

نوتروکراچی

هندسہ - ارشتہ تجربی



یہ گاز بڑنی، یہ فصل کنکور می پرہ!

 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com



کارخونه رتبه برتر سازی، نوتروفیل!



نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۲



محمدعلی موسی پور

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۴۸



محمدحسین هاشمی

رتبه ۶۸



منیره زمانی

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۱۲



امیرمحمد شریفی کلوری

رتبه ۱۳۴



امیرمحمد ملکشاهی

رتبه ۱۹۵



سید حسین تقوی

رتبه ۳۵۷



فاطمه مروت بلسی

رتبه ۴۲۸



مهدیه اسدی ارزنده

رتبه ۵۰۹



علیرضا شهنساری

رتبه ۵۷۵



هانیه گنجعلی

رتبه ۶۲۷



فریما آقاپور

رتبه ۶۳۹



هلیا رضایی

رتبه ۶۶۸



فائزه حیدری دهکردی

رتبه ۷۹۳



سارینا تقی زاده

رتبه ۸۰۵



لعیا زنگنه قاسم آبادی

رتبه ۸۸۱



حلما ناصری

رتبه ۹۹۵



جواد فلاحتی

رتبه ۱۰۲۰



سارا دهقان

رتبه ۱۰۲۰



مهسا پیری

رتبه ۱۰۴۹



محمد خرم آبادی

رتبه ۱۱۱۱



رضا نصیری مدیسه

رتبه ۱۱۲۵



سمیرا تباوار

رتبه ۱۲۲۵



مهدی فیض زاده

رتبه ۱۲۲۵



سید مهدی حیات غیبی

رتبه ۱۲۶۷



مهدی آزادبخت

رتبه ۱۳۰۶



مهتاب کامل

رتبه ۱۳۱۶



یسری ابوالمحمدی مله

رتبه ۱۴۰۹



غزل قبادی

رتبه ۱۴۳۹



ریحانه جعفری خیرخواه

رتبه ۱۵۸۷



مهدی تیموری

رتبه ۱۵۹۸



محمد رضا دادپور

رتبه ۱۶۶۹



مائده سادات حسینی

رتبه ۱۷۲۹



علیرضا انصاری

رتبه ۱۷۲۹



علی عزیززاده

رتبه ۱۷۴۲



الهه فکاری

رتبه ۱۷۷۶



علی عرب خانی

رتبه ۱۷۸۲



یاسین رئیسی زیدآبادی



مشاوره کنکور نوتروفیل

سوالات هندسه کنکور -

نوتروفیل بهار ۱۴۰۴

مناسب تمام کنکوری های

رشته تجربی



۱ در داخل یک استوانه به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۶ واحد، بزرگترین منشور قائم با قاعده مربع، جا گرفته است. حجم این منشور، کدام است؟

- ۱ ۱۷۴ (۱) ۲ ۱۸۶ (۲) ۳ ۱۹۲ (۳) ۴ ۱۹۸ (۴) مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۲ از داخل یک استوانه‌ی قائم توپُر، به شعاع قاعده ۴ و ارتفاع ۵ واحد، بزرگ‌ترین مخروط قائم ممکن را حذف می‌کنیم. جسم حاصل را با صفحه‌ای موازی قاعده مخروط به فاصله ۳ واحد از آن قطع می‌دهیم. مساحت مقطع حاصل، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ۱ ۱۰٫۳۶π (۱) ۲ ۱۱٫۲۸π (۲) ۳ ۱۲٫۵۶π (۳) ۴ ۱۳٫۴۴π (۴)

۳ قاعده منشور قائم، شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ واحد و طول یال قائم آن ۷٫۵ واحد است. حجم بزرگ‌ترین استوانه که در داخل این منشور جای گیرد، چند برابر π است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

- ۱ ۷۵ (۱) ۲ ۸۴ (۲) ۳ ۹۰ (۳) ۴ ۱۰۵ (۴)

۴ یک ظرف استوانه‌ای مدرج به قطر دهانه‌ی ۸، تا ارتفاع ۱۰ واحد پُر از مایع است. اگر یک گوی کروی وزین داخل آن قرار گیرد، ارتفاع مایع $\frac{2}{3}$ واحد بالا می‌آید. سطح این کره، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

- ۱ ۶π (۱) ۲ ۸π (۲) ۳ ۱۲π (۳) ۴ ۱۶π (۴)

۵ در یک بیضی به کانون‌های (۲، -۱) و (۲، ۷)، اندازه قطر کوچک ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ ۰٫۶ (۱) ۲ ۰٫۶۴ (۲) ۳ ۰٫۷۵ (۳) ۴ ۰٫۸ (۴)

۶ نقطه (۰، -۱۲) یکی از کانون‌های یک بیضی است که طول قطر کوچک آن برابر ۱۸ است. اگر مبدأ مختصات مرکز بیضی باشد، خروج از مرکز بیضی، چقدر است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

- ۱ ۰٫۶ (۱) ۲ ۰٫۸ (۲) ۳ ۱٫۴ (۳) ۴ ۱٫۸ (۴)

۷ در بیضی به معادله‌ی $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$ خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می‌کند. اندازه‌ی MN کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

- ۱ ۲ (۱) ۲ ۲٫۵ (۲) ۳ ۳ (۳) ۴ ۳٫۵ (۴)

۸ نقاط $F'(a, 0)$ و $F'(0, 0)$ کانون‌های یک بیضی و $A(0, -1)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{2}{\sqrt{5}}$ باشد، مقدار a کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ۱ $2\sqrt{5}$ (۱) ۲ $-2\sqrt{5}$ (۲) ۳ $3\sqrt{5}$ (۳) ۴ $4\sqrt{5}$ (۴)

۹ نقطه $(0, a)$ و مبدأ مختصات، کانون‌های یک بیضی بوده و $(-3, 0)$ یک نقطه واقع بر آن است. اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، طول قطر کوچک بیضی کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

- ۱ $6\sqrt{6}$ (۱) ۲ $6\sqrt{2}$ (۲) ۳ $3\sqrt{6}$ (۳) ۴ $3\sqrt{2}$ (۴)

۱۰ فاصله‌ی نقطه‌ی $M(x, y)$ از نقطه‌ی $A(3, 6)$ ، دو برابر فاصله‌ی آن از مبدأ مختصات است. بزرگ‌ترین وتر از مکان نقاط M کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

- ۱ $2\sqrt{3}$ (۱) ۲ $2\sqrt{5}$ (۲) ۳ $4\sqrt{3}$ (۳) ۴ $4\sqrt{5}$ (۴)

۱۱ شعاع دایره‌ای که از سه نقطه با مختصات $(2, 1)$ ، $(-2, 4)$ ، $(0, 0)$ می‌گذرد کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

- ۱ ۲ (۱) ۲ ۲٫۵ (۲) ۳ ۳ (۳) ۴ ۳٫۵ (۴)

۱۲ دایره‌ای، محور x ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

- ۱ $\sqrt{3}$ (۱) ۲ ۲ (۲) ۳ $\sqrt{5}$ (۳) ۴ ۳ (۴)





۱۳ به ازای کدام مجموعه‌ی مقادیر a ، منحنی به معادله‌ی $2x^2 + (a^2 - 7)y^2 + 4y + a = 0$ یک دایره است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

- ۱ {۳-} ۲ {۳} ۳ {-۳, ۳} ۴ $\emptyset$

۱۴ شعاع دایره‌ی گذرا بر سه نقطه‌ی $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ و $(1, -2)$ ، برابر کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

- ۱ $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ ۲ $\sqrt{3}$ ۳ $\sqrt{5}$ ۴ $\frac{1}{2}\sqrt{13}$

۱۵ طول شعاع دایره‌ای که از سه نقطه $A(-1, 0)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, -3)$ می‌گذرد کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

- ۱ $\sqrt{3}$ ۲ ۲ ۳ $\sqrt{5}$ ۴ ۳

۱۶ نقطه‌ی $(a, 2a)$ مرکز دایره‌ای گذرنده بر دو نقطه‌ی $(2, 1)$ و $(-1, 4)$ است. شعاع این دایره کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ $2\sqrt{2}$ ۴ $3\sqrt{2}$

۱۷ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(0, 0)$ و $(3, 1)$ گذشته و مرکز آن بر خط به معادله‌ی $y = 2x$ قرار دارد. شعاع این دایره کدام است؟

- ۱ $\sqrt{3}$ ۲ ۲ ۳ $\sqrt{5}$ ۴ ۳ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۱۸ طول کوتاه‌ترین وتری که از $(-1, 2/5)$ در دایره $2x^2 + 2y^2 - 6x - 10y + 1 = 0$ رسم می‌شود، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ $\sqrt{5}$ ۲ $\sqrt{7}$ ۳ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۴ $\frac{\sqrt{7}}{2}$

۱۹ نقطه $C(-1, 4)$ مرکز یک دایره است که بر روی خط $2x - 3y + 1 = 0$ وتری به طول $2\sqrt{7}$ جدا می‌کند. این دایره خط $y = 2$ را با

کدام طول، قطع می‌کند؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

- ۱ ۳، -۵ ۲ ۲، -۴ ۳ $-1 \pm \sqrt{2}$ ۴ $-1 \pm \sqrt{3}$

۲۰ دایره‌ای از دو نقطه‌ی $(2, 0)$ و $(-2, 0)$ گذشته و بر خط $y = 1$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

- ۱ $\frac{3}{2}$ ۲ $\sqrt{5}$ ۳ $\frac{5}{2}$ ۴ ۳

۲۱ دایره‌ای به مرکز $(2, -1)$ و مماس بر خط به معادله‌ی $x - y = 1$ ، محور x را با کدام طول، قطع می‌کند؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

- ۱ ۱ و ۳ ۲ ۱ و ۴ ۳ ۲ و ۳ ۴ ۱٫۵ و ۴

۲۲ دایره به مرکز $(0, 2)$ و مماس بر نیمساز ربع اول، خط به معادله‌ی $y = 1$ را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

- ۱ ۱، ۳ ۲ ۴، ۱ ۳ $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$ ۴ $2 + \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}$

۲۳ طول وتری از دایره $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1$ که روی خط $2y + x = a$ قرار دارد، برابر ۳ است. اختلاف مقادیر a چقدر است؟

- ۱ $\sqrt{35}$ ۲ $\sqrt{38}$ ۳ $3\sqrt{6}$ ۴ $5\sqrt{3}$ مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۲۴ به ازای کدام مقدار a ، دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$ بر خط به معادله‌ی $x + 3y = 0$ مماس است؟

- ۱ $\frac{3}{2}$ ۲ $\frac{5}{2}$ ۳ ۲ ۴ ۵ مرجع: سراسری - ۱۳۸۵

۲۵ خط $3y + 2x = 9$ در نقطه $(0, 3)$ بر دایره $x^2 + y^2 + 3x + ay = c$ مماس است. مقدار a کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

- ۱ $3/5$ ۲ $-3/5$ ۳ $1/5$ ۴ $-1/5$

۲۶ به ازای کدام مقدار a ، زاویه‌ی بین خط مماس بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$ و خط به معادله‌ی $3x + 2y = a$ در نقطه‌ی تلاقی

آنها، 90° درجه است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵





مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۲۷ دایره‌ی گذرا بر نقطه‌ی $(-2, 1)$ ، بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع آن کدام است؟

۲ و ۵ (۴)

۲ و ۴ (۳)

۱ و ۵ (۲)

۱ و ۴ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۲۸ دایره‌ای از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگتر کدام است؟

۸ (۴)

۱۲ (۳)

۱۰ (۲)

۱۵ (۱)

۲۹ دایره‌ی C بر دایره به معادله‌ی $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$ مماس خارج است. هر خط قائم بر دایره‌ی C از نقطه‌ی $(8, 7)$ می‌گذرد.

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

شعاع دایره‌ی C کدام است؟

۹ (۴)

۸ (۳)

۷ (۲)

۶ (۱)

۳۰ هر خط قائم بر یک دایره، از نقطه $(-2, 1)$ می‌گذرد. این دایره بر خط به معادله $y = x - 1$ مماس است. شعاع دایره کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

$3\sqrt{2}$ (۴)

۳ (۳)

$2\sqrt{2}$ (۲)

۲ (۱)

۳۱ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 8$ و $x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

متقاطع (۴)

مماس (۳)

مماس داخل (۲)

مماس خارج (۱)

۳۲ دایره‌های $x^2 + y^2 + 2y = 3$ و $x^2 + y^2 + 2x = 3$ متقاطع‌اند. معادله‌ی وتر مشترک این دو دایره کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

$x = 1 - y$ (۴)

$x = -y$ (۳)

$x = 1 + y$ (۲)

$x = y$ (۱)

۳۳ شعاع دایره به مرکز $(-2, 2)$ و مماس خارج بر دایره‌ی $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۴ (۴)

$2\sqrt{3}$ (۳)

۳ (۲)

$2\sqrt{2}$ (۱)

۳۴ دایره $x^2 + y^2 + 2y = 3$ مفروض است. معادله‌ی دایره‌ای که با دایره قبلی مماس داخل بوده و از نقطه $(0, -3)$ گذشته و شعاع آن با

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

قطر دایره قبلی برابر باشد، کدام است؟

$x^2 + y^2 - 2y = 15$ (۱) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ (۲) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ (۳) $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ (۴)

۳۵ دو دایره $x^2 + y^2 + 2y - 4x = 0$ و $x^2 + y^2 - 2y = 2$ نسبت به هم کدام وضعیت را دارند؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

متداخل (۴)

متقاطع (۳)

مماس بیرون (۲)

مماس بیرون (۱)

۳۶ معادله‌ی وتر مشترک دو دایره به مراکز $(-1, 2)$ و $(2, 1)$ و به شعاع‌های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

$3y = 3x$ (۴)

$3y = 2x$ (۳)

$y = 3x$ (۲)

$x = 2y$ (۱)

۳۷ دو دایره به معادلات $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 13$ و $x^2 + y^2 + 2x = 1$ نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

متداخل (۴)

متقاطع (۳)

مماس خارج (۲)

مماس داخل (۱)

۳۸ نقطه‌های M و N به ترتیب روی دو دایره متقاطع $x^2 + y^2 - 2x + 2y = a$ و $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0$ قرار دارند. اگر

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

بیشترین فاصله M و N برابر ۸ باشد، مقدار a کدام است؟

۱ (۴)

۱٫۵ (۳)

۲ (۲)

۲٫۵ (۱)

۳۹ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز خارجی $\hat{A}$ و نیمساز داخلی $\hat{B}$ در نقطه D متقاطع هستند، طول پاره‌خط AD

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

برابر کدام جزء مثلث است؟

شعاع دایره محیطی (۴)

BC (۳)

طول نیمساز داخلی $\hat{B}$ (۲)

AC (۱)

۴۰ در مثلث ABC ، داریم $\hat{B} = 50^\circ$ و $\hat{C} = 60^\circ$ نیمساز داخلی زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC در نقطه M متقاطع‌اند، $\widehat{MBC}$ چند

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

درجه است؟

۴۰ (۴)

۳۵ (۳)

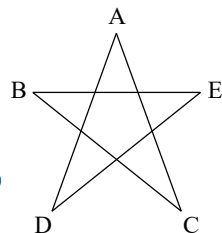
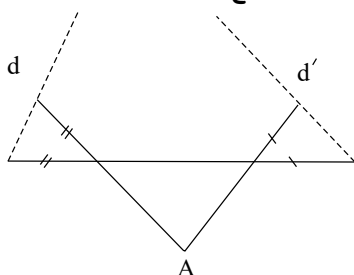
۳۰ (۲)

۲۵ (۱)





مرجع: سراسری - ۱۳۷۳

۴۱ در شکل مقابل مجموع زوایای A و B و C و D و E کدام است؟۱ 180° ۲ 270° ۳ کمتر از 180° ۴ بین 180° و 270° ۴۲ در شکل مقابل دو مثلث کناری متساوی الساقین و زاویه $\hat{A} = 100^\circ$ است. دو خط d و d' با زاویه چند درجه متقاطع اند؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۸۱ 20° ۲ 50° ۳ 45° ۴ 40° ۴۳ بر قاعده BC از مثلث متساوی الساقین $\triangle ABC$ دو نقطه M و N را چنان اختیار می‌کنیم که $BM = NC$ باشد. این نقاط را به رأس A

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

وصل می‌کنیم، مثلث AMN همواره چگونه است؟

۱ غیر مشخص ۲ متساوی الاضلاع ۳ متساوی الساقین ۴ قائم الزاویه

۴۴ اگر در مثلث متساوی الساقین ABC ، طول نیمساز داخلی زاویه B برابر طول قاعده BC باشد، زاویه A برابر است با: مرجع: سراسری - ۱۳۷۹۱ $\frac{2\pi}{5}$ ۲ $\frac{\pi}{5}$ ۳ $\frac{3\pi}{10}$ ۴ $\frac{\pi}{10}$ ۴۵ در مثلث متساوی الساقین ABC ($\hat{A} = 32^\circ$, $AC = AB$) قاعده BC را به اندازه ساق تا نقطه D امتداد می‌دهیم زاویه ADC چند

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

درجه است؟

۱ 36° ۲ 34° ۳ 37° ۴ 29° ۴۶ یک ساق مثلث متساوی الساقین ($AB = AC$) را از طرف رأس A به اندازه خودش ادامه می‌دهیم نقطه حاصل و قاعده مثلث، چه نوع

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

مثلثی تشکیل می‌دهد؟

۱ قائم الزاویه ۲ قائم الزاویه متساوی الساقین ۳ متساوی الساقین ۴ منفرجه الزاویه

۴۷ اگر مثلثی متساوی الساقین باشد، طول ارتفاع وارد بر قاعده برابر کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

۱ طول نیمساز زاویه مقابل قاعده ۲ طول میانه یک ضلع دیگر ۳ طول شعاع دایره محیطی مثلث ۴ نصف طول قاعده

۴۸ چند نقطه متمایز برای رأس C در مثلث ABC واقع در صفحه مختصات، می‌توان یافت که فاصله رأس C از نقطه A و خط شامل پاره خط

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

 AB ، به ترتیب ۷ و ۵ واحد باشد؟

۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴

۴۹ پاره خط AB به اندازه ۸ واحد در صفحه مختصات، مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

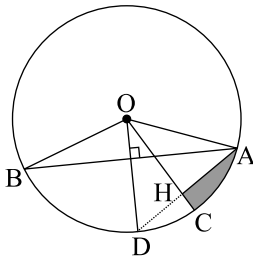
تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهار ضلعی هستند؟

۱ لوزی ۲ متوازی الاضلاع ۳ مستطیل ۴ دوزنقه متساوی الساقین



۵۰ مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\widehat{AOB} = 120^\circ$ و OH عمود منصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲



$\pi - \sqrt{2}$ (۴)

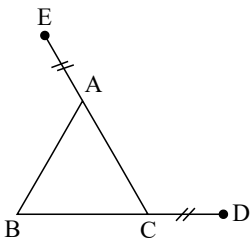
$\pi - \sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2} - \frac{\pi}{6}$ (۲)

$\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$ (۱)

۵۱ در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ، بر روی امتداد دو ضلع BC و CA پاره‌خط‌های $CD = AE$ جدا شده است. زاویه بین امتداد DA با BE چند درجه است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷



45° (۱)

60° (۲)

75° (۳)

90° (۴)

۵۲ در صفحه‌ی یک مثلث چند نقطه می‌توان یافت که از سه ضلع آن مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۰

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۵۳ در مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع و میانه نظیر وتر، زاویه 12° درجه با هم ساخته‌اند. کوچک‌ترین زاویه این مثلث، چند درجه است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۳۹ (۴)

۳۷ (۳)

۳۸ (۲)

۳۴ (۱)

۵۴ در مثلث ABC نیمسازهای زاویه داخلی، در نقطه O متقاطع‌اند. اگر زاویه‌های AOB و BOC و COA متناسب با اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند، بزرگ‌ترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۱۱۰ (۴)

۱۰۰ (۳)

۹۰ (۲)

۸۰ (۱)

۵۵ در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه‌ی $\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{\hat{D}}{12}$ ، بین زوایه‌ها برقرار است. زاویه‌ی حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه‌ی متقابل $\hat{A}$ و $\hat{C}$ ، چند درجه است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۳۵ (۴)

۳۰ (۳)

۲۵ (۲)

۲۰ (۱)

۵۶ در یک مثلث با زاویه 138° ، کوچک‌ترین زاویه بین دو نیمساز خارجی به درجه، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۴۲ (۴)

۳۴٫۵ (۳)

۱۱٫۵ (۲)

۲۱ (۱)

۵۷ در یک متوازی‌الاضلاع با زاویه 60° درجه، نیمسازهای دو زاویه مجاور ضلع بزرگ، روی ضلع دیگر آن متقاطع‌اند. اگر محیط این متوازی‌الاضلاع $12\sqrt{3}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

$18\sqrt{3}$ (۴)

$12\sqrt{3}$ (۳)

۱۸ (۲)

$9\sqrt{3}$ (۱)

۵۸ خطوط $ax - y = 3$ و $3y + x = -9$ یکدیگر را در نقطه A و خط $y - x = 0$ را به ترتیب در نقاط B و C قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ای که از این سه نقطه می‌گذرد، بر نیمساز ناحیه اول و سوم واقع باشد، در مثلث ABC ، مقدار $\tan(B - C)$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

$\frac{2}{3}$ (۴)

$\frac{1}{3}$ (۳)

$\frac{3}{4}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)





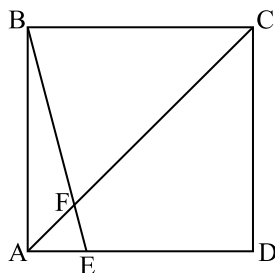
۵۹ علی، احمد، روزبه، داود و حامد بر حسب اندازه قد مرتب می‌شوند. می‌دانیم که حداقل دو نفر آنان از علی کوتاه‌تر هستند - داود از روزبه کوتاه‌تر است - احمد کوتاه‌ترین پسر نیست - داود از علی بلندتر است. کدام نتیجه‌گیری نادرست است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

- ۱ روزبه بلندتر از علی ۲ داود بلندتر از احمد ۳ احمد بلندتر از حامد ۴ احمد بلندتر از علی

۶۰ در چهارضلعی محدب $ABCD$ ، رابطه $\frac{\hat{A}}{4} = \frac{\hat{B}}{3} = \frac{\hat{C} + \hat{D}}{11}$ ، بین زاویه‌ها برقرار است. زاویه حاده بین نیم‌سازهای داخلی دو زاویه مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$ ، چند درجه است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

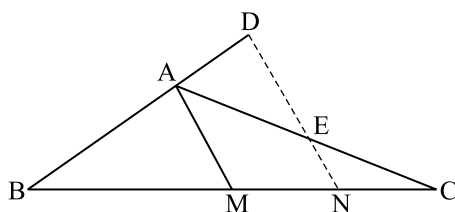
- ۱ ۵۰ ۲ ۶۰ ۳ ۷۰ ۴ ۷۵

۶۱ در مربع شکل زیر، اندازه ED دو برابر AE است. طول EF چند برابر AF است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۲



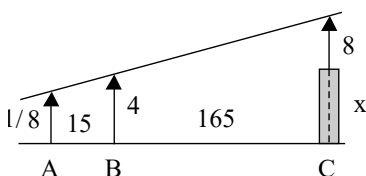
- ۱ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ۲ $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{10}}{3}$ ۴ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۶۲ در مثلث ABC ($AB = \frac{2}{3}AC$)، پاره خط ND موازی میانه AM است. نسبت $\frac{AD}{AE}$ کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۴



- ۱ $\frac{4}{9}$ ۲ $\frac{5}{9}$ ۳ $\frac{2}{3}$ ۴ $\frac{4}{5}$

۶۳ در شکل مقابل دکل به طول ۸ متر بر بالای برجی نصب شده است. دید چشمی ناظر به ارتفاع $1\frac{1}{8}$ متر، از ارتفاع دکل و تیرک ۴ متری در یک راستا است. بلندی برج چند متر است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۸۷



- ۱ ۱۹٫۸ ۲ ۲۰٫۲ ۳ ۲۰٫۸ ۴ ۲۱٫۲

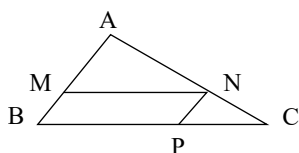
۶۴ در دوزنقه‌ای اندازه‌ی قاعده‌ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق‌ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق‌ها در بیرون دوزنقه تشکیل شود، کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

- ۱ ۱۱٫۴ ۲ ۱۱٫۶ ۳ ۱۲٫۲ ۴ ۱۲٫۸

۶۵ واسطه‌ی هندسی اعداد $\sqrt{3}$ و $\frac{\sqrt{3}}{4}$ کدام عدد است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۶۶

- ۱ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲ $\frac{3}{2}$ ۳ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴ $\frac{3}{4}$

۶۶ در شکل مقابل $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{2}$ است. مساحت متوازی‌الاضلاع $MNPB$ چند درصد مساحت مثلث ABC است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

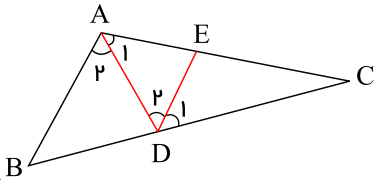


- ۱ ۴۸ ۲ ۵۲ ۳ ۵۴ ۴ ۵۶



مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۶۷ در شکل مقابل $AB = ۵$ و AD نیمساز زاویه A است. $DE \parallel AB$ ، اندازه EC کدام است؟



۱۲٫۵ (۲)

۱۵ (۴)

۱۲ (۱)

۱۳٫۵ (۳)

۶۸ در یک دوزنقه، پاره خطی که وسطهای دو ساق را به هم وصل کند، مساحت آن را به نسبتهای ۱ و ۲ تقسیم می‌کند. نسبت قاعده‌های آن دوزنقه، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

$\frac{2}{5}$ (۴)

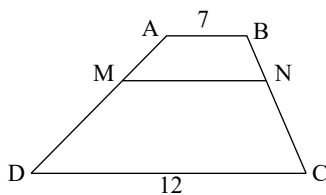
$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{5}$ (۲)

$\frac{1}{6}$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۶۹ در دوزنقه $ABCD$ ، پاره خط MN موازی قاعده‌ها و $\frac{MA}{MD} = \frac{2}{3}$ است. اندازه MN ، کدام است؟



۸ (۱)

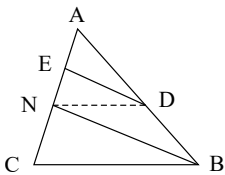
۸٫۷۵ (۲)

۹ (۳)

۹٫۵ (۴)

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

۷۰ در شکل مقابل $BN \parallel DE$ و $DN \parallel BC$ و $AE = ۴$ و $EN = ۶$ ، اندازه AC کدام است؟



۲۰ (۲)

۲۵ (۴)

۱۸ (۱)

۲۴ (۳)

۷۱ در مثلث ABC به اضلاع $AB = ۶$ و $AC = ۴$ و $BC = ۴$ نقاط D و E و F را به ترتیب بر AB و BC و AC انتخاب کرده‌ایم. اگر چهارضلعی $ADEF$ لوزی باشد، طول AD کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

$\frac{12}{5}$ (۴)

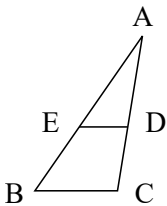
۳ (۳)

$\frac{5}{2}$ (۲)

۲ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۷۴

۷۲ در شکل مقابل $\angle B = \angle E$ و $AE = ۸$ و $ED = ۶$ و $BC = ۹$ است. طول BE کدام است؟



۴٫۲ (۲)

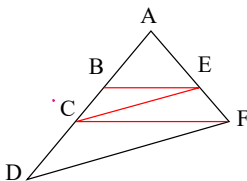
۴٫۶ (۴)

۴ (۱)

۴٫۴ (۳)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۷۳ در شکل مقابل $BE \parallel CF$ و $CE \parallel DF$ است. اگر $AB = ۵$ و $BC = ۳$ ، آنگاه اندازه CD کدام است؟



۴٫۸ (۲)

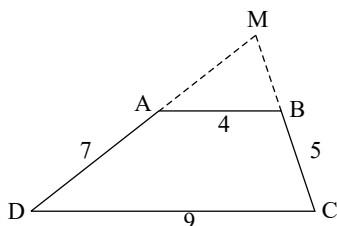
۵٫۶ (۴)

۴٫۵ (۱)

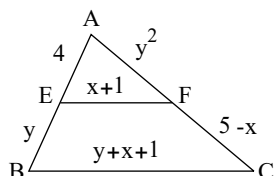
۵٫۴ (۳)



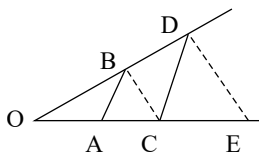
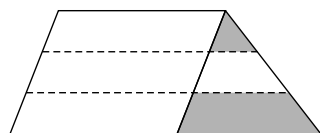
مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۷۴ اندازه اضلاع دوزنقه $ABCD$ مطابق شکل زیر داده شده است. محیط مثلث MAB ، کدام است؟۱۳٫۲ ☐۱۳٫۶ ☐۱۴٫۴ ☐۱۴٫۸ ☐

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۷۵ در شکل زیر EF موازی BC است. مقدار $y - 2x$ کدام است؟-۴ ☐-۲ ☐۲ ☐۴ ☐۷۶ در مثلث ABC ، اضلاع $AB = 4$ و $AC = 6$ و $BC = 7$ است. از رأس C خطی موازی میانه AM رسم شده و امتداد BA را در نقطه D قطع کرده است. اندازه BD ، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸۹ ☐۸٫۵ ☐۸ ☐۷٫۵ ☐

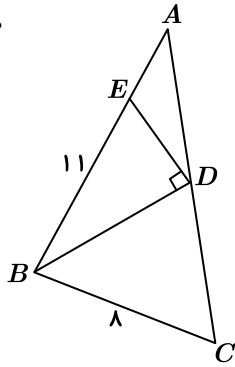
مرجع: سراسری - ۱۳۷۰

۷۷ در شکل زیر $AB \parallel CD$ و $BC \parallel DE$ و $OA = 4$ و $AC = 6$ است. اندازه CE کدام است؟۱۵ ☐۱۲ ☐۱۸ ☐۱۶ ☐۷۸ یک ساق دوزنقه به سه قسمت مساوی تقسیم شده است. هر چهار پاره خط موازی یکدیگرند. نسبت مساحت دو ناحیه سایه زده، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸ $\frac{1}{5}$ ☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{2}{9}$ ☐۷۹ در یک دوزنقه قائم الزاویه، از نقطه O محل تلاقی قطرهای، خطی موازی قاعده‌ها رسم شود. ساق قائم را در A و ساق مایل را در B قطع می‌کند. نسبت $\frac{OA}{OB}$ ، چگونه است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۹۷متغیر نسبت به اضلاع ☐بزرگتر از ۱ ☐مساوی ۱ ☐کوچکتر از ۱ ☐۸۰ در مثلث ABC ، ضلع AB بزرگ‌تر از ضلع AC است. هریک از میانه‌های BM و CN را از وسط اضلاع به اندازه خود تا D و E امتداد می‌دهیم. نسبت مساحت مثلث DBC به مساحت مثلث EBC ، کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷بستگی به ضلع سوم دارد. ☐مساوی ۱ ☐بیشتر از ۱ ☐کمتر از ۱ ☐



۸۱ در شکل زیر، BD نیمساز است. اگر در مثلث BDE ارتفاع وارد بر ضلع BE موازی BC باشد، طول AE کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳



۲٫۴ (۴)

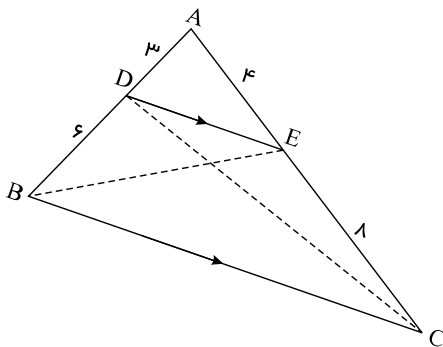
۳٫۶ (۳)

۵٫۴ (۲)

۶٫۶ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۸۲ در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث CDE به مساحت مثلث BDE کدام است؟



$\frac{1}{7}$ (۱)

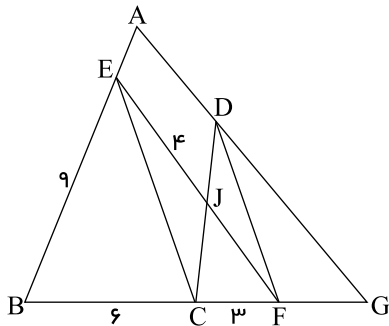
$\frac{7}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۳)

۱ (۴)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۸۳ در شکل زیر، $AB \parallel CD$ و $EC \parallel DF$ است. اندازه DF چقدر است؟



$\frac{\sqrt{33}}{2}$ (۴)

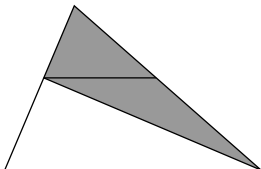
$\frac{\sqrt{33}}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{11}}{2}$ (۲)

$\frac{\sqrt{11}}{4}$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۸۴ در شکل زیر، نسبت قاعده‌های دوزنقه $\frac{3}{5}$ است. مساحت مثلث سایه زده، چند برابر مساحت دوزنقه است؟



$\frac{7}{8}$ (۲)

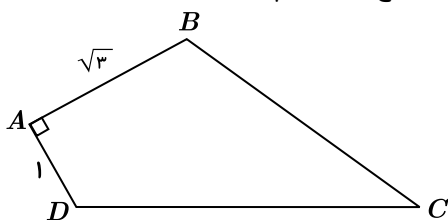
$\frac{15}{16}$ (۴)

$\frac{3}{4}$ (۱)

$\frac{14}{15}$ (۳)



۸۵ در شکل زیر، از نقاط B و D به ترتیب دو پاره خط موازی اضلاع AB و AD چنان رسم می‌کنیم که یکدیگر را در نقطه E درون چهارضلعی قطع کنند. اگر $\widehat{CDE} = 30^\circ$ و فاصله نقطه E تا وسط ضلع BC برابر 1.5 باشد، طول ضلع DC کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳



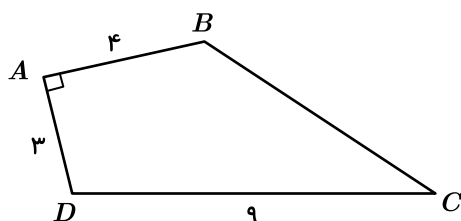
۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۸۶ در چهارضلعی $ABCD$ ، از نقاط B و D دو پاره خط به ترتیب موازی AB و AD طوری رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه M (درون چهارضلعی) قطع کنند. اگر $\widehat{BDM} = 2\widehat{BDC}$ باشد، فاصله نقطه M از وسط ضلع BC چقدر است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۳



۳ (۴)

۲.۵ (۳)

۲ (۲)

۱.۵ (۱)

۸۷ نقاط M و N به ترتیب روی اضلاع AB و BC در مثلث ABC انتخاب شده‌اند. اگر $2BN = 3NC$ و مساحت مثلث ABC ، ۳ برابر مساحت مثلث BMN باشد، مقدار $\frac{BM}{AM}$ کدام است؟ مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

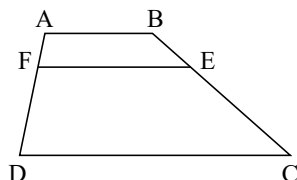
۱.۴ (۴)

۱.۲۵ (۳)

۰.۸ (۲)

۰.۷۵ (۱)

۸۸ در دوزنقه $ABCD$ ، قاعده بزرگ $\frac{5}{2}$ قاعده کوچک است و $AF = \frac{1}{4}AD$ و EF موازی قاعده است. نسبت $\frac{EF}{CD}$ ، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷



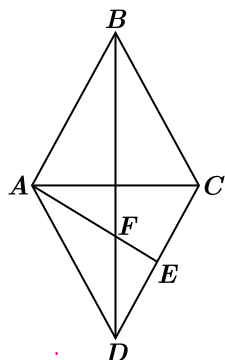
۳/۵ (۴)

۸/۱۵ (۳)

۷/۱۵ (۲)

۱۱/۲۰ (۱)

۸۹ در لوزی شکل زیر، E وسط ضلع CD است. اگر قطر بزرگ لوزی ۳ برابر قطر کوچک باشد. طول EF چند برابر AB است؟ مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲) $\frac{\sqrt{10}}{10}$ (۴) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۱) $\frac{\sqrt{10}}{5}$ (۳)

۹۰ در مثلث قائم الزاویه ABC ، اضلاع قائم $AB = 3\sqrt{5}$ و $AC = 6$ ارتفاع AH و میانه AM رسم شده است. مساحت مثلث ABC ، چند برابر مساحت مثلث AMH است؟ مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱۸ (۴)

۱۵ (۳)

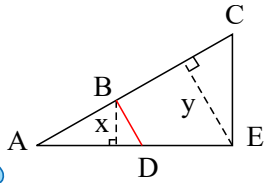
۱۲ (۲)

۱۰ (۱)





مرجع: سراسری - ۱۳۸۵



۹۱ در شکل مقابل $AD = ۸$, $DE = ۴$, $AB = ۶$ و $BC = ۱۰$, نسبت $\frac{x}{y}$ کدام است؟

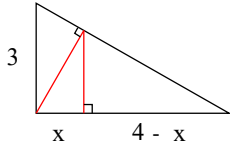
$\frac{۵}{۹}$ (۲)

$\frac{۱}{۲}$ (۱)

$\frac{۴}{۵}$ (۴)

$\frac{۲}{۳}$ (۳)

مرجع: سراسری - ۱۳۶۰



۹۲ در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

۱٫۵۶ (۲)

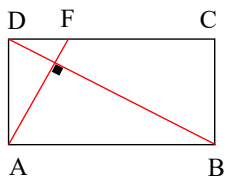
۱٫۹۶ (۱)

۱٫۴۴ (۴)

۱٫۶۴ (۳)

۹۳ در شکل زیر چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. F نقطه‌ای است روی ضلع DC به طوری که $AF \perp BD$. اگر $AB = ۳AD$ باشد، DC چند برابر DF است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۶۹



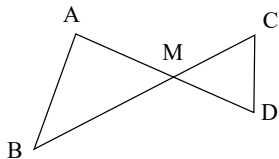
۹ (۲)

۸ (۱)

۶ (۴)

۴ (۳)

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹



۹۴ در شکل مقابل $AB \parallel CD$ و $\frac{AM}{AD} = \frac{۳}{۵}$ می‌باشد. نسبت مساحت‌های دو مثلث در شکل کدام است؟

$\frac{۲}{۵}$ (۲)

$\frac{۲}{۳}$ (۱)

$\frac{۹}{۲۵}$ (۴)

$\frac{۴}{۹}$ (۳)

مرجع: سراسری - ۱۳۶۹

۹۵ در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع واحد مربعی محاط کرده‌ایم. طول ضلع این مربع کدام است؟

$۴ - ۲\sqrt{۳}$ (۴)

$\sqrt{۳} - ۱$ (۳)

$۲\sqrt{۳} - ۳$ (۲)

$۲\sqrt{۲} - ۲$ (۱)

۹۶ مثلثی به اضلاع a و b و ۳ با مثلثی به طول اضلاع ۵ و ۴ و ۳ متشابه است. دو مثلث قابل انطباق نیستند، بیشترین محیط از مثلث اول کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۷٫۲ (۴)

۱۰ (۳)

۹ (۲)

۱۳٫۵ (۱)

۹۷ درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد. اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچکتر است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱٫۵ (۴)

۱٫۲۵ (۳)

۱ (۲)

۰٫۷۵ (۱)

۹۸ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = \frac{\pi}{۲}$) اگر $AC = ۲AB$ ، ارتفاع AH رسم شده است. مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث ABH است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

۹۹ اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه به ترتیب ۱۵ و ۸ واحد است. اگر مساحت مثلث بزرگ تر ۲۵ واحد مربع باشد، مساحت مثلث کوچک تر کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۷۸

$۶\frac{۲}{۹}$ (۴)

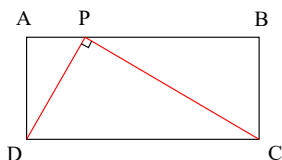
$۷\frac{۲}{۹}$ (۳)

$۶\frac{۱}{۹}$ (۲)

$۷\frac{۱}{۹}$ (۱)



مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۱۰۰ در مستطیل شکل مقابل $\hat{P} = 90^\circ$ ، $AP = BP = 9$ ، طول DP کدام است؟

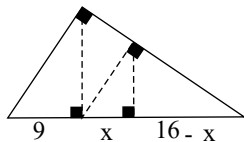
$$3\sqrt{3} \quad (2)$$

$$5 \quad (1)$$

$$6 \quad (4)$$

$$4\sqrt{3} \quad (3)$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۱۰۱ در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم‌الزاویه رسم شده است. اندازه‌ی x کدام است؟

$$5,36 \quad (2)$$

$$4,54 \quad (1)$$

$$6,75 \quad (4)$$

$$5,76 \quad (3)$$

۱۰۲ در یک مثلث قائم‌الزاویه از وسط وتر عمودی بر ضلع قائم فرود می‌آوریم تا مثلث جدیدی حاصل شود. مساحت مثلث اصلی چند برابر

مرجع: سراسری - ۱۳۷۳

مساحت مثلث جدید است؟

$$3 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$5 \quad (2)$$

$$6 \quad (1)$$

۱۰۳ در مستطیل $ABCD$ به طول $AB = 17$ ، از نقطه A عمود AH بر قطر BD رسم شده است. اگر $BH = 15$ باشد، طول قطر مستطیل

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

از عدد ۱۹، چقدر بیشتر است؟

$$\frac{3}{5} \quad (4)$$

$$\frac{7}{15} \quad (3)$$

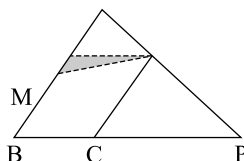
$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \quad (1)$$

۱۰۴ در شکل زیر، نقطه‌ی M وسط ضلع متوازی‌الاضلاع است. اگر $PC = \frac{2}{3}PB$ باشد، مساحت مثلث سایه‌زده، چند برابر مساحت

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

بزرگ‌ترین مثلث‌ها است؟



$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{12} \quad (1)$$

$$\frac{3}{16} \quad (4)$$

$$\frac{1}{8} \quad (3)$$

۱۰۵ مثلثی به اضلاع ۳ و ۵ و ۷ با مثلثی به اضلاع ۵ و x و y متشابه است. اگر $x, y > 5$ باشند، $x + y$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۷۳

$$21 \quad (4)$$

$$\frac{61}{3} \quad (3)$$

$$20 \quad (2)$$

$$\frac{58}{3} \quad (1)$$

۱۰۶ در مثلث ABC داریم $\hat{A} = 70^\circ$ ، $\hat{B} = 50^\circ$ و ضلع $AB = 18$ ، در مثلث MNP داریم $\hat{M} = 70^\circ$ ، $\hat{N} = 60^\circ$ ، اگر مساحت مثلث

مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

 ABC برابر $\frac{9}{4}$ مساحت مثلث MNP باشد، ضلع MP چقدر است؟

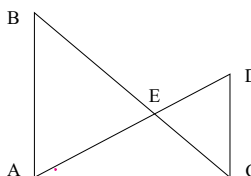
$$27 \quad (4)$$

$$24 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$12 \quad (1)$$

مرجع: سراسری - ۱۳۶۳

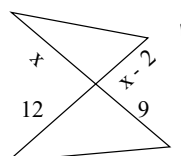
۱۰۷ در شکل مقابل $AB \perp AC$ و $CD \perp AC$ می‌باشد. کدام دو مثلث متشابه‌اند؟

$$ABC \text{ و } ABE \quad (2)$$

$$ABC \text{ و } ACD \quad (1)$$

$$ACE \text{ و } CDE \quad (4)$$

$$ABE \text{ و } CDE \quad (3)$$



مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

۱۰۸ در شکل مقابل دو مثلث متشابه‌اند، نسبت مساحت آن دو مثلث کدام است؟

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{2}{3} \quad (3)$$

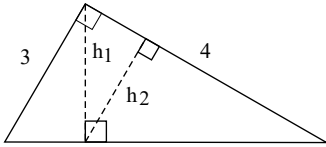
$$\frac{9}{16} \quad (2)$$

$$\frac{4}{9} \quad (1)$$



مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱۰۹ در شکل زیر، h_1 و h_2 ارتفاع‌های دو مثلث قائم‌الزاویه هستند. نسبت $\frac{h_2}{h_1}$ کدام است؟



$\frac{4}{5}$ (۲)

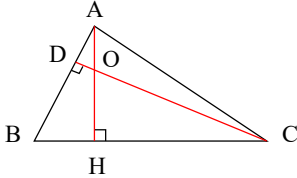
$\frac{3}{5}$ (۱)

$\frac{3}{4}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)

۱۱۰ در شکل مقابل AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $DO = \frac{1}{3}OH = AD = 5$ ، طول HC کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲



۱۶۵ (۱)

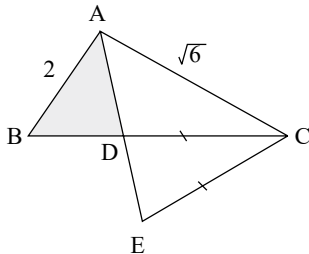
۱۷۰ (۲)

۱۷۵ (۳)

۱۸۰ (۴)

۱۱۱ در شکل زیر، AD نیمساز زاویه A و $CE = CD$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث ABD و ACE ، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹



$\frac{1}{3}$ (۱)

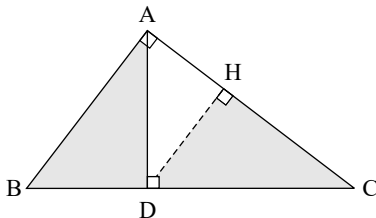
$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴)

۱۱۲ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، طول اضلاع قائم $AB = \sqrt{3}$ و $AC = 2$ است. نسبت مساحت‌های دو مثلث قائم‌الزاویه ABD و HCD ، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹



$\frac{4}{7}$ (۲)

$\frac{3}{7}$ (۱)

$\frac{8}{9}$ (۴)

$\frac{16}{21}$ (۳)

۱۱۳ در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها $\frac{2}{3}$ نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۳ (۴)

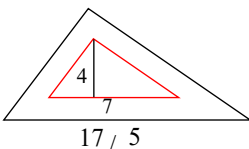
۲٫۷۵ (۳)

۲٫۲۵ (۲)

۱٫۵ (۱)

۱۱۴ اضلاع مثلث کوچک‌تر موازی اضلاع مثلث بزرگ‌تر است. مساحت مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۷۴



۸۸٫۵ (۴)

۸۷٫۵ (۳)

۷۸٫۵ (۲)

۷۷٫۵ (۱)

۱۱۵ اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه k^2 باشد، آن‌گاه نسبت محیط‌های آن‌ها کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۶۷

$3k$ (۴)

$k + 3$ (۳)

k (۲)

$\frac{k}{3}$ (۱)



۱۱۶ در مثلث ABC ، نقطه‌ی E روی AB و بین A و B و F روی AC و بین A و C می‌باشد. در کدام حالت دو مثلث AEF و ABC

مرجع: سراسری - ۱۳۶۶

متشابه‌اند؟

۲ $AF = ۴$ و $EB = ۱۰$ و $FC = ۶$ و $AE = ۶$

۱ $AF = ۲$ و $EB = ۵$ و $FC = ۴$ و $AE = ۳$

۴ $AF = ۱۲$ و $EB = ۴$ و $FC = ۸$ و $AE = ۶$

۳ $AF = ۷$ و $EB = ۳$ و $FC = ۲$ و $AE = ۱۰$

۱۱۷ نسبت مساحت دو مثلث متشابه $\frac{۴۹}{۱۲۸}$ است. اگر یک ضلع مثلث کوچکتر ۲۱ سانتی‌متر باشد، ضلع متناظر به این ضلع در مثلث بزرگتر چند

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

سانتی‌متر است؟

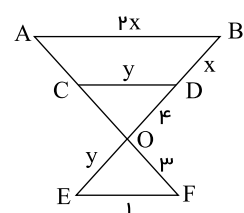
۴ $۲۴\sqrt{۳}$

۳ $۲۴\sqrt{۲}$

۲ $۲۱\sqrt{۳}$

۱ $۲۱\sqrt{۲}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰



۱۱۸ در شکل زیر AB ، CD و EF موازی‌اند. طول پاره‌خط AC ، کدام است؟

۲ $\frac{۴}{۳}$

۱ $\frac{۳}{۴}$

۴ ۳

۳ ۲

۱۱۹ طول اضلاع یک مثلث ۱۱ و ۵ و ۷ سانتی‌متر و طول کوچک‌ترین ضلع مثلثی متشابه با مثلث اولی، $\frac{۲۲}{۵}$ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم

مرجع: سراسری - ۱۳۸۰

کدام است؟

۴ $۱۰۳\frac{۵}{۵}$

۳ ۱۰۳

۲ $۱۰۲\frac{۵}{۵}$

۱ ۱۰۲

۱۲۰ AH ارتفاع مثلث قائم الزاویه ABC و $\angle A = ۹۰^\circ$ و HK ارتفاع مثلث AHB می‌باشند. کدام دو مثلث متشابه نیستند؟

مرجع: سراسری - ۱۳۷۳

۴ AHK و ABH

۳ BHK و AHK

۲ AHC و AHB

۱ ABC و AKC

۱۲۱ نسبت مساحت‌های دو پنج ضلعی منتظم برابر با $\frac{۴}{۹}$ است. اگر اندازه‌ی ضلع یکی از آن‌ها ۶ باشد، اندازه‌ی ضلع دیگر برابر کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۶۳

۴ ۱۲ یا ۵

۳ ۸ یا ۹

۲ ۹ یا ۴

۱ ۸ یا ۴

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

۱۲۲ اگر دو چند ضلعی متشابه باشند همواره:

۲ زوایایشان نظیر به نظیر مساوی است.

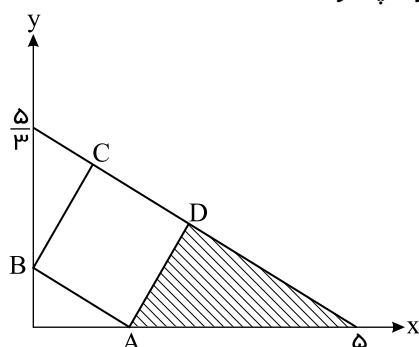
۱ اضلاعشان نظیر به نظیر مساوی است.

۴ اضلاعشان نظیر به نظیر بر یکدیگر عمودند.

۳ اضلاع نظیرشان موازی است.

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۲۳ در شکل زیر، مساحت مستطیل $ABCD$ ماکزیمم است. مساحت مثلث هاشورخورده چقدر است؟



۴ $\frac{۲۵}{۲۴}$

۳ $\frac{۲۵}{۱۲}$

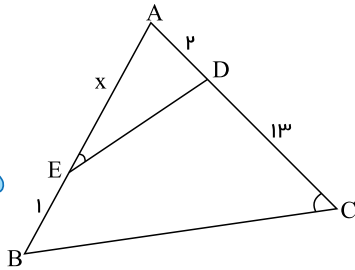
۲ $\frac{۱۵}{۱۶}$

۱ $\frac{۱۵}{۸}$



مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۲۴ در شکل زیر، $\hat{AED} = \hat{ACB}$ است. مقدار x کدام است؟



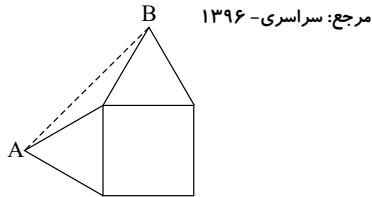
۱ ۷

۲ ۶

۳ ۵

۴ ۴

۱۲۵ بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. فاصله AB چند واحد است؟



مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۱ $1 + 2\sqrt{3}$

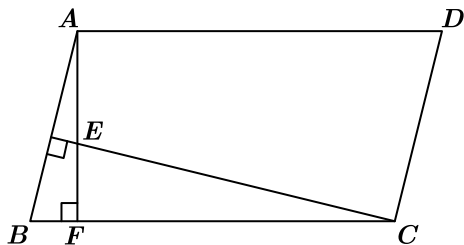
۲ $3 + \sqrt{3}$

۳ $3 + \sqrt{2}$

۴ $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۲۶ در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، $AD = 14$ ، $BF = 6$ و $AE = 8$ است. اندازه ارتفاع AF کدام است؟



۱۰ ۴

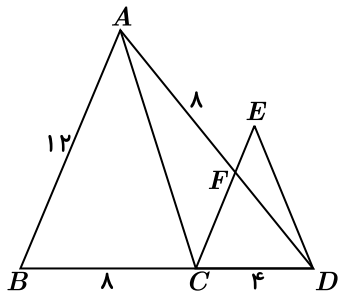
۱۲ ۳

۱۴ ۲

۱۶ ۱

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

۱۲۷ در شکل زیر، $AB \parallel CE$ و $AC \parallel ED$ است. اندازه ED چقدر است؟



۳ $\sqrt{5}$ ۴

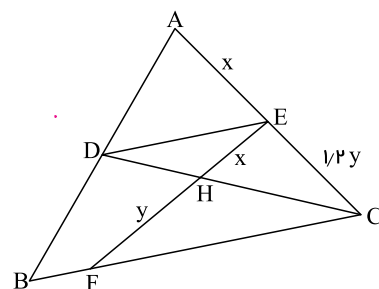
۲ $\sqrt{7}$ ۳

$\sqrt{33}$ ۲

$\sqrt{29}$ ۱

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۲۸ در شکل زیر، $DE \parallel BC$ و $3y = 5x$ است. اگر $BF = 3$ باشد، اندازه BC کدام است؟



۶٫۷۵ ۱

۶٫۲۵ ۲

۵٫۷۵ ۳

۵٫۲۵ ۴



۱۲۹* در مثلث قائم‌الزاویه ABC فاصله پای ارتفاع وارد بر وتر تا رأس C برابر ۹ است. اگر طول وتر ۲۴ باشد، نسبت طول اضلاع قائمه کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

$$\frac{\sqrt{17}}{2} \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{15}}{3} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{10}}{3} \quad (1)$$

۱۳۰* در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، نقطه H ، نقطه تلاقی ارتفاع وارد بر وتر است. اگر طول وتر ۲۰ و کمترین فاصله H از رأس‌های مجاورش ۴ باشد، نسبت طول اضلاع قائمه این مثلث کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \quad (4)$$

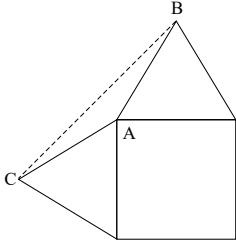
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

۱۳۱* بر روی دو ضلع مجاور مربعی به ضلع ۲ واحد، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع ساخته شده است. مساحت مثلث ABC چند واحد مربع است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶



$$\sqrt{3} - 1 \quad (1)$$

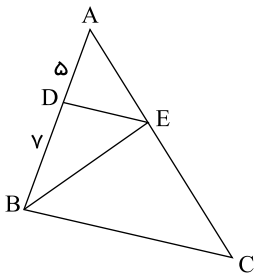
$$\frac{1}{2}\sqrt{3} \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

۱۳۲* در مثلث ABC ، ضلع BC موازی ضلع DE است. مساحت مثلث BCE ، چند برابر مساحت مثلث BDE است؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱



$$1,5 \quad (1)$$

$$1,7 \quad (2)$$

$$2,1 \quad (3)$$

$$2,4 \quad (4)$$

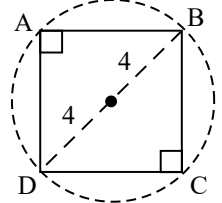


پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۳ : مقطع قاعده منشور مطابق شکل می باشد:

$$DB = 2 \times 4 = 8, \quad AB = AD \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 = 4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB^2 = (4\sqrt{2})^2 = 32$$



$$S_{ABCD} \times 6 = 32 \times 6 = 192 = \text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم منشور}$$

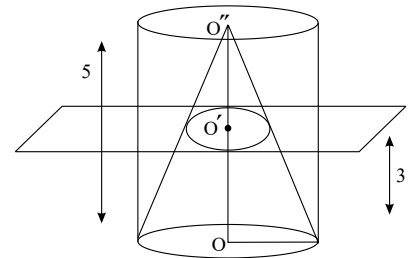
۲۲-۴-۷۴

۲ گزینه ۴

$$\frac{S_{\text{دایره به مرکز } O'}}{S_{\text{دایره به مرکز } O}} = \left(\frac{O'O'}{O'O}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25} \quad [1]$$

$$S_{\text{دایره به مرکز } O} = \pi(4)^2 = 16\pi$$

$$[1]: S_{\text{دایره به مرکز } O} = \frac{4}{25} \times 16\pi = \frac{64\pi}{25} = 2,56\pi$$



$$S_{\text{مساحت مقطع از برخورد صفحه}} = S_{\text{دایره به مرکز } O} - S_{\text{دایره به مرکز } O'} = 16\pi - 2,56\pi = 13,44\pi$$

۲۶-۷-۶۷

۳ گزینه ۳

$$7,5 = \text{یال قائم} = \text{ارتفاع منشور} = \text{ارتفاع استوانه‌ای } b \text{ در منشور}$$

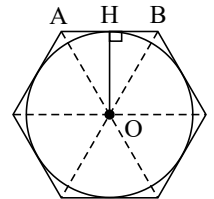
$$\text{مساحت دایره محاطی شش ضلعی منتظم به طول ضلع } 4 = \text{مساحت قاعده استوانه محاط در منشور}$$

مطابق شکل، OH، شعاع دایره محاط در شش ضلعی منتظم می باشد.

$$\triangle OAB: \text{ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع } 4 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$S_{\text{دایره}} = \pi \times OH^2 = \pi(2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

$$\text{حجم استوانه} = 12\pi \times 7,5 = 90\pi$$



۱۶-۷-۷۸

۴ گزینه ۴ : حجم کره همان حجم افزایش یافته‌ی مایع درون استوانه است. پس:

$$V_{\text{کره}} = \pi r^2 (\Delta h) = \pi \times 4^2 \times \frac{2}{3} = \frac{32}{3}\pi$$

$$V_{\text{کره}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi \rightarrow R^3 = 8 \rightarrow R = 2 \quad \text{شعاع کره}$$

$$S_{\text{کره}} = 4\pi R^2 = 4\pi \times 2^2 = 16\pi$$

۱۷-۶-۷۷

۵ گزینه ۴ : قطر کوچک یعنی $2b$ برابر ۶ است پس $b = 3$ است.

$$\begin{cases} F \\ F' \end{cases} \begin{vmatrix} 2 \\ 7 \\ 2 \\ -1 \end{vmatrix} \rightarrow FF' = 2c \rightarrow 8 = 2c \Rightarrow c = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 16 = a^2 - 9 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$



$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۵۰-۲۲-۲۸

۶ گزینه ۲ فاصله مرکز بیضی تا کانون بیضی برابر C است، پس:

بیضی $F(-12, 0)$ کانون بیضی $O(0, 0)$ مرکز بیضی

$$C = OF = 12, 2b = 18 \Rightarrow b = 9$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow a = 15 \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0.8$$

۳۶-۴-۵۹

۷ سؤال، اندازه‌ی وتر کانونی $(MN = \frac{2b^2}{a})$ را خواسته است.

$$16y^2 + 5x^2 - 10x = 75 \rightarrow 16y^2 + 5(x^2 - 2x) = 75 \rightarrow 16y^2 + 5((x-1)^2 - 1) = 75$$

$$\rightarrow 16y^2 + 5(x-1)^2 = 80 \rightarrow \frac{y^2}{5} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \rightarrow a = 4 \\ b^2 = 5 \end{cases}$$

$$MN = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5)}{4} = \frac{5}{2} = 2.5$$

۱۱-۳-۸۶

۸ گزینه ۴

راه حل اول:

$$F(0, 0), F'(a, 0)$$

$$FF' = |a| \Rightarrow 2c = |a| \Rightarrow c = \frac{|a|}{2} \quad (1)$$

$$AF + AF' = 2a' \Rightarrow \sqrt{0^2 + 1} + \sqrt{a^2 + 1} = 2a'$$

(توجه شود که طول قطر بزرگ بیضی را برابر $2a'$ فرض کرده‌ایم پس باید مجموع فواصل هر نقطه دلخواه روی بیضی تا دو کانون برابر $2a'$ شود)

$$1 + \sqrt{a^2 + 1} = 2a' \Rightarrow a' = \frac{1 + \sqrt{a^2 + 1}}{2} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow e = \frac{c}{a'} = \frac{\frac{|a|}{2}}{\frac{1 + \sqrt{a^2 + 1}}{2}} \Rightarrow$$

$$\frac{\frac{|a|}{2}}{\frac{1 + \sqrt{a^2 + 1}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{|a|}{1 + \sqrt{a^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{5}|a| = 2 + 2\sqrt{a^2 + 1} \Rightarrow \sqrt{5}|a| - 2 = 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 5a^2 + 4 - 4\sqrt{5}|a| = 4a^2 + 4 \Rightarrow a^2 - 4\sqrt{5}|a| = 0$$

$$|a|^2 - 4\sqrt{5}|a| = 0 \Rightarrow |a|(|a| - 4\sqrt{5}) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |a| = 0 \Rightarrow a = 0 & \text{غقیق} \\ |a| - 4\sqrt{5} = 0 \Rightarrow |a| = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{5} \end{cases}$$

راه حل دوم:

با توجه به اینکه کانون F دارای مختصات $F(0, 0)$ است و $A(0, -1)$ یک نقطه روی بیضی است؛ پس AF نصف طول وتر کانونی بیضی است پس داریم:

$$\frac{b^2}{a'} = 1 \Rightarrow b^2 = a'$$

توجه شود که نصف طول قطر بزرگ بیضی را برابر a' فرض کرده‌ایم از طرفی می‌دانیم خروج از مرکز بیضی به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a'^2}} \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{a'}{a'^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow 1 - \frac{1}{a'} = \frac{4}{5}$$

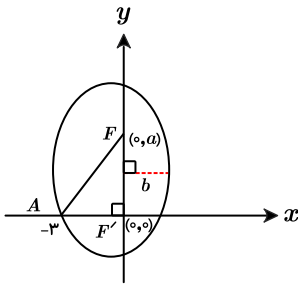
$$\Rightarrow a' = 5 \Rightarrow c^2 = a'^2 - b^2 = 25 - 5 = 20$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow 2c = 4\sqrt{5}$$

$$FF' = 4\sqrt{5} \Rightarrow |a| = 4\sqrt{5} \Rightarrow a = \pm 4\sqrt{5}$$

۱۱-۷-۸۲

گزینه ۲



$$FF' = a, AF = \sqrt{a^2 + 9}, AF' = 3$$

$$\text{قطر بزرگ} = AF + AF' \rightarrow \text{قطر بزرگ} = 3 + \sqrt{a^2 + 9}, \frac{a}{3 + \sqrt{a^2 + 9}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow a\sqrt{2} = 3 + \sqrt{a^2 + 9} \Rightarrow 2a^2 - 6a\sqrt{2} + 9 = 9 + a^2$$

$$\Rightarrow a(a - 6\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow a = 6\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow (2b)^2 = (3 + \sqrt{a^2 + 9})^2 - 9 = 72 = 72 \Rightarrow 2b = 6\sqrt{2}$$

۷۵-۶-۱۹

گزینه ۴

$$AM = 2OM \rightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-6)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow (x-3)^2 + (y-6)^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$$\rightarrow x^2 + 9 - 6x + y^2 + 36 - 12y = 4x^2 + 4y^2 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 6x + 12y - 45 = 0$$

$$\rightarrow x^2 + y^2 + 2x + 4y - 15 = 0 : \text{معادله دایره}$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 16 + 60}{4} = \frac{80}{4} = 20 \rightarrow R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\rightarrow \text{قطر بزرگترین وتر} = 4\sqrt{5}$$

۷۶-۶-۱۸

معادله دایره در حالت گسترده به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است. این سه نقطه را در معادله دایره صدق می دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} A \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} c = 0 \\ B \begin{vmatrix} -2 \\ 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 16 - 2a + 4b = 0 \\ C \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 1 + 2a + b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow a = 0, b = -5$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و b و c ، شعاع دایره برابر است با:

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 25 - 0}{4} = \frac{25}{4} \rightarrow R = \frac{5}{2} = 2,5$$

۶۳-۵-۳۲

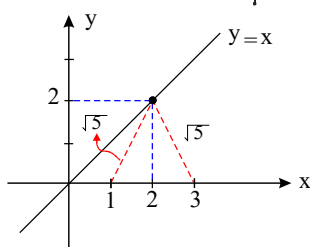
چون مرکز دایره بر روی نیمساز ربع اول $(y = x)$ قرار دارد، بنابراین مختصات آن به صورت $C \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix}$ است. و چون دایره محور x ها را در دو نقطه به طولهای ۱ و ۱۲

قطع کرده است، پس نقاط $A \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ روی دایره قرار دارند و فاصله ی هر کدام از این نقاط از مرکز دایره، برابر شعاع دایره است.

$$R = AC = \sqrt{(1 - \alpha)^2 + \alpha^2}, R = BC = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + \alpha^2}$$

$$\rightarrow \sqrt{(1 - \alpha)^2 + \alpha^2} = \sqrt{(3 - \alpha)^2 + \alpha^2} \rightarrow (1 - \alpha)^2 + \alpha^2 = (3 - \alpha)^2 + \alpha^2$$

$$\rightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha = 9 + \alpha^2 - 6\alpha \rightarrow 4\alpha = 8 \rightarrow \alpha = 2 \rightarrow R = BC = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$



از روش شکل، مشخص است که مرکز دایره نقطه‌ی $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ بوده و شعاع دایره برابر $\sqrt{5}$ است.

۶۴-۴-۳۱

گزینه ۱ $\times$ ۱۳ در معادله‌ی گسترده‌ی دایره ضرایب x^2 ، y^2 باهم برابرند پس:

$$a^2 - 7 = 2 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

$$a = 3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y + 3 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2y + \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 4 - 6}{4} = \frac{-1}{2} < 0 \text{ امکان ندارد}$$

$$a = -3 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4y - 3 = 0 \rightarrow x^2 + y^2 + 2y - \frac{3}{2} = 0$$

$$\rightarrow R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{0 + 4 + 6}{4} = \frac{5}{2} > 0$$

پس فقط $a = -3$ قابل قبول است.

۷۰-۱۲-۱۸

گزینه ۱ $\times$ ۱۴ معادله‌ی دایره در حالت گسترده به صورت $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ است این سه نقطه را در معادله‌ی دایره صدق می‌دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} c = 0 \\ B \left| \begin{array}{c} 2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 4 + 1 + 2a + b = 0 \Rightarrow 2a + b = -5 \\ C \left| \begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ -2 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1 + 4 + a - 2b = 0 \Rightarrow a - 2b = -5 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a = -3, b = 1$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{9 + 1 - 0}{4} = \frac{10}{4} \Rightarrow R = \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

۷۲-۵-۲۳

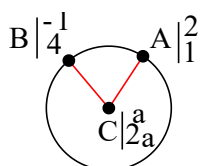
گزینه ۳ $\times$ ۱۵ کافی است معادله گسترده دایره یعنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ را بنویسیم و این نقاط را در معادله دایره صدق دهیم.

$$\left. \begin{array}{l} A \left| \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 1 - a + c = 0 \\ B \left| \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 9 + 3a + c = 0 \\ C \left| \begin{array}{c} 0 \\ -3 \\ -3 \end{array} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} 9 - 3b + c = 0 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دستگاه}} a = -2, c = -3$$

$$c = -3 \Rightarrow 9 - 3b + c = 0 \Rightarrow b = 2$$

$$R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{4 + 4 + 12}{4} = \frac{20}{4} = 5 \Rightarrow R = \sqrt{5}$$

۶۹-۸-۲۴

گزینه ۱ $\times$ ۱۶

شکل مسأله به صورت مقابل می‌باشد.

$$R = AC = \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2}, R = BC = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2}$$

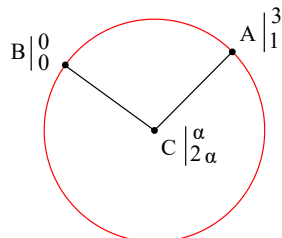
$$\Rightarrow \sqrt{(2-a)^2 + (1-2a)^2} = \sqrt{(-1-a)^2 + (4-2a)^2}$$

توان $\rightarrow 4 - 4a + a^2 + 1 - 4a + 4a^2 = 1 + 2a + a^2 + 16 - 16a + 4a^2 \Rightarrow 6a = 12 \Rightarrow a = 2$

$$R = AC = \sqrt{(2-2)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{0+9} = 3$$

۷۵-۶-۱۸

چون مرکز دایره روی خط به معادله $y = 2x$ قرار دارد بنابراین می توان مرکز دایره را به صورت $C \begin{vmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{vmatrix}$ در نظر گرفت.



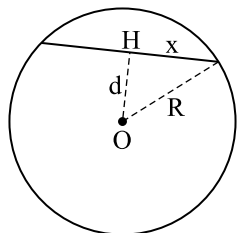
$$R = AC = \sqrt{(3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2}, R = BC = \sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} = \sqrt{5\alpha^2}$$

$$AC = BC \rightarrow \sqrt{(3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2} = \sqrt{5\alpha^2} \xrightarrow{\text{توان}} (3-\alpha)^2 + (1-2\alpha)^2 = 5\alpha^2$$

$$\rightarrow 9 + \alpha^2 - 6\alpha + 1 + 4\alpha^2 - 4\alpha = 5\alpha^2 \rightarrow 10\alpha = 10 \rightarrow \alpha = 1$$

$$R = AC \xrightarrow{\alpha=1} \sqrt{4+5} = \sqrt{9}$$

۷۸-۵-۱۸



جایگذاری

$$(-1, 2, 5) \Rightarrow 2 + 2(2, 5)^2 + 6 - 10(2, 5) + 1 < 0 \Rightarrow \text{نقطه داخل دایره است.}$$

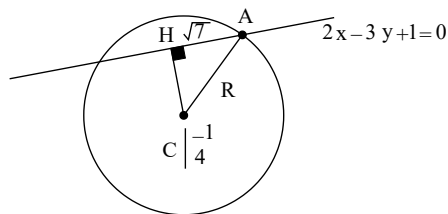
$$x^2 + y^2 - 3x - 5y + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow O\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$OH = \frac{5}{2}, R = 2\sqrt{2}$$

$$R^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow 8 = x^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ طول وتر } 2x = \sqrt{7}$$

۸۴-۴-۱۱

در ابتدا باید فاصله مرکز دایره تا خط داده شده را به دست آوریم.



$$\Rightarrow CH = \frac{|-2 - 12 + 1|}{\sqrt{4+9}} = \frac{13}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\triangle ACH : R^2 = (AH)^2 + (CH)^2 \rightarrow R^2 = 7 + 13 = 20 \rightarrow R = 2\sqrt{5}$$

$$\text{پیدا : } \begin{cases} C \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix} : \alpha \\ R = 2\sqrt{5} \end{cases} \xrightarrow{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2} (x+1)^2 + (y-4)^2 = 20 \xrightarrow{y=2} (x+1)^2 + 4 = 20$$

$$\rightarrow (x+1)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} x+1 = 4 \rightarrow x = 3 \\ x+1 = -4 \rightarrow x = -5 \end{cases}$$



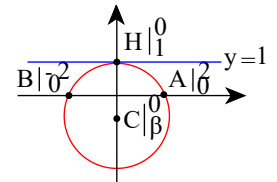
توجه کنید فاصله نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right|$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۲۵-۴۳-۳۲

۲۰. گزینه ۳ چون دایره از نقاط $A \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right|$ ، $B \left| \begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right|$ می گذرد پس مرکز دایره روی عمود منصف پاره خط AB یا همان محور y ها قرار دارد پس مختصات مرکز دایره $C \left| \begin{smallmatrix} 0 \\ \beta \end{smallmatrix} \right|$ است.

$$\begin{aligned} R = AC &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-\beta)^2} = \sqrt{4 + \beta^2} \\ R = CH &= \sqrt{(0-0)^2 + (\beta-1)^2} = \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1} \\ \rightarrow \sqrt{4 + \beta^2} &= \sqrt{\beta^2 - 2\beta + 1} \\ \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 + \beta^2 &= \beta^2 - 2\beta + 1 \rightarrow 2\beta = -3 \rightarrow \beta = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

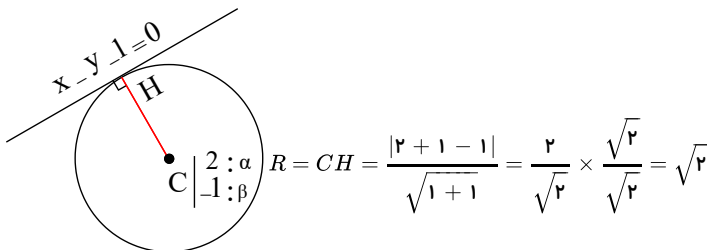
$$\text{پس : } R = AC \xrightarrow{\beta = -\frac{3}{2}} \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$



۶۸-۴-۲۷

۲۱. گزینه ۱

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، نشان دهنده شعاع دایره می باشد.



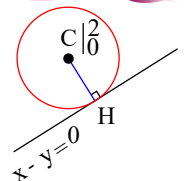
$$\begin{aligned} \text{معادله دایره: } (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 &= R^2 \rightarrow (x-2)^2 + (y+1)^2 = 2 \xrightarrow{y=0} (x-2)^2 + 1 = 2 \\ \rightarrow (x-2)^2 &= 1 \rightarrow \begin{cases} x-2=1 \rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \rightarrow x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right|$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۶۵-۴-۳۰

۲۲. گزینه ۱ فاصله مرکز دایره تا خط $y = x$ (نیم سازهی اول) شعاع دایره را می دهد.

$$R = CH = \frac{|2+0+0|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



حال با داشتن مرکز دایره و شعاع دایره، معادله آن را می نویسیم.

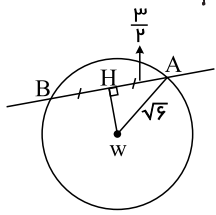
$$\begin{aligned} C \left| \begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix} \right|, R = \sqrt{2} \Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 &= R^2 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 2 \xrightarrow{y=1} (x-2)^2 + 1 = 2 \\ (x-2)^2 &= 1 \Rightarrow \begin{cases} x-2=1 \Rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \Rightarrow x=1 \end{cases} \end{aligned}$$

توجه کنید فاصله نقطه $A \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right|$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ از رابطه $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۷۲-۵-۲۴

۲۳. گزینه ۴ ابتدا مشخصات دایره را از روی معادله آن می یابیم:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1 \Rightarrow \begin{cases} \text{مرکز دایره : } W(2, -1) \\ \text{شعاع دایره : } R = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 + 4} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6} \end{cases}$$



عمود وارده از مرکز دایره بر وتر AB ، آن وتر را نیز نصف می‌کند. طبق قضیه فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه AWH داریم:

$$(\sqrt{6})^2 = HW^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow WH = \sqrt{6 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{15}}{2} (*)$$

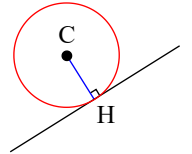
از طرفی فاصله مرکز دایره از وتر AB (خط $y + x - a = 0$) برابر است با:

$$WH = \frac{|2(-1) + 2 - a|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|a|}{\sqrt{5}} \stackrel{(*)}{\rightarrow} \frac{|a|}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow |a| = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a_2 - a_1 = 5\sqrt{3}$$

۸۴-۴-۱۲

فاصله‌ی مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر شعاع دایره است.

$$\begin{aligned} f'_x = 0 &\rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 &\rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \Rightarrow C \begin{vmatrix} 1 \\ -2 \end{vmatrix} \\ R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 - a = 5 - a \rightarrow R = \sqrt{5 - a} \end{aligned}$$



$$x + 3y = 0 \text{ فاصله‌ی مرکز دایره تا خط } = CH = R = \frac{|1 - 6 + 0|}{\sqrt{1+9}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{10}} = \sqrt{5 - a} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{25}{10} = 5 - a \rightarrow a = \frac{5}{2}$$

توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۷۰-۵-۲۵

جایگذاری نقطه $(0, 3)$ در معادله دایره نتیجه می‌دهد:

$$C = 9 + 3a$$

با جایگذاری $y = -\frac{2}{3} + 3$ در معادله دایره داریم:

$$x^2 + \left(-\frac{2}{3}x + 3\right)^2 + 3x + a\left(-\frac{2}{3}x + 3\right) = 9 + 3a$$

$$\Rightarrow \frac{13}{9}x^2 - x\left(1 + \frac{2}{3}a\right) = 0$$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{3}a = 0 &\Rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ &\Rightarrow a = -1,5 \end{aligned}$$

چون معادله بالا باید ریشه مضاعف داشته باشد (چون خط بر دایره مماس است) لذا باید:

۳۲-۴۰-۲۸

خطی که در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس بر دایره عمود شود از مرکز دایره می‌گذرد.

$$f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, \quad f'_y = 0 \rightarrow 2y + 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

اکنون کافی است که مختصات مرکز دایره $C \begin{vmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$ را در خط به معادله‌ی $3x + 2y = a$ صدق دهیم.

$$3(1) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = a \rightarrow 3 - 1 = a \rightarrow a = 2$$

۶۲-۶-۳۲

نقطه‌ی داده شده روی دایره در ناحیه‌ی چهارم است و می‌دانیم مرکز دایره‌ای که در ناحیه‌ی چهارم بر محورهای مختصات مماس است به صورت $C \begin{vmatrix} R \\ -R \end{vmatrix}$ است.

۲۷-۲-۲۷



$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \rightarrow (x - R)^2 + (y + R)^2 = R^2 \xrightarrow[\text{منق}]{\begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}} (1 - R)^2 + (-2 + R)^2 = R^2$$

$$\rightarrow 1 + R^2 - 2R + 4 + R^2 - 4R = R^2 \rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0$$

$$\rightarrow R = 1, R = 5$$

۷۰-۵-۲۵

۲۸ گزینه ۲ - ۱- مرکز دایره‌ای که در ربع اول بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی (R, R) است.

۲- مرکز دایره‌ای که در ربع دوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R, R)$ است.

۳- مرکز دایره‌ای که در ربع سوم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(-R, -R)$ است.

۴- مرکز دایره‌ای که در ربع چهارم بر محورهای مختصات مماس است، نقطه‌ی $(R, -R)$ است.

که شعاع دایره است.

از نقطه‌ی داده شده روی دایره متوجه می‌شویم دایره در ناحیه‌ی دوم بر هر دو محور مختصات مماس است پس مرکز آن $C \left| \begin{matrix} -R \\ R \end{matrix} \right.$ است.

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 \Rightarrow (x + R)^2 + (y - R)^2 = R^2 \xrightarrow[\text{منق}]{\begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}} (-1 + R)^2 + (2 - R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow 1 - 2R + R^2 + 4 - 4R + R^2 = R^2 \Rightarrow R^2 - 6R + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (R - 1)(R - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} R = 1 \\ R = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{قطر دایره بزرگتر} = 10$$

۶۱-۵-۳۴

۲۹ گزینه ۲

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 2 = 0 \rightarrow y = -1 \end{cases} \rightarrow C' \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right.$$

$$R'^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = \frac{16 + 4 + 16}{4} = \frac{36}{4} = 9 \rightarrow R' = 3$$

می‌دانیم قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد بنابراین مرکز دایره‌ی C نقطه‌ی $C \left| \begin{matrix} 8 \\ 7 \end{matrix} \right.$ است.

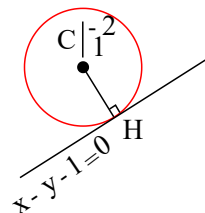
$$CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{(8 - 2)^2 + (7 + 1)^2} = R + 3 \rightarrow \sqrt{36 + 64} = R + 3$$

$$\rightarrow 10 = R + 3 \rightarrow R = 7$$

۶۳-۵-۳۳

۳۰ گزینه ۲ - قائم بر دایره از مرکز دایره می‌گذرد پس $C \left| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right.$ می‌باشد.

$$R = CH = \frac{|-2 - 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$



توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی $A \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ از خط به معادله‌ی $ax + by + c = 0$ از رابطه‌ی $AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

۶۳-۶-۳۱

۳۱ گزینه ۱

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 6 = 0 \rightarrow y = -3 \end{cases} \Rightarrow C \left| \begin{matrix} 1 \\ -3 \end{matrix} \right.$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 9 + 8 = 18 \Rightarrow R = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 8x - 4y + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 8 = 0 \rightarrow x = -4 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y - 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow C' \left| \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 16 + 4 - 12 = 8 \rightarrow R' = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$CC' = \sqrt{(1+4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چون $CC' = R + R'$ است دو دایره مماس خارج هستند.

۶۳-۱۴-۲۴

گزینه ۱ برای نوشتن معادله وتر مشترک دو دایره متقاطع، کافی است معادله‌های دو دایره را در یک دستگاه حل کنیم. برای سادگی محاسبات حتماً ضرایب x^2 و y^2 در هر دو معادله باید یکسان باشند:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2x = 3 \\ x^2 + y^2 + 2y = 3 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2x - 2y = 0 \Rightarrow x = y$$

۴۱-۱۷-۴۲

گزینه ۲ اگر دو دایره به مراکز C و C' و شعاع‌های R و R' مماس خارج باشند $CC' = R + R'$ است.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow C' \left| \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 - 1 = 4 \rightarrow R' = 2$$

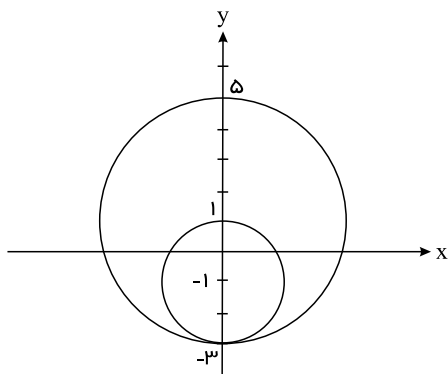
$$CC' = R + R' \rightarrow \sqrt{(-2-1)^2 + (2+2)^2} = R + 2 \rightarrow \sqrt{9+16} = R + 2 \rightarrow R = 3$$

۶۲-۸-۳۰

گزینه ۱ مرکز و شعاع دایره مفروض را از روی معادله ضمنی آن به دست می‌آوریم:

$$x^2 + y^2 + 2y = 3 \Rightarrow \begin{cases} O(0, -1) \\ R = \frac{\sqrt{4+12}}{2} = 2 \end{cases}$$

پس شعاع دایره خواسته شده باید ۴ باشد یعنی $R' = 4$ ؛ اطلاعات داده شده را در صفحه مختصات ترسیم می‌کنیم:



با توجه به شکل، مرکز و شعاع دایره موردنظر $O'(0, 1)$ ، $R' = 4$ است و در نتیجه:

$$C': x^2 + (y-1)^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y = 15$$

۳۲-۴۰-۲۹

گزینه ۲

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \rightarrow O(2, -1), R = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \rightarrow O^1(0, 1), R^1 = \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 - 4(-2)^2} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{3} < 2\sqrt{2} < \sqrt{5} + \sqrt{3} (|R - R^1| < OO^1 < R + R^1)$$

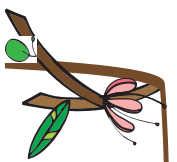
وضعیت دو دایره نسبت به هم متقاطع است.

۵۳-۱۳-۳۴

گزینه ۲ معادله‌ی دایره در حالت استاندارد به صورت $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ است، با داشتن مرکز و شعاع هر دو دایره، معادلات آن‌ها را می‌نویسیم.

$$\begin{cases} C \left| \begin{array}{l} -1 \\ 2 \end{array} \right. \rightarrow (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 - 4y = 4 \\ R = 2 \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$$

$$\begin{cases} C' \left| \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right. \rightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4 \rightarrow x^2 + 4 - 4x + y^2 + 1 - 2y = 4 \\ R' = 2 \end{cases} \rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$



برای پیدا کردن معادله ی وتر مشترک بین دو دایره، کافی است که جملات از درجه ی دوم را بین آن ها حذف کنیم.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow 6x - 2y = 0 \rightarrow 6x = 2y \rightarrow y = 3x$$

۷۴-۵-۲۱

گزینه ۱ ۳۷

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y + 4 = 0 \rightarrow y = -2 \end{cases} \Rightarrow C \left| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right.$$

$$R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 4 + 13 = 18 \rightarrow R = 3\sqrt{2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'_x = 0 \rightarrow 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ f'_y = 0 \rightarrow 2y = 0 \rightarrow y = 0 \end{cases} \Rightarrow C' \left| \begin{matrix} -1 \\ 0 \end{matrix} \right.$$

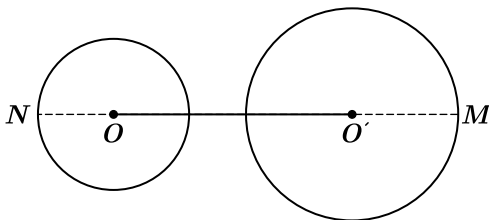
$$R'^2 = \alpha^2 + \beta^2 - c = 1 + 0 + 1 = 2 \rightarrow R' = \sqrt{2}$$

$$CC' = \sqrt{(1+1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

چون $CC' = |R - R'|$ است پس دو دایره مماس داخل هستند.

۶۲-۱۴-۲۵

گزینه ۲ ۳۸



$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - a = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(1, -1) \\ r' = \frac{1}{2} \sqrt{4 + 4 + 4a} = \sqrt{2 + a} \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 6a = 0 \Rightarrow \begin{cases} O'(-2, 3) \\ r = \frac{1}{2} \sqrt{16 + 36 - 24a} = \sqrt{13 - 6a} \end{cases}$$

$$OO' = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

$$MN = \sqrt{2+a} + \sqrt{13-6a} + 5 = 8 \rightarrow a = 2$$

۴۱-۳۴-۲۵

گزینه ۱ ۳۹

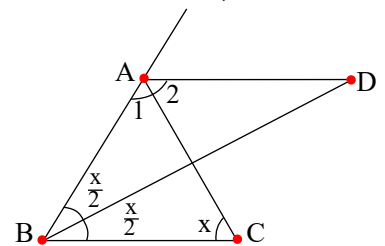
$\hat{B} = \hat{C}$ را فرض می کنیم:

در مثلث ABD داریم:

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - 2x, \hat{A}_r = x$$

$$\frac{\hat{B}}{2} + \hat{A}_1 + \hat{A}_r + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \frac{x}{2} + (180^\circ - 2x) + x + \hat{D} = 180^\circ \Rightarrow \hat{D} = \frac{x}{2}$$

$$\frac{\hat{B}}{2} = \hat{D} \Rightarrow AB = AD = AC$$



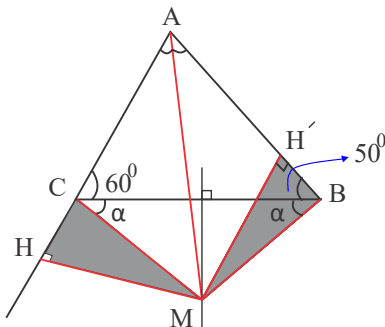
۸۴-۱۰-۷

گزینه ۳ ۴۰

برای حل این تست بهتر است ابتدا به تعریف های عمودمنصف و نیمساز اشاره کنیم.

(۱) عمودمنصف هر پاره خط مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله شان از دو سر پاره خط یکسان باشد.

(۲) نیم ساز هر زاویه ، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله شان از دو ضلع زاویه یکسان باشد.



از نقطه M محل تلاقی عمودمنصف ضلع BC و نیمساز $\hat{A}$ به B و C وصل می کنیم، پس طبق $MC = MB$ همچنین از M دو عمود MH و MH' را بر اضلاع AC و AB رسم

می کنیم، پس طبق (۱) $MH = MH'$ ، در نتیجه، مثلث های قائم الزاویه MBH' و MCH به حالت وتر و یک ضلع هم نهشت اند. پس $\widehat{HCM} = \widehat{MBH'} = 50^\circ + \alpha$

$$\widehat{HCM} + \widehat{MCA} = 180^\circ \Rightarrow (50^\circ + \alpha) + (60^\circ + \alpha) = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 35^\circ$$

۷۴-۵-۲۲

گزینه ۱ ۴۱

$\widehat{M}_\gamma = \widehat{E} + \widehat{B}$: است مثلث $\triangle MEB$

$\widehat{N}_\gamma = \widehat{A} + \widehat{D}$: است مثلث $\triangle ADN$

و در مثلث $\triangle MNC$ داریم:

$$\widehat{C} + \widehat{M}_\gamma + \widehat{N}_\gamma = 180^\circ \Rightarrow \widehat{C} + \widehat{A} + \widehat{D} + \widehat{E} + \widehat{B} = 180^\circ$$

۷۱-۱۱-۱۸

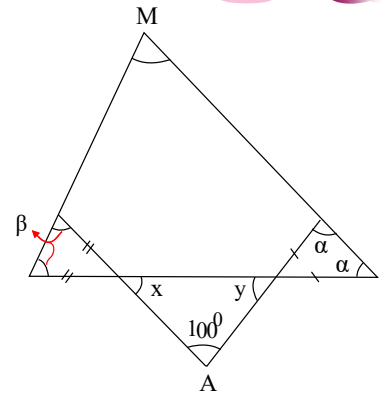
گزینه ۴ ۴۲

در دو مثلث متساوی الساقین فرض کنیم زوایای مجاور به قاعده در آنها β, α باشد. با توجه به شکل $x + 2\beta = 180^\circ$, $y + 2\alpha = 180^\circ$ داریم:

$$x + y = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha + 2\beta + (x + y) = 2 \times 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\alpha + \beta) = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

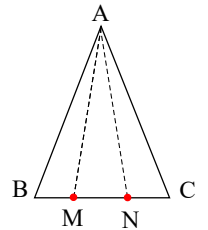
$$\Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \widehat{M} = 90^\circ$$



۶۵-۶-۲۹

گزینه ۳ ۴۳ با توجه به شکل زیر برای دو مثلث $\triangle ABM$ و $\triangle ACN$ داریم:

$$\begin{cases} AB = AC \\ BM = NC \\ \widehat{B} = \widehat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ض}} \triangle ABM \cong \triangle ACN \xrightarrow{\text{تساوی اجزای متناظر}} AM = AN$$



پس مثلث $\triangle AMN$ متساوی الساقین است.

۵۵-۱۱-۳۴

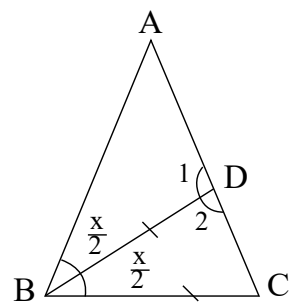
گزینه ۲ ۴۴ اندازه $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را x فرض می کنیم.

$$BD = BC \Rightarrow \widehat{C} = \widehat{D}_\gamma \Rightarrow \widehat{D}_\gamma = x$$

$$\frac{\widehat{B}}{2} + \widehat{C} + \widehat{D}_\gamma = 180^\circ \Rightarrow \frac{x}{2} + x + x = 180^\circ$$

$$x = 72^\circ \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{C} = 72^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$$

در مثلث $\triangle BCD$ داریم:

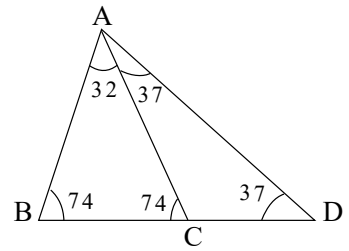


۸۰-۳-۱۷

گزینه ۳ ۴۵ با توجه به شکل زیر و اطلاعات سؤال، $AC = CD$ پس $\widehat{CAD} = \widehat{D}$ همچنین داریم:



$$\left. \begin{aligned} \widehat{ACB} &= \frac{180^\circ - 32^\circ}{2} = 74^\circ \\ \widehat{ACD} &\text{ زاویه خارجی مثلث } \triangle ACD \end{aligned} \right\} \widehat{ADC} = \frac{\widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{ADC} = \frac{74^\circ}{2} = 37^\circ$$



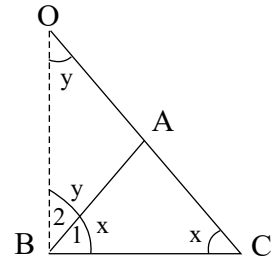
۷۵-۶-۱۹

گزینه ۱: اندازه زوایای $\widehat{B}_1$ و $\widehat{C}$ را x و $\widehat{O}$ را y در نظر می‌گیریم. داریم:

$$AB = AC \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C} = x$$

$$AO = AB \Rightarrow \widehat{O} = \widehat{B}_1 = y$$

$$\widehat{O} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ \Rightarrow y + (x + y) + x = 180^\circ \Rightarrow 2y + 2x = 180^\circ \Rightarrow x + y = \widehat{B} = 90^\circ$$

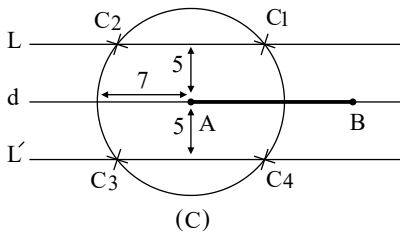


۶۹-۱۱-۲۰

گزینه ۱: در مثلث متساوی‌الساقین میانه، ارتفاع و نیمساز وارد بر قاعده بر هم منطبق‌اند و یقیناً هم‌طول هستند.

۴۷-۳۳-۲۲-۴۲

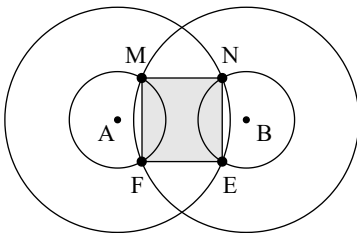
گزینه ۴: مجموعه نقاطی از صفحه A به فاصله ۷ واحد قرار دارند، دایره‌ای به مرکز A با شعاع ۷ واحد است. (دایره C). مجموعه نقاطی از صفحه که از خط شامل پاره خط AB (به فاصله ۵ واحد هستند، دو خط موازی d به فاصله ۵ واحد از آن در دو طرفش است (خطهای L و L'). محل برخورد دایره (C) با خطهای L و L' جواب مسئله است. پس چهار نقطه C_1, C_2, C_3, C_4 و C_5 مطلوب سؤال هستند.



۳۱-۲۶-۴۳

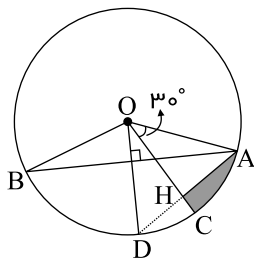
گزینه ۳: چهارضلعی $MNEF$ مستطیل است.

۴۹-۴۳-۳۱-۲۶



۵۲-۱۹-۲۹

گزینه ۱: ۵۰



$$S = \pi \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |OA| = 1 \Rightarrow |AH| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2}$$

$$(OH)^2 + (AH)^2 = (OA)^2 \Rightarrow |OH|^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow |OH| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

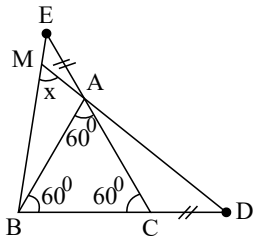
$$AC \text{ طول کمان} = R\alpha = 1 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad |HC| = |OC| - |OH| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{اختلاف محیطها} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

۸۵-۷-۹

۵۱- گزینه ۲

ابتدا ثابت می‌کنیم دو مثلث ABE و ACD همنهشت هستند:



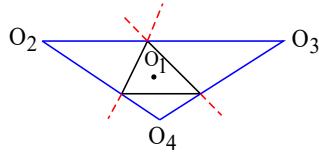
$$\triangle ACD, \triangle ABE : CD = AE, AC = AB, \hat{C} = \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \hat{D} = \hat{E}$$

$$\hat{x} = \hat{E} + \hat{MAE} = \hat{E} + \hat{CAD} = \hat{D} + \hat{CAD} = 60^\circ$$

۸-۲-۹۰

۵۲- گزینه ۴

می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز از اضلاع زاویه به یک فاصله می‌باشد پس نقطه تلاقی نیمسازهای مثلث از سه ضلع به یک فاصله است.



یک نقطه محل تلاقی سه نیمساز داخلی (O_1)

و سه نقطه محل تلاقی هر دو نیمساز خارجی (O_2, O_3, O_4)

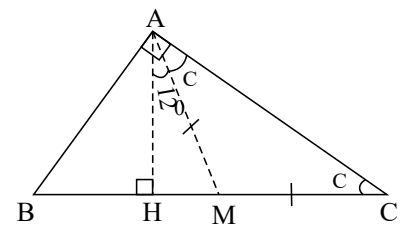
۱۳-۲۶-۹۰

۵۳- گزینه ۴

می‌دانیم که میانه وارد بر وتر نصف وتر است. داریم:

$$\triangle AMH : \hat{AMH} = 90^\circ - 12^\circ = 78^\circ$$

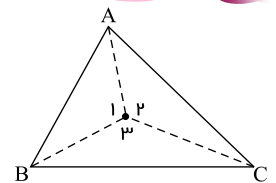
$$MA = MC \Rightarrow \hat{MAC} = \hat{C}$$



$$\Rightarrow \hat{AMH} = 2\hat{C} = 78^\circ \Rightarrow \hat{C} = 39^\circ, \hat{B} = 90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$$

۱۰-۵-۸۵

۵۴- گزینه ۳ طبق فرض سوال:



می‌دانیم که زاویه بین دو نیمساز داخلی هر مثلث برابر است با 90° به اضافه نصف زاویه سوم:

پس داریم:

$$\hat{O}_1 = 90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}, \hat{O}_2 = 90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}, \hat{O}_3 = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$$

$$\frac{90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}}{2} = \frac{90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}}{3} = \frac{90^\circ + \frac{\hat{B}}{2}}{5} = \frac{270^\circ + \frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}}{2}}{7 + 6 + 5} = \frac{270^\circ + \frac{180^\circ}{2}}{18} = 90^\circ$$

بنابراین:

$$\frac{90^\circ + \frac{\hat{C}}{2}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C} = 100^\circ$$

۸-۴-۸۸

۵۵- گزینه ۱

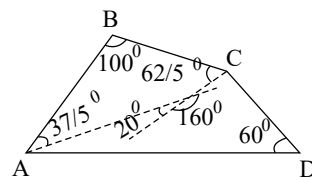
$$\frac{\hat{A}}{3} = \frac{\hat{B}}{4} = \frac{\hat{C}}{5} = \frac{5\hat{D}}{12} = x \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 3x \\ \hat{B} = 4x \\ \hat{C} = 5x \\ \hat{D} = \frac{12}{5}x \end{cases}$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = (4 - 2) \times 180^\circ = 360^\circ$$



$$\rightarrow 3x + 4x + 5x + \frac{12}{5}x = 360^\circ \rightarrow x = 25^\circ$$

$$\rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 75^\circ \\ \hat{B} = 100^\circ \\ \hat{C} = 125^\circ \\ \hat{D} = 6^\circ \end{cases}$$



نکته: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی برابر $(n - 2) \times 180^\circ$ می‌باشد.

۹۰-۳-۷

۵۶ گزینه ۱ با توجه به شکل کوچک‌ترین زاویه بین دو نیمساز خارجی، محل برخورد نیمسازهای خارجی B و C است. داریم:

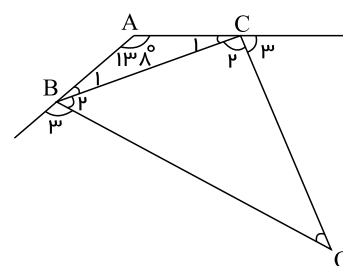
$$\triangle ABC : 138^\circ + B_1 + C_1 = 180^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 42^\circ$$

$$\triangle BOC : \hat{O} + \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 180^\circ$$

$$\rightarrow \hat{O} + \left(\frac{180^\circ - \hat{B}_1}{2} \right) + \left(\frac{180^\circ - \hat{C}_1}{2} \right) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \hat{O} + 180^\circ - \left(\frac{\hat{B}_1 + \hat{C}_1}{2} \right) = 180^\circ$$

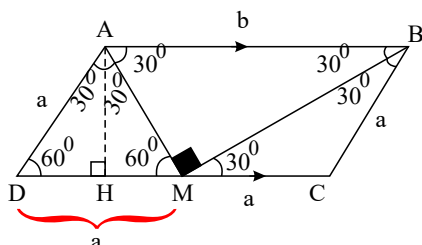
$$\rightarrow \hat{O} = \frac{\hat{B}_1 + \hat{C}_1}{2} = \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ$$



۱۷-۴۸-۳۶

۵۷ گزینه ۳

مطابق شکل MA و MB نیمساز زوایای A و B هستند.



داریم:

$$\triangle ADM : DM = AD = a, \quad \triangle BMC : BC = MC = a \Rightarrow DC = b = 2a$$

$$ABCD \text{ محیط} = a + b + a + 2a = 4a + b = 4a + 2a = 12\sqrt{3} \Rightarrow a = 2\sqrt{3}, \quad CD = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle ADM \text{ متساوی‌الاضلاع} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{3} = 3$$

$$S_{ABCD} = AH \times DC = 3 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

۹۵-۲-۳

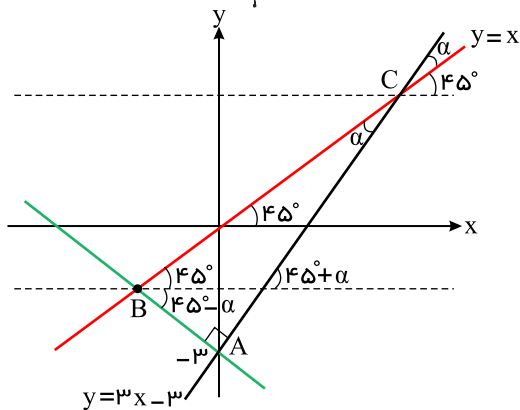
۵۸ گزینه ۲

$$\begin{cases} 3y + x = -9 \\ ax - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(ax - 3) + x = -9 \\ ax - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ax - 9 + x = -9 \\ ax - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ax + x = 0 \\ ax - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow A(0, -3) \Rightarrow y = -3$$

$$\begin{cases} 3y + x = -9 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y + x = -9 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + x = -9 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = -9 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{9}{4} \\ y = -\frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow B(-\frac{9}{4}, -\frac{9}{4})$$

$$\begin{cases} ax - y = 3 \\ y - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - y = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - x = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a - 1) = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{a - 1} \\ y = \frac{3}{a - 1} \end{cases} \Rightarrow C(\frac{3}{a - 1}, \frac{3}{a - 1})$$

از آنجایی که مرکز دایره بر نیمساز اول و سوم واقع است می‌توان نتیجه گرفت مرکز دایره بر روی خط گذرنده از نقاط B و C است. بنابراین $(a = 3) \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$



شیب خط $(3x - 3)$ $\tan(45^\circ + \alpha) = 3$

$$\tan(45^\circ + \alpha) = 3$$

$$\tan 2(45^\circ + \alpha) = \frac{2 \tan(45^\circ + \alpha)}{1 - \tan^2(45^\circ + \alpha)} = \frac{2 \times 3}{1 - 9} = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$$

$$\tan(90^\circ + 2\alpha) = -\cot(2\alpha) = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot(2\alpha) = \frac{3}{4}$$

$$\hat{B} - \hat{C} = (90^\circ - \alpha) - (\alpha) = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \tan(90^\circ - 2\alpha) = \cot 2\alpha = \frac{3}{4}$$

۸۷-۶-۷

گزینه ۴ وضعیت قد این ۵ نفر به قرار زیر است:

$$\left. \begin{array}{l} \square, \square < \text{علی} \\ \text{روزبه} < \text{داود} < \text{علی} \\ \text{داود} < \text{علی} \end{array} \right\} \Rightarrow \square, \square < \text{علی} < \text{داود} < \text{علی}$$

روزبه < داود < علی < احمد < حامد

چون احمد کوتاهترین فرد نیست، وضعیت به شکل زیر خواهد بود:

۵۷-۹-۳۴

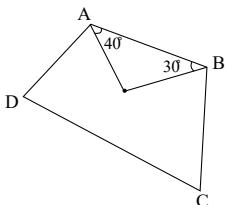
گزینه ۳

$$\frac{A}{4} = \frac{B}{3} = \frac{C+D}{11} = t \Rightarrow \begin{cases} A = 4t \\ B = 3t \\ C + D = 11t \end{cases}$$

از طرفی می‌دانیم جمع زوایای داخلی هر ۴ ضلعی محدب برابر 360° است:

$$A + B + C + D = 360^\circ \Rightarrow 4t + 3t + 11t = 360^\circ \Rightarrow 18t = 360^\circ \Rightarrow t = 20^\circ \Rightarrow \begin{cases} A = 4t = 80^\circ \\ B = 3t = 60^\circ \end{cases}$$

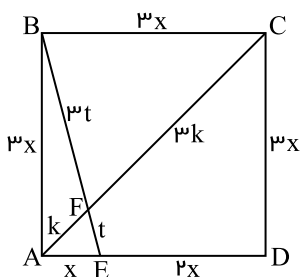
مطابق شکل واضح است زاویه بین نیم‌سازهای رئوس B و C برابر $O = 180^\circ - (40^\circ - 30^\circ) = 110^\circ$ می‌باشد.



چون زاویه حاده خواسته شده پس زاویه حاده O برابر $180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ می‌باشد.

۸۷-۳-۱۰

گزینه ۱



$$\frac{t}{k} = \frac{BE}{AC} = \frac{4t}{4k} = \frac{\sqrt{10x^2}}{\sqrt{18x^2}} = \sqrt{\frac{10}{18}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

۸۰-۹-۱۱

گزینه ۳

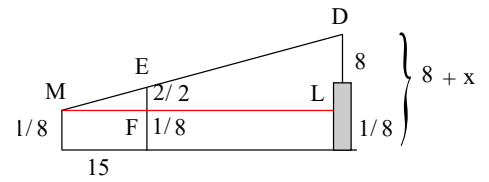
$$\left. \begin{array}{l} AM \parallel DN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{MN} \\ AM \parallel EN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{MN}{MC} \end{array} \right\} \xrightarrow{BM=MC} \frac{AB}{AD} \times \frac{AE}{AC} = \frac{BM}{MN} \times \frac{MN}{MC} = 1 \Rightarrow AB \times AE = AD \times AC \Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AC} \xrightarrow{\frac{AB}{AC} = \frac{2}{3}} \frac{AD}{AE} = \frac{2}{3}$$

۶۹-۶-۲۵

گزینه ۲ از نقطه M موازی خطی موازی سطح افق رسم کرده، باتوجه به شکل و قضیه ی تالس داریم:

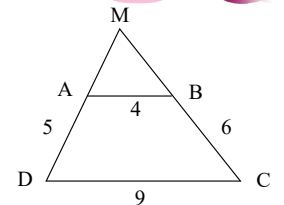


$$EF \parallel DL \Rightarrow \frac{EF}{DL} = \frac{MF}{ML} \Rightarrow \frac{2,2}{15} = \frac{15}{180} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 20,2$$



۷۲-۸-۱۹

گزینه ۴ بنابر فرض تست شکل زیر را خواهیم داشت.



۶۷-۳-۳۰

گزینه ۱ اگر c واسطه‌ی هندسی a و b باشد، داریم:

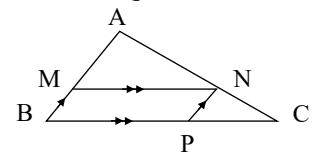
$$c = \sqrt{ab} = \sqrt{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۴۵-۱۲-۴۳

گزینه ۱

MNPB متوازی‌الاضلاع است، بنابراین $NP \parallel AB$ و $MN \parallel BC$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MB} &= \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{2}{5} \quad (1) \\ MN \parallel BC &\Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{3}{5} \xrightarrow{MN=BP} \frac{BP}{BC} = \frac{3}{5} \quad (2) \end{aligned}$$

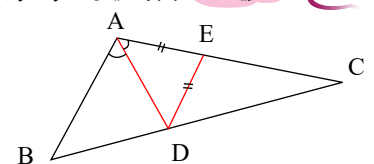


$$\frac{S_{MNPB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{MB \times BP \times \sin \hat{B}}{\frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}} = \frac{\frac{2}{5} AB \times \frac{3}{5} BC}{\frac{1}{2} AB \times BC} = \frac{12}{25} = 0,48 = 48\%$$

۶۹-۵-۲۶

گزینه ۲ بنابر قضیه‌ی خطوط موازی و مورب نتیجه می‌گیریم $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$ چون AD نیمساز است پس $\hat{D}_1 = \hat{A}_1$ ، بنابراین $DE = AE$ داریم:

$$5AB = 3AC = 60 \Rightarrow \begin{cases} AC = 20 \\ AB = 12 \end{cases}$$



قضیه تالس

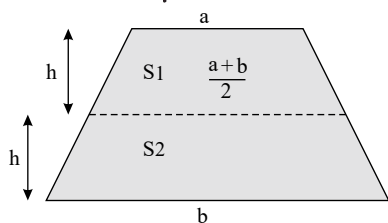
$$DE \parallel AB \longrightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{EC}{AC}$$

$$\frac{DE}{12} = \frac{EC}{20} \xrightarrow{DE=AE} \frac{AE}{12} = \frac{EC}{20}$$

ترکیب در صورت

$$\Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{12}{20} \longrightarrow \frac{AC}{EC} = \frac{32}{20} \Rightarrow \frac{20}{EC} = \frac{32}{20} \Rightarrow EC = 12,5$$

۷۷-۶-۱۷



۶۸ ✖ گزینه ۲ اندازه پاره خطی که وسط‌های دو ساق دوزنقه را به هم وصل می‌کند برابر میانگین دو قاعده است.

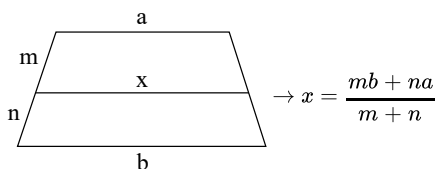
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{(a + \frac{a+b}{2})(\frac{h}{2})}{(b + \frac{a+b}{2})(\frac{h}{2})} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\frac{3a+b}{2}}{\frac{3b+a}{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3a+b}{3b+a} = \frac{1}{2} \rightarrow 6a + 2b = 3b + a \rightarrow 5a = b$$

یعنی نسبت قاعده‌های دوزنقه، ۱ به ۵ است.

۲۲-۵۱-۲۷

۶۹ ✖ گزینه ۳

می‌دانیم اگر در یک دوزنقه خطی موازی دو قاعده رسم شود طول پاره‌خط رسم شده از این رابطه به دست می‌آید:



$$x = \frac{mb + na}{m + n}$$

پس: $MN = \frac{(2 \times 12) + (3 \times 7)}{2 + 3} = \frac{45}{5} = 9$

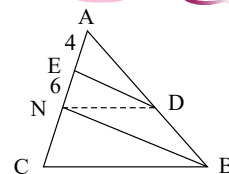
$$ED \parallel NB \Rightarrow \frac{AE}{AN} = \frac{AD}{AB} \quad (1)$$

$$ND \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AN}{AC} \quad (2)$$

$$\frac{4}{10} = \frac{10}{AC} \Rightarrow AC = 25$$

۲۹-۱۵-۵۶

۷۰ ✖ گزینه ۴

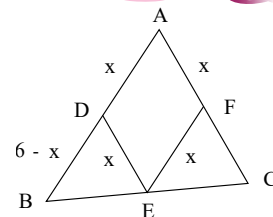


از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم $\frac{AE}{AN} = \frac{AN}{AC}$ ، پس:

۳۶-۹-۵۵

۷۱ ✖ گزینه ۴ با فرض اینکه طول ضلع لوزی x باشد: $AD = x$ و در لوزی $ADFE$ اضلاع $ED \parallel AF$ پس داریم:

$$ED \parallel AC \Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{ED}{AC} = \frac{6-x}{6} = \frac{x}{4} = 24 - 4x = 6x \Rightarrow x = AD = \frac{12}{5}$$



۸۴-۸-۹

۷۲ ✖ گزینه ۱

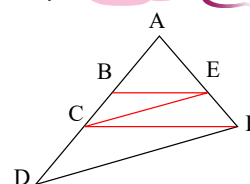
$$\angle B = \angle E \Rightarrow ED \parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{4}{AB} = \frac{6}{9} \Rightarrow AB = 12 \Rightarrow EB = AB - AE = 4$$

۴۲-۹-۴۹

۷۳ ✖ گزینه ۲ اگر CD را برابر x در نظر بگیریم، داریم:

$$\begin{cases} BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \times AD \Rightarrow 1^2 = 5AD \Rightarrow AD = \frac{64}{5} \\ CE \parallel DF \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AC^2 = AB \times AD \Rightarrow 1^2 = 5AD \Rightarrow AD = \frac{64}{5} \end{cases}$$

$$CD = AD - AC = \frac{64}{5} - 8 = \frac{16}{5} = 3.2$$

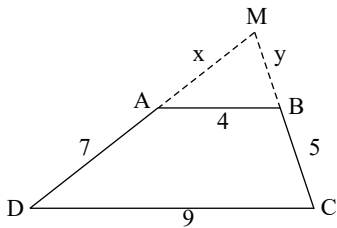


۶۱-۴-۳۴



گزینه ۲ شکل مقابل را در نظر بگیرید:

۷۴



$$AB \parallel CD \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{x}{x+y} = \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{x+y} = \frac{4}{9} \rightarrow 9x = 4x + 20 \rightarrow x = \frac{20}{5} \\ \frac{y}{y+5} = \frac{4}{9} \rightarrow 9y = 20 + 4y \rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$MAB \text{ محیط مثلث } = x + y + 4 = \frac{20}{5} + 4 + 4 = \frac{28}{5} = 5.6$$

۳۱-۳۳-۳۶

گزینه ۱ از قضیه تالس کمک می گیریم:

۷۵

$$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{4}{4+y} = \frac{x+1}{y+x+1} = \frac{y^2}{y^2+5-x}$$

تناسب اول را حل می کنیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4y + 4x + 4 = 4x + 4 + xy + y \Rightarrow 3y = xy \Rightarrow x = 3$$

برای ساده تر بودن محاسبات از تالس جزء به جزء استفاده می کنیم:

$$\Rightarrow \frac{4}{y} = \frac{y^2}{5-x} \xrightarrow{x=3} 8 = y^2 \Rightarrow y = 2$$

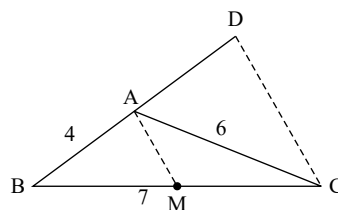
$$\text{بنابراین: } y - 2x = 2 - 2(3) = -4$$

۳۴-۳۵-۳۱

گزینه ۲

۷۶

شکل مسئله را رسم می کنیم:



$$AM \parallel DC \rightarrow \frac{BA}{BD} = \frac{BM}{BC} \rightarrow \frac{4}{BD} = \frac{3.5}{7} = \frac{1}{2} \rightarrow BD = 8$$

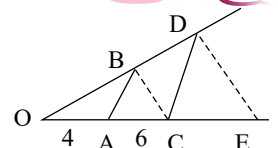
$$\left. \begin{aligned} AB \parallel CD &\Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \\ BC \parallel DE &\Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OC}{OE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OC}{OE} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{10}{OE} \Rightarrow OE = 25$$

$$CE = 25 - OC = 25 - 10 = 15$$

۲۱-۲۹-۵۰

گزینه ۲

۷۷

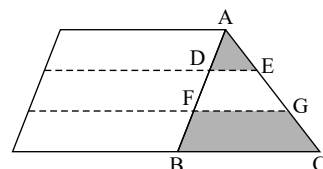


۷۱-۶-۲۳

گزینه ۲

۷۸

روش اول:



طبق قضیه تالس $\frac{FG}{BC} = \frac{2}{3}$ و $\frac{DE}{BC} = \frac{1}{3}$ است.

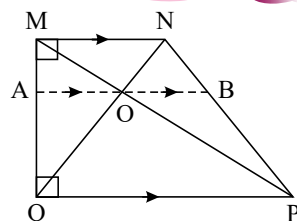
$$\frac{S_{ADE}}{S_{FGCB}} = \frac{(\frac{1}{2})(h)(DE)}{(\frac{1}{2})(h)(FG + BC)} = \frac{DE}{FG + BC} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{2}{3}BC + BC} = \frac{\frac{1}{3}BC}{\frac{5}{3}BC} = \frac{1}{5}$$

روش دوم:

نسبت مساحت‌های محصور بین خطوط موازی، ۱ به ۳ به ۵ به ۷ به ۹ به ... است پس طبق این توضیح، خواسته مسئله برابر $\frac{1}{5}$ است.

۲۸-۴۱-۳۱

گزینه ۲ ۷۹

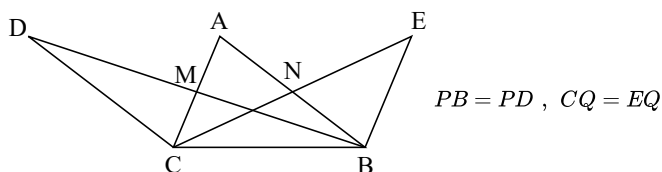


از طرفی چون $PQ \parallel AB \parallel MN$ پس داریم:

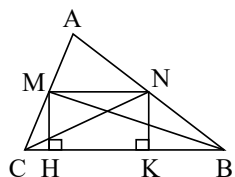
$$\frac{AM}{MQ} = \frac{NB}{NP} \quad (۳) \Rightarrow (۱), (۲), (۳) \Rightarrow \frac{AO}{PQ} = \frac{BO}{PQ} \Rightarrow AO = OB \Rightarrow \frac{AO}{OB} = ۱$$

۶۰-۱۲-۲۸

گزینه ۳ مطابق شکل داریم:



$$\begin{cases} \triangle BDC : \text{میانۀ } CM \Rightarrow S_{MDC}^{\triangle} = S_{MCB}^{\triangle} \Rightarrow S_{BCD}^{\triangle} = ۲S_{MCB}^{\triangle} & (۱) \\ \triangle BEC : \text{میانۀ } BN \Rightarrow S_{BNE}^{\triangle} = S_{BNC}^{\triangle} \Rightarrow S_{BEC}^{\triangle} = ۲S_{BNC}^{\triangle} & (۲) \end{cases}$$



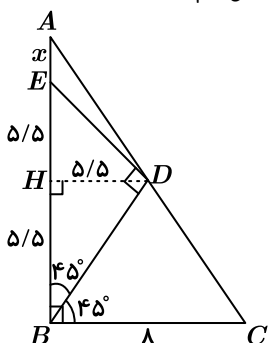
$$\triangle ABC : AN = BN, AM = MC \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow MH = NK$$

$$\Rightarrow S_{MBC}^{\triangle} = S_{NBC}^{\triangle} = \frac{1}{2}MH \times BC = \frac{1}{2}NK \times BC \quad (۳)$$

$$(۱), (۲), (۳) \Rightarrow S_{BCD}^{\triangle} = S_{BEC}^{\triangle}$$

۸۱-۵-۱۴

وقتی ارتفاع DH موازی BC است پس این ارتفاع، نیمساز زاویه $\hat{D} = ۹۰^\circ$ هم خواهد شد (چرا؟)، پس از قضیه تالس استفاده می‌کنیم:



$$\begin{aligned} \frac{AH}{AB} &= \frac{DH}{BC} \Rightarrow \frac{5.5+x}{11+x} = \frac{5.5}{8} \\ \Rightarrow 44 + 8x &= 60.5 + 5.5 \Rightarrow 2.5x = 16.5 \\ \Rightarrow x &= \frac{16.5}{2.5} = \frac{165}{25} = \frac{33}{5} = 6.6 \end{aligned}$$

۳۲-۵۲-۱۶



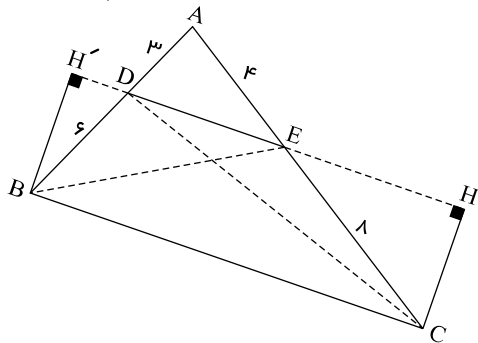
گزینه ۴

۸۲

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} DE \parallel BC$$

$$\rightarrow BH' = CH$$

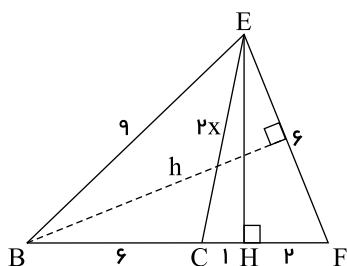
$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle BDE}} = \frac{\frac{1}{2}CH \times DE}{\frac{1}{2}BH' \times DE} = 1$$



۶۸-۶-۲۵

گزینه ۴

۸۳



$$AB \parallel CD \rightarrow \frac{CF}{BF} = \frac{CJ}{BE} = \frac{JF}{FE}$$

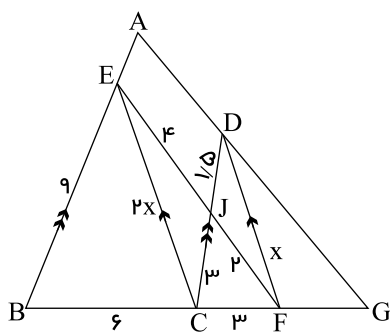
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{9} = \frac{CJ}{9} \rightarrow CJ = 3 \\ \frac{3}{9} = \frac{JF}{4 + FJ} \rightarrow FJ = 2 \end{cases}$$

$$JDF \sim EJC \Rightarrow \frac{EJ}{JF} = \frac{CJ}{JD} \Rightarrow \frac{4}{2} = \frac{3}{JD} \Rightarrow JD = 1.5$$

و چون نسبت تشابه دو مثلث JDF و EJC برابر ۲ است، داریم:

$$DF = x, EC = 2x$$

حال مثلث BEF را در نظر می‌گیریم:



$$h = \sqrt{9^2 - 3^2} = \sqrt{81 - 9} = 6\sqrt{2}$$

$$S_{BEF} = \frac{6 \times h}{2} = \frac{6 \times 6\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$$

از طرفی:

$$S_{BEF} = \frac{BF \times EH}{2} \Rightarrow 18\sqrt{2} = \frac{9 \times EH}{2} \rightarrow EH = 4\sqrt{2}$$

$$BH^2 = BE^2 - EH^2 \Rightarrow BH = \sqrt{9^2 - (4\sqrt{2})^2} = 7 \rightarrow CH = 1$$

$$EC^2 = EH^2 + CH^2 \Rightarrow EC = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + 1} = \sqrt{33}$$

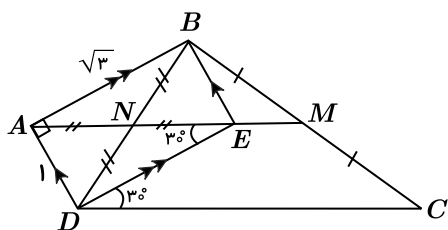
$$DF = \frac{1}{2}EC = \frac{\sqrt{33}}{2}$$

۸۷-۶-۷


$$\frac{S_{OAB}^{\Delta}}{S_{ABC}^{\Delta}} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \Rightarrow \begin{cases} S_{OAB}^{\Delta} = \mathfrak{r}S \\ S_{ABC}^{\Delta} \mathfrak{r}S = \frac{1}{\mathfrak{r}} \times \mathfrak{r}x \times h \Rightarrow xh = \frac{\mathfrak{r}S}{\mathfrak{r}} \end{cases}$$

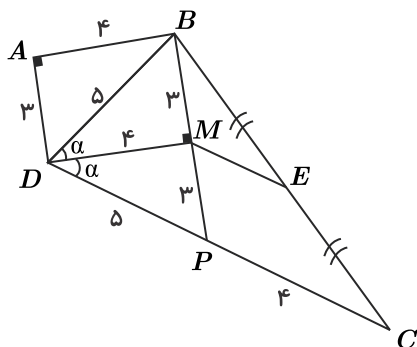
$$\frac{S_{OAC}^{\Delta}}{S_{وزنه}} = \frac{\Delta s}{\frac{16s}{3}} = \frac{15}{16}$$

۸۵ ✧ گزینه ۳ E را طبق مفروضات پیدا کرده و به وسط BC متصل می‌کنیم. قطرهای مستطیل رسم شده را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در N قطع کنند. می‌دانیم قطرهای مستطیل باهم برابرند و همدیگر را نصف می‌کنند. با توجه به شکل نتیجه می‌شود MN میان خط مثلث BCD است؛ بنابراین



$$\begin{aligned}\widehat{E}_1 &= 90^\circ \Rightarrow \cos \widehat{E}_1 = \frac{\sqrt{r}}{AE} = \frac{\sqrt{r}}{r} \\ \Rightarrow rNE &= r \Rightarrow NE = 1 \Rightarrow MN = 1,5 + 1 = 2,5 \\ \frac{MN}{CD} &= \frac{1}{r} \Rightarrow CD = 2,5 \times r = 5\end{aligned}$$

۸۶ ✨ گزینه ۲

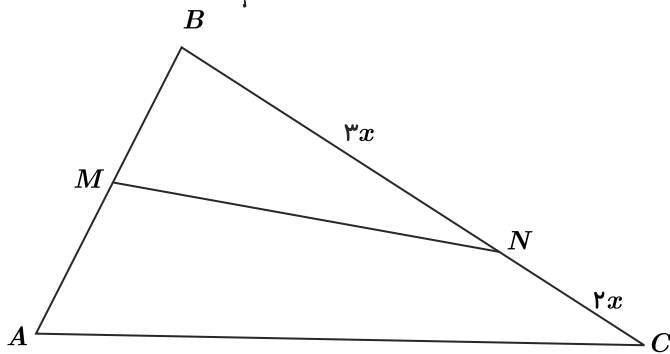


چون $DM \parallel AB$ و $BM \parallel AD$ پس چهارضلعی $ABMD$ مستطیل است و داریم: $AD = 3$ و $AB = 4$ پس نتیجه می‌شود که $BM = 3$ و $DM = 4$ است و طبق قضیه فیثاغورس $BD = 5$ است از طرفی چون طبق فرض $\widehat{BDC} = 2\widehat{BDM}$ است پس $\widehat{BDM} = \widehat{MDP} = \alpha$ است یعنی DM هم نیمساز و هم ارتفاع مثلث BDP است یعنی مثلث BDP در رأس D متساوی‌الساقین است. در نتیجه DM میانه هم خواهد بود و داریم:

حال در مثلث BPC چون M و E وسط‌های اضلاع مثلث هستند پس طبق عکس قضیهٔ تالس $PC \parallel ME$ است و داریم:

$$ME = \frac{1}{2}PC \Rightarrow ME = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

گزینه ۳ ۸۷



چون طبق فرض $S_{ABC} = 3S_{BMN}$ است پس داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \times AB \times \sin \widehat{B}$$

$$S_{BMN} = \frac{1}{2} BN \times BM \times \sin \widehat{B}$$

طبق فرض $\Rightarrow \frac{1}{2} BC \times AB \times \sin \widehat{B} = 3 \times \frac{1}{2} BN \times BM \times \sin \widehat{B}$

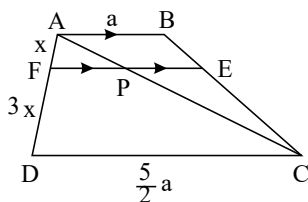
$$5x \times AB = 3(3x) \times BM \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{BM}{AB - BM} = \frac{5}{9 - 5} = \frac{5}{4} = 1,25$$

۸۵-۳-۱۳

گزینه ۱

۸۸



$$\frac{DC}{AB} = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = \frac{2}{5} CD$$

$$\triangle ADC : PF \parallel CD \Rightarrow \frac{PF}{CD} = \frac{x}{5x} = \frac{1}{5} \Rightarrow PF = \frac{CD}{5} \quad (1)$$

$$\triangle ABC : PE \parallel AB \Rightarrow \frac{PE}{AB} = \frac{CE}{CB} = \frac{DF}{AD} = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow PE = \frac{3}{5} AB = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} CD$$

$$PE = \frac{6}{25} CD \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow PE + PF = EF = \frac{CD}{5} + \frac{6}{25} CD = \frac{11}{25} CD$$

۷۹-۳-۱۸

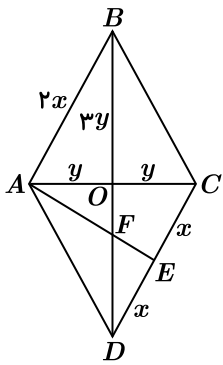
گزینه ۴

۸۹

$$\triangle ABO : (2x)^2 = y^2 + (3y)^2 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2} y \quad (1)$$

در هر مثلث برای طول میانه m_a با اضلاع a ، b و c داریم:

$$2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$



از طرفی میانه‌ها به نسبت ۱ به ۲ همدیگر را قطع می‌کنند و در نتیجه: $EF = \frac{1}{3}AE$

در مثلث ACD ، AE میانه بوده و داریم:

$$2AE^2 + \frac{DC^2}{2} = AC^2 + AD^2 \Rightarrow 2AE^2 + \frac{4x^2}{2} = 4y^2 + 4x^2 \Rightarrow 2AE^2 = 4y^2 + 4x^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$EF = \frac{1}{3}AE$$

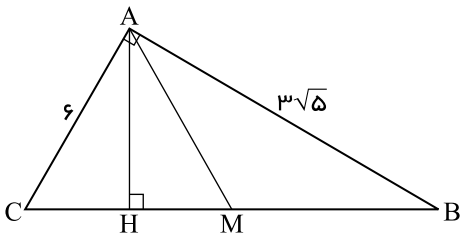
$$AE = 3y \longrightarrow EF = y$$

$$\frac{EF}{AB} = \frac{y}{2x} = \frac{y}{2 \times \frac{\sqrt{10}}{2}y} \rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

۳۷-۳۸-۲۵

گزینه ۴ ۹۰

ابتدا شکل مسئله را رسم می‌کنیم:



$$\triangle ABC : (AC)^2 + (AB)^2 = (BC)^2 \rightarrow 36 + 45 = (BC)^2 \rightarrow 81 = (BC)^2 \rightarrow BC = 9 \rightarrow BM = CM = 4.5$$

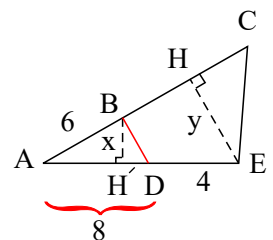
$$\text{می دانیم} : (AB)^2 = BH \cdot BC \rightarrow 45 = 9BH \rightarrow BH = 5 \rightarrow MH = 0.5$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)(h)(BC)}{\left(\frac{1}{2}\right)(h)(MH)} = \frac{9}{0.5} = 18$$

۴۰-۴۰-۱۹

گزینه ۱ ۹۱ باتوجه به شکل، دو مثلث قائم‌الزاویه ABH' و AEH' به علت برابری یک زاویه‌ی حادّه (زاویه‌ی $\hat{A}$) متشابه هستند. حال نسبت تشابه را می‌نویسیم:

$$\frac{BH'}{EH'} = \frac{AB}{AE} \rightarrow \frac{x}{y} = \frac{6}{8+4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$



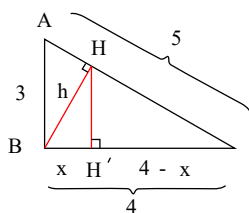
۷۶-۸-۱۵



گزینه ۹۲

وتر AC در مثلث قائم الزاویه ABC به کمک رابطه‌ی فیثاغورس بدست می‌آید.

از طرفی داریم:



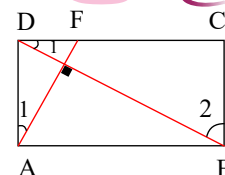
$$AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$BH \times AC = AB \times BC \Rightarrow 5h = 3 \times 4 \Rightarrow h = \frac{12}{5}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{ارتفاع وارد بر وتر}}{\text{ضرب دو ضلع قائم}} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$$

$$\triangle BHC : BH^2 = BH' \times BC \Rightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^2 = 4x \Rightarrow x = \frac{36}{25} = 1,44$$

۷۰-۶-۲۴

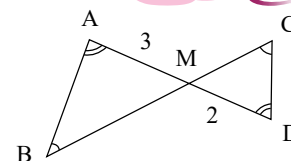
گزینه ۹۳ $\triangle ADF \sim \triangle DBC$ زیرا دو زاویه مساوی دارند.پس $DF = \frac{1}{9}AB$ و $AB = 9DF$ بنابراین $DC = 9DF$ نکته: اگر طول مستطیل K برابر عرض مستطیل بود، $DC = K^2 DF$ است.

۷۲-۵-۲۳

گزینه ۹۴ تذکر: وقتی دو مثلث متشابه‌اند نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

$$AB \parallel CD \Rightarrow \triangle ABM \sim \triangle MCD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{AM}{MD} = \frac{BM}{MC} = \frac{3}{2}$$

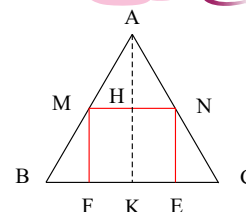
$$\frac{S_{MCD}}{S_{AMB}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$



۵۳-۲۹-۱۸

گزینه ۹۵ مطابق شکل ارتفاع AK را رسم کرده داریم:

$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AH}{AK}$$

اگر طول ضلع مربع را x فرض کنیم با توجه به اینکه در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a طول ارتفاع $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است، پس:

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AH}{AK} \Rightarrow \frac{x}{1} = \frac{AK - HK}{AK} \Rightarrow x = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - x}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{2} - x \Rightarrow x(\sqrt{3} + 2) = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \times \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3$$

۶۶-۷-۲۷

گزینه ۹۶

چون دو مثلث قابل انطباق نمی‌باشند یعنی دو مثلث مساوی نیستند و در نتیجه در دو مثلث، اضلاع به طول ۳ نمی‌توانند متشابه باشند اگر فرض کنیم $a > b$ است یکی از این دو حالت رخ می‌دهد.

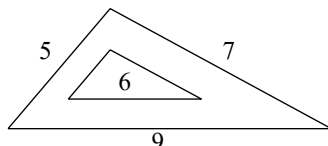
$$\frac{3}{4} = \frac{a}{5} = \frac{b}{3} \rightarrow a = \frac{15}{4}, b = \frac{9}{4} \rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{9}{4} + \frac{15}{4} = 9$$

$$\frac{3}{5} = \frac{a}{4} = \frac{b}{3} \rightarrow a = \frac{12}{5}, b = \frac{9}{5} \rightarrow \text{محیط} = 3 + \frac{12}{5} + \frac{9}{5} = 7,2$$

که بیشترین محیط برابر ۹ است.

۶۶-۱۰-۲۴

۹۷- گزینه ۳ دو مثلث با یکدیگر متشابه هستند و اگر مساحت مثلث بزرگتر را S و مساحت مثلث کوچکتر را S' بنامیم، داریم:



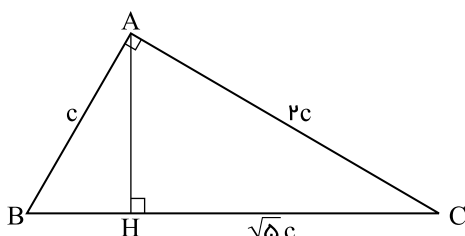
$$\rightarrow \frac{S}{S'} = K^2 \rightarrow \frac{S}{S'} = \left(\frac{9}{6}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

نسبت تشابه

$$\frac{\text{مساحت محدود به دو مثلث}}{\text{مساحت مثلث کوچکتر}} = \frac{S - S'}{S'} \stackrel{\text{تفکیک}}{=} \frac{S}{S'} - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4} = 1,25$$

۷۱-۷-۲۲

۹۸- گزینه ۳ بنابر قضیه فیثاغورس نتیجه می شود $BC = \sqrt{5}c$ ، داریم:



$$\Delta ABH \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABH}} = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}c}{c}\right)^2 = 5$$

۷۵-۶-۱۹

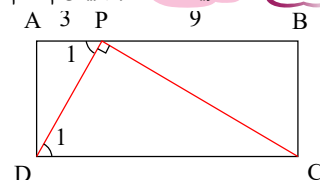
۹۹- گزینه ۱

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \Rightarrow \frac{25}{S'} = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \Rightarrow S' = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$$

۶۳-۸-۲۹

۱۰۰- گزینه ۴ دو زاویه $\hat{P}_1, \hat{D}_1$ بنابر قضیه خطوط موازی و مورب مساوی اند. پس دو مثلث قائم الزویه ADP ، PDC متشابه اند.

$$\Delta APD \sim \Delta DPC \Rightarrow \frac{DP}{DC} = \frac{AP}{DP} \Rightarrow DP^2 = AP \cdot DC = 12 \times 3 = 36 \Rightarrow PD = 6$$



روش دوم: بنابر استدلال روش قبل در مثلث قائم الزویه DPC می توان گفت مربع یک ضلع برابر است با حاصل ضرب وتر در تصویر همان ضلع بر وتر.

اندازه AP با اندازه PD تصویر PD بر وتر برابر است، بنابراین:

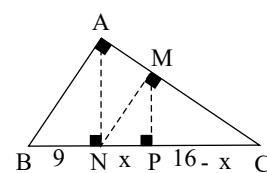
$$PD^2 = AP \times DC = 12 \times 3 = 36 \rightarrow PD = 6$$

۵۸-۱۳-۲۸

۱۰۱- گزینه ۳ MN و AB موازی هم و MP و AN نیز موازی هم می باشند.

$$\Delta ABC : MN \parallel AB \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} = \frac{16}{9} \quad (I)$$

$$\Delta ACN : MP \parallel AN \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{CM}{MA} = \frac{CP}{PN} = \frac{16-x}{x} \quad (II)$$



نسبت $\frac{CM}{MA}$ در هر دو تناسب وجود دارد

$$I, II \xrightarrow{\text{نسبت}} \frac{16}{9} = \frac{16-x}{x} \Rightarrow 16x = 144 - 9x \Rightarrow 25x = 144$$

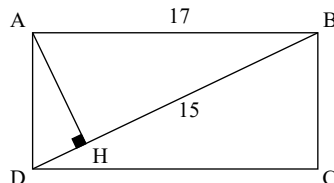
$$\Rightarrow x = \frac{144}{25} = \frac{576}{100} = 5,76$$

۷۸-۳-۲۰



$$MD \perp BC \Rightarrow MD \parallel AB \Rightarrow \triangle MCD \sim \triangle ABC$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MDC}} = \left(\frac{2}{1}\right)^2 = 4$$



$$(AB)^2 = BH \cdot BD \Rightarrow 289 = 15BD \Rightarrow BD = \frac{289}{15}$$

$$\frac{289}{15} - 19 = \frac{289 - 285}{15} = \frac{4}{15}$$

اکنون می‌خواهیم بدانیم این عدد چقدر از ۱۹ بیشتر است پس:

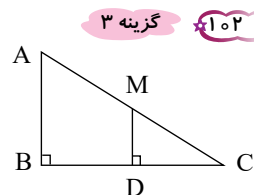
$$\begin{aligned} \triangle PEC \sim \triangle APB &\rightarrow \frac{S_{\triangle PEC}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{PC}{PB}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ \triangle ADE \sim \triangle APB &\rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle APB}} = \left(\frac{DE}{BP}\right)^2 = \left(\frac{BC}{BP}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} S_{\triangle DEM} &= \frac{1}{2} \times DM \times HE \\ S_{DECB} &= BD \times HE = 2DM \times HE \end{aligned} \right\} \rightarrow S_{\triangle DEM} = \frac{1}{4} S_{DECB} \\ S_{\triangle DEM} &= \frac{1}{4} (S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ECP}) = \frac{1}{4} (S_{\triangle ABP} - \frac{1}{9} S_{\triangle ABP} - \frac{4}{9} S_{\triangle ABP}) = \frac{1}{4} (\frac{4}{9} S_{\triangle ABP}) = \frac{1}{9} S_{\triangle ABP} \\ \rightarrow \frac{S_{\triangle DEM}}{S_{\triangle ABP}} &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{5}{x} = \frac{y}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{25}{3} \\ y = \frac{35}{3} \end{cases} \Rightarrow x + y = \frac{25 + 35}{3} = 20$$

$$\begin{cases} \triangle ABC : A = 70^\circ, B = 50^\circ, \hat{C} = 60^\circ \\ \triangle MNP : \hat{M} = 70^\circ, \hat{N} = 60^\circ, \hat{P} = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle MNP$$

$$\text{از طرفی می‌دانیم } \frac{S}{S'} = \left(\frac{AB}{MP}\right)^2, \quad \frac{S}{S'} = \frac{9}{4}$$

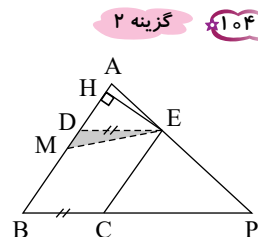


چون نسبت تشابه ۲ است.

۶۶-۸-۲۶

گزینه ۱
شکل مسئله را رسم می‌کنیم:

۲۲-۲۸-۵۰



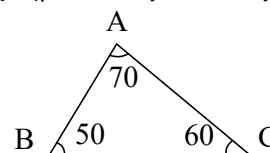
۸۳-۴-۱۲

گزینه ۲

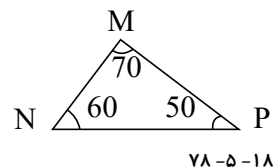
۶۵-۷-۲۷

گزینه ۱

دو مثلث ABC و MNP متشابهند زیرا:



$$\frac{AB}{MP} = \sqrt{\frac{9}{4}} \Rightarrow \frac{18}{MP} = \frac{3}{2} \Rightarrow MP = 12$$



۷۸-۵-۱۸

گزینه ۳ هر دو بر AC عمودند و می‌دانیم دو خط عمود بر یک خط موازی‌اند. پس:

$$AB \parallel DC \Rightarrow \triangle EDC \sim \triangle EAB$$

۳۳-۱۶-۵۲

گزینه ۱

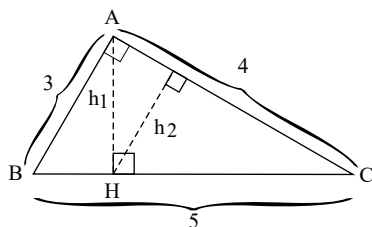
در دو مثلث متشابه اضلاع متناسب‌اند و نسبت مساحت‌ها برابر با توان دوم نسبت متشابه.

$$\frac{9}{x-2} = \frac{12}{x} \Rightarrow 9x = 12x - 24 \Rightarrow x = 8$$

$$\frac{نسبت مساحت‌ها}{9} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{نسبت تشابه}{6} = \frac{2}{3}$$

۵۱-۱۲-۳۷

گزینه ۲



دو مثلث ABC و AHC متشابه هستند (دو زاویه مساوی) بنابراین نسبت تشابه آنها همان نسبت ارتفاع‌ها است.

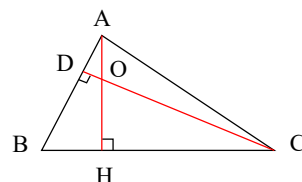
$$k = \frac{h_1}{h_2} = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{4} \rightarrow \frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$$

۲۶-۴۴-۳۱

گزینه ۴ در مثلث قائم الزاویه AOD و HOC دو زاویه مساوی دارند پس متشابه‌اند.

$$\triangle ADO \sim \triangle HOC \Rightarrow \frac{OH}{OD} = \frac{HC}{AD} = \frac{OC}{OD}$$

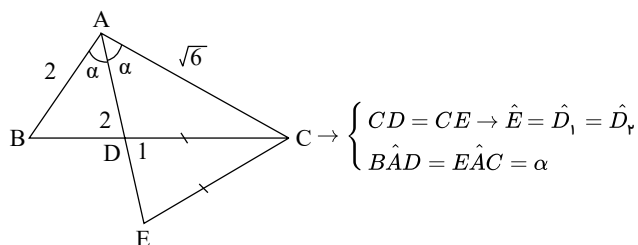
$$\Rightarrow \frac{36}{12} = \frac{HC}{12} \Rightarrow HC = 5 \times 36 = 180$$



۷۵-۷-۱۸

گزینه ۲

شکل مقابل را در نظر بگیرید:

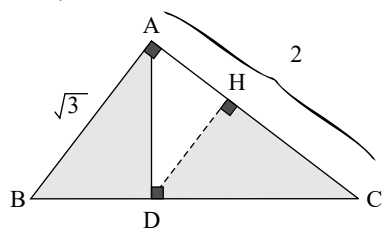


بنابراین دو مثلث ABD و ACE در حالت دو زاویه مساوی با هم متشابه هستند و می‌دانیم که نسبت مثلث‌ها برابر مجذور نسبت تشابه است.

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACE}} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

۸۱-۶-۱۳

گزینه ۳ دو مثلث ABD و HDC متشابه هستند، پس نسبت مساحت‌های آنها برابر با مجذور نسبت تشابه است.



$$(BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 = 3 + 4 = 7 \rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$(AC)^2 = BC \times DC \rightarrow 4 = \sqrt{7} \times DC \rightarrow DC = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{S_{\triangle HDC}}{S_{\triangle ABD}} = \left(\frac{DC}{AB}\right)^2 = \left(\frac{\frac{4}{\sqrt{7}}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)^2 = \frac{16}{21}$$

۲۷-۳۹-۳۴

۱۱۳

در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با مجذور نسبت تشابه این دو مثلث است.

گزینه ۲

$$\text{نسبت تشابه مثلث بزرگ تر به کوچک تر} = \frac{2}{3} \rightarrow k = \frac{2}{3} \rightarrow k^2 = \frac{4}{9} \rightarrow \text{نسبت اضلاع} = \frac{2}{3} \times \text{نسبت مساحت‌ها}$$

$$\text{پس: } \frac{\text{مساحت مثلث بزرگ}}{\text{مساحت مثلث کوچک}} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25$$

۲۷-۱۷-۵۷

۱۱۴

اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر موازیند پس دو مثلث متشابه‌اند، بنابراین:

گزینه ۳

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{2}{17,5}\right)^2 \Rightarrow \frac{4 \times 7}{S'} = \left(\frac{2}{17,5}\right)^2 \Rightarrow S' = \frac{175}{2} = 87,5$$

۲۶-۲-۷۲

۱۱۵

گزینه ۲

$$\frac{S}{S'} = \left(\frac{2P}{2P'}\right)^2 = k^2 \Rightarrow \frac{2P}{2P'} = k$$

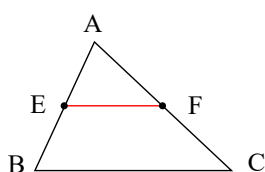
نسبت مساحت دو شکل متشابه مجذور نسبت تشابه آن‌هاست.

۳۳-۱۲-۵۵

۱۱۶

برای اینکه AEF و ABC متشابه باشند باید تناسب $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FC}$ برقرار باشد. در گزینه‌ی ۴ تناسب $\frac{6}{4} = \frac{12}{8}$ برقرار است ولی در مورد بقیه این تناسب

برقرار نیست.



۱۴-۲-۸۴

۱۱۷

گزینه ۳

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{49}{128} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{21}{a_2} = \frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow a_2 = 24\sqrt{2}$$

۳۲-۷-۶۱

۱۱۸

گزینه ۳

دو مثلث OCD و OEF متشابه هستند.

$$\frac{CD}{EF} = \frac{OD}{OE} \rightarrow \frac{y}{1} = \frac{4}{y} \rightarrow y^2 = 4 \rightarrow y = 2$$

$$\frac{CD}{EF} = \frac{OC}{OF} \rightarrow \frac{2}{1} = \frac{OC}{3} \rightarrow OC = 6$$

دو مثلث OCD و OAB متشابه هستند.

$$\frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} \rightarrow \frac{4}{4+x} = \frac{y}{2x} \rightarrow \frac{4}{4+x} = \frac{2}{2x} \rightarrow 8+2x=8x \rightarrow x=\frac{4}{3}$$

$$\text{از طرفی: } CD \parallel AB \rightarrow \frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC} \rightarrow \frac{4}{\frac{4}{3}} = \frac{6}{AC} \rightarrow AC = 2$$

۲۲-۴۹-۲۸

۱۱۹

در دو مثلث متشابه نسبت محیط‌ها برابر نسبت اضلاع نظیر است.

$$\text{محیط مثلث اول} = 7 + 5 + 11 = 23$$

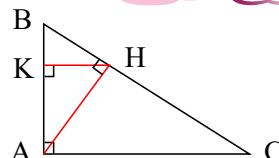
$$\frac{\text{محیط مثلث اول}}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{a}{a'} \Rightarrow \frac{23}{\text{محیط مثلث دوم}} = \frac{5}{22.5}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث دوم} = 103.5$$

۴۲-۶-۵۲

گزینه ۱ همواره در هر مثلث قائم الزاویه با رسم ارتفاع وارد بر وتر دو مثلث قائم الزاویه‌ی جدید ایجاد می‌شود که هر دو با مثلث اولیه متشابه هستند. پس داریم:

$$\Delta ABC \sim \Delta ABH \sim \Delta AHC \sim \Delta AKH \sim \Delta HKB$$



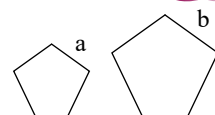
پس گزینه‌های ۲ و ۳ و ۴ درست و گزینه‌ی ۱ نادرست است.

۷۳-۱۳-۱۴

گزینه ۲ هر دو پنج ضلعی منتظم متشابه‌اند و نسبت مساحت آن‌ها مجذور نسبت تشابه آن‌هاست، بنابراین:

$$\frac{4}{9} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \quad (\text{نسبت تشابه})$$

$$\frac{6}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = 9 \quad \text{یا} \quad \frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 4$$



بستگی به اینکه اگر عدد ۶ اندازه‌ی ضلع کوچک‌تر باشد، ضلع پنج ضلعی بزرگ‌تر ۹ است یا اگر عدد ۶ عدد ضلع بزرگ‌تر باشد، ضلع پنج ضلعی کوچک‌تر ۴ است.

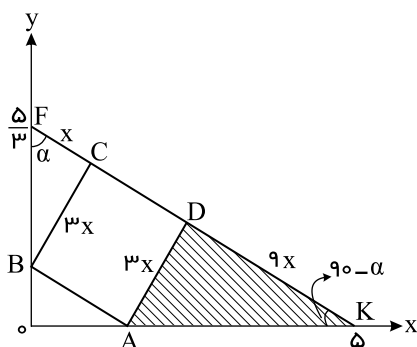
۷۲-۳-۲۵

گزینه ۲ با توجه به تعریف تشابه که دو چند ضلعی را متشابه گوئیم وقتی زوایای نظیر مساوی داشته باشند و اضلاع نظیر به نظیر متناسب داشته باشند، گزینه‌ی ۲ درست

است.

۳۸-۱۲-۵۰

گزینه ۲



$$\text{در مثلث } KOF \quad \tan \alpha = \frac{5}{3} = \frac{BC}{CF}$$

$$\Rightarrow BC = 3CF \xrightarrow{CF=x} BC = 3x$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 + (5)^2 = (Fk)^2 \Rightarrow (Fk)^2 = \frac{250}{9} \Rightarrow Fk = \frac{5\sqrt{10}}{3}$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{3} = \frac{AD}{Dk} \Rightarrow Dk = 9x$$

$$\Rightarrow S = 3x \left(\frac{5\sqrt{10}}{3} - x - 9x \right) = 3x \left(\frac{5\sqrt{10}}{3} - 10x \right) = 5\sqrt{10}x - 30x^2$$

$$S' = 5\sqrt{10} - 60x = 0 \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{10}}{60} = \frac{\sqrt{10}}{12}$$

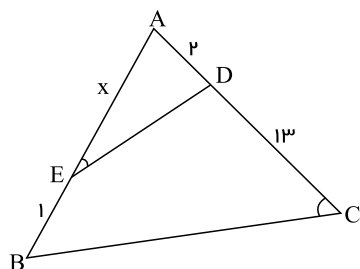
$$S = \frac{1}{2} \times 3x \times 9x = \frac{27}{2} \times \frac{10}{(12)^2} = \frac{27}{2} \times \frac{5}{24} = \frac{15}{16}$$

۸۵-۷-۸



گزینه ۳ ۱۲۴

دو مثلث ABC و ADE به حال تساوی دو زاویه با هم متشابه‌اند و داریم:

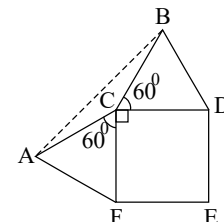


$$\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{2}{x+1} \Rightarrow x(x+1) = 30 = 5 \times 6 \Rightarrow x = 5$$

۶۱-۴-۳۵

گزینه ۴ ۱۲۵

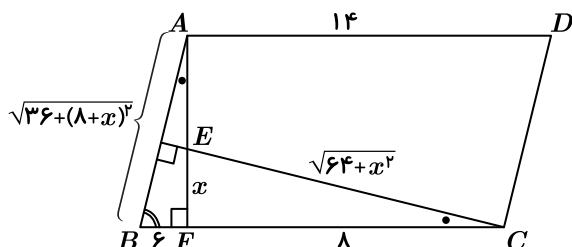
اکنون در مثلث ABC قضیه کسینوس‌ها را به کار می‌بریم:



۹۳-۲-۵

گزینه ۳ ۱۲۶

دو مثلث ABF و CEF متشابه‌اند:



$$\begin{aligned} \frac{AB}{CE} &= \frac{AF}{CF} = \frac{BF}{EF} \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{36 + (\lambda + x)^2}}{\sqrt{6\lambda + x^2}} &= \frac{\lambda + x}{\lambda} = \frac{6}{x} \\ \Rightarrow x^2 + \lambda x - \underbrace{4\lambda}_{4 \times 12} &= 0 \Rightarrow (x + 12)(x - 4) = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه $x = 4$ و داریم $AF = \lambda + 4 = 12$

۳۰-۳۹-۳۱

گزینه ۳ ۱۲۷

$$CF \parallel AB \Rightarrow \frac{CF}{12} = \frac{4}{12} = \frac{DF}{DF + \lambda} \Rightarrow CF = 4, DF = 4 \Rightarrow \begin{cases} \Delta ABD \text{ متساوی الاضلاع} \\ \Delta FCD \text{ متساوی الاضلاع} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ قضیه کسینوس‌ها: $AC^2 = AB^2 + CB^2 - 2 \times AB \times CB \times \cos 60^\circ \Rightarrow$

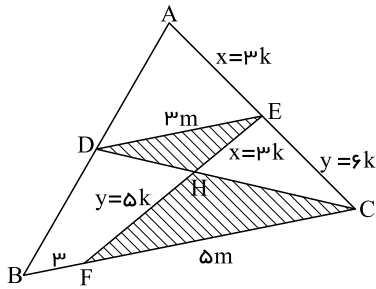
$$AC^2 = 12^2 + 4^2 - 2 \times 12 \times 4 \times \frac{1}{2} = 112 \Rightarrow AC = 4\sqrt{7}$$

$$\Delta ACF \sim \Delta DFE \Rightarrow \frac{ED}{AC} = \frac{FD}{AF} \Rightarrow \frac{ED}{4\sqrt{7}} = \frac{4}{12} \Rightarrow ED = 2\sqrt{7}$$

۳۴-۴۰-۲۶

گزینه ۱ ۱۲۸

از رابطه $3y = 5x$ می فهمیم $x = 3k$ و $y = 5k$ که آنها را در شکل جایگذاری می کنیم.



دو مثلث هاشور خورده DHE و CHF با هم متشابه اند و نسبت تشابه آنها برابر $\frac{HE}{HF} = \frac{3}{5}$ است. لذا با در نظر گرفتن $DE = 3m$ داریم $FC = 5m$.

حال طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

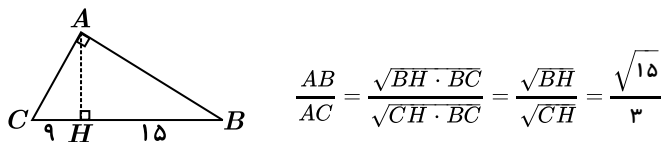
$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC} = \frac{3m}{3+5m} = \frac{3k}{9k} = \frac{1}{3} \Rightarrow 9m = 5m + 3 \Rightarrow m = \frac{3}{4} = 0,75$$

در نتیجه اندازه ضلع BC برابر می شود با:

$$BC = 5m + 3 = 5 \times 0,75 + 3 = 6,75$$

۸۲-۴-۱۴

گزینه ۲ ۱۲۹

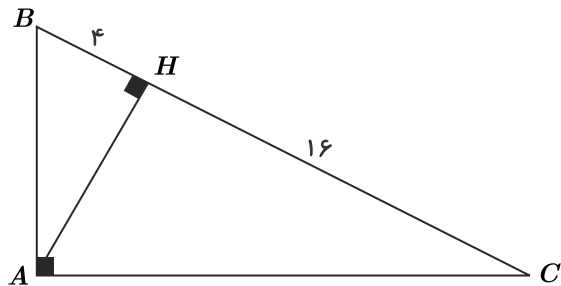


$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{BH \cdot BC}}{\sqrt{CH \cdot BC}} = \frac{\sqrt{BH}}{\sqrt{CH}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

۷۷-۳-۲۰

گزینه ۱ ۱۳۰

طبق روابط طولی در مثلث قائم الزاویه داریم:

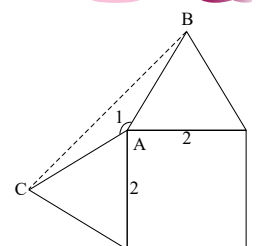


$$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases} \Rightarrow \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BH \times BC}{CH \times BC} = \frac{BH}{CH} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$$

۸۱-۴-۱۵

گزینه ۳ ۱۳۱

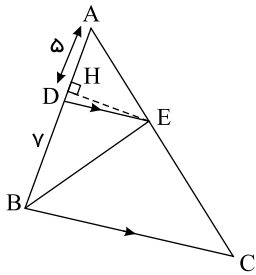
$$\begin{aligned} AB &= AC = 2 \\ \hat{A}_1 &= 360 - (90 + 60 + 60) = 360 - (210) \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$



۸۴-۵-۱۱



چون $DE \parallel BC$ ، پس مثلث ADE و ABC متشابه هستند و می‌دانیم نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر با توان دوم نسبت تشابه است، پس:



$$DE \parallel BC \Rightarrow ADE \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{AD}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}} = \left(\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{25}{144} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{144}{25} S_{ADE}$$

با فرض $S_{ADE} = x$ داریم:

$$S_{ABC} = \frac{144}{25} x$$

طبق شکل EH ارتفاع هر دو مثلث ADE و BDE است، پس:

$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{1}{2} EH \times 5}{\frac{1}{2} EH \times 7} = \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{x}{S_{BDE}} = \frac{5}{7} \Rightarrow S_{BDE} = \frac{7}{5} x$$

حال مساحت BEC را می‌یابیم:

$$S_{BEC} = S_{ABC} - S_{ADE} - S_{BDE} = \frac{144}{25} x - x - \frac{7}{5} x$$

$$S_{BEC} = \frac{144x - 25x - 35x}{25} = \frac{84x}{25}$$

$$S_{BCE} = \frac{84x}{25}$$

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{\frac{84x}{25}}{\frac{7}{5} x} = \frac{24 \times 5}{25 \times 7} = \frac{12}{5} = 2,4$$



پاسخنامه کلیدی

۱	۲	۲۸	۲	۵۵	۱	۸۲	۴	۱۰۹	۲
۲	۴	۲۹	۲	۵۶	۱	۸۳	۴	۱۱۰	۴
۳	۳	۳۰	۲	۵۷	۳	۸۴	۴	۱۱۱	۲
۴	۴	۳۱	۱	۵۸	۲	۸۵	۳	۱۱۲	۳
۵	۴	۳۲	۱	۵۹	۴	۸۶	۲	۱۱۳	۲
۶	۲	۳۳	۲	۶۰	۳	۸۷	۳	۱۱۴	۳
۷	۲	۳۴	۱	۶۱	۱	۸۸	۱	۱۱۵	۲
۸	۴	۳۵	۲	۶۲	۳	۸۹	۴	۱۱۶	۴
۹	۲	۳۶	۲	۶۳	۲	۹۰	۴	۱۱۷	۳
۱۰	۴	۳۷	۱	۶۴	۴	۹۱	۱	۱۱۸	۳
۱۱	۲	۳۸	۲	۶۵	۱	۹۲	۴	۱۱۹	۴
۱۲	۳	۳۹	۱	۶۶	۱	۹۳	۲	۱۲۰	۱
۱۳	۱	۴۰	۳	۶۷	۲	۹۴	۳	۱۲۱	۲
۱۴	۱	۴۱	۱	۶۸	۲	۹۵	۲	۱۲۲	۲
۱۵	۳	۴۲	۴	۶۹	۳	۹۶	۲	۱۲۳	۲
۱۶	۱	۴۳	۳	۷۰	۴	۹۷	۳	۱۲۴	۳
۱۷	۳	۴۴	۲	۷۱	۴	۹۸	۳	۱۲۵	۴
۱۸	۲	۴۵	۳	۷۲	۱	۹۹	۱	۱۲۶	۳
۱۹	۱	۴۶	۱	۷۳	۲	۱۰۰	۴	۱۲۷	۳
۲۰	۳	۴۷	۱	۷۴	۲	۱۰۱	۳	۱۲۸	۱
۲۱	۱	۴۸	۴	۷۵	۱	۱۰۲	۳	۱۲۹	۲
۲۲	۱	۴۹	۳	۷۶	۲	۱۰۳	۱	۱۳۰	۱
۲۳	۴	۵۰	۱	۷۷	۲	۱۰۴	۲	۱۳۱	۳
۲۴	۲	۵۱	۲	۷۸	۲	۱۰۵	۲	۱۳۲	۴
۲۵	۴	۵۲	۴	۷۹	۲	۱۰۶	۱		
۲۶	۱	۵۳	۴	۸۰	۳	۱۰۷	۳		
۲۷	۲	۵۴	۳	۸۱	۱	۱۰۸	۱		