۸۰

۲ نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2}$ در بازه $(-1, 1)$ کدام است؟

۴ $-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$

۳ $-\frac{\sqrt{2}}{4}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}$

۲ $-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}$

۱ $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$

مرجع: سراسری- ۱۳۸۵

۳ مجموعه ی طول های نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(x) = |x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۴ $\{\frac{2}{3}, 2\}$

۳ $\{0, 1\}$

۲ $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$

۱ $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$

مرجع: سراسری- ۱۳۸۲

۴ تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه ی $f(x) = |\sin x|$ در بازه ی $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

۴ ۵

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

مرجع: سراسری- ۱۳۸۳

۵ مجموعه ی طول های نقاط بحرانی تابع با ضابطه ی $f(x) = (x^2 - 28) \cdot \sqrt[3]{x}$ کدام است؟

۴ $\{-7, 0, 1\}$

۳ $\{-2, 0, 2\}$

۲ $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$

۱ $\{-2, 2\}$

مرجع: سراسری- ۱۳۹۰

۶ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x^3 - x|$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۸۵

۷ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = [x] \sin \pi x$ روی بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

۴ بی شمار

۳ ۶

۲ ۵

۱ ۴

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۸۷

۸ تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 1|$ و دامنه $(-2, 2)$ چند نقطه بحرانی دارد؟

۴ ۶

۳ ۵

۲ ۴

۱ ۳

مرجع: سراسری- ۱۳۸۵

۹ مجموعه ی طول های نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = |x-2|\sqrt[3]{x^2}$ کدام است؟

۴ $\{\frac{2}{3}, 2\}$

۳ $\{0, 1\}$

۲ $\{0, \frac{2}{3}, 2\}$

۱ $\{0, \frac{4}{5}, 2\}$

۱۰ نقاط بحرانی بر روی نمودار تابع $f(x) = (x-1)|x^2 + x - 2|$ سه رأس مثلثی هستند. مساحت این مثلث کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۲

۴ ۸

۳ ۶

۲ ۴, ۵

۱ ۴

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۰

۱۱ تعداد نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ بر روی دامنه خود، کدام است؟

۴ بی شمار

۳ ۲

۲ ۱

۱ صفر

مرجع: سراسری- ۱۳۸۲

۱۲ تعداد نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = |\sin x|$ بر بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ کدام است؟

۴ ۵

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۸۶

۱۳ نقطه بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}}$ روی بازه $(-1, 2)$ چگونه است؟

۴ مشتق ناپذیر

۳ عادی

۲ ماکسیم

۱ مینیم

مرجع: سراسری- ۱۳۹۵

۱۴ مقادیر مینیم و ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x$ در بازه $[-4, 3]$ ، کدام است؟

۴ ۲۷ و ۳۶

۳ ۲۷ و ۳۶

۲ ۲۷ و ۴۵

۱ ۲۴ و ۱۸

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۲

۱۵ کمترین مقدار تابع $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2$ کدام است؟

۴ -۱۸

۳ -۲۴

۲ -۳۲

۱ -۳۶





۱۶ به ازای کدام مقدار k ، بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ در بازه $[1, 3]$ قرینه‌ی یکدیگرند؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۷ ماکسیمم تابع $y = -|x|$ در فاصله‌ی $[-1, 1]$ چقدر است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۷۲

۱ (۱) ۰ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) ۱ (۴)

۱۸ می‌نیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ روی بازه‌ی $[-1, 3]$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

۱ (۱) $-\frac{11}{3}$ (۲) $-\frac{10}{3}$ (۳) $-\frac{8}{3}$ (۴) $-\frac{7}{3}$

۱۹ کمترین مقدار تابع با ضابطه‌ی $f(x) = 1 - \cos^2 x - \sin x$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

۱ (۱) -۱ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) صفر

۲۰ با شرط $x \leq 1$ در تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x^3 - 3x$ ، بیشترین مقدار $g \circ f$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۱ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴) ۳۰

۲۱ فاصله‌ی نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ ، از خط مجانب قائم آن کدام است؟

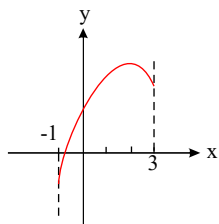
مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱ (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{3}{2}$ (۳) ۲ (۴)

۲۲ شکل زیر، نمودار تابع $y = x + \sqrt{-x^2 + ax + b}$ است، مقدار ماکسیمم مطلق تابع کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۱ (۱) $1 + \sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $1 + 2\sqrt{2}$ (۴) ۴



۲۳ حاصل ضرب بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x}$ برابر $\sqrt{12}$ است. اگر $a > 0$ باشد، مقدار $[a]$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱ (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) ۶ (۴) ۱۲

۲۴ تابع f در نقطه‌ی c دارای مینیمم مطلق است و مشتق راست دارد. الزاماً این مشتق چگونه است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۱ (۱) مثبت (۲) منفی (۳) نامنفی (۴) نامثبت

۲۵ ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5}$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۵

۱ (۱) $\frac{1}{6}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۲۶ مینیمم مطلق تابع با ضابطه‌ی $f(x) = x - \sqrt{x^3 - 3x^2}$ بر روی $\mathbb{R}$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۱ (۱) -۱ (۲) صفر (۳) $-\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{3}$

۲۷ اگر $f(x) = \max \left\{ x^2, \left| x - \frac{3}{4} \right| \right\}$ باشد، کمترین مقدار تابع $f(x)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

۱ (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۳) $\frac{4}{9}$ (۴) $\frac{1}{2}$





مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۲۸ کمترین مقدار تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{x^2 - x^3}$ کدام است؟

۴ صفر

۳ $-\frac{1}{3}$

۲ $-\frac{1}{6}$

۱ $-\frac{1}{9}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۲۹ ماکسیمم مطلق تابع با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt{x^3 - x^2}$ کدام است؟

۴ فاقد ماکسیمم

۳ $\frac{2}{3}$

۲ $\frac{1}{3}$

۱ صفر

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۳۰ اگر $f(x) = \max\{|2x|, |x+1|\}$ آنگاه مینیمم تابع $f(x)$ کدام است؟

۴ ۲

۳ $\frac{4}{3}$

۲ $\frac{2}{3}$

۱ $\frac{1}{3}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

۳۱ ماکسیمم تابع با ضابطه $f(x) = -|x| \cos x$ در بازه $[-1, 1]$ کدام است؟

۴ ۱

۳ $\cos 1$

۲ $\frac{1}{2}$

۱ صفر

۳۲ از میان مثلث‌هایی که مجموع طول قاعده و ارتفاع وارد بر آن ۱۶ سانتی‌متر است، مثلی را اختیار کرده‌ایم که مساحت آن ماکسیمم است.

مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

مساحت این مثلث چند سانتی‌متر مربع است؟

۴ ۳۶

۳ ۳۴

۲ ۳۲

۱ ۳۰

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

۳۳ کم‌ترین فاصله نقطه $(4, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 9}$ کدام است؟

۴ ۴

۳ ۳

۲ $2\sqrt{2}$

۱ $\sqrt{5}$

۳۴ بیشترین مساحت مستطیلی که یک ضلع آن بر قطر نیم‌دایره به شعاع ۶ واحد و دو رأس دیگر آن روی این نیم‌دایره باشد، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۴ ۳۶

۳ ۲۷

۲ ۲۴

۱ ۱۸

۳۵ نقطه‌ای با کدام طول بر روی محور x ها انتخاب شود، به‌طوری که تفاضل فواصل آن، از دو نقطه $A\left(5, \frac{1}{5}\right)$ و $B\left(-2, \frac{7}{2}\right)$ بیشترین مقدار را داشته باشد؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۴ ۱۱

۳ ۱۰

۲ ۹

۱ ۸

۳۶ مستطیل محاط در دایره به قطر ۶ واحد را حول طول آن دوران می‌دهیم تا استوانه‌های قائم ایجاد شود. وقتی حجم این استوانه‌ها بیشترین مقدار را دارد، ارتفاع آن کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

۴ $3\sqrt{2}$

۳ $2\sqrt{6}$

۲ $2\sqrt{3}$

۱ ۴

۳۷ بیشترین مساحت از زمینی را که می‌توان توسط یک طناب به طول ۸۸ متر و به‌شکل مستطیلی که یک طرف آن رودخانه است محصور نمود، چند متر مربع است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۴ ۹۸۸

۳ ۹۷۸

۲ ۹۶۸

۱ ۹۵۸

۳۸ بیش‌ترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۴ $3\sqrt{2}$

۳ ۴

۲ $2\sqrt{3}$

۱ ۳

۳۹ کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 7}$ ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۴ $3\sqrt{3}$

۳ ۵

۲ ۴٫۵

۱ ۴

۴۰ بیشترین مساحت مستطیلی که دو ضلع آن بر روی محورهای مختصات و رأس چهارم آن، بر روی منحنی به معادله $y = \sqrt{12 - x}$ در ناحیه اول واقع شود، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۴ ۱۸

۳ ۱۶

۲ $8\sqrt{3}$

۱ $8\sqrt{2}$



مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۴۱ در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ ۱ ۳ $\sqrt{2}$ ۴ $\sqrt{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۴۲ دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آنها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{3}{2}$

۴۳ از بین مثلث‌های قائم‌الزاویه با اندازه وتر ۱۰ واحد، دو ضلع قائم با کدام نسبت انتخاب شود تا حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع قائم، بیش‌ترین باشد؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

- ۱ $\frac{2}{1}$ ۲ $\frac{\sqrt{3}}{1}$ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{2}}{1}$

۴۴ در ساخت قوطی‌های حلبی درباز به شکل مکعب مستطیل با قاعده مربع و حجم ۴ واحد مکعب، حداقل حلب استفاده شده در هر قوطی، چند واحد مربع است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ ۱۴ ۲ ۱۲ ۳ ۱۰ ۴ ۸

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۴۵ در ساخت یک قیف به شکل مخروط قائم به حجم $\frac{\pi}{3}$ ، با کدام ارتفاع، کمترین مقدار جنس مصرف می‌شود؟

- ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲ ۱ ۳ $\sqrt{2}$ ۴ $\sqrt{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۴۶ اگر x, y دو ضلع قائمه از مثلثی قائم‌الزاویه به طول وتر $5\sqrt{2}$ باشند، بیشترین مقدار $3x + 4y$ کدام است؟

- ۱ $25\sqrt{2}$ ۲ ۳۶ ۳ $28\sqrt{2}$ ۴ ۴۰

۴۷ از بین مخروط‌های حاصل که از دوران کامل پاره خط AB با اندازه $3\sqrt{3}$ حول خط L به دست می‌آیند، ارتفاع مخروطی با بیشترین حجم، کدام است؟ (فقط نقطه A روی خط L واقع است.)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

- ۱ ۶ ۲ ۳ ۳ $2\sqrt{3}$ ۴ $\sqrt{3}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۴۸ بیشترین مساحت از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که مجموع یک ضلع زاویه قائمه و وتر آن برابر ۶ باشد، کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ $2\sqrt{3}$ ۳ ۴ ۴ $3\sqrt{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۴۹ دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصلضرب آنها مینیمم باشد، مجموع آن دو عدد کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{2}$ ۲ $-\frac{1}{2}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{3}{2}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۵۰ کوتاه‌ترین فاصله سهمی $y^2 = 4x$ از نقطه $M(3, 0)$ ، کدام است؟

- ۱ $\sqrt{2}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ ۳

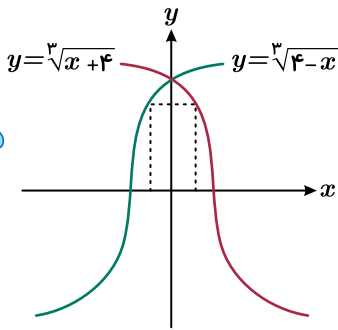
مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۵۱ اگر $a > 0$ و ثابت، و x متغیر باشد، مینیمم مقدار $\frac{3a+x}{\sqrt[4]{a^3x}}$ کدام است؟

- ۱ $2a$ ۲ $3a$ ۳ ۳ ۴ ۴



۵۲ مساحت بزرگ‌ترین مستطیل واقع در ناحیه‌های اول و دوم که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن بر نمودارهای داده شده در شکل زیر قرار دارد، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۳



۴ ۶

۳ ۴

۲ ۳

۱ ۲

۵۳ حداکثر مساحت جانبی استوانه‌ای که درون یک کره به شعاع $4\sqrt{2}$ محاط می‌شود، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

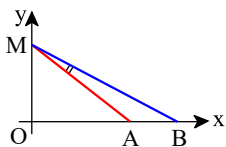
۴ $\frac{512\pi}{3}$

۳ $\frac{256\pi}{3}$

۲ 64π

۱ 32π

۵۴ در شکل مقابل دو نقطه A و B به ترتیب با طول‌های ۴ و ۹ بر روی محور افقی قرار دارند. نقطه M با کدام ارتفاع روی محور قائم انتخاب شود تا زاویه $\hat{AMB}$ بیشترین مقدار خود را داشته باشد؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۱



۲ ۶

۱ $5/4$

۴ $7/2$

۳ $6/5$

۵۵ اگر c نقطه اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، الزاماً تابع f در نقطه c ، کدام وضعیت را دارد؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۴ اکسترمم نسبی

۳ مشتق‌پذیر

۲ خط مماس افقی

۱ پیوسته

۵۶ کوتاه‌ترین فاصله مبدا مختصات از نقاط منحنی به معادله $y = \frac{2}{x^2}$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۴ ۲

۳ $\sqrt{2}$

۲ $\sqrt{3}$

۱ ۱

۵۷ مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن یکی بر $y = \sqrt{x+1}$ و دیگری بر $y = \sqrt{2-x}$ قرار دارد، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

۴ $\sqrt{2}$

۳ $\sqrt{3}$

۲ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۵۸ کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(1, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = x\sqrt{x}$ کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۴ $5\sqrt{2}$

۳ $4\sqrt{3}$

۲ $2\sqrt{5}$

۱ $2\sqrt{11}$

۵۹ اگر مساحت بزرگ‌ترین مستطیلی که دو رأس آن بر محور x ها و دو رأس دیگر آن، یکی بر $y = \sqrt{x}$ و دیگری بر $y = \sqrt{a-x}$ واقع است برابر $\sqrt{2}$ باشد، مقدار a کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۴ ۲

۳ ۳

۲ ۴

۱ ۶

۶۰ کمترین فاصله نقاط واقع بر منحنی $y = \sqrt{x - [x^2]}$ از خط $2x - y + 2 = 0$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۴ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

۳ $\frac{\sqrt{5}}{10}$

۲ $\frac{3\sqrt{5}}{8}$

۱ $\frac{\sqrt{5}}{5}$



۶۱ بیشترین مساحت، از بین مستطیل‌هایی که یک ضلع آنها منطبق بر محور x ها و دو رأس آنها بر منحنی $y = \frac{3}{4}\sqrt{8-x^2}$ قرار گیرند، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۱۲ (۴)

۹ (۳)

 $6\sqrt{2}$ (۲)

۶ (۱)

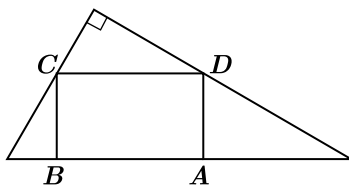
۶۲ بیشترین مساحت از مستطیل‌هایی که دو رأس آن بر روی نیم‌بیضی به معادله $y = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ و دو رأس دیگر آن بر روی محور x ها باشند، کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۵

۸ (۴)

 $4\sqrt{3}$ (۳) $3\sqrt{5}$ (۲)

۶ (۱)

۶۳ دو ضلع از مستطیلی منطبق بر محورهای مختصات و رأس چهارم آن واقع بر منحنی به معادله $y = (x-2)^2$ روی بازه $[0, 2]$ است. بیشترین مساحت این مستطیل کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

 $\frac{11}{9}$ (۴) $\frac{32}{27}$ (۳) $\frac{10}{9}$ (۲) $\frac{28}{27}$ (۱)

۶۴ در شکل زیر، یکی از اضلاع قائمه مثلث بزرگ نصف دیگری است. اگر مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

 $1/5$ (۲)

۱ (۱)

 $2/5$ (۴)

۲ (۳)

۶۵ قرینه نقطه A واقع بر منحنی $f(x) = \sqrt[3]{-x}$ را در دامنه $[0, 1]$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم صفحه مختصات تعیین و آن را A' می‌نامیم. ماکزیمم طول پاره خط AA' ، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

 $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ (۴) $\frac{2}{3\sqrt{2}}$ (۳) $\frac{4}{3\sqrt{6}}$ (۲) $\frac{2}{3\sqrt{6}}$ (۱)

۶۶ قرینه نقطه A واقع بر سهمی $f(x) = x^2$ را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم صفحه مختصات تعیین کرده و آن را A' می‌نامیم. اگر طول نقطه A بین دو طول متوالی از محل‌های تقاطع تابع f با خط نیمساز موردنظر باشد، ماکزیمم طول پاره خط AA' کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

 $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (۴) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۱)

۶۷ دو نقطه $A(2, 3)$ و $B(4, 7)$ و خط به معادله $y = x - 1$ در صفحه محورهای مختصات مفروض‌اند. نقطه M بر روی خط مفروض، با کدام طول انتخاب شود، به‌طوری که تفاضل فواصل آن از دو نقطه مفروض، بیشترین مقدار را داشته باشد؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۳ (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

۶۸ تابع f با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + x$ همواره صعودی است. حدود تغییرات a کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

 $|a| \leq 2$ (۴) $|a| \leq \sqrt{3}$ (۳) $-\sqrt{3} \leq a < 2$ (۲) $0 \leq a < 2$ (۱)

۶۹ نمودار $y = (x-1)^3(x+1)$ در کدام فاصله نزولی است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۷۶

 $x > -\frac{1}{2}$ (۴) $x > 1$ (۳) $x < -\frac{1}{2}$ (۲) $x < 1$ (۱)

۷۰ به ازای کدام مقادیر x ، نمودار تابع $y = 1 - 4x^2$ صعودی است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۷۰

 $-4 < x < 4$ (۴) $-2 < x < 2$ (۳) $x > 0$ (۲) $x < 0$ (۱)

۷۱ کدام یک از تابع‌های زیر، یک‌به‌یک است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

 $p(x) = \frac{x}{x^2+1}$ (۴) $h(x) = 2x + \frac{1}{x}$ (۳) $g(x) = x - \sqrt{x}$ (۲) $f(x) = x + \sqrt{x}$ (۱)



مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۷۲ بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 8}$ در آنها اکیداً نزولی است را در نظر بگیرید. ماکزیم طول این بازه‌ها کدام است؟

- ۱ 2 ۲ $\sqrt{4} - 1$ ۳ $2\sqrt{4}$ ۴ $2(\sqrt{4} - 1)$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۷۳ مجموعه مقادیری از اعداد حقیقی که در آن تابع $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + |x|$ صعودی باشند، کدام است؟

- ۱ $[-1, \infty)$ ۲ $(-\infty, \infty)$ ۳ $[-1, 0) \cup (0, \infty)$ ۴ $[-3\sqrt{3}, 0]$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۷۴ تعداد بازه‌هایی که تابع $f(x) = \frac{x^4 - 3}{x^2 - 2}$ ؛ $x \in (-2, 2)$ در آنها اکیداً نزولی باشد، کدام است؟

- ۱ 2 ۲ 3 ۳ 4 ۴ 5

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۷۵ کدام عبارت برای تابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2 - 1}}$ درست است؟

- ۱ تابع f در مجموعه $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ صعودی است. ۲ تابع f در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است.
۳ تابع f در بازه $(1, +\infty)$ صعودی و در بازه $(0, 1)$ نزولی است. ۴ تابع f در بازه $(1, +\infty)$ نزولی و در بازه $(0, 1)$ صعودی است.

۷۶ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵ - نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. مقدار مینیمم نسبی این تابع کدام است؟

- ۱ -84 ۲ -81 ۳ -57 ۴ -75

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۷۷ تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترم نسبی کدام وضع را دارد؟

- ۱ یک مینیمم نسبی دارد. ۲ یک ماکسیمم نسبی دارد.
۳ مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی دارد. ۴ فاقد اکسترم نسبی است.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۷۸ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x + a}$ دارای اکسترم نسبی باشد، حدود a کدام است؟

- ۱ $a < -2$ یا $a > 0$ ۲ $a > 2$ یا $a < 0$ ۳ $-2 < a < 0$ ۴ $0 < a < 2$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۷۹ در تابع با ضابطه $f(x) = x|x| - 2x$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

- ۱ $2\sqrt{2}$ ۲ 3 ۳ $3\sqrt{2}$ ۴ 4

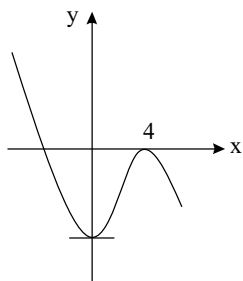
مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۸۰ در تابع با ضابطه $f(x) = x|x - 4|$ ، فاصله دو نقطه ماکسیمم نسبی و مینیمم نسبی آن، کدام است؟

- ۱ $\sqrt{5}$ ۲ $2\sqrt{2}$ ۳ $3\sqrt{2}$ ۴ $2\sqrt{5}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

۸۱ شکل مقابل نمودار تابع به معادله $y = ax^3 + bx^2 - 16$ است. a کدام است؟



- ۱ -1 ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ $-\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{2}{3}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۸۲ طول نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$ کدام است؟

- ۱ -2 ۲ -1 ۳ صفر ۴ 1

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۸۳ فاصله نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = x + \sqrt{4x - x^2}$ از نیمساز ناحیه اول کدام است؟

- ۱ 1 ۲ $\sqrt{2}$ ۳ 2 ۴ $2\sqrt{2}$





مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

۸۴ اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد، الزاماً تابع f چگونه است؟

- ۱ $f'(c) = 0$ ۲ در c پیوسته ۳ در همسایگی، تعریف شده ۴ در c مشتق پذیر

۸۵ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{a}{x} + bx^2$ در نقطه $(-2, 1)$ دارای اکسترمم نسبی است. عدد a و نوع اکسترمم نسبی کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

- ۱ $\frac{4}{3}$ ، ماکسیمم ۲ $-\frac{4}{3}$ ، ماکسیمم ۳ $\frac{4}{3}$ ، مینیمم ۴ $-\frac{4}{3}$ ، مینیمم

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۸۶ نقطه $A(-1, 1)$ اکسترمم نسبی تابع $y = x^2|x| + 3ax^2 + b$ است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟

- ۱ -3 ۲ $-\frac{1}{3}$ ۳ 3 ۴ $\frac{1}{3}$

۸۷ فرض کنید A و B نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ باشند. چند نقطه روی نمودار f وجود دارد که خطوط

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

مماس بر آنها موازی پاره خط AB است؟

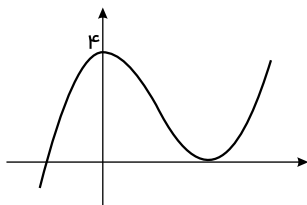
- ۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۸۸ مقدار ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ ، کدام است؟

- ۱ $-1 + \sqrt{5}$ ۲ $1 + \sqrt{5}$ ۳ $-1 + \sqrt{3}$ ۴ $1 + \sqrt{3}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۸۹ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت زیر است. طول نقطه مینیمم نسبی تابع، کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ ۲ ۳ $\frac{3}{2}$ ۴ ۳

۹۰ نقاط $A(0, 0)$ و $B(1, 1)$ نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ هستند. حاصل ab کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

- ۱ -3 ۲ -6 ۳ ۳ ۴ ۶

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۹۱ تعداد نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}|x^2 - 4|$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۹۲ طول نقطه ماکسیمم نسبی تابع با ضابطه $y = (x - 1)^2 \sqrt{x^2}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{4}$ ۲ $\frac{1}{3}$ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $\frac{2}{3}$

۹۳ نمودار تابع $y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ در نقاطی به طول صفر و -2 دارای اکسترمم نسبی است. بین نقاط اکسترمم نسبی این تابع،

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

چقدر است؟

- ۱ $2\sqrt{5}$ ۲ $2\sqrt{11}$ ۳ $2\sqrt{15}$ ۴ $2\sqrt{101}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۹۴ تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ ، در چند نقطه، اکسترمم نسبی دارد؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

۹۵ کدام بیان برای تابع با ضابطه $f(x) = x|x^2 - 3|$ بر دامنه $[-1, 1]$ نادرست است؟

- ۱ مینیمم مطلق دارد. ۲ ماکسیمم مطلق دارد. ۳ دو نقطه اکسترمم نسبی دارد. ۴ فاقد اکسترمم نسبی



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۹۶ تابع با ضابطه $f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x$ از نظر اکسترم نسبی کدام وضع را دارد؟

۱ مینیمم نسبی دارد. ۲ ماکسیمم نسبی دارد.

۳ مینیمم نسبی و ماکسیمم نسبی دارد. ۴ فاقد اکسترمم است.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۹۷ نقاط اکسترمم نسبی تابع با ضابطه $f(x) = \cos 2x - 2 \cos x$ روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ چگونه است؟

۱ فاقد ماکسیمم - یک نقطه مینیمم ۲ یک نقطه ماکسیمم - یک نقطه مینیمم

۳ یک نقطه ماکسیمم - دو نقطه مینیمم ۴ دو نقطه ماکسیمم - یک نقطه مینیمم

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۹۸ به ازای کدام مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ دارای ماکسیمم نسبی است؟

۱ $|a| > 2$ ۲ $a < 0$ ۳ $a > 0$ ۴ هیچ مقدار a

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۹۹ اگر $f(x) = -x + [x]$ ، $g(x) = 2^x$ آنگاه برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

۱ $(\frac{1}{2}, 1]$ ۲ $(\frac{1}{2}, 1)$ ۳ $(1, 2]$ ۴ $[1, 2)$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۱۰۰ اگر $f(x) = [x] - x$ و $g(x) = 2^x$ ، آنگاه تابع $g \circ f$ از نظر اکسترمم نسبی کدام نوع را دارد؟

۱ ماکسیمم و مینیمم ۲ فقط ماکسیمم ۳ فقط مینیمم ۴ هیچ کدام

مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

۱۰۱ تابع f روی بازه (a, b) تعریف شده است. در این مورد کدام بیان درست است؟

۱ هر نقطه بحرانی، نقطه اکسترمم نسبی است. ۲ هر نقطه اکسترمم نسبی، نقطه بحرانی است.

۳ در هر نقطه بحرانی، مشتق تابع صفر است. ۴ در هر نقطه اکسترمم نسبی، مشتق تابع صفر است.





پاسخنامه تشریحی

گزینه ۱

برای پیدا کردن طول نقاط بحرانی تابع، از تابع مشتق می‌گیریم، نقاطی که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد، طول نقاط بحرانی تابع هستند. نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه تعریف هستند که در آنها مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$y = x^2(x-2)^2 \Rightarrow y' = 2x(x-2)^2 + 2(x-2) \cdot x^2 = 2x(x-2)(x-2+x) = 0 \Rightarrow 2x(x-2)(2x-2) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = 1$$

فاکتور

$$\begin{aligned} x = 0 &\xrightarrow{\text{تابع}} y = 0 \rightarrow A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \\ x = 2 &\xrightarrow{\text{تابع}} y = 0 \rightarrow B \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow AB = \sqrt{4+0} = 2, AC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, BC = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ x = 1 &\xrightarrow{\text{تابع}} y = 1 \rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

مثلث متساوی‌الساقین است و چون $2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2$ ، پس مثلث قائم‌الزاویه نیز هست.

۴۵-۱۳-۴۲

گزینه ۲

نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

$$f(x) = \sqrt[3]{x^6} - \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}(2x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}}) = \frac{2}{3}(2\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) = \frac{2}{3}(\frac{2\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x}})$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow 2\sqrt[3]{x^4} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان ۳}} x^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt[3]{2}}{4} \in (-1, 1)$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 0 \Rightarrow x = 0 \in (-1, 1)$$

پس $\pm \frac{\sqrt[3]{2}}{4}$ و 0 طول نقاط بحرانی تابع هستند.

۶۳-۱۰-۲۸

گزینه ۳ نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد. دامنه تعریف این تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است. $D_f = (-\infty, +\infty)$

ابتدا قدرمطلق را با تعیین علامت، از بین می‌بریم:

$$x \geq 2 \rightarrow f(x) = (x-2)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0 \xrightarrow{\times 3} 5x^{\frac{2}{3}} - 4x^{-\frac{1}{3}} = 0$$

$$\rightarrow 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow \frac{5x - 4}{\sqrt[3]{x}} = 0 \rightarrow x = \frac{4}{5}, \text{ مشتق وجود ندارد, } x = 0$$

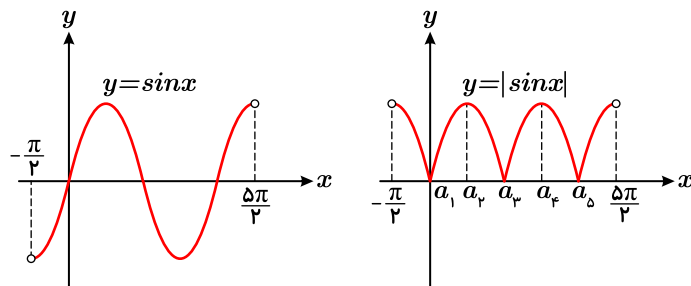
به ازای $x < 2$ نیز همین دو نقطه بحرانی بدست می‌آید. دقت کنید $x = 2$ ریشه‌ی ساده داخل قدرمطلق می‌باشد، بنابراین تابع در $x = 2$ مشتق ناپذیر است پس بحرانی می‌باشد. (نقطه

ی زاویه دار)

۵۶-۱۴-۲۹

گزینه ۴ راه اول: با رسم شکل، مشاهده می‌شود نقاط a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 نقاط بحرانی می‌باشند.

در نقاط a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 مشتق ناپذیر بوده و مشتق تابع در نقاط a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 برابر صفر می‌باشد.



۶۱-۱۱-۲۸

گزینه ۵

نقاط بحرانی، نقاطی از درون دامنه تعریف هستند که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

دامنه‌ی تعریف تابع، مجموعه‌ی اعداد حقیقی است، یعنی $D_f = (-\infty, +\infty)$ است.

$$f(x) = (x^3 - 28)\sqrt[3]{x} \Rightarrow f'(x) = 3x \cdot \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^3 - 28)$$

$$= \frac{6x\sqrt[3]{x^2} + x^3 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{6x^2 + x^3 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{7x^2 - 28}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{صورت} = 0 \Rightarrow 7x^2 - 28 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\text{مخرج} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

پس طول‌های نقاط بحرانی این تابع ۲ و -۲ و ۰ می‌باشند.

۶۳-۷-۳۰

گزینه ۴ ابتدا و انتهای بازه بسته جزو نقاط بحرانی است، بنابراین تابع در $x = 2$ و $x = -1$ بحرانی است.

در توابع به فرم $y = |f(x)|$ که در آنها $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است، ریشه‌های معادله $f(x) = 0$ و $f'(x) = 0$ طول نقاط بحرانی تابع هستند.

$$f(x) = |x^3 - x| = |(x-1)(x+1)x| = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌های داخل قدر مطلق}} x = \pm 1, 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین مجموعه نقاط بحرانی تابع در فاصله $[-1, 2]$ برابر است با: $\left\{-1, 0, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, 2\right\}$

۳۵-۴۲-۲۳

گزینه ۴ با توجه به بازه داده شده تابع را به صورت چندضابطه‌ای بازنویسی می‌کنیم به طوری که جزء صحیح حذف شود:

$$f(x) = \begin{cases} -\sin \pi x & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ \sin \pi x & 1 \leq x < 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$$

در بازه $(0, 1)$ نمودار تابع f ثابت است و چون در تمام این بازه مقدار مشتق صفر است، بنابراین بی‌شمار نقطه بحرانی دارد.

۶۵-۱۰-۲۵

گزینه ۲ نقاط بحرانی به نقاطی از دامنه تابع گفته می‌شود که در آنها مشتق صفر است یا وجود ندارد.

در توابع قدر مطلق ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق نقاط بحرانی هستند چون در این نقاط مشتق وجود ندارد. برای محاسبه ریشه‌های مشتق، با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق، آن را برمی‌داریم.

$$\xrightarrow{x \leq -1 \text{ یا } x \geq 1} f(x) = x \cdot (x^3 - 1) = x^3 - x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ق.غ.ق.}$$

$$\xrightarrow{-1 \leq x < 1} f(x) = x(1 - x^3) = x - x^3 \rightarrow f'(x) = 1 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ ق.ق.}$$

اعداد $\{-1, 1\}$ هم ریشه‌های قدر مطلق هستند پس ۴ نقطه بحرانی دارد.

۵۲-۲۱-۲۷

گزینه ۱ ابتدا $f(x)$ را تعیین علامت کرده و سپس مشتق گیری می‌کنیم. لذا داریم:

$$f(x) = |x - 2|x^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} (x-2)x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}} & x \geq 2 \\ -(x-2)x^{\frac{2}{3}} = -x^{\frac{5}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} & x < 2 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & x > 2 \\ -\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} & x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow 5\sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \frac{5x - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \frac{5x - 2}{\sqrt[3]{x}} = 0$$

در $x = 0$ ، f' موجود نیست

از طرفی تابع در $x = 2$ نیز مشتق‌ناپذیر است $(f'_-(2) \neq f'_+(2))$ ، لذا تابع $f(x)$ ۳ نقطه بحرانی دارد.

۵۳-۱۳-۳۴

گزینه ۳ نقاط بحرانی، نقاطی از دامنه تابع هستند که مقدار مشتق در آن نقاط صفر است یا تابع در آن نقاط مشتق ندارد.

ریشه‌های ساده قدر مطلق، نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

$$f(x) = (x-1) \cdot |x^2 + x - 2|$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, x = -2$$

با تعیین علامت عبارت داخل قدر مطلق می‌توانیم تابع را به صورت چندضابطه‌ای نوشته و سپس مشتق بگیریم ولی به جای این کار می‌توانیم برای محاسبه ریشه مشتق قدر مطلق را پرانتز در نظر بگیریم، در نتیجه داریم:



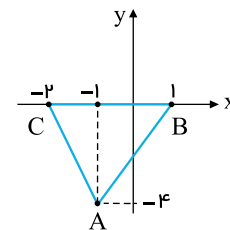
$$f(x) = (x-1) \cdot (x^2 + x - 2) = x^3 + x^2 - 2x - x^2 - x + 2$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

با جایگذاری طول نقاط بحرانی یعنی $x = -2$ و $x = -1$ ، $x = 1$ عرض این نقاط را به دست می‌آوریم:

$$A(-1, -4), B(1, 0), C(-2, 0)$$

$$S = \frac{\text{قاعده} \times \text{ارتفاع}}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$



۶۱-۶-۳۳

گزینه ۱ برای یافتن نقاط بحرانی، داریم:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\frac{2}{x^3}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{-1}{x^3\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}$$

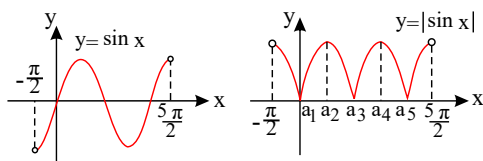
$f'(x)$ برابر با صفر نمی‌شود و $x = 0$ جزو دامنه تابع نیست پس تابع نقطه بحرانی ندارد، لذا این تابع در کل دامنه تعریف خود هیچ نقطه بحرانی ندارد.

۵۰-۲۰-۳۰

گزینه ۴

راه اول: با رسم شکل، مشاهده می‌شود نقاط a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 نقاط بحرانی هستند.

تابع در نقاط a_1, a_2, a_3 مشتق‌ناپذیر بوده و مشتق تابع در نقاط a_4, a_5 برابر صفر است.



راه دوم: در توابع به فرم $y = |f(x)|$ که در آنها $f(x)$ مشتق‌پذیر است، ریشه‌های قدر مطلق و ریشه‌های مشتق آن نقاط بحرانی تابع هستند.

$$y = |\sin x| = |f(x)|$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) = 0 &\Rightarrow \sin x = 0 \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ f'(x) = 0 &\Rightarrow \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{۵ نقطه بحرانی دارد.}$$

۵۶-۸-۳۶

نقاط بحرانی نقاطی از دامنه تعریف هستند که در آن نقاط، مشتق برابر صفر است یا مشتق وجود ندارد.

$$f(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2 + 4)^2}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} & (x=0 \text{ یا } x=2 \text{ در بازه قرار ندارد.}) \\ \text{مخرج} = 0 & \rightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \rightarrow (x+1)(x-2)^2 = 0 \\ \rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} & (x=-1 \text{ در بازه قرار ندارد.}) \\ \text{غ ق ق} & (x=2 \text{ در بازه قرار ندارد.}) \end{cases} \end{cases}$$

کافی است مشتق را در اطراف $x = 0$ (ریشه ساده مشتق) تعیین علامت کنیم.

x	-1	0	2
y'	+	0	-
y		$\nearrow$ max $\searrow$	

$x = 0$ طول نقطه Max است $\rightarrow$

برای تجزیه عبارت درجه سوم $x^3 - 3x^2 + 4$ توجه کنید که چون $x = 2$ عبارت را صفر می‌کند پس این عبارت بر $x - 2$ بخش‌پذیر است. با تقسیم عبارت درجه سوم بر $x - 2$ چندجمله‌ای تجزیه می‌شود.

۵۲-۱۲-۳۷

گزینه ۲

تابع f در بازه داده شده پیوسته و مشتق‌پذیر است. از تابع مشتق می‌گیریم و طول نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 15x \rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \text{غ ق ق} & (x=5 \text{ در بازه قرار ندارد}) \\ x = -3 \end{cases}$$

اکنون باید مقدار تابع را به ازای طول نقاط بحرانی به دست آوریم.

$$f(-4) = -\frac{64}{3} - 16 + 60 = \frac{68}{3} \sim 22.6$$

$$f(3) = 9 - 9 - 45 = -45 \rightarrow \text{Min مطلق}$$

$$f(-3) = -9 - 9 + 45 = 27 \rightarrow \text{Max مطلق}$$

۴۴-۶-۵۰

۱۵ گزینه ۲ تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر است. f' را حساب می کنیم و ریشه (های) آن را به دست می آوریم:

$$y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 2x^2 \Rightarrow y' = x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = x(x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \\ x=-1 \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را در نقاط بحرانی به دست می آوریم.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty, f(0) = 0, f(4) = -32, f(-1) = -\frac{3}{4}$$

کمترین مقدار تابع برابر -32 است.

۵۰-۴-۴۶

۱۶ گزینه ۲ برای محاسبه ی اکسترم های مطلق در توابع پیوسته باید عرض های نقاط بحرانی را محاسبه نموده و با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه نمود.

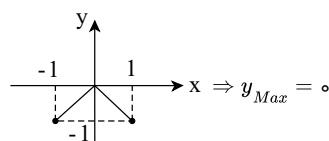
نقاط بحرانی تابع $f(x)$ را در بازه ی $[1, 3]$ می یابیم. لذا داریم:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \quad \text{غ ق (در بازه قرار ندارد)}$$

$$\begin{cases} f(2) = k - 4 \rightarrow \text{Min} \\ f(1) = k - 2 \\ f(3) = k \rightarrow \text{Max} \end{cases} \Rightarrow f(2) + f(3) = k + k - 4 = 2k - 4 = 0 \Rightarrow k = 2$$

۵۹-۹-۳۲

۱۷ گزینه ۲ بهترین روش برای حل این مسأله رسم نمودار است.



۴۴-۹-۴۶

۱۸ گزینه ۳

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$$

$$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

حال، مقادیر تابع را به ازای ابتدا و انتهای بازه و طول نقاط بحرانی حساب می کنیم.

$$f(0) = 0, f(-1) = -\frac{5}{12}, f(2) = -\frac{8}{3}, f(3) = \frac{9}{4}$$

پس کمترین مقدار تابع برابر $-\frac{8}{3}$ می باشد.

۵۴-۴-۴۲

۱۹ گزینه ۳ روش اول:

$$y = 1 - \cos^2 x - \sin x \rightarrow y = \sin^2 x - \sin x \xrightarrow{\sin x=A} y = A^2 - A, A \in [-1, 1]$$

حال کافی است از تابع مشتق گرفته و طول نقاط بحرانی را به دست آورده و سپس مقدار تابع را به ازای طول نقاط بحرانی به دست آوریم.

$$y' = 2A - 1 = 0 \rightarrow A = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} y(-1) = 1 + 1 = 2 \\ y(1) = 1 - 1 = 0 \\ y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \rightarrow \text{Min مطلق} \end{cases}$$

روش دوم:

$$y = 1 - \cos^2 x - \sin x = \sin^2 x - \sin x = (\sin x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$$

این عبارت وقتی کمترین مقدار را به خود می گیرد که عبارت $(\sin x - \frac{1}{2})^2$ که مربع کامل است کمترین مقدار یعنی صفر شود، پس:



$$y_{\text{Min مطلق}} = 0 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

۶۴-۱۴-۲۲

۲۰. گزینه ۲ با توجه به اکیداً صعودی بودن تابع $g(x) = x^3 + x$ (زیرا $g'(x) = 3x^2 + 1 > 0$) هرچه x عدد بزرگ‌تری باشد $g(x)$ نیز بزرگ‌تر خواهد بود. بنابراین ماکسیمم $g(f(x))$ به‌ازای ماکسیمم $f(x)$ رخ می‌دهد، پس ابتدا ماکسیمم مطلق $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'=0} x = 1, -1$$

محاسبه بیشترین مقدار تابع $f(x)$ با شرط $x \leq 1$ به‌صورت زیر است:

$$f(1) = -2, f(-1) = 2, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\max f(x) = 2$$

همان‌طور که قبلاً گفتیم ماکسیمم $g(f(x))$ به‌ازای ماکسیمم تابع f یعنی $f(x) = 2$ رخ می‌دهد که برابر است با:

$$g(2) = 2^3 + 2 = 10$$

۶۹-۶-۲۵

۲۱. گزینه ۳ برای محاسبه اکسترم‌های مطلق یک تابع، عرض‌های نقاط بحرانی را با مقادیر تابع در دو سر دامنه مقایسه می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, +\infty) - \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{(2x+2) \cdot (x-1)^2 - 2(x-1) \cdot (x^2+2x)}{(x-1)^4} = 0$$

$$2(x-1) \left((x+1) \cdot (x-1) - (x^2+2x) \right) = 0 \Rightarrow x = 1 \notin D_f$$

$$(x^2 - 1 - x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \quad \text{طول نقطه بحرانی}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

عدد $-\frac{1}{3}$ مینیمم مطلق تابع است که در $x = -\frac{1}{2}$ قرار دارد و خط قائم $x = 1$ مجانب قائم است چون ریشهٔ مخرج است اما ریشهٔ صورت نیست.

$$\text{فاصله} = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

۷۲-۸-۲۰

۲۲. گزینه ۳ می‌دانیم: برای محاسبهٔ اکسترم‌های مطلق، نقاط بحرانی را در تابع قرار می‌دهیم و سپس ابتدا و انتهای بازه (دامنه) را در تابع قرار می‌دهیم. هر عددی که از همه بزرگ‌تر باشد، ماکسیمم مطلق و هر عددی که از همه کوچک‌تر باشد، مینیمم مطلق است.

با توجه به شکل، دامنهٔ تابع بازه $[-1, 3]$ است، پس $x = -1$ و $x = 3$ ریشه‌های زیر رادیکال هستند.

یعنی عبارت زیر رادیکال $(x-3) \cdot (x+1)$ است. پس:

$$f(x) = x + \sqrt{-(x+1) \cdot (x-3)} = x + \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-2x+2}{2\sqrt{-x^2+2x+3}} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$$

$$\sqrt{-x^2+2x+3} = x-1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x \geq 1}$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 + \sqrt{2}, x_2 = 1 - \sqrt{2} \text{ غرض}$$

$$f(1 + \sqrt{2}) = 1 + 2\sqrt{2} \text{ ماکسیمم مطلق}$$

$$f(-1) = -1$$

$$f(3) = 3$$

۷۴-۶-۲۰

۲۳ گزینه ۲ نقاط بحرانی تابع f را می‌یابیم:

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{a-2x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{2\sqrt{a-2x}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{a-2x} = 2\sqrt{x} \Rightarrow a-2x = 4x \Rightarrow x = \frac{a}{6} \text{ (بحرانی)}$$

دامنه تابع هم به صورت $0 \leq x \leq \frac{a}{2}$ است و در نتیجه:

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{a} \\ f(\frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{a}{2}} \text{ (min)} \\ f(\frac{a}{6}) = \sqrt{\frac{a}{6}} + \sqrt{\frac{2a}{3}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} \text{ (max)} \end{cases}$$

$$\text{طبق فرض: } \sqrt{\frac{a}{2}} \times \frac{3}{\sqrt{6}}\sqrt{a} = \sqrt{12} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{12}}a = \sqrt{12} \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4$$

۸۲-۵-۱۴

۲۴ گزینه ۳ چون تابع f در نقطه c مشتق راست دارد، پس از راست پیوسته است. همچنین چون f در نقطه c مینیمم دارد، $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \geq f(c)$ ، بنابراین داریم:

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{\overbrace{f(x) - f(c)}^{\geq 0}}{\underbrace{x - c}_{> 0}} \geq 0 \Rightarrow \text{علامت مشتق راست همواره نامنفی است.}$$

۴۹-۱۳-۳۸

۲۵ گزینه ۲ روش اول:

$$y = \frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5} = \frac{1}{x^2(x^2 - 4x + 4) + 5} = \frac{1}{x^2(x-2)^2 + 5}$$

کمترین مقدار عبارت $x^2(x-2)^2$ مساوی صفر است بنابراین کمترین مقدار مخرج کسر مساوی ۵ است پس ماکسیمم مطلق تابع $\frac{1}{5}$ است. (صورت کسر یک عدد مثبت است پس بیشترین مقدار کسر وقتی به دست می‌آید که مخرج کسر، کمترین مقدار را داشته باشد).
روش دوم: از تابع مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی آن را به دست می‌آوریم:

$$D_f = R = (-\infty, +\infty)$$

$$y' = \frac{-(4x^3 - 12x^2 + 8x)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x^2 - 3x + 2)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = \frac{-4x(x-1)(x-2)}{(x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

حال مقادیر تابع را وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ و همچنین در طول‌های نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

$$f(0) = \frac{1}{5} \text{ min مطلق}, f(1) = \frac{1}{6}, f(2) = \frac{1}{5}, \lim_{x \rightarrow \pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^4} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

توجه کنید که اگر بیشترین یا کمترین مقدار تابع به ازای $\pm\infty$ به دست می‌آیند تابع max یا min مطلق نداشت.

۴۹-۶-۴۵



۲۶ گزینه ۲ در آنجا که $2x \geq 0$ است، پس:

$$-3x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - 3x^2 \leq x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \leq x \Rightarrow 0 \leq x - \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} \Rightarrow 0 \leq f(x)$$

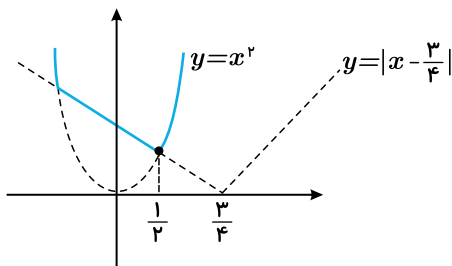
مینیمم مطلق تابع برابر صفر است.

دقت نمایید با مشتق گیری از تابع $f(x)$ و به دست آوردن نقاط بحرانی، مسیر بسیار طولانی خواهد شد.

۶۴-۳-۳۳

۲۷ گزینه ۱

ابتدا نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = |x - \frac{3}{4}|$ را رسم می‌کنیم و $f(x) = \max \left\{ x^2, \left| x - \frac{3}{4} \right| \right\}$ را مشخص می‌کنیم:



با توجه به نمودار، کمترین مقدار تابع f در $\frac{3}{4} < x < 0$ یعنی محل برخورد دو ضابطه است:

$$x^2 = \left| x - \frac{3}{4} \right| \xrightarrow{x < \frac{3}{4}} x^2 = \frac{3}{4} - x \Rightarrow x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \frac{1}{2}, \frac{-3}{2} \xrightarrow{0 < x < \frac{3}{4}} x = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \Rightarrow \min f(x) = \frac{1}{4}$$

۷۶-۲-۲۲

۲۸ گزینه ۴ به نظر می‌رسد این تابع همواره نامنفی است. برای تحقیق این موضوع داریم:

$$x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \geq -x \stackrel{\text{به توان ۳}}{\Leftrightarrow} x^3 - x^2 \geq -x^3 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$$

۷۹-۲-۱۹

۲۹ گزینه ۱ با توجه به اینکه توان دوم هر عدد حقیقی، عددی نامنفی است، داریم:

$$x^2 \geq 0 \Rightarrow -x^2 \leq 0 \Rightarrow x^3 - x^2 \leq x^3 \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq \sqrt[3]{x^3} \Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq x \Rightarrow -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2} \leq 0$$

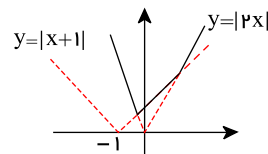
بنابراین ماکسیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x) = -x + \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ برابر با صفر است.

۷۳-۱۰-۱۷

۳۰ گزینه ۲ ابتدا نمودار هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم و سپس آن قسمت که پایین‌تر است حذف شده و قسمتی که بالاتر است می‌ماند. همان طور که می‌بینیم

کمترین مقدار آن در تقاطع دو تابع در قسمت x های منفی است.

$$\xrightarrow{-1 < x < 0} -2x = x + 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$



۷۷-۵-۱۸

۳۱ گزینه ۱ توجه: عبارتهایی که نامثبت هستند (منفی و صفر)، بیشترین مقدار آنها صفر است.

از آنجا که $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \subset [-1, 1]$ بوده و در این بازه $\cos x > 0$ ، بنابراین از $-|x| \leq 0$ نتیجه می‌گیریم:

$$-|x| \cos x \leq 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \Rightarrow \max(f(x)) = 0$$

۷۲-۱۰-۱۸

۳۲ گزینه ۲ اگر در این مثلث طول قاعده را a و ارتفاع وارد بر آن را h بنامیم، در این صورت $a + h = 16$ است.

$$S = \frac{1}{2}ah \xrightarrow{h=16-a} S(a) = \frac{1}{2}a(16-a) = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$$

تابع $S = -\frac{1}{2}a^2 + 8a$ یک تابع درجه دوم برحسب a است که چون ضریب a^2 منفی است، پس تابع ماکزیمم دارد. عرض رأس این سهمی که بیشترین مقدار آن نیز هست برابر با

$$-\frac{\Delta}{4a'}$$

$$S_{Max} = \frac{-\Delta}{4a'} = \frac{4a'c' - b'^2}{4a'} = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)(0) - 64}{4\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-64}{-2} = 32$$

۴۵-۴-۵۱

گزینه ۴

۳۳

فاصله نقطه $A(x, y)$ از نقطه $B(4, 0)$ برابر با $d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ است، از طرفی نقطه A روی منحنی تابع $y = \sqrt{2x+9}$ است، بنابراین داریم:

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (2x+9)} = \sqrt{x^2 - 6x + 25}$$

یک متغیره:

در نتیجه داریم:

$$\frac{d}{dx} = \frac{1(2x-6)}{2\sqrt{x^2-6x+25}} = 0 \rightarrow x = 3$$

$$d_{\min} = \sqrt{9 - 18 + 25} = \sqrt{16} = 4$$

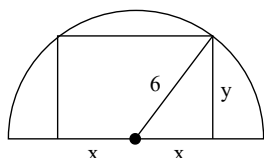
۳۴-۱۰-۵۶

گزینه ۴

۳۴

روش اول:

مطابق شکل، معادله دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۶ را نوشته و با اعمال شرط $y \geq 0$ معادله نیم دایره تبدیل می‌کنیم. طبق شکل x برابر با صفر طول مستطیل است.



$$x^2 + y^2 = 36 \rightarrow y^2 = 36 - x^2 \xrightarrow{y \geq 0} y = \sqrt{36 - x^2} \quad (1)$$

مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 2xy \xrightarrow{(1)} S(x) = 2x \cdot \sqrt{36 - x^2}$$

یک متغیره:

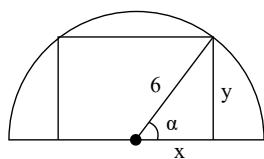
$$S'(x) = 0 \Rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} + \frac{1(-2x)}{2\sqrt{36 - x^2}}(2x) = 0$$

$$\rightarrow 2\sqrt{36 - x^2} = \frac{2x^2}{\sqrt{36 - x^2}} \rightarrow 36 - x^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 = 36$$

$$\rightarrow x^2 = 18 \rightarrow x = 3\sqrt{2}, y = 3\sqrt{2} \rightarrow S_{\max} = 2(3\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 36$$

روش دوم:

مطابق شکل زیر، از نسبت‌های مثلثاتی زاویه α استفاده می‌کنیم:



$$\sin \alpha = \frac{y}{6} \rightarrow y = 6 \sin \alpha, \cos \alpha = \frac{x}{6} \rightarrow x = 6 \cos \alpha$$

$$S = 2xy = 2(6 \cos \alpha)(6 \sin \alpha) = 72 \sin \alpha \cos \alpha = 72 \left(\frac{1}{2} \sin 2\alpha\right) = 36 \sin 2\alpha$$

این عبارت وقتی ماکزیمم است که $\sin 2\alpha = 1$ باشد، پس $S_{\max} = 36$ است.

۳۳-۳۵-۳۱

گزینه ۴

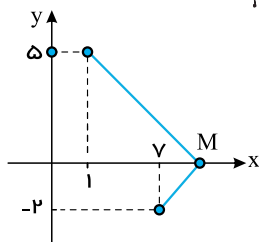
۳۵

فاصله دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از هم برابر $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ است.

$$d = AM - BM = \sqrt{(x-1)^2 + 25} - \sqrt{(x-7)^2 + 4}$$

نقطه $M(x, y)$ را در نظر می‌گیریم؛ داریم:

می‌خواهیم d ماکسیمم شود، بنابراین:



$$d' = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2 + 25}} - \frac{2(x-7)}{2\sqrt{(x-7)^2 + 4}} = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 25}} = \frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2 + 4}} \quad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + 25} = \frac{(x-7)^2}{(x-7)^2 + 4}$$

$$\Rightarrow (x-1)^2(x-7)^2 + 4(x-1)^2 = (x-7)^2(x-1)^2 + 25(x-7)^2 \rightarrow 4(x-1)^2 = 25(x-7)^2$$

$$\xrightarrow{x > 7} \Rightarrow 2|x-1| = 5|x-7| \rightarrow 2x-2 = 5x-35 \Rightarrow x = 11$$

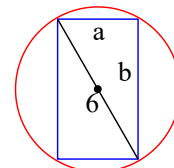
توجه کنید اگر $1 \leq x \leq 7$ باشد، معادله (۱) جواب ندارد و اگر $x < 1$ باشد، معادله $2|x-1| = 5|x-7|$ جواب ندارد.

۲۳-۴-۷۳

۳۶ گزینه ۲ مطابق شکل، مستطیل محاط در دایره را حول ضلع به طول b دوران می‌دهیم تا استوانه‌ای با ارتفاع b و شعاع قاعده a حاصل شود. بنابراین می‌خواهیم $V = \pi a^2 b$ ماکسیمم شود. از آنجا که $a^2 + b^2 = 36$ در نتیجه داریم:

$$a^2 = 36 - b^2 \Rightarrow V = \pi a^2 b = \pi(36 - b^2)b = \pi(36b - b^3)$$

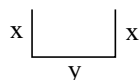
$$\Rightarrow V'(b) = \pi(36 - 3b^2) = 0 \Rightarrow b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3}$$



۵۸-۷-۳۶

۳۷ گزینه ۲

با توجه به شکل و فرض مسئله، $2x + y = 88$ است، پس $y = 88 - 2x$. تابع مساحت مستطیل برابر است با:



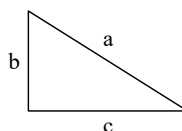
$$S(x, y) = xy \Rightarrow S(x) = x(88 - 2x) = 88x - 2x^2$$

برای به دست آوردن بیشترین مقدار تابع S ، از آن مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S'(x) = 88 - 4x = 0 \Rightarrow x = 22 \Rightarrow S_{\max} = S(22) = 22(88 - 44) = 22 \times 44 = 968$$

۴۴-۳-۵۲

است. فرض مسئله به صورت $a + b = 6$ است.



شکل مسئله به صورت

۳۸ گزینه ۲

$$a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \rightarrow (a+b)(a-b) = c^2 \rightarrow 6(a-b) = c^2 \rightarrow a-b = \frac{c^2}{6}$$

$$\text{پس: } \begin{cases} a+b=6 \\ a-b=\frac{c^2}{6} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a+b=6 \\ -a+b=-\frac{c^2}{6} \end{cases} \rightarrow 2b=6-\frac{c^2}{6} \rightarrow b=3-\frac{c^2}{12}$$

$$S = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}\left(3-\frac{c^2}{12}\right)(c) = \frac{1}{2}\left(3c-\frac{1}{12}c^3\right): \text{یک متغیره:}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق ۰}} \frac{1}{2}\left(3-\frac{1}{4}c^2\right) = 0 \rightarrow \frac{1}{4}c^2 = 3 \rightarrow c^2 = 12 \rightarrow c = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\xrightarrow{b=3-\frac{c^2}{12}} b = 3 - 1 = 2$$

$$\text{پس: } S_{\max} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(2)(2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

۶۵-۶-۲۹

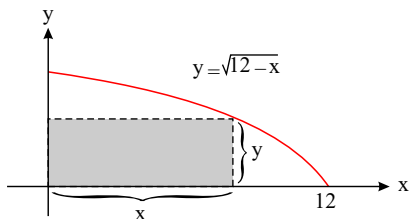
۳۹ گزینه ۱ نقطه B را روی منحنی در نظر می گیریم.

$$A \left| \begin{matrix} 5 \\ 0 \end{matrix} \right|, \left| \frac{x}{\sqrt{2x+7}} \right| \rightarrow AB = \sqrt{(5-x)^2 + (0-\sqrt{2x+7})^2} = \sqrt{25+x^2-10x+2x+7} = \sqrt{x^2-8x+32} \xrightarrow{\text{مشتق}=0} \frac{2x-8}{2\sqrt{x^2-8x+32}} = 0$$

$$\rightarrow x=4 \rightarrow \text{فاصله } Min = \sqrt{16-32+32} = 4$$

۶۷-۱۱-۲۱

۴۰ گزینه ۳



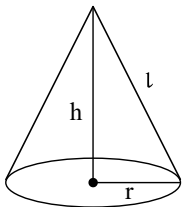
$$S = x \cdot y = x \cdot \sqrt{12-x} \xrightarrow{S'=0} \sqrt{12-x} + \frac{-1}{2\sqrt{12-x}}x = 0$$

$$\rightarrow \sqrt{12-x} = \frac{x}{2\sqrt{12-x}} \rightarrow 2(12-x) = x \rightarrow 24-2x = x$$

$$\rightarrow 3x = 24 \rightarrow x = 8 \rightarrow S_{Max} = 8\sqrt{12-8} = 8 \times 2 = 16$$

۳۲-۳۶-۳۲

۴۱ گزینه ۳



$$\text{حجم استوانه} = \frac{1}{3} \times \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow r^2 = \frac{1}{h}$$

$$\text{مساحت جانبی: } S = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi \sqrt{\frac{1}{h} + h^2} \rightarrow S = \pi \sqrt{h + \frac{1}{h^2}} \text{ یک متغیره:}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=0} \pi \times \frac{1 - \frac{2h}{h^3}}{2\sqrt{h + \frac{1}{h^2}}} = 0 \rightarrow 1 = \frac{2}{h^2} \rightarrow h^2 = 2 \rightarrow h = \sqrt{2}$$

۷۱-۶-۲۳

۴۲ گزینه ۱

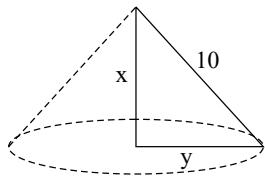
$$2x = y + 6 \rightarrow y = 2x - 6$$

$$\text{پس: } xy = x(2x-6) = 2x^2 - 6x \text{ یک متغیره:} \xrightarrow{\text{مشتق}=0} 4x - 6 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{y=2x-6} y = 3 - 6 = -3 \rightarrow x + y = \frac{3}{2} - 3 = -\frac{3}{2}$$

۵۱-۹-۴۰

۴۳ گزینه ۴ اگر مثلث قائم الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه اش دوران کند شکل حاصل، مخروط است.



دو متغیره : x (ارتفاع) (مساحت قاعده) $= \frac{1}{3} \pi y^2 x = V$ مخروط

$$x^2 + y^2 = 100 \rightarrow y^2 = 100 - x^2$$

یک متغیره : $V = \frac{1}{3} \pi x (100 - x^2) = \frac{100\pi}{3} x - \frac{1}{3} \pi x^3$ پس

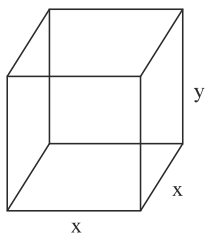
$$\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{100\pi}{3} - \pi x^2 = 0 \rightarrow \pi x^2 = \frac{100\pi}{3} \rightarrow x^2 = \frac{100}{3} \rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{3}} \xrightarrow{y^2 = 100 - x^2} y^2 = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3} \rightarrow y = \frac{\sqrt{200}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{بنابراین : } \frac{x}{y} = \frac{\frac{10}{\sqrt{3}}}{\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

۳۶-۴۵-۱۹

گزینه ۲

با توجه به شکل مقابل، مساحت کل مکعب در باز را بصورت تابعی بر حسب x می‌نویسیم.



$$V = x^2 y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x^2} \quad (1)$$

$$S = 4xy + x^2 \xrightarrow{(1)} S = 4x \times \frac{4}{x^2} + x^2 = x^2 + \frac{16}{x}$$

$$S' = 2x + \frac{0 - 16}{x^2} = \frac{2x^3 - 16}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 - 16 = 0 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \begin{array}{c|c} x & 2 \\ \hline S & - \quad 0 \quad + \\ \hline & \searrow \quad \nearrow \end{array}$$

طبق جدول فوق، به ازای $x = 2$ مقدار S مینیمم است.

$$S_{\min} = 2^2 + \frac{16}{2} = 4 + 8 = 12$$

۷۱-۵-۲۴

گزینه ۳

شکلی از سؤال را رسم می‌کنیم. مساحت مخروط را برحسب ارتفاع آن یافته و سپس مینیمم آن را حساب می‌کنیم.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h, \quad L^2 = h^2 + r^2$$

$$\frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{\pi}{3} \rightarrow r^2 h = 1 \rightarrow r^2 = \frac{1}{h}$$

$$S = \pi \sqrt{\frac{1}{h}} \times \sqrt{h^2 + \frac{1}{h}} = \pi \sqrt{h + \frac{1}{h}} \rightarrow S'(h) = 0 \rightarrow \text{کافیست مشتق زیر رادیکال را برابر صفر قرار دهیم.}$$

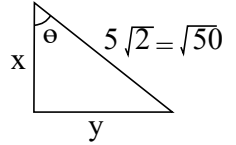
$$\rightarrow 1 - \frac{1}{h^2} = 0 \rightarrow h^2 = 1 \rightarrow h = \sqrt{1} = 1$$

۸۱-۵-۱۵

گزینه ۱

مطابق شکل فرض کنید $x = \sqrt{50} \cos \theta$, $y = \sqrt{50} \sin \theta$ باشد؛ در این صورت داریم:

$$P = 3x + 4y = 3(\sqrt{50} \cos \theta) + 4(\sqrt{50} \sin \theta)$$



می‌دانیم: $-\sqrt{A^2 + B^2} \leq A \sin \theta + B \cos \theta \leq \sqrt{A^2 + B^2}$

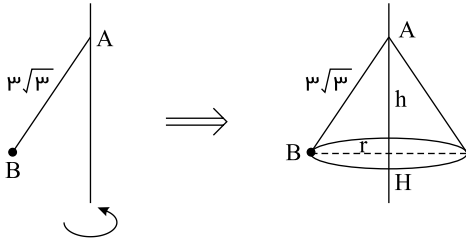
از آنجا که حداکثر مقدار عبارت $A \sin \theta + B \cos \theta$ برابر $\sqrt{A^2 + B^2}$ است، لذا حداکثر مقدار P برابر است با:

$$\max(P) = \sqrt{(3\sqrt{50})^2 + (4\sqrt{50})^2} = \sqrt{50(3^2 + 4^2)} = \sqrt{50 \times 25} = 25\sqrt{2}$$

۷۱-۶-۲۳

گزینه ۲

با توجه به شکل مقابل می‌خواهیم حجم مخروط بیشترین مقدار ممکن باشد. داریم:



$$r^2 + h^2 = (3\sqrt{3})^2$$

$$r^2 + h^2 = 27 \Rightarrow r^2 = 27 - h^2$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi}{3}h(27 - h^2) = \frac{\pi}{3}(27h - h^3)$$

مشتق V بر حسب h را به دست می‌آوریم:

$$V' = \frac{\pi}{3}(27 - 3h^2) = 0 \Rightarrow 27 - 3h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 9 \Rightarrow h = 3$$

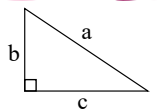
h	۳
V'	+
V	↗ ↘

طبق جدول فوق به ازای $h = 3$ مقدار V ماکزیمم است.

۸۱-۴-۱۴

گزینه ۲

ابتدا شکلی از سؤال را رسم می‌کنیم و ارتباط متغیرها را می‌نویسیم. طبق صورت سؤال داریم:



$$a + b = 6 \quad (1)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (a + b)(a - b) = c^2 \xrightarrow{(1)} 6(a - b) = c^2$$

$$\begin{cases} a - b = \frac{c^2}{6} \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b = -\frac{c^2}{6} \\ a + b = 6 \end{cases} \Rightarrow 2b = 6 - \frac{c^2}{6} \Rightarrow b = 3 - \frac{c^2}{12}$$

$$\text{مساحت: } S = \frac{bc}{2} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{c^2}{12}\right)c \Rightarrow S = \frac{3}{2}c - \frac{c^3}{24}$$

$$\Rightarrow S'_c = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \frac{c^2}{8} = 0 \xrightarrow{c>0} c = 2\sqrt{3}, b = 2 \Rightarrow S = 2\sqrt{3}$$

۶۳-۴-۳۳

گزینه ۱

یکی از عددها را x و دیگری را y در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases} 2x = y + 6 \\ P = xy = \min \end{cases} \Rightarrow P = x(2x - 6) = 2x^2 - 6x \Rightarrow P' = 4x - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{-3}{2}$$



۴۶-۱۱-۴۴

۵۰ گزینه ۳ نقطه α را روی منحنی $y^2 = 4x$ در نظر می‌گیریم.

یک متغیره: $AM = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\sqrt{\alpha} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 + 9 - 6\alpha + 4\alpha} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 9}$
 $\xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1(2\alpha - 2)}{2\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 9}} = 0 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow AA' = \sqrt{1 - 2 + 9} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

۲۵-۴۲-۳۳

۵۱ گزینه ۴

دامنه تابع برابر $x \in (0, +\infty)$ است. در نتیجه نقاط بحرانی تابع را به دست می‌آوریم. لذا داریم:

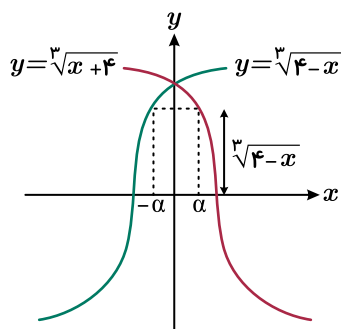
$$y = \frac{3a}{\sqrt[4]{a^3 \cdot x}} + \frac{x}{\sqrt[4]{a^3 \cdot x}} \Rightarrow y = 3a^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}} + a^{-\frac{3}{4}} x^{\frac{3}{4}} \Rightarrow y' = 3a^{\frac{1}{4}} \times \frac{-1}{4} x^{-\frac{5}{4}} + \frac{3}{4} a^{-\frac{3}{4}} x^{-\frac{1}{4}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} a^{\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{x^5}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Rightarrow x = a \Rightarrow f(a) = \frac{3a + a}{\sqrt[4]{a^3 a}} = 4$$

لذا حداقل مقدار تابع برابر ۴ است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

۸۲-۸-۱۰

۵۲ گزینه ۴ در مسائل مربوط به بهینه‌سازی، ابتدا ضابطه عبارتی که باید بهینه شود را می‌نویسیم و ریشه یا ریشه‌های مشتق آن را محاسبه می‌کنیم و سپس ریشه‌های مشتق را در تابع اصلی قرار می‌دهیم.

عرض $\times$ طول = مساحت مستطیل

$$\text{مساحت: } S = 2a \sqrt[3]{4-a}$$

$$S' = 2\sqrt[3]{4-a} - \frac{2a}{3\sqrt[3]{(4-a)^2}} = 0$$

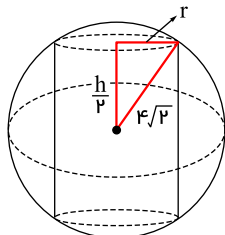
$$\Rightarrow \frac{6(4-a) - 2a}{3\sqrt[3]{(4-a)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{24 - 8a}{3\sqrt[3]{(4-a)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow a = 3 \Rightarrow S(3) = 2 \times 3\sqrt[3]{4-3} = 6$$

۴۱-۳۹-۱۹

۵۳ گزینه ۲ مطابق شکل روبه‌رو، استوانه‌ای به شعاع r و ارتفاع را محاط در کره‌ای به شعاع $4\sqrt{2}$ رسم می‌کنیم.

$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi r \times h$$



مساحت جانبی را برحسب h می‌نویسیم و نقاط بحرانی تابع $S(h)$ را به دست می‌آوریم. طبق فیثاغورس داریم:

$$(4\sqrt{2})^2 = r^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = 32 - \frac{h^2}{4} \Rightarrow r = \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}}$$

پس:

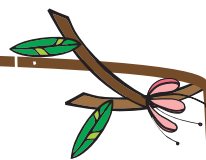
$$S_{\text{جانبی}} = 2\pi \times \sqrt{32 - \frac{h^2}{4}} \times h$$

$$\Rightarrow S = 2\pi \times \sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}} \Rightarrow S' = 2\pi \times \frac{64h - h^3}{2\sqrt{32h^2 - \frac{h^4}{4}}}$$

$$S' = 0 \xrightarrow{h > 0} \begin{cases} h = 0 \text{ غ.ق.ق.} \\ h = 8 \Rightarrow r = \sqrt{32 - \frac{8^2}{4}} = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\text{max}} = 2\pi \times 4 \times 8 = 64\pi$$

۳۸-۴۴-۱۹



می‌خواهیم زاویه $\hat{AMB}$ ماکسیمم باشد. می‌دانیم در هر مثلث، اندازه زاویه خارجی یک رأس برابر با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن است.

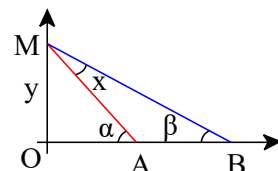
گزینه ۲ ۵۴

$$\alpha = x + \beta \Rightarrow x = \alpha - \beta$$

$$\tan x = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad (1)$$

$$\tan \alpha = \frac{OM}{OA} = \frac{y}{\frac{1}{2}}, \quad \tan \beta = \frac{OM}{OB} = \frac{y}{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \tan x = \frac{\frac{\frac{y}{\frac{1}{2}} - \frac{y}{\frac{1}{4}}}{1 + \frac{y}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{y}{\frac{1}{4}}}} = \frac{5y}{y^2 + 36} = f(y)$$



زاویه x زمانی ماکسیمم است که $\tan x$ ماکسیمم باشد:

$$f'(y) = 5 \times \frac{(y^2 + 36) - 2y^2}{(y^2 + 36)^2} = 0 \Rightarrow y^2 = 36 \xrightarrow{y > 0} y = 6$$

نکته: در حالت کلی وقتی x ماکسیمم است که $OM^2 = OA \times OB$ باشد.

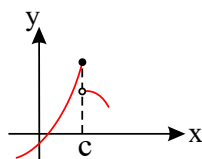
۸۴-۳-۱۲

نقطه‌ای ماکسیمم مطلق است که مقدار تابع در آن نقطه بزرگ‌تر یا مساوی مقدار تابع در همه نقاط دامنه باشد و نقطه‌ای مینیمم مطلق است که مقدار تابع در آن نقطه کوچک‌تر یا مساوی مقدار تابع در همه نقاط دامنه باشد.

گزینه ۴ ۵۵

نکته: اگر f در همسایگی c تعریف شده باشد و نقطه $M|_{f(c)}$ اکسترمم مطلق باشد، در این صورت نقطه M اکسترمم نسبی تابع f نیز خواهد بود.

برای گزینه‌های دیگر مثال نقض زیر وجود دارد. در تابع $f(x)$ به شکل زیر، نقطه c ماکسیمم مطلق بوده ولی ناپیوسته و در نتیجه مشتق‌ناپذیر است و خط مماس نیز افقی نیست.



۵۰-۲۴-۲۶

نقطه $A(x, \frac{2}{x^2})$ را روی منحنی در نظر گرفته و فاصله آن را از مبدأ $O(0, 0)$ محاسبه می‌کنیم. لذا داریم:

گزینه ۲ ۵۶

$$OA = \sqrt{(x-0)^2 + (\frac{2}{x^2}-0)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^4}}$$

لذا کافی است حداقل مقدار $x^2 + \frac{4}{x^4}$ را به دست آوریم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$x^2 + \frac{4}{x^4} \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x - \frac{16}{x^5} = 0 \Rightarrow x^6 = 8 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow (OA)_{\min} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{(x^2)^2}} = \sqrt{2 + \frac{4}{2^2}} = \sqrt{3}$$

۷۱-۸-۲۲

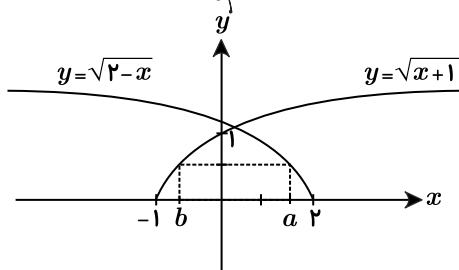
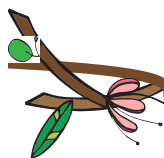
اگر دو رأس مستطیل روی محور x و رئوس دیگر روی منحنی در روبه‌رو باشد، داریم:

گزینه ۴ ۵۷

$$\sqrt{2-a} = \sqrt{1+|b|} \Rightarrow b = a-1$$

$$\Rightarrow S(a) = (2a-1) \cdot \sqrt{2-a}, \quad S'(a) = 2\sqrt{2-a} - \frac{2a-1}{2\sqrt{2-a}} = 0$$

$$\Rightarrow 4(2-a) - 2a + 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}, \quad b = \frac{-1}{2} \Rightarrow S(a) = \sqrt{2}$$



۷۶-۸-۱۶

گزینه ۱ ۵۸ فرض می‌کنیم طول نقطه مورد نظر α ($\alpha \geq 0$) باشد، داریم:باید فاصله نقاط A و B مینیمم شود، داریم:

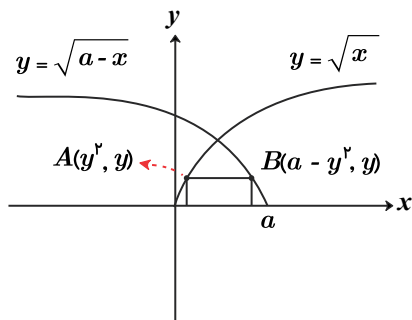
$$|AB| = d = \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha\sqrt{\alpha} - 0)^2} = \sqrt{\alpha^2 - 16\alpha + 64 + \alpha^3}$$

$$d'_\alpha = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha - 16}{2\sqrt{\alpha^3 + \alpha^2 - 16\alpha + 64}} = 0 \Rightarrow 3\alpha^2 + 2\alpha - 16 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{6} = \frac{-2 \pm 14}{6} \stackrel{\alpha \geq 0}{=} 2$$

$$d = \sqrt{(2-1)^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+8} = \sqrt{9} = 3$$

۶۹-۸-۲۳

گزینه ۳ ۵۹

با توجه به شکل دو نقطه A و B دارای عرض مساوی هستند و بنابراین مختصات نقاط A و B به صورت زیر خواهند بود:

$$A(y^r, y) \quad B(a - y^r, y)$$

پس ابعاد مستطیل مطلوب به صورت $2y^r - a$ و y خواهد بود که در این صورت مساحت آن برابر است با:

$$S = y(a - 2y^r) \Rightarrow S = ay - 2y^r$$

$$S' = a - 4y^r = 0 \Rightarrow y^r = \frac{a}{4} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{a}{4}}$$

$$S_{max} = \sqrt{\frac{a}{4}} \left(a - \frac{a}{2}\right) = \sqrt{2} \Rightarrow \frac{a}{4} \times \frac{4a^r}{9} = 2$$

$$\Rightarrow a^r = 27 \Rightarrow a = 3$$

۸۲-۴-۱۴

گزینه ۲ ابتدا دامنه تابع را می‌یابیم:

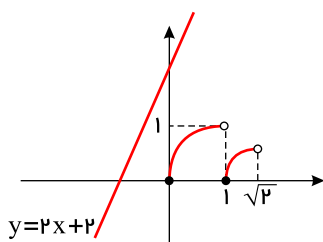
$$y = \sqrt{x - [x^r]} \rightarrow x - [x^r] \geq 0 \rightarrow x \geq [x^r]$$

$$\xrightarrow{\text{باز هندی}} \begin{cases} 0 \leq x < 1 \rightarrow x \geq 0 \\ 1 \leq x < \sqrt{2} \rightarrow x \geq 1 \end{cases} \rightarrow D_y = [0, \sqrt{2}]$$

مطابق شکل، کمترین فاصله نقاط تابع، مربوط به نمودار سمت چپ است. پس $[x^r] = 0$ و نقطه را به صورت $P(x, \sqrt{x})$ می‌گیریم، پس:

$$h(x) = \frac{|2x - \sqrt{x} + 2|}{\sqrt{5}} \xrightarrow{\text{مشتق}} h'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \min(h) = \frac{\left|2\left(\frac{1}{16}\right) - \frac{1}{4} + 2\right|}{\sqrt{5}} = \frac{15}{8\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{8}$$



گزینه ۶۱

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{8 - x^2} \xrightarrow{y \geq 0} y^2 = \frac{9}{4} (8 - x^2) \rightarrow 4y^2 + 3x^2 = 24, (y \geq 0)$$

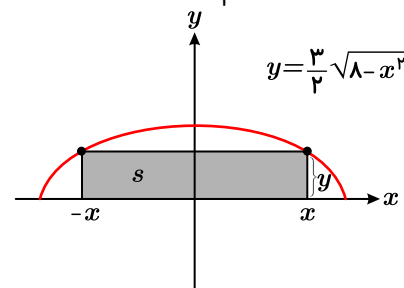
بنابراین نمودار تابع به صورت یک نیم بیضی به مرکز مبدأ مختصات است.

ابتدا نمودار $y = \frac{3}{2} \sqrt{8 - x^2}$ را رسم می‌کنیم. طول و عرض مستطیل مطابق شکل، برابر $2x$ و $\frac{3}{2} \sqrt{8 - x^2}$ است و داریم:

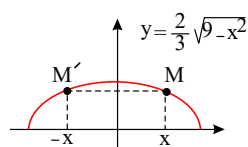
$$S_{\text{مستطیل}} = 2x \times \frac{3}{2} \sqrt{8 - x^2} = 3x \sqrt{8 - x^2} \Rightarrow S = 3 \sqrt{8x^2 - x^4}$$

$$S'_x = 3 \times \frac{16x - 4x^3}{2 \sqrt{8x^2 - x^4}} = 0 \Rightarrow (4x - x^3) = 0 \Rightarrow (x)(4 - x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق غ} \\ x = 2 \\ x = -2 \text{ ق غ} \end{cases}$$

$$S_{\text{max}} = S(2) = 3 \times 2 \times \sqrt{8 - 2^2} = 3 \times 2 \times 2 = 12$$



گزینه ۱



فرض کنید دو نقطه دلخواه $M(x, \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2})$ و $M'(-x, \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2})$ روی منحنی باشد، در این صورت مساحت مستطیل برابر است با:

$$S = 2x \times \frac{2}{3} \sqrt{9 - x^2} = \frac{4}{3} \sqrt{x^2(9 - x^2)}$$

در عبارت $x^2(9 - x^2)$ مجموع دو جمله x^2 ، $9 - x^2$ مقداری ثابت است لذا مساحت زمانی حداکثر خواهد شد که دو جمله با یکدیگر برابر باشند، در نتیجه داریم:

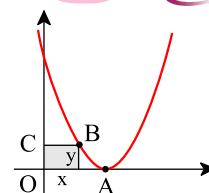
$$x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow S = \frac{4}{3} \sqrt{x^2(9 - x^2)} = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{9}{2} \times \frac{9}{2}} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{2} = 6$$

گزینه ۳

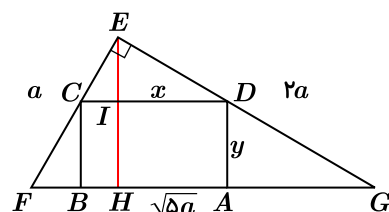
$$S_{\square OABC} = \text{عرض} \times \text{طول} = x \times y \Rightarrow S_{\square OABC} = x(x - 2)^2 \Rightarrow S' = (x - 2)^2 + 2x(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 2 + 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ق غ} \\ x = \frac{2}{3} \text{ ق غ} \end{cases}$$

$$x = \frac{2}{3} \Rightarrow S_{\text{max}} = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} - 2 \right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{16}{9} = \frac{32}{27}$$



گزینه ۴



$$FG = \sqrt{4a^2 + a^2} \Rightarrow FG = \sqrt{5a}$$

$$EF \times EG = EH \times FG \Rightarrow EH = \frac{a \times 2a}{\sqrt{5a}} \Rightarrow EH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

با استفاده از قضیه تالس داریم:



$$\frac{CD}{FG} = \frac{EI}{EH} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{\delta}a} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{\delta}} - y}{\frac{2a}{\sqrt{\delta}}} \Rightarrow \frac{2x}{\delta} = \frac{2a}{\sqrt{\delta}} - y \Rightarrow y = \frac{2a}{\sqrt{\delta}} - \frac{2x}{\delta} \quad (1)$$

$$S = xy \Rightarrow S = x \times \left(\frac{2a}{\sqrt{\delta}} - \frac{2x}{\delta} \right) = \frac{2ax}{\sqrt{\delta}} - \frac{2x^2}{\delta} \rightarrow S' = 0 \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{\delta}} - \frac{4x}{\delta} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{\delta}}{2}a \xrightarrow{(1)} b = \frac{a}{\sqrt{\delta}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{\delta}}{2}a}{\frac{a}{\sqrt{\delta}}} = \frac{\delta}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = 2, \delta$$

۳۶-۳۸-۲۶

۶۵ گزینه ۲ توجه کنید قرینه نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \right|$ نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم $A' \left| \begin{smallmatrix} -y \\ -x \end{smallmatrix} \right|$ است. اکنون نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ -\sqrt{\alpha} \end{smallmatrix} \right|$ را روی تابع f در نظر می‌گیریم. بنابراین قرینه آن نسبت به نیمساز ناحیه دوم و چهارم $A' \left| \begin{smallmatrix} \sqrt{\alpha} \\ -\alpha \end{smallmatrix} \right|$ است.

یک متغیره : $AA' = \sqrt{(\alpha - \sqrt{\alpha})^2 + (-\sqrt{\alpha} + \alpha)^2} = \sqrt{(\alpha - \sqrt{\alpha})^2 + (\alpha - \sqrt{\alpha})^2} = \sqrt{2(\alpha - \sqrt{\alpha})^2} = \sqrt{2}|\alpha - \sqrt{\alpha}| \xrightarrow{\text{داخل قدرمطلق منفی}} -\sqrt{2}(\alpha - \sqrt{\alpha})$

مشتق $\rightarrow -\sqrt{2}(1 - \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}) = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha} - 1}{2\sqrt{\alpha}} = 0 \rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\alpha} - 1 = 0 \rightarrow \sqrt{2}\sqrt{\alpha} = 1 \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

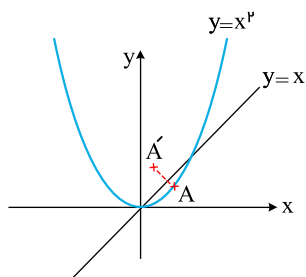
$$AA' = -\sqrt{2}(\alpha - \sqrt{\alpha}) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}\left(\frac{-2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

۳۸-۴۶-۱۷

۶۶ گزینه ۳

نقطه A روی سهمی است، پس مختصات آن به صورت $A(\alpha, \alpha^2)$ خواهد بود. همچنین نقطه A' قرینه A نسبت به خط $y = x$ است، پس $A'(\alpha^2, \alpha)$ فاصله این دو نقطه از هم برابر است با:

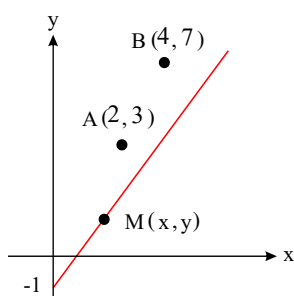


$$|AA'| = \sqrt{(\alpha^2 - \alpha)^2 + (\alpha - \alpha^2)^2} = \sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2} = d$$

$$\frac{d}{\rightarrow} d' = \frac{4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha}{2\sqrt{2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 2\alpha^2}} \xrightarrow{d'=0} 4\alpha^3 - 12\alpha^2 + 4\alpha = 0$$

$$\Rightarrow 4\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{بین دو نقطه تقاطع}} \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow d = |AA'| = \sqrt{2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



نقطه $M(x, y)$ را روی خط $y = x - 1$ در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم حاصل $|MA - MB|$ بیشترین مقدار ممکن باشد:

$$f(x) = MA - MB = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-7)^2}$$

$$\xrightarrow{y=x-1} f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (x-8)^2}$$

از تابع f مشتق گرفته و برابر صفر قرار می‌دهیم تا طول نقطه اکسترمم آن به دست آید:

$$f'(x) = \frac{(x-2) + (x-4)}{\sqrt{(x-2)^2 + (x-4)^2}} - \frac{(x-4) + (x-8)}{\sqrt{(x-4)^2 + (x-8)^2}} = 0 \Rightarrow \frac{2(x-3)}{\sqrt{2(x^2-6x+10)}} = \frac{2(x-6)}{\sqrt{2(x^2-12x+40)}} \quad (1)$$

برای تسریع در حل سؤال، تساوی اخیر را ساده و آن را معکوس کرده و به توان ۲ می‌رسانیم که در آن صورت داریم:

$$\frac{(x-3)^2 + 1}{(x-3)^2} = \frac{(x-6)^2 + 4}{(x-6)^2} \Rightarrow \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{4}{(x-6)^2}$$

$$\Rightarrow |x-6| = 2|x-3| \Rightarrow \begin{cases} x-6 = 2(x-3) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow |f(0)| = 2\sqrt{5} \\ x-6 = -2(x-3) \Rightarrow x = 4 \text{ غ.ق.ی} \end{cases}$$

به ازای $x = 0$ بیشترین مقدار تفاضل M از A و B توجه کنید که به ازای $x = 4$ معادله (۱) جواب ندارد، پس قابل قبول نیست.

برای اینکه تابع صعودی باشد مشتق باید همواره مثبت باشد و شرط آنکه یک عبارت درجه دوم، مثبت باشد آن است که $\Delta < 0$ و ضریب x^2 منفی باشد.

$$y' = 3x^2 + 2ax + 1 \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 \text{ ضریب} > 0 \rightarrow 3 > 0 \\ \Delta \leq 0 \rightarrow 4a^2 - 12 \leq 0 \rightarrow a^2 \leq 3 \rightarrow -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} \rightarrow |a| \leq \sqrt{3} \end{cases}$$

تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر است. از تابع، مشتق گرفته و کوچک‌تر از صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = 3(x-1)^2(x+1) + (x-1)^3 = (x-1)^2(3(x+1) + x-1) = \underbrace{(x-1)^2}_{+}(4x+2) < 0$$

$$\rightarrow 4x+2 < 0 \rightarrow 4x < -2 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

برای بررسی صعودی یا نزولی بودن تابع مشتق اول را بررسی می‌کنیم ضمناً برای آنکه تابع، صعودی باشد باید $y' > 0$ باشد.

$$y' = -8x \rightarrow \frac{x}{y'} \begin{array}{c|ccc} -\infty & 0 & +\infty \\ \hline & + & 0 & - \end{array} \rightarrow x < 0$$

تابعی که در دامنه خود اکیداً صعودی ($f' > 0$) یا اکیداً نزولی باشد ($f' < 0$) یک‌به‌یک است.

$$۱) f(x) = x + \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0 \quad \text{اکیداً صعودی}$$

$$۲) g(x) = x - \sqrt{x} \rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{غیریکنوا}$$

$$۳) h(x) = 2x + \frac{1}{x} \rightarrow h'(x) = 2 - \frac{1}{x^2} \quad \text{غیریکنوا}$$

$$۴) p(x) = \frac{x}{x^2+1} \rightarrow p'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \quad \text{غیریکنوا}$$

گزینه ۱، اکیداً صعودی است پس یک‌به‌یک است.

تابع بر $x = 2$ دارای مجانب قائم است. تابع f' را حساب کرده و آن را تعیین علامت می‌کنیم:



$$y' = \frac{4x^3(x^3 - 8) - 3x^2(x^4)}{(x^3 - 8)^2} = \frac{4x^6 - 32x^3 - 3x^6}{(x^3 - 8)^2} = \frac{x^6 - 32x^3}{(x^3 - 8)^2} \xrightarrow{y'=0} x^6 - 32x^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{32} = 2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

x	0	2	$2\sqrt[3]{4}$
y'	+	-	-
y	↗	↘	↗

مجانِب قائم

تابع در بازه‌های $(0, 2)$ و $(2, 2\sqrt[3]{4})$ اکیدا نزولی است؛ بازه بزرگ‌تر $(0, 2)$ است که طول آن برابر با ۲ است.
۱۵-۵۳-۳۲

گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} + x & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{x} - x & x \leq 0 \end{cases}$$

وقتی $x \geq 0$ تابع f مجموع دو تابع اکیدا صعودی است. پس خود نیز اکیدا صعودی است. به ازای $x < 0$ باید نامعادله $f'(x) \geq 0$ را حل کنیم تا بازه‌ای را که تابع در آن صعودی است، بیابیم:

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - 1 = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}} \geq 0 \Rightarrow 1 - \sqrt[3]{x^2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \xrightarrow{x < 0} -1 \leq x < 0.$$

پس تابع روی بازه $[-1, +\infty)$ اکیدا صعودی است.

توجه: تابع در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر اما پیوسته است؛ از آنجا که تابع در دو طرف این نقطه اکیدا صعودی است، یکنوایی تابع در این نقطه تغییر نمی‌کند، پس تابع روی $[-1, +\infty)$ صعودی است.
۶۵-۱۶-۱۹

گزینه ۳ تابع روی $R - \{\pm\sqrt{2}\}$ مشتق‌پذیر است. نامعادله $f'(x) \leq 0$ را حل می‌کنیم تا بازه‌هایی را که در آنها تابع اکیدا نزولی است بیابیم:

x	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
f(x)	-	+	+	-	-	+	+

$$f'(x) = \frac{4x^3(x^2 - 2) - 2x(x^4 - 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x^5 - 8x^3 + 6x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^4 - 4x^2 + 3)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{2x(x^2 - 1)(x^2 - 3)}{(x^2 - 2)^2}$$

چون $-2 < x < 2$ ، پس تابع در چهار بازه $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2})$ ، $(-\sqrt{2}, -1)$ ، $(1, \sqrt{2})$ و $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ اکیدا نزولی است.
۷۲-۱۳-۱۵

گزینه ۲ از تابع f ، مشتق می‌گیریم. تابع f' را در دامنه f یعنی $[0, +\infty)$ تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}} \xrightarrow{x \geq 0} f'(x) > 0.$$

$D_f : x \geq 0$ و تابع در $x = 1$ دارای مجانب قائم است، پس نمی‌تواند در کل بازه $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ صعودی باشد و گزینه ۱ نادرست است. در آخر اینکه با توجه به نامنفی بودن x ، مشتق تابع همواره مثبت است.

x	0	1
y'	+	+
y	↗	↗

مجانِب قائم

پس تابع در بازه‌های $(0, 1)$ و $(1, +\infty)$ صعودی است، ولی در اجتماع آنها صعودی نیست.

۱۵-۵۲-۳۳

گزینه ۲ دو نقطه به طول‌های ۳ و ۵- نقاط بحرانی تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ هستند. پس به‌ازای این دو طول، مشتق تابع برابر صفر می‌شود. داریم:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f'(-5) = 0 \Rightarrow 75 - 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -45$$

حال با معلوم شدن ضابطه f ، برای تعیین عرض منبسط نسبی این تابع، ابتدا طول منبسط نسبی را از روی ریشه‌های ساده f' مشخص می‌کنیم و با جایگذاری طول منبسط نسبی در تابع، عرض آن را محاسبه می‌نماییم. اما با توجه به صورت تست، $x = 3$ ، $x = -5$ همان طول نقاط اکسترم نسبی تابع هستند.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 45x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 6x - 45 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 5)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-5	3	$+\infty$
f'		$+$	$-$	$+$
f		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		Max	Min	

$$y_{Min} = f(3) = 27 + 27 - 135 = -81$$

۵۴-۷-۳۹

گزینه ۱ ۷۷

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12x + 8 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + \frac{8}{3} = 0$$

برای حل این معادله درجه سوم دقت کنید که چون مجموع ضرایب آن صفر است یک ریشه معادله $x = 1$ می باشد و معادله بر $x - 1$ بخش پذیر است.

$$(x - 1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 2)(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)^2(x + 2) = 0 \rightarrow x = 1, x = -2$$

با استفاده از آزمون مشتق اول، داریم:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$+$
y		$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		Min		

تابع یک Min نسبی دارد.

۴۹-۲۲-۲۹

گزینه ۱ ۷۸

از تابع مشتق می گیریم.

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x + a} \rightarrow f'(x) = \frac{(3x^2 - 2)(x + a) - (x^3 - 2x)}{(x + a)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^3 + 3ax - 2x^2 - 2a - x^3 + 2x = 0 \Rightarrow 2x^3 + 3ax - 2a = 0$$

معادله $f'(x) = 0$ باید دارای ریشه ساده باشد، پس Δ باید مثبت باشد.

$$\Delta > 0 \rightarrow 4a^3 + 12a > 0 \Rightarrow a^3 + 3a > 0 \Rightarrow a(a + 3) > 0 \Rightarrow \begin{cases} a < -3 \\ \text{یا} \\ a > 0 \end{cases}$$

۵۸-۱۲-۳۰

گزینه ۱ ۷۹

روش اول:

$$x \geq 0 \rightarrow f(x) = x^3 - 2x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$x < 0 \rightarrow f(x) = -x^3 - 2x \rightarrow f'(x) = -3x^2 - 2 = 0 \rightarrow x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		Max	Min	

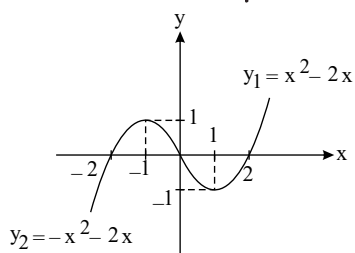
$$\begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad AB = \sqrt{(-1 - 1)^2 + (1 + 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

روش دوم:

می توانیم نمودار تابع داده شده را رسم کنیم.

$$x \geq 0 \rightarrow y = x^3 - 2x \rightarrow S \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}, \quad x = 0, 2 \quad \text{ها } x \text{ محور}$$

$$x < 0 \rightarrow y = -x^3 - 2x \rightarrow S \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad x = 0, -2 \quad \text{ها } x \text{ محور}$$



$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad AB = \sqrt{(-1-1)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

۲۳-۴۴-۳۴

گزینه ۴ روش اول:

$x = 4$ ریشه ساده داخل قدر مطلق است (نقطه گوشه) بنابراین در $x = 4$ مشتق وجود ندارد (بحرانی).

$$f(x) = \begin{cases} x(x-4) & x \geq 4 \\ -x(x-4) & x < 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} x^2 - 4x & x \geq 4 \\ -x^2 + 4x & x < 4 \end{cases} \rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & x > 4 \\ -2x + 4 & x < 4 \end{cases}$$

اگر مشتق را مساوی صفر قرار دهیم $x = 2$ به دست می‌آید.

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		Max	Min	

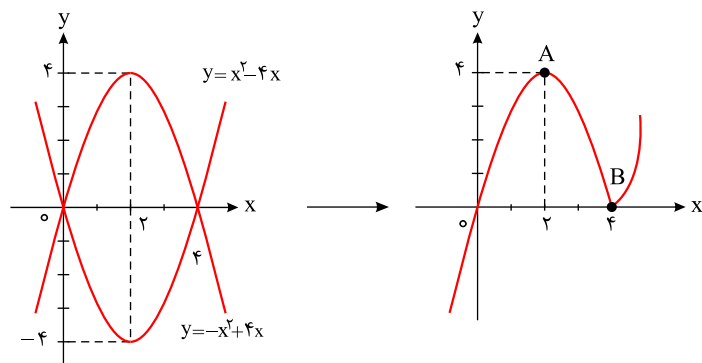
$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{(2-4)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

روش دوم:

می‌توانیم نمودار تابع داده شده را رسم کنیم.

$$x \geq 4 \rightarrow y = x^2 - 4x \rightarrow S \Big|_{-4}^2 \quad \text{و} \quad x = 0, 4 \text{ ها} \quad \text{محل برخورد تابع با محور}$$

$$x < 4 \rightarrow y = -x^2 + 4x \rightarrow S \Big|_{-4}^2 \quad \text{و} \quad x = 0, 4 \text{ ها} \quad \text{محل برخورد تابع با محور}$$



$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} \begin{vmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AB = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۲۹-۳۸-۳۳

گزینه ۳ $x = 4$ طول نقطه‌ی Max است، بنابراین مشتق به ازای $x = 4$ برابر صفر است.

$$y = ax^3 + bx^2 - 16 \rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx \xrightarrow{y'(4)=0} 0 = 48a + 8b \rightarrow 6a + b = 0$$

نقطه‌ی 4 روی تابع قرار دارد پس در تابع صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{\text{صدق در تابع}} 0 = 64a + 16b - 16 \rightarrow 0 = 4a + b - 1 \rightarrow 4a + b = 1$$

$$\begin{cases} 6a + b = 0 \\ 4a + b = 1 \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = 3$$

۵۹-۵-۳۶

گزینه ۳

از تابع مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی آن را به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از آزمون مشتق اول، اکسترم‌های تابع را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x) = 4x^2 + 4x^2 - 8x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		Min	Max	Min	

پس، طول نقطه Max نسبی تابع برابر صفر است.

۵۷-۱۰-۳۳

گزینه ۱ توجه کنید دامنه تعریف تابع $[0, 4]$ است.

$$f(x) = x + \sqrt{4x - x^2} \rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1(4 - 2x)}{2\sqrt{4x - x^2}} \rightarrow \frac{2x - 4}{2\sqrt{4x - x^2}} = 1 \rightarrow \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}} = 1 \rightarrow \sqrt{4x - x^2} = x - 2 \rightarrow 4x - x^2 = x^2 + 4 - 4x$$

$$\rightarrow 2x^2 - 8x + 4 = 0 \rightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 16 - 8 = 8 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{4 + \sqrt{8}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2} \\ x = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 - \sqrt{2} & 2 + \sqrt{2} & 4 \\ \hline y' & & - & 0 & + \\ \hline y & & & \nearrow 2 + 2\sqrt{2} & \searrow \\ & & & \text{Max} & \end{array}$$

$$\begin{cases} A \begin{vmatrix} 2 + \sqrt{2} \\ 2 + 2\sqrt{2} \end{vmatrix} \\ y = x \rightarrow x - y = 0 \end{cases} \rightarrow AH = \frac{|2 + \sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ بدست می‌آید.

۳۳-۴۹-۱۸

گزینه ۳ اگر تابع f در نقطه c دارای اکسترم نسبی باشد، الزاماً f در یک همسایگی، تعریف می‌شود اگر c طول Max نسبی باشد $f(c)$ از مقادیر تابع در یک همسایگی c بزرگ‌تر بوده یا مساوی با آن‌هاست و اگر c طول Min نسبی باشد، $f(c)$ از مقادیر تابع در یک همسایگی c کوچک‌تر بوده یا مساوی با آن‌هاست.

۳۲-۲۹-۳۹

گزینه ۲

مختصات نقطه اکسترم تابع، در خود تابع صدق می‌کند و مشتق را برابر با صفر می‌کند.

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \frac{a}{x} + bx^2 \xrightarrow{(1,-2) \in f} \frac{a}{1} + b(1) = -2 \Rightarrow a + b = -2 \\ f'(x) &= \frac{-a}{x^2} + 2bx \xrightarrow{f'(1)=0} 0 = -a + 2b \Rightarrow a - 2b = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = \frac{-4}{3}, b = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-4}{3x} - \frac{2}{3}x^2$$

برای محاسبه نوع اکسترم، $f'(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم. در نتیجه داریم:

$$f'(x) = \frac{4}{3x^2} - \frac{4}{3}x = \frac{4}{3} \times \frac{(1-x^3)}{x^2}$$

x	0	1
f'	$+$	$-$
f	$\nearrow$	$\searrow$

$\Rightarrow x = 1$ نقطه ماکزیمم نسبی

روش دوم: برای محاسبه مجهولات a و b ، می‌دانیم در توابع کسری مختصات اکسترم در هویپیتال تابع صدق می‌کند.

$$y = \frac{a}{x} + bx^2 \xrightarrow{HOP} y_H = 3bx^2$$

$$\begin{cases} y_H(1) = -2 \rightarrow 3b = -2 \rightarrow b = -\frac{2}{3} \\ y(1) = -2 \rightarrow a + b = -2 \rightarrow a - \frac{2}{3} = -2 \rightarrow a = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

۶۱-۱۰-۲۹



۸۶ گزینه ۱ در همسایگی $x = -1$ مقدار x منفی است و تابع را می توان به صورت زیر نوشت:

$$y = x^2|x| + 3ax^2 + b = x^2(-x) + 3ax^2 + b$$

$$y = -x^3 + 3ax^2 + b, \text{ اکستریم نسبی } A(-1, 1)$$

مشتق به ازای $x = -1$ برابر صفر است.

$$y' = -3x^2 + 6ax \xrightarrow{x=-1} -3 - 6a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + b$$

مختصات نقطه $A(-1, 1)$ در تابع صدق می کند.

$$1 = -(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 + b \Rightarrow 1 = 1 - \frac{3}{2} + b \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

۳۰-۳۵-۳۶

۸۷ گزینه ۳ برای پیدا کردن طول نقاط A و B ، مشتق تابع f را به دست آورده و مساوی صفر قرار می دهیم.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \xrightarrow{\div 6} x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

جایگذاری در ضابطه f $\Rightarrow \begin{cases} A(-1, 8) \\ B(2, -19) \end{cases} \Rightarrow m_{AB} = \frac{8 - (-19)}{-1 - 2} = -9 \Rightarrow$ شیب خطی که از نقاط اکستریم نسبی تابع عبور می کند.

نقاط مدنظر باید دارای مشتق ۹- باشند تا شیب خط مماس بر آنها موازی پاره خط AB باشد.

$$6x^2 - 6x - 12 = -9 \Rightarrow 6x^2 - 6x - 3 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} 2 \text{ جواب دارد.}$$

یعنی ۲ نقطه یافت می شود.

۳۴-۵۰-۱۶

۸۸ گزینه ۱

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1} \rightarrow f'(x) = \frac{(2x + 2)(x^2 + 1) - 2x(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 1)^2} \rightarrow f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + 2x^2 + 2 - 2x^3 - 4x^2 + 6x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 8x + 2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow -2x^2 + 8x + 2 = 0$$

$$\rightarrow x^2 - 4x - 1 = 0 \rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 4 = 20 \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5} \\ x_2 = \frac{4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5} \end{cases} \rightarrow$$

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	$-$
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

برای پیدا کردن عرض ماکسیمم، کافی است $2 + \sqrt{5}$ را در تابع قرار دهیم.

$$f(2 + \sqrt{5}) = \frac{(2 + \sqrt{5})^2 + 2(2 + \sqrt{5}) - 3}{(2 + \sqrt{5})^2 + 1} = \frac{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 4 + 2\sqrt{5} - 3}{4 + 5 + 4\sqrt{5} + 1}$$

$$= \frac{6\sqrt{5} + 10}{4\sqrt{5} + 10} = \frac{2(3\sqrt{5} + 5)}{2(2\sqrt{5} + 5)} = \frac{3\sqrt{5} + 5}{2\sqrt{5} + 5} \times \frac{2\sqrt{5} - 5}{2\sqrt{5} - 5}$$

$$= \frac{30 - 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} - 25}{20 - 25} = \frac{5 - 5\sqrt{5}}{-5} = \frac{-5(-1 + \sqrt{5})}{-5} = -1 + \sqrt{5}$$

۲۱-۱۰-۶۹

۸۹ گزینه ۲ نقطه $A(0, 4)$ نقطه ماکزیمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ است، پس داریم:

$$f(0) = 4 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$$



$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 2a = 0 \Rightarrow x = -\frac{2a}{3} \end{cases}$$

$x = -\frac{2a}{3}$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است که در این نقطه مقدار تابع نیز صفر است.

$$f(-\frac{2a}{3}) = 0 \Rightarrow (-\frac{2a}{3})^3 + a(-\frac{2a}{3})^2 + 4 = 0 \Rightarrow -\frac{8a^3}{27} + \frac{4a^3}{9} + 4 = 0 \Rightarrow \frac{4a^3}{27} = -4 \Rightarrow a^3 = -27$$

$$a = -3 \Rightarrow \text{طول نقطه مینیمم نسبی } x = -\frac{2a}{3} = \frac{-2(-3)}{3} = 2$$

۷۴-۵-۲۱

۹۰ گزینه ۲ نقطه $A(0, 0)$ اکسترم نسبی تابع است. پس مشتق در $x = 0$ برابر صفر است.

نقطه $A(0, 0)$ در تابع صدق می‌کند.

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \xrightarrow{x=0} 0 = 0 + 0 + 0 + d \Rightarrow d = 0$$

$$y = ax^3 + bx^2$$

نقطه $B(1, 1)$ نیز اکسترم نسبی تابع است، بنابراین داریم:

$$y = ax^3 + bx^2 \xrightarrow{x=1, y=1} 1 = a + b \rightarrow a = 1 - b \quad (1)$$

$$y' = 3ax^2 + 2bx \xrightarrow{x=1} 3a + 2b = 0 \xrightarrow{(1)} 3(1 - b) + 2b = 0 \Rightarrow 3 - 3b + 2b = 0 \Rightarrow b = 3 \xrightarrow{(1)} a = 1 - 3 = -2$$

$$a \cdot b = -2 \times 3 = -6$$

۲۸-۳۸-۳۴

۹۱ گزینه ۲ نکته: ریشه‌های ساده داخل قدر مطلق به شرط آنکه عامل صفرشونده پشت آنها نباشد، زاویه‌دار (گوشه) هستند که مشتق‌پذیر نبود و جزء نقاط بحرانی و اکسترم

نسبی به حساب می‌آیند. $x = 2$ و $x = -2$

این دو نقطه در واقع نقاط مرزی هستند که در تابع دو ضابطه‌ای یا همان قدر مطلق وجود دارند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 4x^2}{x^2 - 1} & x \geq 2 \text{ یا } x \leq -2 \\ \frac{-(x^4 - 4x^2)}{x^2 - 1} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)}{(x^2 - 1)^2} & x > 2 \text{ یا } x < -2 \\ \frac{-[(4x^3 - 8x)(x^2 - 1) - 2x(x^4 - 4x^2)]}{(x^2 - 1)^2} & -2 < x < 2 \end{cases}$$

ریشه‌های هر دو قسمت یکسان هستند پس یکی از ضابطه‌های f' را مساوی صفر قرار می‌دهیم. داریم:

$$4x^5 - 4x^3 - 8x^3 + 8x - 2x^5 + 8x^3 = 0 \Rightarrow 2x^5 - 4x^3 + 8x = 0 \Rightarrow 2x(x^4 - 2x^2 + 4) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$\Delta < 0$

این ریشه برای ضابطه دوم f' قابل قبول است و نه ضابطه اول؛ پس در کل سه اکسترم نسبی داریم.

۳۷-۴۵-۱۸

۹۲ گزینه ۱ در حالت کلی، برای محاسبه اکسترم‌های نسبی می‌توانیم مشتق تابع را در نقاط بحرانی تعیین علامت کنیم.



$$y' = 2(x-1)\sqrt[3]{x^2} + (x-1)^2 \times \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$y' = 2(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{x-1}{3\sqrt[3]{x}}\right) = \frac{2(x-1)(3x+x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{cases} \text{ نقاط بحرانی}$$

x	0	$\frac{1}{4}$	1	
f'	-	+	-	+
f	↘	min	↗	max

طول ماکسیمم نسبی $\Rightarrow x = \frac{1}{4}$

۷۴-۱۰-۱۶

گزینه ۱ ۹۳ $x = -2$ و $x = 0$ طول نقاط اکسترمم نسبی تابع $y = x^3 + ax^2 - 2bx - 4$ هستند، پس $x = -2$ و $x = 0$ ریشه‌های مشتق تابع هستند.

$$y' = 3x^2 + 2ax - 2b \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \text{ ریشه‌ها}$$

$$S = -2 + 0 = -\frac{2a}{3} \Rightarrow -6 = -2a \Rightarrow a = 3$$

$$P = -2 \times 0 = \frac{-2b}{3} \Rightarrow b = 0$$

$$y = x^3 + 3x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-4 \Rightarrow A(0, -4) \\ x=-2 \Rightarrow -8 + 12 - 4 = 0 \Rightarrow B(-2, 0) \end{cases}$$

نقاط A و B نقاط اکسترمم نسبی تابع هستند، پس فاصله A و B را می‌یابیم.

$$AB = \sqrt{(-2-0)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

۷۱-۵-۲۵

گزینه ۴ ۹۴

تابع را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم و از آن مشتق می‌گیریم. سپس نقاط بحرانی را یافته و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$y = \begin{cases} x^3 - 3x & x < -\sqrt{3} \\ -x^3 + 3x & -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x^3 - 3x & \sqrt{3} < x \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 3x^2 - 3 & x < -\sqrt{3} \\ -3x^2 + 3 & -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 3x^2 - 3 & x > \sqrt{3} \end{cases}$$

y'	+	-	0	+	0	-	+
	↗	max	↘	min	↗	max	↘

بنابراین تابع ۴ اکسترمم نسبی دارد.

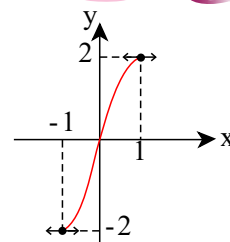
۵۷-۲۵-۱۸

گزینه ۳ ۹۵ از آنجا که به ازای مقادیر x در بازه $[-1, 1]$ ، $x^2 - 3 < 0$ ، لذا خواهیم داشت:

$$f(x) = x|x^2 - 3| \xrightarrow{x \in [-1, 1]} f(x) = -x(x^2 - 3) = x(3 - x^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3 \xrightarrow{f'(x)=0} x = \pm 1$$

$$-1 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3x^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -3x^2 + 3 \leq 3$$



f در بازه $[-1, 1]$ صعودی و پیوسته است و در این بازه نقطه بحرانی ندارد، پس نقاط ابتدا و انتهای بازه $[-1, 1]$ اکسترمم‌های مطلق تابع است و اکسترمم نسبی ندارد.

۶۲-۲۰-۱۸

گزینه ۱ ۹۶

از تابع مشتق می‌گیریم و مشتق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f(x) = x^4 - 6x^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 12x + 8 \xrightarrow{f'(x)=0} 4(x^3 - 3x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \text{جمع ضرایب صفر است} \Rightarrow (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$$

$x = 1$ ریشه مضاعف تابع مشتق $(f'(x))$ بوده و لذا در $x = 1$ تابع اکسترمم نسبی ندارد و $x = -2$ ریشه ساده مشتق بوده و از آزمون اول مشتق داریم:

$$\Rightarrow \text{طول نقطه مینیمم نسبی است. } x = -2$$

x	-2
f'	- 0 +
f	↘ ↗

بنابراین این تابع تنها یک مینیمم نسبی دارد.

۵۲-۳۰-۱۸

گزینه ۳ ۹۷

با استفاده از آزمون مشتق اول وضعیت نقاط اکسترمم تابع را تعیین می‌کنیم.

$$f(x) = \cos 2x - 2 \cos x \Rightarrow f'(x) = -2 \sin 2x + 2 \sin x = 0$$

$$\Rightarrow -2 \sin x \cos x + 2 \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin x (-\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x = 0 \\ -2 \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

حال مشتق را در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	-	0	+	0	+
f	↘	↗	↘	↗	↗
		min	max	min	

بنابراین تابع f در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ دو مینیمم نسبی و یک ماکزیمم نسبی دارد.

۸۱-۵-۱۴

گزینه ۴ ۹۸ تابع f در کل دامنه خود $(\mathbb{R} - \{0\})$ مشتق‌پذیر است، بنابراین مشتق آن در نقاط اکسترمم نسبی برابر صفر است. حال طول اکسترمم نسبی تابع f را به دست می‌آوریم. داریم:

$$f(x) = x^2 + \frac{a}{x} \Rightarrow f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$$

نقطه $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ طول اکسترمم نسبی تابع f است. برای تشخیص نوع اکسترمم (ماکسیمم یا مینیمم نسبی بودن) از آزمون مشتق اول کمک می‌گیریم، داریم:

x	$\circ$	a
f'	$- \quad \cup$	$- \quad \circ \quad +$
f	$\searrow \quad \cup \quad \searrow$	$\min \quad \nearrow$

بنابراین به ازای هر مقداری برای a ، $x = \sqrt[3]{\frac{a}{2}}$ طول نقطه مینیمم نسبی است، لذا به ازای هیچ مقدار a ، تابع f ماکسیمم نسبی نمی‌تواند داشته باشد. در جدول فوق توجه کنید که بسته به مقدار a ، a می‌تواند سمت راست یا چپ صفر باشد ولی در جواب کلی سؤال تأثیری ندارد.

۷۸-۱۳-۹

گزینه ۱ ۹۹

می‌دانیم $1 < x - [x] \leq 0$ پس $0 \leq -x + [x] < 1$ و $gof(x) = 2^{-x+[x]}$

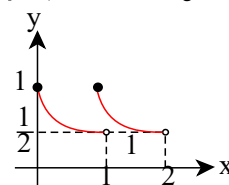
$$\begin{cases} f(x) = 0 \Rightarrow (gof)(x) = 2^0 = 1 \\ f(x) = -1 \Rightarrow (gof)(x) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow R_{gof} = \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

۶۷-۹-۲۴

گزینه ۲ ۱۰۰ با توجه به اینکه $(gof)(x) = 2^{[x]-x}$ و تابع $f(x) = [x] - x$ متناوب با دوره تناوب $T = 1$ است، لذا دوره تناوب تابع $(gof)(x)$ نیز برابر یک خواهد بود. بنابراین مسأله را در بازه $[0, 2]$ بررسی می‌نماییم. لذا داریم:

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow [x] = 0 \Rightarrow (gof)(x) = 2^{-x}, \quad A(0, 1), B(1, \frac{1}{2})$$

$$1 \leq x < 2 \Rightarrow [x] = 1 \Rightarrow (gof)(x) = 2^{1-x}, \quad A'(1, 1), B'(2, \frac{1}{2})$$



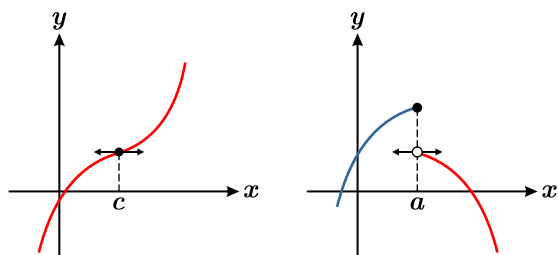


همان گونه که مشاهده می شود، نقطه A' ماکزیمم نسبی می باشد و همچنین تابع فاقد مینیمم نسبی است.

۶۹-۱۰-۲۱

گزینه ۲

نقاط بحرانی در صورتی که ابتدا و انتهای بازه باشند اکسترمم نسبی نیستند. در شکل زیر نقطه $x = c$ بحرانی بوده ولی اکسترمم نسبی نیست. همچنین در نمودار زیر نقطه $x = a$ نقطه بحرانی و اکسترمم نسبی است ولی مشتق تابع در این نقطه وجود ندارد.



۳۹-۱۴-۴۷



پاسخنامه کلیدی

۱	۴	۲۲	۳	۴۳	۴	۶۴	۴	۸۵	۲
۲	۳	۲۳	۲	۴۴	۲	۶۵	۲	۸۶	۱
۳	۱	۲۴	۳	۴۵	۳	۶۶	۳	۸۷	۳
۴	۴	۲۵	۲	۴۶	۱	۶۷	۲	۸۸	۱
۵	۳	۲۶	۲	۴۷	۲	۶۸	۳	۸۹	۲
۶	۴	۲۷	۱	۴۸	۲	۶۹	۲	۹۰	۲
۷	۴	۲۸	۴	۴۹	۱	۷۰	۱	۹۱	۲
۸	۲	۲۹	۱	۵۰	۳	۷۱	۱	۹۲	۱
۹	۱	۳۰	۲	۵۱	۴	۷۲	۱	۹۳	۱
۱۰	۳	۳۱	۱	۵۲	۴	۷۳	۱	۹۴	۴
۱۱	۱	۳۲	۲	۵۳	۲	۷۴	۳	۹۵	۳
۱۲	۴	۳۳	۴	۵۴	۲	۷۵	۲	۹۶	۱
۱۳	۲	۳۴	۴	۵۵	۴	۷۶	۲	۹۷	۳
۱۴	۲	۳۵	۴	۵۶	۲	۷۷	۱	۹۸	۴
۱۵	۲	۳۶	۲	۵۷	۴	۷۸	۱	۹۹	۱
۱۶	۲	۳۷	۲	۵۸	۱	۷۹	۱	۱۰۰	۲
۱۷	۲	۳۸	۲	۵۹	۳	۸۰	۴	۱۰۱	۲
۱۸	۳	۳۹	۱	۶۰	۲	۸۱	۳		
۱۹	۳	۴۰	۳	۶۱	۴	۸۲	۳		
۲۰	۲	۴۱	۳	۶۲	۱	۸۳	۱		
۲۱	۳	۴۲	۱	۶۳	۳	۸۴	۳		