

نو ترو کرا نیچ

پیوستگی و حد - ارشته تجربی



یه گاز بزنی، یه فصل کنکور می پره!

 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com



کارخونه رتبه برتر سازی، نو ترو فیل!



نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



رتبه ۲



محمدعلی موسی پور

تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۶۸



منیره زمانی

رتبه ۴۸



محمدحسین هاشمی

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۹۵



سید حسین تقوی

رتبه ۱۳۴



امیرمحمد ملکشاهی

رتبه ۱۱۲



امیرمحمد شریفی کلوری

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۵۷۵



هانیه گنجعلی

رتبه ۵۰۹



علیرضا شهنساری

رتبه ۴۲۸



مهدیه اسدی ارزنده

رتبه ۳۵۷



فاطمه مروت بلسی

رتبه ۶۶۸



فائزه حیدری دهکردی

رتبه ۶۳۹



هلیا رضایی

رتبه ۶۲۷



فریما آقاپور

رتبه ۶۰۳



ریحانه فلاح امینی

رتبه ۸۸۱



حلما ناصری

رتبه ۸۰۵



لعیا زنگنه قاسم آبادی

رتبه ۷۹۳



سارینا تقی زاده

رتبه ۶۷۴



علی اسدی

رتبه ۱۰۲۰



مهسا پیری

رتبه ۱۰۲۰



سارا دهقان

رتبه ۹۹۵



جواد فلاحتی

رتبه ۹۱۴



کیانا شیرین فر

رتبه ۱۱۲۵



سمیرا تباوار

رتبه ۱۱۱۱



رضا نصیری مدیسه

رتبه ۱۰۴۹



محمد خرم آبادی

رتبه ۱۰۲۴



ژینو نادری

رتبه ۱۲۶۷



مهدی آزادبخت

رتبه ۱۲۲۵



سید مهدی حیات غیبی

رتبه ۱۲۲۵



مهدی فیض زاده

رتبه ۱۲۰۴



یکتا سلیمانی پور

رتبه ۱۴۰۹



غزل قبادی

رتبه ۱۳۱۶



یسری ابوالمحمدی مله

رتبه ۱۳۰۶



مهتاب کامل

رتبه ۱۲۷۲



نرگس جوانی

رتبه ۱۵۹۸



محمد رضا دادپور

رتبه ۱۵۸۷



مهدی تیموری

رتبه ۱۴۳۹



ریحانه جعفری خیرخواه

رتبه ۱۴۱۶



زینب پارسا صفت

رتبه ۱۷۲۹



علی عزیززاده

رتبه ۱۷۲۹



علیرضا انصاری

رتبه ۱۶۶۹



مائده سادات حسینی

رتبه ۱۶۱۹



مehشید خانی

رتبه ۱۷۸۲



یاسین رئیسی زیدآبادی

رتبه ۱۷۷۶



علی عرب خانی

رتبه ۱۷۴۲



الهه فکاری



مشاوره کنکور نوتروفیل

سوالات کنکور از پیوستگی و
حد - نوتروفیل بهار ۱۴۰۴

مناسب تمام کنکوری های
رشته تجربی



۱ باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x - 1$ و $2x + 1$ به ترتیب ۸ و ۵ است. باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 - x - 1$ کدام است؟

- ۱ $-x + 4$ ۲ $x + 3$ ۳ $2x + 6$ ۴ $2x - 3$ مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۲ به ازای یک مقدار a ، چندجمله‌ای $P(x) = 2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x$ ، بر $2x - 1$ بخش پذیر است. در این حالت باقی مانده $P(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

- ۱ -10 ۲ -8 ۳ 4 ۴ 6 مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۳ فرض کنید باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x - 4$ و $x + 2$ ، به ترتیب ۳ و ۱ باشند. باقی مانده تقسیم $p(x) + 4p(-x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

- ۱ 7 ۲ 1 ۳ 0 ۴ -1 مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۴ چندجمله‌ای $p(x) = x^{3n+1} + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a$ ، به ازای هر عدد طبیعی n بر $x + 2$ بخش پذیر است. برای $n = 1$ ، باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر $x^2 + 2x - 3$ کدام است؟

- ۱ $-15x + 24$ ۲ $-15x + 14$ ۳ $-5x + 24$ ۴ $-5x + 44$ مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۵ تابع چند جمله‌ای درجه دوم با ضرایب طبیعی $p(x)$ مفروض است. اگر باقی مانده و خارج قسمت تقسیم $p(x)$ به $p'(x)$ (مشتق تابع $p(x)$) به ترتیب ۲- و $1 + \frac{1}{p}$ باشند کمترین مقدار مجموع ضرایب $p(x)$ کدام است؟

- ۱ 4 ۲ 6 ۳ 7 ۴ 9 مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۶ فرض کنید چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ ، بخش پذیر باشد. اگر $Q(x) = p(x - 1) + p(1 - x)$ ، آنگاه باقی مانده تقسیم $Q(x)$ بر $x - 2$ ، کدام است؟

- ۱ -1 ۲ صفر ۳ 1 ۴ 2 مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۷ باقی مانده تقسیم چند جمله‌ای $P(x)$ بر $x - 2$ و $x + 3$ به ترتیب ۱ و -4 است. باقی مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ ، کدام است؟

- ۱ $x - 1$ ۲ $x + 1$ ۳ $-x + 2$ ۴ $2x - 1$ مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۸ باقیمانده و خارج قسمت تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $2x + x^2$ به ترتیب $3x + 1$ و $Q(x)$ است. اگر $Q(-2) = 3$ ، آنگاه مقدار باقیمانده تقسیم $P'(x)$ بر $x + 2$ ، کدام است؟

- ۱ -6 ۲ -5 ۳ -4 ۴ -3 مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

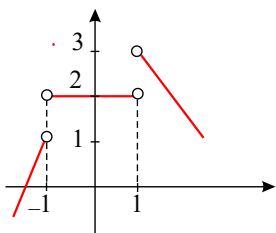
۹ باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $f(x) = x^2 + 4x + 5$ برابر $x + 2$ است. اگر $f(1) = 13$ و $f(-1) = 11$ باشد، خارج قسمت این تقسیم کدام مورد می تواند باشد؟

- ۱ $-x + 2$ ۲ $2x - 1$ ۳ $3x - 2$ ۴ $-2x + 3$ مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱۰ به ازای کدام مجموعه مقادیر x ، بازه $(1, 2x - 1)$ ، یک همسایگی عدد ۳ می باشد؟

- ۱ $\emptyset$ ۲ $\{2\}$ ۳ $2 < x < 2.5$ ۴ $1.5 < x < 2$ مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۱۱ با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ کدام است؟



- ۱ 1 ۲ 2 ۳ 4 ۴ 5





۱۲ در تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + a & ; x < -2 \\ 3x + 4 & ; x > -2 \end{cases}$ مقدار حد چپ در نقطه $x = -2$ ، عکس مقدار حد راست در این نقطه است. a کدام است؟
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

- ۱ ۳ ۲٫۵ ۳ -۴ ۴ -۴٫۵

۱۳ در تابع با ضابطه $f(x) = (x + a)[x]$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$ باشد، عدد حقیقی a کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)
مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

- ۱ ۲ ۳ -۱ ۴ ۰

۱۴ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} 2 & x \geq 1 \\ 1 & x < 1 \end{cases}$ می باشد حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow 1^-$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۶۳

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۰

۱۵ در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & x > 0 \\ -\sqrt{1+x} & x \leq 0 \end{cases}$ ، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x)$ کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

- ۱ ۲ ۳ ۴ موجود نیست. ۰ -۱

۱۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{[x] + 3}{x + 2}$ ، کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)
مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

- ۱ ۲ -۱ ۳ صفر ۴ ۱

۱۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi-}{6}} [2 \sin x - 1]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)
مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- ۱ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ وجود ندارد.

۱۸ اگر $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & x < 1 \\ x^2 + 2a & x \geq 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$ ، مقدار a کدام است؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

- ۱ ۲ -۳ -۲ -۱ ۴

۱۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) \left[\frac{1}{x + 1} \right]$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)
مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

- ۱ ۲ ۰ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ ۱

۲۰ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x + a)^2 & x \geq -1 \\ 2x + 1 & x < -1 \end{cases}$ در نقطه $x = -1$ حد دارد؟
مرجع: سراسری - ۱۳۸۰

- ۱ $\{1\}$ ۲ $\{-1, 1\}$ ۳ $\emptyset$ ۴ $\mathbb{R}$

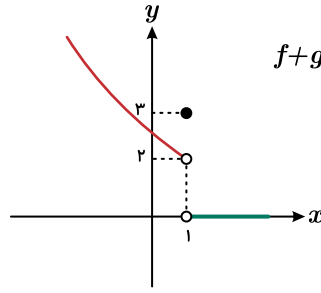
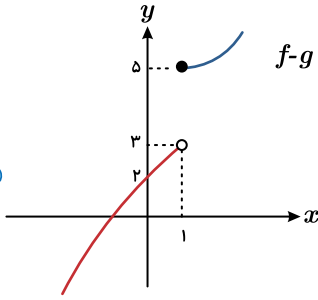
۲۱ حد عبارت $\sin \frac{x}{2} \left[\cos \frac{x}{2} \right] - \cos x [\sin 2x]$ وقتی $x \rightarrow \pi$ ، کدام است؟ ([] به مفهوم جزء صحیح است.)
مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

- ۱ -۱ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ حد ندارد.



مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۲۲ شکل‌های زیر، نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ هستند. مقدار $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ کدام است؟



۲,۷۵ (۴)

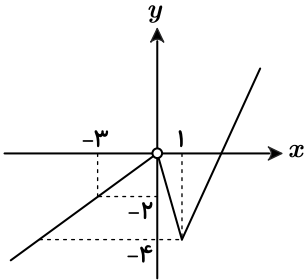
۲,۵ (۳)

۲,۲۵ (۲)

حد ندارد. (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

۲۳ شکل زیر، نمودار تابع f است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{|x|} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{f(x)}$ کدام است؟



-۲,۵ (۴)

-۳,۷۵ (۳)

-۴,۲۵ (۲)

-۵,۵ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۲۴ حد عبارت $[\tan^2 x] \cos 3x + [\sin(x - \frac{\pi}{3})]$ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{3}$ کدام است؟ ([] به مفهوم جزء صحیح است.)

۴ (۴)

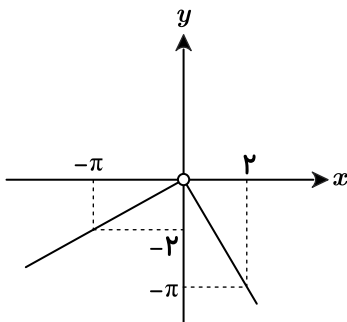
۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۲۵ شکل زیر، نمودار تابع f است. مقدار $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} + \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|f(x)|}{\sin x}$ کدام است؟



$4\pi + \frac{1}{\pi^2}$ (۴)

$4\pi - \frac{1}{\pi^2}$ (۳)

$\frac{4}{\pi^2} - 1$ (۲)

$1 - \frac{4}{\pi^2}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۷۰

۲۶ حد چپ تابع $f(x) = \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$ در نقطه $x = 3$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است)

∞ (۴)

۰ (۳)

-۱ (۲)

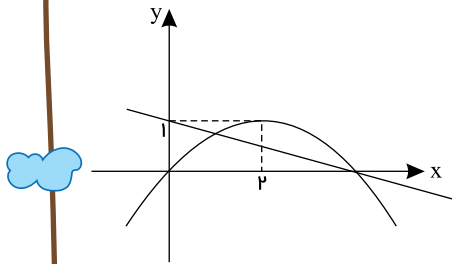
۱ (۱)





مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۲۷ نمودار تابع سهمی f و خط راست g در شکل زیر داده شده است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x}$ کدام است؟



$$-\frac{5}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{3}{2} \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} \quad (4)$$

$$\frac{5}{4} \quad (3)$$

مرجع: سراسری - ۱۳۷۷

۲۸ قدرمطلق تفاضل حد چپ و حد راست تابع f به معادله $f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{|x - 1|}$ در نقطه $x = 1$ کدام است؟

$$6 \quad (4)$$

$$4 \quad (3)$$

$$3 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۲۹ اگر $f(x) = x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^3$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ کدام است؟

$$\frac{3}{14} \quad (4)$$

$$\frac{2}{7} \quad (3)$$

$$\frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\frac{1}{27} \quad (1)$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۳۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^3 - [x^3]}$ کدام است؟

$$+\infty \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$\frac{1}{3} \quad (2)$$

$$\text{صفر} \quad (1)$$

۳۱ اگر در ریشه‌ای از معادله $5x^2 - ax + b = 0$ حد تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ موجود بوده و تابع f در آن پیوسته نباشد، مقدار

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

$\left[\frac{b - 2a}{3} \right]$ کدام است؟

$$\text{صفر} \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$-3 \quad (1)$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۳۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{|x+1| + [x]}{x - [-x]}$ کدام است؟

$$1 \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\text{صفر} \quad (2)$$

$$-\infty \quad (1)$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۳۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}}$ ، کدام است؟

$$24 \quad (4)$$

$$16 \quad (3)$$

$$12 \quad (2)$$

$$8 \quad (1)$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۳۴ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه b کدام است؟

$$2 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-2 \quad (1)$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۳۵ حد عبارت $\frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}}$ ، وقتی $x \rightarrow -8$ ، کدام است؟

$$-6 \quad (4)$$

$$-12 \quad (3)$$

$$-18 \quad (2)$$

$$-24 \quad (1)$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۳۶ حد عبارت $\frac{2 - \sqrt{3x + 2}}{5x^2 - 18x + 16}$ ، وقتی $x \rightarrow 2$ ، کدام است؟

$$-\frac{1}{8} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{3} \quad (1)$$





مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۳۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1}$ کدام است؟

- ۱ -۱۱۲ ۲ -۹۶ ۳ -۸۴ ۴ -۷۲

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۳۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{6}$ ۲ $-\frac{1}{12}$ ۳ $\frac{1}{12}$ ۴ $\frac{1}{6}$

مرجع: سراسری - ۱۳۷۸

۳۹ اگر $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x + 16}} = 2$ آنگاه a کدام است؟

- ۱ $a = 1$ ۲ $a = -1$ ۳ $a = 5$ ۴ $a = -5$

مرجع: سراسری - ۱۳۷۹

۴۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x + 8}}{x + 2}$ برابر کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{2}$ ۲ $\frac{5}{2}$ ۳ $\frac{-3}{2}$ ۴ $\frac{-5}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۴۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x + 1}}$ کدام است؟

- ۱ $-1,5$ ۲ $-1,2$ ۳ $-0,8$ ۴ $-0,6$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۴۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5 - x}}$ کدام است؟

- ۱ -۴ ۲ -۲ ۳ ۲ ۴ ۴

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۴۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3 - x}}{x^2 + x}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{7}{4}$ ۲ $-\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{3}{4}$ ۴ $\frac{5}{4}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۴۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x + 3} - \sqrt{3x + 4}}{1 + \sqrt{x}}$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ $\frac{1}{2}$ ۳ -۲ ۴ $-\frac{3}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۴۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x + 1}}{2 - \sqrt{x}}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{2}{3}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{4}{3}$ ۴ $\frac{3}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۴۶ حد عبارت $\frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$ وقتی $x \rightarrow 2^-$ کدام است؟

- ۱ -۳ ۲ -۲ ۳ ۲ ۴ ۳

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۴۷ مقدار غیر صفر حد $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{b\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2b}{ax - b}$ کدام است؟

- ۱ $\frac{1}{12}$ ۲ $\frac{1}{6}$ ۳ $\frac{1}{48}$ ۴ $\frac{1}{24}$





مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۴۸ اگر $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} = \frac{3}{2}$ باشد، کدام است؟

۵ (۴)

۴ (۳)

-۶ (۲)

-۸ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

۴۹ مقدار غیر صفر حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt{x}}-b}{ax+b}$ کدام است؟

 $\frac{1}{6}$ (۴) $-\frac{1}{6}$ (۳) $-\frac{1}{3}$ (۲) $\frac{1}{3}$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۵۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}}$ کدام است؟

۲ (۴)

 $\sqrt{2}$ (۳) $-\sqrt{2}$ (۲)

-۲ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۵۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x}$ ، کدام است؟

 2π (۴) π (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

۵۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x}$ کدام است؟

 $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$ (۳)

۳ (۲)

 ∞ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۵۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos^2 x}$ کدام است؟

۲ (۴)

۱ (۳)

 $\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۵۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos^2 x}$ کدام است؟

۱ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲)

-۱ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۲

۵۵ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{e}^+} \frac{[4\cos^2 \pi x] - 12x}{ax+b} = \frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $a+b$ کدام می باشد؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است)

۱۲ (۴)

۱۰ (۳)

-۱۶ (۲)

-۲۰ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

۵۶ حاصل $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \cos \pi x}{x - 4\sqrt{x} + 4}$ کدام است؟

 $8\pi^2$ (۴) $4\pi^2$ (۳) 4π (۲)

۰ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۵۷ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{4})} = 2^a$ باشد، آنگاه a کدام است؟

 $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{1}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۲) $-\frac{1}{2}$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

۵۸ حد عبارت $\frac{\sqrt{\cos^3 x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ وقتی $x \rightarrow 0$ کدام است؟

۲ (۴)

 $\frac{1}{2}$ (۳) $-\frac{1}{2}$ (۲)

-۲ (۱)





مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۵۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 5x}}{x^2}$ کدام است؟

۶ ۴

۴ ۳

۳ ۲

۲ ۱

مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

۶۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است.)

حد ندارد. ۴

صفر ۳

۳ ۲

-۳ ۱

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۶۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ کدام است؟

۳ ۴

-۱ ۳

-۳ ۲

-۲ ۱

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۶۲ فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{tg^2(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1)}{(1 - \cos(\sqrt{2x}))^n} = a$ مقدار $a + n$ کدام است؟

۱۷ ۴

۱۵ ۳

۹ ۲

۷ ۱

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۶۳ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ کدام است؟

۲√۲ ۴

√۲ ۳

-√۲ ۲

-۲√۲ ۱

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۶۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^3 - x^2 - x + 1}$ کدام است؟

π² ۴

π² ۳

π ۲

π ۱

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۶۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x}$ برابر کدام است؟

۱ ۴

۱ ۳

۱ ۲

۱ ۱

۶۶ فرض کنید $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^3}-1) - 2 \tan[x]}{x^n(1 - \cos(\sqrt{3x}))} = a$ باشد. مقدار a^n کدام است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۲ ۴

۱ ۳

۲ ۲

۱ ۱

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۶۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$ کدام است؟

۰ ۴

۱ ۳

۱ ۲

۱ ۱

مرجع: سراسری - ۱۳۸۲

۶۸ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x}$ کدام است؟

+∞ ۴

۱ ۳

۰ ۲

-۱ ۱

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۶۹ حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{2+2\cos x}}$ کدام است؟

۲ ۴

۱ ۳

-۱ ۲

-۲ ۱





مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۷۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \tan 3x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ برابر کدام است؟

$$2\sqrt{2} \quad \text{۴}$$

$$2 \quad \text{۳}$$

$$-\sqrt{2} \quad \text{۲}$$

$$-2\sqrt{2} \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۷۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(1 + \cos x)}{1 - \cos 2x}$ کدام است؟

$$2 \quad \text{۴}$$

$$1 \quad \text{۳}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$\frac{1}{4} \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۷۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(2 - \sqrt{x})}{\cot \frac{\pi x}{8}}$ کدام است؟

$$\frac{\pi}{2} \quad \text{۴}$$

$$\frac{2}{\pi} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{2}{\pi} \quad \text{۲}$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۷۳ اگر $f(x) = \left(\frac{-1 + \sin x}{1 + \sin x} \right)^2$ و $f(x) = xg(x) + 1$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ کدام است؟

$$-2 \quad \text{۴}$$

$$-4 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$4 \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

۷۴ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}}$ کدام است؟

$$2\pi \quad \text{۴}$$

$$\pi \quad \text{۳}$$

$$-\frac{\pi}{2} \quad \text{۲}$$

$$-\pi \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۷۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1 - \tan \pi x}{2x - \sqrt{x}}$ کدام است؟

$$2\pi \quad \text{۴}$$

$$\pi \quad \text{۳}$$

$$-\pi \quad \text{۲}$$

$$-2\pi \quad \text{۱}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

۷۶ حد عبارت $\frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ کدام است؟

$$1 \quad \text{۴}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{۳}$$

$$-\frac{1}{2} \quad \text{۲}$$

$$-1 \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

۷۷ حد عبارت $\frac{\cos x}{1 - \sin x}$ وقتی $x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+$ کدام است؟

$$-\infty \quad \text{۴}$$

$$1 \quad \text{۳}$$

$$2 \quad \text{۲}$$

$$+\infty \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۷۸ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 5}{x^2 + ax + b} = -\infty$ باشد، $a + b$ کدام است؟

$$2 \quad \text{۴}$$

$$1 \quad \text{۳}$$

$$\text{صفر} \quad \text{۲}$$

$$-1 \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۷۹ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + |x|}$ کدام بیان، درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{۴}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{۳}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{۲}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \quad \text{۱}$$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۸۰ در مورد تابع با ضابطه $f(x) = \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x}$ کدام بیان، درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow \frac{4\pi}{3}} f(x) = +\infty \quad \text{۴}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^-} f(x) = -\infty \quad \text{۳}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} f(x) = +\infty \quad \text{۲}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{2\pi}{3})^+} f(x) = -\infty \quad \text{۱}$$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۰

۸۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x}$ کدام است؟

$$-\infty \quad \text{۴}$$

$$+\infty \quad \text{۳}$$

$$-1 \quad \text{۲}$$

$$0^+ \quad \text{۱}$$



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

۸۲ حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cot x$ کدام است؟ (نماد [] جزء صحیح است)

حد ندارد. (۴)

۱ (۳)

صفر (۲)

-۱ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۶۶

۸۳ مقدار $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2}$ کدام است؟

0^+ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

$-\infty$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۸۴ اگر $f(x) = 2^x$ و $g(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 0^-} (g \circ f)(x)$ کدام است؟

۲ (۴)

$\frac{3}{2}$ (۳)

-۱ (۲)

-۳ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

۸۵ اگر $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4x+3}$ و $g(x) = 2^x$ آنگاه $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x))$ کدام است؟

$\frac{1}{2}$ (۴)

$+\infty$ (۳)

۱ (۲)

۰ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۸۶ مقدار $\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{3})^-} \frac{10x - 5 + [\frac{3}{x^2}]}{16x - [-\frac{2}{x^2}]}$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)

$+\infty$ (۴)

$\frac{5}{8}$ (۳)

صفر (۲)

$-\infty$ (۱)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۸۷ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{16x - [-\frac{2}{x^2}]}{24x + [\frac{3}{x^2}]}$ کدام است؟ (نماد جزء صحیح است.)

$\frac{2}{3}$ (۴)

صفر (۳)

$+\infty$ (۲)

$-\infty$ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۸۸ اگر $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-4}{2x^2+ax+b} = -\infty$ باشد، $a+b$ کدام است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

-۳ (۱)

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

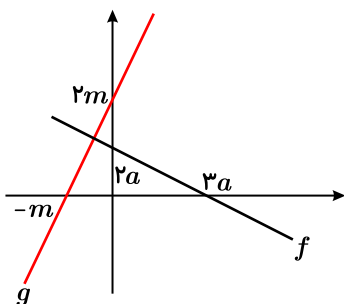
۸۹ اگر $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{ax+b}{a \cos x - \sin x} = -\infty$ باشد، کمترین مقدار صحیح b کدام است؟

-۱ (۴)

-۲ (۳)

-۳ (۲)

-۴ (۱)



مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۲

۹۰ شکل زیر، نمودار توابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|}$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱)

$-\frac{1}{3}$ (۲)

-۳ (۳)

۳ (۴)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

۹۱ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{\cos x} = +\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطه تابع f باشد؟ (نماد جزء صحیح است.)

$3\left[\frac{x}{\pi}\right] + 2$ (۴)

$\left[\frac{3x}{\pi}\right] - 2$ (۳)

$\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 1$ (۲)

$2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1$ (۱)



مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۹۲ اگر $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty$ باشد، کدام مورد می‌تواند ضابطه f باشد؟

۱ $\left[\frac{2x}{\pi}\right] - 1$

۲ $3\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1$

۳ $2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 3$

۴ $\left[\frac{3x}{\pi}\right] - 3$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

۹۳ اگر $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ، کدام است؟

۱ -۱

۲ $-\frac{1}{2}$

۳ $-\frac{1}{4}$

۴ صفر

۹۴ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

۱ -۶

۲ -۴

۳ ۳

۴ ۵

مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

۹۵ اگر $f(x) = x - \sqrt{4x^2 + x}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ ، کدام است؟

۱ -۲

۲ -۱

۳ ۲

۴ ۳

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۹۶ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + \sqrt{4x^2 + 5}}{2x + 2}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}$ باشد، آنگاه حد $f(x)$ وقتی $x \rightarrow -1$ ، کدام است؟

۱ $\frac{2}{3}$

۲ $\frac{5}{6}$

۳ $\frac{3}{2}$

۴ $\frac{5}{4}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۹۷ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x + 1}} = 3$ باشد، آنگاه حد این کسر وقتی $x \rightarrow 3$ کدام است؟

۱ ۱

۲ ۲

۳ ۴

۴ ۵

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

۹۸ حد کسر $\frac{x^{m+2} + nx + m}{mx^{n-2} - mx + n - 1}$ با شرط $n > 3$ ، وقتی $x \rightarrow \infty$ برابر ۲ است $m + n$ کدام است؟

۱ $3,5$

۲ ۴

۳ $4,5$

۴ ۵

مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

۹۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax + 1 + \sqrt{4x^2 + 9}}{3x - 2}$ از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ کدام است؟

۱ $-\frac{1}{3}$

۲ $\frac{1}{3}$

۳ $\frac{2}{3}$

۴ ۱

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۱۰۰ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6}$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ، کدام است؟

۱ $-\frac{1}{6}$

۲ $-\frac{1}{8}$

۳ $\frac{1}{4}$

۴ $\frac{1}{3}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۴

۱۰۱ اگر $g(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - 1|}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = 6$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ کدام است؟

۱ -۱

۲ ۱

۳ ۲

۴ -۲

مرجع: سراسری - ۱۴۰۱

۱۰۲ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آن گاه حد راست این عبارت در نقطه $x = -2$ کدام است؟

۱ $-\frac{4}{3}$

۲ $-\frac{2}{3}$

۳ $\frac{2}{3}$

۴ $\frac{4}{3}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۱۰۳ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}}$ ، کدام است؟

۱ ۱

۲ $\frac{1}{3}$

۳ $-\frac{1}{3}$

۴ -۱

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

۱۰۴ در تابع باضابطه ی $f(x) = \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x}$ اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3}$ باشد، $f(-1)$ کدام است؟

- ۱ -۲ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۳

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۱۰۵ در تابع با ضابطه ی $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4}$ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$ باشد آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- ۱ $\frac{3}{2}$ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ $\frac{1}{3}$

۱۰۶ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^3 + 7x^2 - 2}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$ کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

- ۱ $-\frac{4}{17}$ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ $-\frac{6}{11}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۰۷ فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 3^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}}$ کدام است؟

- ۱ $+\infty$ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ $-\frac{1}{2}$

۱۰۸ تابع با ضابطه $f(x) = \frac{ax - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{4x^n - 12}$ را در نظر بگیرید. اگر $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{6}$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

- ۱ $\frac{1}{24}$ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ $\frac{5}{36}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

۱۰۹ حد عبارت $x[\frac{1}{x}]$ در کدام حالت عدد متناهی نیست؟ (نماد $[]$ جزء صحیح است)

- ۱ $x \rightarrow 0^-$ ☐ ۲ $x \rightarrow 0^+$ ☐ ۳ $x \rightarrow -\infty$ ☐ ۴ $x \rightarrow +\infty$ ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

۱۱۰ حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right]$ کدام است؟

- ۱ 0 ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ $-\infty$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۶

۱۱۱ حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}}$ کدام است؟

- ۱ $-\frac{1}{3}$ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ $\frac{2}{3}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۱۱۲ مقدار $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}} \right)$ کدام است؟

- ۱ صفر ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۱۱۳ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[n]{(a^2x^2 - 1)(a^4x^4 - 1) \dots (a^{100}x^{100} - 1)}}{a^{49}x^k - 1} = -1$ آنگاه، مقادیر a و k کدام اند؟

- ۱ $k = 51, a = -1$ ☐ ۲ $k = 51, a = 1$ ☐ ۳ $k = 49, a = -1$ ☐ ۴ $k = 49, a = 1$ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۱

۱۱۴ اگر $f(x) = \sqrt{ax^2 + x + 1}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \frac{1}{2}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x} \right] f(x)$ چقدر است؟

- ۱ $-\frac{1}{2}$ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۱ -1



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۱۱۵ در تابع $f(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$ اگر $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ باشد، آنگاه $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ کدام است؟

- ۱ ☐ ۰ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ ۱ ☐

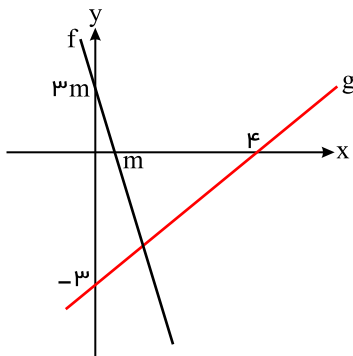
مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۱۱۶ مقدار $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1 - x^2}}{x}$ کدام است؟

- ۱ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ ۱ ☐ ۳ ☐ ۲ ☐ ۱ ☐ ۰ ☐

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۱۷ شکل زیر، نمودار تابع f و g را نشان می‌دهد. حاصل $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f(x)|}{g(x)}$ کدام است؟



- ۱ ☐ -۳ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ -۴ ☐ ۴ ☐ -۴ ☐ ۴ ☐ -۴ ☐

۱۱۸ f تابع هموگرافیک، $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)}$ است، کدام عدد می‌تواند حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x)$ باشد؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

- ۱ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۵ ☐ ۶ ☐ ۷ ☐ ۸ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

۱۱۹ اگر $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = -1$ ، آنگاه حد راست این عبارت در نقطه $x = -2$ کدام است؟

- ۱ ☐ $-\frac{4}{3}$ ☐ $-\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{4}{3}$ ☐

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۲۰ اگر $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a + 3[-x]}{1 - 2x} = -\infty$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} [\frac{x}{a} - x]$ کدام است؟

- ۱ ☐ ۱ ☐ ۲ ☐ ۳ ☐ ۴ ☐ ۵ ☐ ۶ ☐ ۷ ☐ ۸ ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۱۲۱ تابع با ضابطه $y = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & ; |x| > 1 \\ 2x & ; |x| \leq 1 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در دو نقطه به طول های ۱ و -۱ چگونه است؟

- ۱ ☐ در ۱ - ناپیوسته - در ۱ ناپیوسته ☐ در ۱ - ناپیوسته - در ۱ پیوسته ☐ در ۱ - پیوسته - در ۱ ناپیوسته ☐ در ۱ - پیوسته - در ۱ پیوسته ☐

۱۲۲ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{a + x^3}{|x + 2|} & ; x \neq -2 \\ a & ; x = -2 \end{cases}$ در نقطه $x = -2$ فقط از چپ پیوسته است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ ☐ -۱۲ ☐ -۶ ☐ ۶ ☐ ۱۲ ☐



۱۲۳ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a ، در نقطه‌ای به طول $x = 0$ پیوسته است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

- ۱ -۲ ☐ ۲ -۱ ☐ ۳ ۱ ☐ ۴ ۲ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۱۲۴ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x - 2} & ; x > 2 \\ 2x + b & ; x \leq 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار b همواره پیوسته است؟

- ۱ -۴ ☐ ۲ -۲ ☐ ۳ ۲ ☐ ۴ ۴ ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۱۲۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + 2^{x-3} & ; x < 3 \\ a \log_2(1+x) & ; x \geq 3 \end{cases}$ در نقطه‌ای به طول $x = 3$ پیوسته است، $f(2)$ کدام است؟

- ۱ -۲ ☐ ۲ -۱٫۵ ☐ ۳ ۱ ☐ ۴ صفر ☐

۱۲۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} & ; 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ a \cos 3x & ; \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ پیوسته است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۳

- ۱ -۲ $\sqrt{2}$ ☐ ۲ -۱ ☐ ۳ $\sqrt{2}$ ☐ ۴ ۲ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۱۲۷ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{ax+3} & ; x < 1 \\ x^2 + ax & ; x \geq 1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 1$ پیوسته باشد، $f(-\frac{3}{4})$ کدام است؟

- ۱ -۰٫۵ ☐ ۲ ۱٫۲۵ ☐ ۳ ۱٫۵ ☐ ۴ ۲٫۵ ☐

۱۲۸ اگر $f(x) = \begin{cases} x + a & ; x < 1 \\ 1 & ; x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{a} & ; x < 1 \\ \frac{a}{x+1} & ; x \geq 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a ، تابع $f + g$ در $x = 1$ پیوسته

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۴

است؟

- ۱ -۴ ☐ ۲ ۴ ☐ ۳ -۲ ☐ ۴ ۲ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

۱۲۹ با کدام مجموعه مقادیر a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+a} & ; x \geq -1 \\ x^2 + ax & ; x < -1 \end{cases}$ ، در $x = -1$ پیوسته است؟

- ۱ $\{1, \sqrt{2}\}$ ☐ ۲ $\{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$ ☐ ۳ $\emptyset$ ☐ ۴ $\mathbb{R}$ ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۱۳۰ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x = 0$ پیوسته است؟

- ۱ $-\frac{1}{4}$ ☐ ۲ $-\frac{1}{2}$ ☐ ۳ $\frac{1}{2}$ ☐ ۴ هیچ مقدار a ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۳۱ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} & ; x \neq 2 \\ 2 & ; x = 2 \end{cases}$ ، از نظر پیوستگی در $x = 2$ چگونه است؟

- ۱ از چپ پیوسته ☐ ۲ پیوسته ☐ ۳ از چپ ناپیوسته و از راست ناپیوسته ☐ ۴ از راست پیوسته ☐

۱۳۲ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} & ; x > 1 \\ ax - a + 2 & ; x \leq 1 \end{cases}$ ، به ازای کدام مقدار a در نقطه‌ای به طول $x = 1$ پیوسته است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۶

- ۱ ۱ ☐ ۲ ۲ ☐ ۳ هر مقدار a ☐ ۴ هیچ مقدار a ☐



مرجع: سراسری - ۱۳۸۷

۱۳۳ تابع با ضابطه y $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در نقطه $x = 2$ پیوسته است؟

- ۱ -۲ ☐ ۲ -۱ ☐ ۳ $-\frac{1}{2}$ ☐ ۴ ۱ ☐

۱۳۴ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} & ; x > 2 \\ ax - 1 & ; x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ $1,5$ ☐ ۲ 2 ☐ ۳ $2,5$ ☐ ۴ ۳ ☐

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۳۵ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} & ; x \neq \frac{\pi}{2} \\ a & ; x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ در $x = \frac{\pi}{2}$ پیوسته است؟

- ۱ $1,5$ ☐ ۲ ۱ ☐ ۳ -۱ ☐ ۴ $-1,5$ ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۸۶

۱۳۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} & , x > 0 \\ a \sin(x + \frac{\pi}{6}) & , x \leq 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 0$ پیوسته است؟

- ۱ ۲ ☐ ۲ ۴ ☐ ۳ هیچ مقدار a ☐ ۴ هر مقدار a ☐

۱۳۷ تابع $f(x) = \frac{ax^3 - bx^2 + 2}{ax^3 - bx + 2}$ در دو نقطه ناپیوسته و فقط دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد مقدار a و b کدام اند؟

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

- ۱ $a = 0, b = 2$ ☐ ۲ $a = 8, b = 10$ ☐ ۳ $a = -2, b = 0$ ☐ ۴ $a = -8, b = -6$ ☐

مرجع: سراسری - ۱۴۰۰

۱۳۸ فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ۱ صفر ☐ ۲ ۱ ☐ ۳ ۲ ☐ ۴ ۳ ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

۱۳۹ اگر $f + g$ و $f - g$ هر دو در نقطه x پیوسته باشند، آنگاه کدام بیان درست است.

- ۱ الزاماً تابع $f \circ g$ در x پیوسته است. ☐ ۲ $f \cdot g$ ممکن است در x پیوسته نباشد. ☐ ۳ f یا g ممکن است در x پیوسته نباشند. ☐ ۴ الزاماً f و g هر دو در x پیوسته اند. ☐

۱۴۰ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} [x] & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ از نظر پیوستگی در $x = 0$ چگونه است؟ ([علامت جزء صحیح است) (با تغییر)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

- ۱ فقط پیوستگی از چپ دارد. ☐ ۲ پیوستگی از راست دارد. ☐ ۳ نه از چپ پیوسته است و نه از راست ☐ ۴ پیوسته است. ☐

مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

۱۴۱ تابع $f(x) = [2 \sin x]$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ ([،] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ از چپ ناپیوسته - از راست ناپیوسته ☐ ۲ از چپ پیوسته - از راست ناپیوسته ☐ ۳ از چپ ناپیوسته - از راست پیوسته ☐ ۴ از چپ پیوسته - از راست پیوسته ☐

۱۴۲ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} & ; x > 2 \\ ax - 1 & ; x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، پیوسته است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۸

- ۱ $1,5$ ☐ ۲ 2 ☐ ۳ $2,5$ ☐ ۴ ۳ ☐



۱۴۳ تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2} x$ در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی، چگونه است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

مرجع: سراسری-۱۳۹۳

۱ فقط در اعداد زوج پیوسته ۲ فقط در اعداد فرد پیوسته ۳ همواره ناپیوسته ۴ همواره پیوسته

۱۴۴ اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x < 0 \\ 2x & x \geq 0 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$ کدام تابع در $x = 0$ پیوسته است؟

۱ $f+g$ ۲ $f \circ f$ ۳ $g \circ f$ ۴ $f \circ g$ مرجع: خارج از کشور-۱۳۸۶

۱۴۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cos 4x & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ a & x = 0 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در $x = 0$ پیوسته است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

۱ -۱ ۲ صفر ۳ ۱ ۴ همواره ناپیوسته

۱۴۶ تابع ناصفر $f(x) = b[x^2 - ax] - 2a$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{a}{f(b)}$ کدام است؟

۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ $-\frac{1}{4}$ ۳ ۱ ۴ صفر

۱۴۷ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^3 + ((m-7)x + a)^2|} & x \neq a \\ \frac{2 \sin b}{3\sqrt{x+2}} & x = a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقدار b کدام می تواند باشد؟

۱ $\frac{\pi}{3}$ ۲ $\frac{\pi}{6}$ ۳ $\frac{5\pi}{3}$ ۴ $\frac{5\pi}{6}$ مرجع: سراسری-۱۴۰۲

۱۴۸ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{6x^2 + (m+3)x + \frac{m}{2}}}{2x^3 + (m-3)x^2 + a^2} & x \neq a \\ \frac{2 \tan b}{\sqrt{-x}} & x = a \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کدام مورد می تواند مقدار b باشد؟

۱ $\frac{\pi}{6}$ ۲ $\frac{\pi}{3}$ ۳ $\frac{2\pi}{3}$ ۴ $\frac{5\pi}{6}$ مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۲

۱۴۹ برای مقدار مشخص k ، تابع $f(x) = \begin{cases} |x - [-x]| & [x] \text{ زوج} \\ x - [x] + k & [x] \text{ فرد} \end{cases}$ در $x = n$ و $x = -n$ پیوسته است. کدام مورد در خصوص n

صحیح است؟ ($k, n \in \mathbb{N}$)

۱ n زوج ۲ n فرد ۳ برای همه مقادیر n پیوسته است. ۴ برای هیچ مقداری از n پیوسته نیست.

۱۵۰ فرض کنید $f(x) = x(1 - x^2)$ و $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $(f \circ g) \circ g$ ، کدام است؟

۱ صفر ۲ ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ مرجع: خارج از کشور-۱۴۰۰

۱۵۱ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x-3} & x > 3 \\ ax - 3a - \frac{3}{8} & x \leq 3 \end{cases}$ در نقطه $x = 3$ پیوسته است؟

۱ -۲ ۲ ۲ ۳ هیچ مقدار a ۴ هر چه باشد a



مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۰

۱۵۲ مینیمم مطلق تابع $f(x) = x^3 - x^2$ در بازه $[-1, 5]$ ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{9}{4}$ ۲ -2 ۳ $-\sqrt{3}$ ۴ $-\frac{9}{8}$

۱۵۳ تابع با ضابطه $f(x) = (-1)^{[x]} \sin \pi x$ ، در نقاط $x \in \mathbb{Z}$ از نظر پیوستگی چگونه است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۳

۱ همواره پیوسته ۲ فقط در اعداد فرد پیوسته ۳ فقط در اعداد زوج پیوسته ۴ از چپ پیوسته، از راست ناپیوسته

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

۱۵۴ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 + x - 2|}{x - 1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

- ۱ هر مقدار a ۲ -3 ۳ 3 ۴ هیچ مقدار a

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۹

۱۵۵ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = [4 \sin^2 \pi x]$ روی بازه $[0, \frac{1}{2}]$ در چند نقطه ناپیوسته است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴

۱۵۶ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sin 3x & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ b \cos 2x & \frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi \end{cases}$ با شرط $f(\frac{\pi}{2}) = 2$ در بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است $a - b$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۸۹

- ۱ -5 ۲ -4 ۳ 4 ۴ 5

۱۵۷ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi}{x} & ; 1 \leq x \leq 6 \\ a + \cos^2 \frac{\pi x}{36} & ; x > 6 \end{cases}$ ، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از ۱، پیوسته است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

- ۱ $-\frac{1}{2}$ ۲ $-\frac{1}{4}$ ۳ $\frac{1}{4}$ ۴ $\frac{1}{2}$

۱۵۸ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax - 5 & x > 2 \\ ax - 1 & x \leq 2 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۱

- ۱ هر مقدار حقیقی a ۲ هیچ مقدار a ۳ فقط $a = -2$ ۴ فقط $a = 2$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۹

۱۵۹ فرض کنید $f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; |x-1| < 1 \\ x^2 + ax + b & ; |x-1| \geq 1 \end{cases}$ ، یک تابع همواره پیوسته باشد. مقدار a ، کدام است؟

- ۱ $-\frac{3}{2}$ ۲ -1 ۳ 1 ۴ $\frac{5}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۴

۱۶۰ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & x \geq 1 \\ ax + 5x - a & x < 1 \end{cases}$ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، در بازه $[-2, 2]$ پیوسته است؟

- ۱ $\emptyset$ ۲ $\mathbb{R}$ ۳ $\{0, 1\}$ ۴ $\{-2, 2\}$

۱۶۱ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a \sin 2x & ; \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{3\pi}{4} \\ \cos(x + \frac{\pi}{4}) & ; \frac{3\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ بر بازه $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ پیوسته است. مقدار a کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۰

- ۱ -1 ۲ 0 ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ 1

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۶۲ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ ؛ $|x| \leq 2$ کدام است؟

- ۱ 3 ۲ 2 ۳ 1 ۴ صفر



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۱۶۳ تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = \left[x - \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right]$ در بازه $\left[-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right]$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۶۴ به ازای مقادیری از a و b ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < 1 \\ ax + b & ; |x| \geq 1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

- ۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) -1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱۶۵ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} a + \sin^2 x & 0 \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \sqrt{2} \cos 3x & \frac{\pi}{4} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$ روی بازه $[0, 2\pi]$ پیوسته است؟

- ۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) هیچ مقدار a

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

۱۶۶ تابع با ضابطه $f(x) = [x^2 - 3]$ روی بازه $[2, 2+k]$ پیوسته است، بیشترین مقدار k کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) $\sqrt{2} - 1$ ۲) $\sqrt{3} - 1$ ۳) $\sqrt{5} - 2$ ۴) $\sqrt{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۸۸

۱۶۷ تابع f با ضابطه $f(x) = (x-3) \left[\frac{1}{3}x - 1 \right]$ روی بازه $(0, 9)$ در چند نقطه، ناپیوسته است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مرجع: سراسری - ۱۳۸۵

۱۶۸ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} ax + b & ; x > 2 \\ x^2 + bx - 1 & ; x < 2 \end{cases}$ با شرط $f(2) = 5$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته باشد، a کدام است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۱

- ۱) -1 ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۶۹ تعداد نقاط ناپیوسته نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x+4}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} + \frac{1}{x+5}$ در بازه $[-4, +\infty)$ کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

- ۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۱۷۰ تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = [x]^2 - [x]$ روی بازه $(-1, 2)$ کدام است؟ ([] ، نماد جزء صحیح است.)

مرجع: سراسری - ۱۳۸۳

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

۱۷۱ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x+a}-b}{x} & ; x \neq 0 \\ \frac{1}{12} & ; x = 0 \end{cases}$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ پیوسته است، b کدام است؟

- ۱) ± 1 ۲) ± 2 ۳) ± 3 ۴) ± 4

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۷

۱۷۲ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1-x} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۸

- ۱) $-\pi$ ۲) π ۳) ۱ ۴) هیچ مقدار a

۱۷۳ اگر $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ ، آنگاه تعداد نقاط ناپیوسته تابع g روی بازه $[-4, 4]$ ، کدام است؟

مرجع: سراسری - ۱۳۹۲

- ۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰





مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۷

۱۷۴ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} & ; x < -1 \\ ax+1 & ; x \geq -1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

- ۱ $\frac{1}{2}$ ۲ $\frac{3}{4}$ ۳ $\frac{5}{4}$ ۴ $\frac{3}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۷

۱۷۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{x - [x]}{x^3 - x - 6} & ; x \neq 2 \\ a & ; x = 2 \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a در بازه $[2, 3]$ پیوسته است؟

- ۱ $\frac{1}{11}$ ۲ $\frac{1}{9}$ ۳ $\frac{1}{8}$ ۴ $\frac{1}{6}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۲

۱۷۶ تابع $f(x) = \begin{cases} \tan \frac{(2x+1)\pi}{4} & x \leq 1 \\ \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} & 1 < x < 5 \\ b(x - [-x]) & x \geq 5 \end{cases}$ روی بازه $[1, 5]$ پیوسته است. مقدار ab کدام است؟

- ۱ $-\frac{7}{5}$ ۲ $-\frac{5}{7}$ ۳ $\frac{7}{5}$ ۴ $\frac{5}{7}$

مرجع: سراسری - ۱۴۰۳

۱۷۷ تابع غیر صفر $f(x) = a[x] + b[x+1]$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{f(a)}{a}$ کدام است؟

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ $\frac{1}{2}$ ۴ $-\frac{1}{2}$

مرجع: سراسری - ۱۳۹۵

۱۷۸ تعداد نقاط ناپیوسته تابع با ضابطه $f(x) = [x^2]$ در بازه $[-1, 2]$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴ ۳ ۵ ۴ ۶

مرجع: سراسری - ۱۳۸۱

۱۷۹ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} (x-1)|x| & ; x < 2 \\ a + 2 \sin \frac{\pi}{x} & ; x \geq 2 \end{cases}$ در بازه $[0, 3]$ پیوسته است؟

- ۱ -۲ ۲ -۱ ۳ ۰ ۴ ۱

۱۸۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} ax+b & ; |x| \geq 1 \\ x[x] & ; |x| < 1 \end{cases}$ روی R پیوسته باشد، نمودار این تابع خط $x=3$ را با کدام عرض قطع می کند؟ ([] ، [] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۰

- ۱ -۲ ۲ -۱ ۳ ۱ ۴ ۲

۱۸۱ تابع غیر صفر $f(x) = a[x+1] + b[x + [a+1]]$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است. مقدار $\frac{a[a]}{f(a)}$ کدام است؟ ([] ، [] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: خارج از کشور - ۱۴۰۳

- ۱ ۱ ۲ -۱ ۳ ۲ ۴ -۲

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۹

۱۸۲ تعداد نقاط ناپیوستگی تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$; $|x| \leq 2$ کدام است؟

- ۱ ۳ ۲ ۲ ۴ صفر

مرجع: خارج از کشور - ۱۳۹۵

۱۸۳ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 < x < a \\ 1 - \frac{x}{4} & x \geq a \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

- ۱ ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ هیچ مقدار a

۱۸۴ تابع به ضابطه $f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ به ازای کدام مقدار a بر روی مجموعه اعداد حقیقی پیوسته است؟ (نماد [] به مفهوم جزء صحیح است.)

مرجع: سراسری - ۱۳۹۶

- ۱ -۱ ۲ ۱ ۳ ۰ ۴ همواره ناپیوسته



مرجع: خارج از کشور - ۱۳۸۵

۱۸۵ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x[x] & ; |x| < 1 \\ ax + b & ; |x| \geq 1 \end{cases}$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است. a کدام است؟

۱ ۴

$\frac{1}{2}$ ۳

$-\frac{1}{2}$ ۲

-۱ ۱

مرجع: سراسری - ۱۳۹۴

۱۸۶ به ازای کدام مقدار a تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} & x > 2 \\ x - a & x \leq 2 \end{cases}$ همواره پیوسته است؟

$\frac{3}{2}$ ۴

$\frac{2}{4}$ ۳

$\frac{1}{6}$ ۲

$\frac{1}{2}$ ۱



پاسخنامه تشریحی

۱. گزینه ۳ باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x - 1$ برابر ۸ است، پس $P(1) = 8$ و باقی‌مانده تقسیم بر $2x + 1$ برابر ۵ است پس $P(-\frac{1}{2}) = 5$. باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $2x^2 - x - 1$ یک چندجمله‌ای درجه اول به صورت $mx + n$ است.

$$P(x) = (2x^2 - x - 1)Q(x) + mx + n \Rightarrow \begin{cases} P(1) = m + n = 8 \\ P(-\frac{1}{2}) = -\frac{m}{2} + n = 5 \end{cases} \Rightarrow m = 2, n = 6$$

بنابراین باقی‌مانده این تقسیم $2x + 6$ است.

۳۸-۲۵-۳۶

۲. گزینه ۱ چون $P(x)$ بر $2x - 1$ بخش پذیر است پس $P(\frac{1}{2}) = 0$ است.

$$P(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{16}) + a(\frac{1}{8}) + 2(\frac{1}{4}) - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} + \frac{a}{8} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 1 + a + 4 - 12 = 0 \Rightarrow a = 7$$

بنابراین $P(x) = 2x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 3x$ است. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده آن بر $x + 2$ کافی است که $P(-2)$ را حساب کنید.

$$P(-2) = 2(16) + 7(-8) + 2(4) - 3(-2) = 32 - 56 + 8 + 6 = -10$$

۴۸-۱۰-۴۸

۳. گزینه ۱ باقی‌مانده تقسیم چند جمله $p(x)$ بر $x - 4$ برابر ۳ است پس $p(4) = 3$ می‌باشد و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x + 2$ برابر ۱ است پس $p(-2) = 1$ می‌باشد. اکنون برای پیدا کردن باقی‌مانده، تقسیم $4p(-x) + p(x^2)$ بر $x - 2$ کافی است که به جای x عدد ۲ را قرار دهیم.

$$x = 2 \rightarrow p(4) + 4p(-2) = 3 + 4(1) = 7$$

۴۴-۷-۵۰

۴. گزینه ۴ ابتدا $p(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$p(x) = x^{3n+1} + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a = x^{3n} \times x + 2x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a \\ = (x + 2) \cdot x^{3n} + x^6 + 3x^5 + 16a$$

چون $p(x)$ بر $x + 2$ بخش پذیر است، پس باید $p(-2) = 0$ برابر صفر باشد.

$$p(-2) = (-2 + 2) \times (-2)^{3n} + (-2)^6 + 3 \times (-2)^5 + 16a = 0 \\ \Rightarrow 0 + 64 - 3 \times 32 + 16a = 0 \Rightarrow 16a = 96 - 96 = 0 \Rightarrow a = 0$$

برای $n = 1$ داریم:

$$p(x) = (x + 2)x^7 + x^6 + 3x^5 + 32 = x^8 + 2x^7 + x^6 + 3x^5 + 32$$

باقی‌مانده $p(x)$ بر عبارت درجه دوم $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 2x - 3$ عبارت درجه اولی به صورت $ax + b$ است و داریم:

$$x^8 + 2x^7 + x^6 + 3x^5 + 32 = (x - 1)(x + 3)Q(x) + ax + b \\ x = 1 \Rightarrow 1 + 2 + 1 + 3 + 32 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = 39$$

توجه کنید که فقط در گزینه ۴ حاصل $a + b$ برابر ۳۹ است. هر چند a, b قابل محاسبه است.

$$x = -3 \Rightarrow 729 - 729 + 81 + 2(-27) + 32 = 0 - 3a + b \Rightarrow -3a + b = 59 \Rightarrow 3a - b = -59$$

$$\begin{cases} a + b = 39 \\ 3a - b = -59 \end{cases} \Rightarrow 4a = -20 \Rightarrow a = -5 \Rightarrow -5 + b = 39 \Rightarrow b = 44$$

$$\text{باقی‌مانده} = ax + b = -5x + 44$$

۴۴-۳۲-۲۵

۵. گزینه ۳

می‌دانیم:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow P'(x) = 2ax + b$$

الگوریتم تقسیم را می‌نویسیم:

$$ax^2 + bx + c = (2ax + b)(\frac{1}{2}x + 1) - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + 2ax + \frac{b}{2}x + b - 2$$

$$\Rightarrow ax^2 + bx + c = ax^2 + (2a + \frac{b}{2})x + (b - 2) \Rightarrow \begin{cases} b = 2a + \frac{b}{2} \Rightarrow b = 4a \\ c = b - 2 \end{cases}$$

برای آن که کمترین میزان مجموع ضرایب به دست آید $a = 1$ قابل قبول است. (برای هر مقدار a قابل قبول است.)

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 1 + 4 + 2 = 7$$

۳۲-۴۸-۲۰

۶ گزینه ۲ چندجمله‌ای $p(x)$ بر $x^2 - 1$ یا همان $(x+1)(x-1)$ بخش‌پذیر است بنابراین $p(1) = p(-1) = 0$ است. اکنون برای محاسبه باقی‌مانده $Q(x)$ بر $x-2$ کافی است که $Q(2)$ را حساب کنیم.

$$Q(x) = p(x-1) + p(1-x) \rightarrow Q(2) = p(1) + p(-1) = 0 + 0 = 0$$

۳۵-۳۶-۲۸

۷ گزینه ۱ توجه: اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-m)$ برابر k_1 و بر $(x-n)$ برابر k_2 باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $(x-m) \cdot (x-n)$ عبارت $ax+b$ است به‌طوری‌که:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=m : am+b=k_1 \\ x=n : an+b=k_2 \end{cases}$$

بنابراین، در این سؤال اگر باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x^2 + x - 6$ برابر $ax+b$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} x=2 &\Rightarrow 2a+b=1 \\ x=-3 &\Rightarrow -3a+b=-4 \end{aligned} \Rightarrow a=1, b=-1$$

پس باقی‌مانده تقسیم $(x-1)$ است.

۳۶-۹-۵۵

۸ گزینه ۴ رابطه تقسیم را می‌نویسیم:

$$P(x) = (x^2 + 2x)Q(x) + 3x + 1$$

از دو طرف مشتق می‌گیریم:

$$P'(x) = (2x+2)Q(x) + (x^2+2x)Q'(x) + 3$$

با جایگذاری $x=-2$ داریم:

$$P'(-2) = -2Q(-2) + (4-4)Q'(-2) + 3 = -2(3) + 3 = -3$$

باقیمانده $P'(x)$ بر $x+2$ برابر $P'(-2)$ است؛ باقیمانده برابر (-3) است.

۱۵-۱۳-۷۲

۹ گزینه ۴ با توجه به گزینه‌ها که همگی عبارتی درجه اول بر حسب x هستند، خارج‌قسمت را به‌صورت $Q(x) = ax+b$ در نظر گرفته و با نوشتن رابطه تقسیم داریم.

$$f(x) = (x^2 + 4x + 5)(ax+b) + x + 2$$

$$x=1 \Rightarrow f(1) = 1 \cdot (a+b) + 3 = 13 \Rightarrow a+b=1$$

$$x=-1 \Rightarrow f(-1) = 2(-a+b) + 1 = 11 \Rightarrow -a+b=5$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a+b=5 \end{cases} \Rightarrow 2b=6 \rightarrow b=3 \rightarrow a=-2 \Rightarrow Q(x) = -2x+3$$

۲۳-۸-۶۹

۱۰ گزینه ۱ در صورتی بازه برای یک عدد همسایگی محسوب می‌شود که آن عدد درون بازه باشد. پس:

$$x+1 < 3 < 2x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 < 3 \rightarrow x < 2 \\ 2x-1 > 3 \rightarrow x > 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \emptyset$$

۶۱-۱۴-۲۶

۱۱ گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

۵۸-۱۳-۲۹

۱۲ گزینه ۴ با توجه به تابع داده‌شده و انتخاب ضابطه مناسب، حدهای راست و چپ تابع را در $x=1$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{f(x)} \rightarrow 4+a = \frac{1}{-6+4} \rightarrow 4+a = \frac{-1}{2} \\ \rightarrow 4+2a &= -1 \rightarrow 2a = -9 \rightarrow a = -\frac{9}{2} = -4.5 \end{aligned}$$

۳۸-۱۲-۵۰

۱۳ گزینه ۱

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 3 \Rightarrow (2+a)[2^+] - (2+a)[2^-] = 3 \\ \Rightarrow (2+a)(2) - (2+a)(1) &= 3 \Rightarrow 4+2a-2-a=3 \Rightarrow a=1 \end{aligned}$$

۳۴-۱۴-۵۲

۱۴ گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

تنها گزینه‌ای که جواب آن عدد یک می‌شود گزینه‌ی اول است زیرا برای محاسبه‌ی $f(0)$ باید سراغ ضابطه‌ی پایین برویم که جواب یک می‌شود.

۳۴-۲۳-۴۲



۱۵ گزینه ۳ هرگاه $0 < x < 1$ باشد، آنگاه $x^3 > x$ خواهد بود. در نتیجه داریم:

$$x^3 > x \Rightarrow x^3 - x > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x^3 - x) = f(0^+) \Rightarrow \text{باید از ضابطه بالایی استفاده کنیم}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1-x} = \sqrt{1-0} = 1$$

۵۹-۲۲-۲۰

۱۶ گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{[(-2)^-] + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{-3 + 3}{0^-} = \frac{0}{0^-} = 0$$

۲۰-۲۷-۵۳

۱۷ گزینه ۱ تابع سینوس در ربع اول افزایش می‌یابد پس $\sin \frac{\pi^-}{6} = (\frac{1}{2})^-$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} [2 \sin x - 1] = [2(\frac{1}{2})^- - 1] = [1^- - 1] = [0^-] = -1$$

۲۷-۳۷-۳۶

۱۸ گزینه ۲ با توجه به تابع داده شده و انتخاب ضابطه مناسب، حدهای راست و چپ تابع را در $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - 1) = a - 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 2a) = 1 + 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow (1 + 2a) - (a - 1) = -1 \Rightarrow a = -1 - 2 = -3$$

۴۲-۱۶-۴۲

۱۹ گزینه ۲

در عبارت‌های شامل جزء صحیح ابتدا عبارت درون جزء صحیح را تعیین عدد می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 1) \left[\frac{1}{x + 1} \right] = 2 \left[\frac{1}{1 + 1} \right] = 2 \times 0 = 0$$

۳۶-۱۴-۵۰

۲۰ گزینه ۳ در هر نقطه‌ای که حد چپ و حد راست دو عدد برابر هم باشند تابع در آن نقطه حد دارد.

تابع $f(x)$ زمانی در نقطه $x = -1$ دارای حد است که داشته باشیم: $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$ ، لذا داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 2x + 1 = 2(-1) + 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} (x + a)^2 = (-1 + a)^2 \Rightarrow (a - 1)^2 = -1 \end{cases}$$

این معادله جواب ندارد لذا مجموعه جواب a ، $\emptyset$ است.

۵۵-۸-۳۷

۲۱ گزینه ۱

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

$$x \rightarrow \pi^-: \sin \frac{\pi}{2} [0^+] - \cos \pi [0^-] = 0 - (-1) \cdot (-1) = -1$$

$$x \rightarrow \pi^+: \sin \frac{\pi}{2} [0^-] - \cos \pi [0^+] = (1) \times (-1) - 0 = -1$$

۵۷-۱۸-۲۵

۲۲ گزینه ۳ می‌دانیم:

$$f(x) = \frac{1}{2}((f+g) + (f-g))$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} = \frac{1}{2}(\lim_{x \rightarrow 1^+} (f+g) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (f-g)) = \frac{5}{2} = 2,5$$

$$\text{به طریق مشابه: } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2,5$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} = 2,5$$

۳۶-۴۲-۲۳

۲۳ گزینه ۱

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x & x < 0 \\ -\frac{2}{3}x & 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{|x|} + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{f(x)} = -\frac{2}{3} + \frac{-3}{2} = -\frac{17}{6}$$

۲۳- ۱۱- ۶۶

گزینه ۳ ۲۴

شرط وجود حد برابری حد چپ و حد راست است.

چون $x = \frac{\pi}{3}$ داخل جزء صحیح را صحیح می‌کند باید حد چپ و حد راست را جداگانه محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^-} [\sin(x - \frac{\pi}{3})] \cos 2x + [\tan^2 x] = -1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} f(x) = [0^+] \times (-1) + [2^+] = 2$$

۲۴- ۹- ۶۸

گزینه ۲ ۲۵

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} + \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|f(x)|}{\sin x} = ?$$

ابتدا معادله خطوط موجود در شکل را می‌نویسیم:

$$A(0, 0), B(-\pi, -2)$$

$$m = \frac{0 + 2}{0 + \pi} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow y - 0 = \frac{2}{\pi}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{2}{\pi}x$$

$$C(0, 0), D(2, -\pi)$$

$$m' = \frac{0 + \pi}{0 - 2} = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y - 0 = -\frac{\pi}{2}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{2}x$$

پس طبق شکل داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sin x}{|-\frac{\pi}{2}x|} = \frac{1}{\frac{\pi^2}{2}} = \frac{2}{\pi^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|f(x)|}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \frac{|\frac{2}{\pi}x|}{\sin x} = \frac{1}{-1} = -1$$

پس حاصل حد مطلوب برابر $1 - \frac{2}{\pi^2}$ است.

۱۶- ۶- ۷۸

گزینه ۲ ۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [x])\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(3 - [3^-])\sqrt{(x - 3)^2}}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x - 3|}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x - 3)}{x - 3} = -1$$

۲۳- ۲۳- ۴۴

گزینه ۳ ۲۷ ابتدا باید معادله سهمی را بنویسیم که محور xها را در دو نقطه به طولهای ۰ و ۴ قطع کرده است (طول رأس سهمی وسط دو نقطه هم‌عرض روی سهمی است).

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \rightarrow f(x) = ax(x - 4) \xrightarrow{S \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}} 1 = 2a(-2) \rightarrow a = -\frac{1}{4} \rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x(x - 4) = -\frac{1}{4}x^2 + x$$

اکنون باید معادله خط راست g را با داشتن ۲ نقطه بنویسیم.



$$\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \rightarrow \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \rightarrow \frac{y - 1}{x} = \frac{1}{-4} \rightarrow -4y + 4 = x \rightarrow -4y = x - 4 \rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1 \rightarrow g(x) = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) + g(x)}{4 - x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{4}x + 1}{4 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{-2 + 1 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{5}{4}$$

۳۴-۴۴-۲۳

گزینه ۴ ۲۸

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{\underbrace{|x - 1|}_+} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{(x - 1)} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{\underbrace{|x - 1|}_-} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - x - 1}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(2x + 1)}{-(x - 1)} = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow |-3 - (3)| = |-6| = 6$$

۵۳-۱۰-۳۷

گزینه ۱ ۲۹

$$f(x) = x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{5x+9}} \right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{9}} \right)^2 = \left(\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{1}{9}$$

۵۶-۶-۳۸

گزینه ۲ اگر $x \rightarrow 2^+$, حاصل $[x^3]$ دقیقاً برابر ۸ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4}{x^3 - [x^3]} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x + 2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{4}{4 + 4 + 4} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

۴۰-۱۹-۴۱

گزینه ۱ طبق فرض، تابع $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ در نقطه‌ای حد دارد ولی در آن نقطه پیوسته نیست؛ این نقطه اولاً $x = 1$ بوده و ثانیاً $x = 1$ ریشه صورت f نیز هست، پس:

$$x^2 + ax + b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1 \quad (I)$$

همچنین $x = 1$ ریشه معادله داده شده است:

$$5x^2 - ax + b \Big|_{x=1} = 0 \Rightarrow 5 - a + b = 0 \Rightarrow a - b = 5 \quad (II)$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} \begin{cases} a + b = -1 \\ a - b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -3$$

$$\left[\frac{b - 2a}{3} \right] = \left[\frac{-3 - 4}{3} \right] = \left[\frac{-7}{3} \right] = -3$$

۷۳-۷-۱۹

گزینه ۴ در $a \rightarrow -1^+$ عبارت $x + 1$ مثبت است، از طرفی در مورد $[x]$ و $[-x]$ داریم:

$$[x] = [(-1)^+] = -1 \quad [-x] = [-(-1)^+] = [1^-] = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1x + 1 + [x]}{x - [-x]} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1x + 1 + (-1)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

۳۷-۲۴-۳۹

گزینه ۳ ۳۳

روش اول: مخرج کسر را گویا می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x + 3)(2 + \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}})}{(4 - 2 - \sqrt{3 - x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(1)(4)(2 + \sqrt{3 - x})}{(2 - \sqrt{3 - x})(2 + \sqrt{3 - x})} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(1)(4)(4)}{(4 - 3 + x)} = 16 \end{aligned}$$

روش دوم: با استفاده از هوییتال:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 5x + 3}{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3 - x}}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x + 5}{\frac{-1}{2\sqrt{3-x}}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{16}} = 16$$

۳۲-۸-۶۰

گزینه ۲ روش اول: با ضرب کسر در مزدوج صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} \times \frac{x + \sqrt{3x - 2}}{x + \sqrt{3x - 2}} = \frac{x^2 - 3x + 2}{(ax + b)(x + \sqrt{3x - 2})} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{a(x + \frac{b}{a})(x + \sqrt{3x - 2})} = \frac{1}{2}$$

با توجه به موجود بودن حد و اینکه عددی مخالف صفر است، نتیجه می‌گیریم که عدد ۲ ریشهٔ مخارج نیز می‌باشد.

$$x - 2 = x + \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -2 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{a(x + \sqrt{3x - 2})} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{a(4)} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = -1$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} = \frac{0}{0} \quad \begin{array}{l} \text{چون جواب حد، برابر عدد شده است پس این کسر حتما} \\ \text{شده است} \end{array} \xrightarrow{0} 2a + b = 0 \rightarrow b = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x - 2}}{ax + b} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1(3)}{2\sqrt{3x - 2}}}{a} = \frac{1 - \frac{3}{4}}{a} = \frac{1}{4a} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{1}{2} \xrightarrow{2a+b=0} 1 + b = 0 \rightarrow b = -1$$

۳۳-۱۴-۵۳

گزینه ۳ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $((a + b)(a^2 + b^2 - ab) = a^3 + b^3)$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{6(2 + \sqrt[3]{x})} \times \frac{4 + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x}}{4 + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 8)(x + 2)(4 + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x})}{6(8 + x)} \\ = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x + 2)(4 + \sqrt[3]{x} - 2\sqrt[3]{x})}{6} = \frac{-6(12)}{6} = -12$$

روش دوم:

از قاعدهٔ هویتنال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^3 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt[3]{x}} \stackrel{HOP}{=} \lim_{x \rightarrow -8} \frac{3x + 10}{6(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}})} = \frac{-6}{6(\frac{1}{12})} = -12$$

۳۴-۳۰-۳۶

گزینه ۴ روش اول:

با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم که برای رفع ابهام از اتحاد چاق و لاغر کمک می‌گیریم $((a - b)(a^2 + b^2 + ab) = a^3 - b^3)$ و مخارج را بر عامل ابهام یعنی $x - 2$ تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt[3]{3x + 2}}{5x^2 - 18x + 16} \times \frac{4 + \sqrt[3]{(3x + 2)^2} + 2\sqrt[3]{3x + 2}}{4 + \sqrt[3]{(3x + 2)^2} + 2\sqrt[3]{3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\overbrace{8 - (3x + 2)}^{-3x + 6}}{(x - 2)(5x - 8)(4 + \sqrt[3]{(3x + 2)^2} + 2\sqrt[3]{3x + 2})} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x - 2)}{(x - 2)(5x - 8)(4 + \sqrt[3]{(3x + 2)^2} + 2\sqrt[3]{3x + 2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{(5x - 8)(4 + \sqrt[3]{(3x + 2)^2} + 2\sqrt[3]{3x + 2})} \\ = \frac{-3}{(2)(4 + 4 + 4)} = \frac{-3}{24} = \frac{-1}{8}$$

روش دوم:



از قاعده هویتنال کمک می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x+2}}{5x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{3\sqrt{(3x+2)^2}} = \frac{-1}{2} = \frac{-1}{8}$$

۳۳-۳۳-۳۴

گزینه ۱

روش اول: با ابهام $\frac{0}{0}$ مواجه هستیم، برای رفع ابهام صورت را بر $x - 4$ تقسیم می کنیم و عبارت را در مزدوج مخرج، ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(3x+2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{3 - \sqrt{x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(3x+2)(\sqrt{3} - \sqrt{x} + 1)}{-(\sqrt{x}-2)} = -(4)(14)(2) = -112 \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 10x - 8}{\sqrt{3} - \sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{6x - 10}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{14}{2} = \frac{14}{1} = -112$$

۶۵-۶-۲۹

گزینه ۲

عبارت موجود در رادیکال مخرج را به صورت مربع کامل و عبارت موجود در صورت کسر را با کمک اتحاد چاق و لاغر تبدیل می کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{\sqrt{(x-2)^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{|x-2|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - \sqrt{x+6}}{x-2} \times \frac{(4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2})}{(4 + 2\sqrt{x+6} + \sqrt{(x+6)^2})} \\ &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(4 - x) \cancel{\sqrt{x+6}}^{-(x-2)}}{(x-2)(12)} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

۶۳-۱۰-۲۷

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{ax + 3a}{1 - \sqrt{5x+16}} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)(1 + \sqrt{5x+16})}{(1 - \sqrt{5x+16})(1 + \sqrt{5x+16})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{a(x+3)(2)}{-5(x+3)} = \frac{2a}{-5} = 2 \Rightarrow 2a = -10 \Rightarrow a = -5$$

۴۳-۱۲-۴۶

روش اول: عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x + \sqrt{2x+8})(x - \sqrt{2x+8})}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x - \sqrt{2x+8})} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + \sqrt{2x+8}}{x+2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1 + \frac{2}{2\sqrt{2x+8}}}{1} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{1} = \frac{3}{2}$$

۵۰-۸-۴۲

روش اول: از اتحاد مزدوج برای رفع ابهام، استفاده می کنیم.

گزینه ۲

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5) - \sqrt{3x+1}}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{(2x+5) + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5)^2 - 4x}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{4x^2 - 3x - 1} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} \\&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(4x-25)}{(x-1)(4x+1)} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{(2x+5) + \sqrt{3x+1}} = \frac{-21}{5} \times \frac{4}{14} = -1,2\end{aligned}$$

روش دوم: از قاعده هوییتال کمک می گیریم.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - \sqrt{3x+1} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2 - \frac{1(3)}{2\sqrt{3x+1}}} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{4}} = -1,2$$

۳۴-۳۷-۲۹

گزینه ۲

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})}{2 - \sqrt{5-x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(2 + \sqrt{5-x})}{(4+x-5)(1 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 + \sqrt{5-x}}{-(1 + \sqrt{x})} = \frac{4}{-2} = -2$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{2 - \sqrt{5-x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2$$

۴۹-۱۴-۳۷

گزینه ۱

روش اول: با ابهام صفر صفر مواجه هستیم، عبارت را در مزدوج صورت، ضرب و تقسیم می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} \times \frac{2x - \sqrt{3-x}}{2x - \sqrt{3-x}} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + x - 3}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})}$$

$$\text{صورت را بر } x+1 \text{ تقسیم می کنیم.} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(4x-3)}{x(x+1)(2x - \sqrt{3-x})} = \frac{-7}{(-1)(-4)} = \frac{-7}{4}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{3-x}}{x^2 + x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{1(-1)}{2\sqrt{3-x}}}{2x+1} = \frac{2 - \frac{1}{4}}{-1} = \frac{-7}{4}$$

۴۳-۱۱-۴۶

گزینه ۴

با استفاده از اتحاد مزدوج، صورت کسر و با استفاده از اتحاد چاق و لاغر، مخرج کسر را گویا می کنیم.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4}}{1 + \sqrt{x}} &\times \frac{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}}{\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x+4}} \times \frac{1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^2}}{1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^2}} \\&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\overbrace{(2x+3-3x-4)}^3 (1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^2})}{\underbrace{(1+x)(\sqrt{2x+3} - \sqrt{3x+4})}_2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1) \times 3}{(1+x) \times 2} = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

۳۷-۳۱-۳۲

گزینه ۳

روش اول: عبارت را در مزدوج صورت و مخرج، ضرب و تقسیم می کنیم.



$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(3 - \sqrt{2x+1})(3 + \sqrt{2x+1})(2 + \sqrt{x})}{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(9 - 2x - 1)(2 + \sqrt{x})}{(4 - x)(3 + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2(x-4)(2 + \sqrt{x})}{-(x-4)(3 + \sqrt{2x+1})} = \frac{2 \times 4}{3 + 3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

روش دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x+1}}{2 - \sqrt{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{-2}{2\sqrt{2x+1}}}{\frac{-1}{2\sqrt{x}}} = \frac{-2}{-1} = \frac{4}{3}$$

۳۳-۹-۵۷

گزینه ۲ روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \times \frac{2x + \sqrt{x^2 + 12}}{2x + \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{-(x+1)(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{4x^2 - x^2 - 12} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2x + \sqrt{x^2 + 12})}{3(x-2)(x+2)} = \frac{-(3)(1)}{3(4)} = -2$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و هر دو در $x = a$ مشتق پذیر باشند آنگاه روش هوییتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به قرار زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \quad H : \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$(x^2 - x - 2)' = (2x - 1) \xrightarrow{x=2} 3 > 0 \Rightarrow$$

تابع صعودی است پس وقتی $x \rightarrow 2^-$ آنگاه $x^2 - x - 2 < 0$ یعنی $|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2)$

ابتدا باید قدر مطلق را تعیین علامت کنیم و سپس هوییتال بگیریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|(x+1) \cdot (x-2)|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1) \cdot (x-2)}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 12}}} = \frac{-3}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$$

۳۱-۹-۶۰

گزینه ۱

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2b}{ax - b} = \frac{0}{\infty} \Rightarrow \infty a - b = 0 \Rightarrow b = \infty a$$

$$\text{راه اول} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty a (\sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2)}{a \cdot (x - \infty)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\infty \sqrt{2 + \sqrt{x}} - 2)(\sqrt{2 + \sqrt{x}} + 2)}{(x - \infty)(\sqrt{2 + \sqrt{x}} + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\infty(\sqrt{x} - 2)}{(x - \infty) \times \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 4)}{\infty(x - \infty)(\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 4)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{راه دوم} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{2}{x}}{2\sqrt{x} + 2\sqrt{x}} = \frac{\infty a \times \frac{1}{x} \times \frac{1}{x}}{4a} = \frac{1}{6}$$

۱۹-۶-۷۴

گزینه ۱

روش هوییتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ باشد و f و g در $x = a$ مشتق پذیر باشند آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b} - 2}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{a+b} - 2}{0} \neq \infty \Rightarrow \sqrt{a+b} = +2$$

چون مخرج صفر است پس باید صورت کسر هم صفر باشد.

$$a + b = 4 \Rightarrow b = 4 - a \quad (*)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x^2-1} \times \frac{\sqrt{ax+b}+2}{\sqrt{ax+b}+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+b-4}{(x^2-1)(\sqrt{ax+b}+2)} \xrightarrow{*} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax+4-a-4}{(x^2-1)(4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a(x-1)}{4(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{a}{4(x+1)} = \frac{a}{8} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a = 12 \Rightarrow b = -8$$

۷۳-۳-۲۴

۴۹ گزینه ۴ چون صورت به ازای $x = 1$ صفر است پس باید مخرج هم صفر باشد تا جواب غیر صفر داشته باشد.

$$a + b = 0 \rightarrow b = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-a\sqrt{2-\sqrt{x}}+a}{ax-a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{2-\sqrt{x}}+1}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \infty} = \frac{-1 \times \frac{-1}{2\sqrt{2-\sqrt{x}}}}{1} = \frac{1}{2}$$

۴۲-۳۹-۱۹

۵۰ گزینه ۱

روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} \times \frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}} \times \frac{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+3x}+\sqrt{2-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2+3x-2+x)(\sqrt{2})}{(\sqrt{1-\cos^2 x})(2\sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{2|\sin x|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x}{-2\sin x} = -2$$

روش دوم: می دانیم که $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \sim \frac{u^2}{2}$ است.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{1-\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2+3x}-\sqrt{2-x}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}x} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1(3)}{2\sqrt{2+3x}} - \frac{1(-1)}{2\sqrt{2-x}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{4}{2\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -2$$

۴۲-۴۱-۱۷

۵۱ گزینه ۲ ابتدا براکت را به عدد تبدیل می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{1 + \cos \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi x) = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$$

۲۷-۴۱-۳۲

۵۲ گزینه ۴ مخرج کسر را با کمک اتحاد $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و سپس دو مرتبه استفاده از اتحاد مزدوج تبدیل می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

۶۵-۱۴-۲۱

۵۳ گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x(\cos^2 x + \sin^2 x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$$

توجه کنید $\tan \frac{3\pi}{4} = -1$ می باشد.

۷۷-۸-۱۵

۵۴ گزینه ۱

می دانیم $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ است.



$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - 1}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x - \cos x}{\cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x - \sin x)}{\cos x (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-1}{\cos x (\cos x + \sin x)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2})} = -1$$

۷۰-۱۵-۱۵

گزینه ۱ ۵۵

برای به دست آوردن این حد ابتدا باید مقدار $[4 \cos^2 \pi x]$ را در همسایگی راست $x = \frac{1}{6}$ به دست آوریم، می‌دانیم تابع $\cos x$ و $\cos^2 x$ در ربع اول نزولی است:

$$x \rightarrow (\frac{1}{6})^+ \Rightarrow \cos \pi x < \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \pi x < \frac{3}{4} \Rightarrow 4 \cos^2 \pi x < 3 \Rightarrow [4 \cos^2 \pi x] = [3^-] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{2 - 12x}{ax + b} = \frac{1}{2}$$

صورت کسر در $x = \frac{1}{6}$ صفر است و حاصل حد مقداری غیر صفر، بنابراین مخرج نیز باید در $x = \frac{1}{6}$ صفر شود:

$$a(\frac{1}{6}) + b = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{2 - 12x}{-6bx + b} = \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{6})^+} \frac{2(1 - 6x)}{b(1 - 6x)} = \frac{2}{b}$$

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = -24 \Rightarrow a + b = -20$$

۷۷-۴-۱۹

گزینه ۴ کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم و مخرج را به صورت اتحاد مربع می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos \pi x}{(\sqrt{x} - 2)^2} \times \frac{1 + \cos \pi x}{1 + \cos \pi x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{(\sqrt{x} - 2)^2 (2)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 \pi x}{2(\sqrt{x} - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} - 2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \pi x}{\sqrt{x} - 2} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \pi x}{x - 4} \right)^2$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \frac{(\sin \pi(t + \frac{\pi}{4}))^2}{t} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \frac{(\sin \pi t)^2}{t} = \frac{1}{2} (16 \times \pi^2) = 8\pi^2$$

۷۵-۱۷-۹

گزینه ۲ ۵۷

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

راه اول: می‌دانیم:

عبارت را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}) \cdot (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}{(\cos x \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \times \frac{\sqrt{2}}{2}) \times (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos x - \sin x) \cdot (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}})} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} (2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}})} = \frac{1}{\sqrt{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = 2^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow 2^{-\frac{1}{4}} = 2^a \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

راه دوم: می‌دانیم: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و هر دو در $x = a$ مشتق پذیر باشند آنگاه روش هوییتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به‌قرار زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \quad H : \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin x}}{\cos(x + \frac{\pi}{2})} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}}{-\sin(x + \frac{\pi}{2})} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}} \right)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} + \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{1}{2}}}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{1}{2}}} = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\frac{1}{2}} = (2^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{4}} = 2^a \rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۷۷-۷-۱۶

گزینه ۱ صورت کسر را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2(1 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - (1 - 2\sin^2 \frac{x}{2})}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{x}{2}}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2}}{x^2} = -2$$

۷۸-۹-۱۳

گزینه ۴

راه حل اول: صورت کسر را در مزدوجش ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2} \times \frac{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\cos \Delta x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos \Delta x}{x^2(1 + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - (1 - 2\sin^2 \frac{\Delta x}{2})}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} - 2\sin^2 \frac{\Delta x}{2}}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2\Delta x^2}{2} - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 6$$

راه حل دوم: با استفاده از هویتال داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos \Delta x}}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} - \frac{-\Delta \sin \Delta x}{2\sqrt{\cos \Delta x}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x}{2} + \frac{\Delta(\Delta x)}{2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{24}{2}x}{2x} = 6$$

۷۹-۶-۱۵

گزینه ۲

می‌دانیم:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \sqrt[n]{1+u} \simeq 1 + \frac{u}{n} \quad , \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos^n u) \simeq \frac{u^n}{2} \times n \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)] + [-f(x)] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} ([2x] + [-2x]) \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos^2 x)}{1 - \sqrt{1+x^2}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{1 - \sqrt{1+x^2}} \times \frac{(1 + \sqrt{1+x^2})}{(1 + \sqrt{1+x^2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(2\sin^2 \frac{x}{2}) \times (2)}{1 - 1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \times 2 \times \frac{x^2}{2} \times 2}{-x^2} = 2$$

۷۴-۱۲-۱۳

گزینه ۲ راه حل اول: کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \sqrt{\cos x}}{x^2} \times \frac{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}}{\cos^2 x + \sqrt{\cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{x^2(\cos^2 x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos^2 x - 1)}{x^2(\cos^2 x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(\cos x - 1)(\cos^2 x + \cos x + 1)}{x^2(\cos^2 x + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x(-2\sin^2 \frac{x}{2})(\cos^2 x + \cos x + 1)}{x^2(\cos^2 x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \times \frac{x^2}{2} \times \cos x(\cos^2 x + \cos x + 1)}{x^2(\cos^2 x + \sqrt{\cos x})} = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = -\frac{3}{4}$$

راه حل دوم:



بهترین روش محاسبه این حد استفاده از هم‌ارزی $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$ است:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^r x - \sqrt{\cos x}}{x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^r - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}}{x^r}$$

حال به کمک هم‌ارزی برنولی صورت را ساده می‌کنیم $(1+x)^r = 1+rx$ وقتی $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - r \times \frac{x^2}{2} - \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2}\right)}{x^r} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(-1 + \frac{1}{4}\right)x^2}{x^r} = \frac{-3}{4}$$

۷۷-۷-۱۶

گزینه ۴ می‌دانیم: بنا به هم‌ارزی مثلثاتی:

$$\tan^n u \simeq \lim_{u \rightarrow 0} (u^n), \quad \lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \simeq \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^2}{2}$$

$$(1) \quad 1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2} \Rightarrow 1 - \cos(\sqrt{2}x) = \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2} = x$$

$$tg^r u \sim \frac{u^r}{2} \Rightarrow tg^r \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right) \sim \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \right)^r = \left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right)^r$$

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \right)^r}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right)^r}{x^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1 + \sqrt{1-x^2})} \right)^r}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{x^2}{2} \right)^r}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{2r}}{2^r x^n} = a$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2^r} \\ n = 2r \end{cases} \Rightarrow a + n = \frac{1}{2^r} + 2r = \frac{17}{2}$$

۹۰-۳-۷

گزینه ۱ با عددگذاری به ابهام $\frac{0}{0}$ می‌رسیم و به کمک فرمول‌های مثلثاتی تابع را ساده‌تر می‌کنیم.

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sqrt{(\sin x + \cos x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}}{|\sin x + \cos x|}$$

توجه: به ازای $\frac{3\pi}{4}$ حاصل عبارت $\sin x + \cos x$ همواره مثبت است چون در ناحیه دوم هرچقدر زاویه کوچک‌تر می‌شود اندازه سینوس و کسینوس مثبت‌تر و بزرگ‌تر می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x) \cdot \cancel{(\cos x + \sin x)}}{\cos^2 x \cdot \cancel{(\sin x + \cos x)}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = -2\sqrt{2}$$

۸۳-۵-۱۱

گزینه ۳ مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم تا عبارت $x-1$ ظاهر شود و سپس با تعویض متغیر $x-1=t$ ، حاصل حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^r(x-1) - (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)(x^r-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)^r(x+1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{(x-1)^r} \quad x-1=t \rightarrow x=t+1, \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos \pi(t+1)}{t^r}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \pi t}{t^r} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{\pi t}{2}}{t^r} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{t^r} = \frac{1}{2} \times \frac{2 \times \frac{\pi^2}{4}}{t^r} = \frac{\pi^2}{4}$$

۷۶-۸-۱۶

گزینه ۱

روش اول: با تغییر متغیر $t = x - \frac{\pi}{2}$ حد را بر حسب t می‌نویسیم:

$$x = t + \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sin(\frac{\pi}{2} + t)}{\sin(\frac{\pi}{2} + t) + \sin(\frac{3\pi}{2} + 3t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{\cos t - \cos 3t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^2}{2}}{(1 - \frac{t^2}{2}) - (1 - \frac{9t^2}{2})} = \frac{\frac{t^2}{2}}{4t^2} = \frac{1}{8}$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و هر دو در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه روش هوییتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به‌قرار زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \quad H: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\sin x + \sin 3x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \frac{-\cos x}{\cos x + 3 \cos 3x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{-\sin x - 9 \sin 3x} = \frac{+1}{-1 + 9} = +\frac{1}{8}$$

۷۶-۱۰-۱۴

گزینه ۱ در یک همسایگی راست $x = 0$ داریم:

$$x \rightarrow 0^+ : \tan[x] = \tan[0^+] = \tan 0 = 0$$

پس حد داده شده، چنین است:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^n(1-\cos\sqrt{3x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{1-x^2}-1)}{x^n(2\sin^2\frac{\sqrt{3x}}{2})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{2x^n \times (\frac{\sqrt{3x}}{2})^2} \times \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2x^n \times \frac{3x}{4} \times 2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{3x^{n+1}}$$

اگر حاصل حد، موجود و مخالف صفر باشد، باید $n = 2$ و در این صورت حاصل حد $-\frac{1}{3}$ است؛ پس $n = 2$ و $a = \frac{-1}{3}$ است و در نتیجه $a^n = \frac{1}{9}$. باید در صوت سؤال قید شود $a \neq 0$.

۹۲-۳-۵

گزینه ۱ رواد اول: می‌دانیم: $\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \simeq u$ و $\lim_{u \rightarrow 0} (1 - \cos u) \simeq \frac{u^2}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x - \sin x \cos x}{\cos x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (1 - \cos x)}{x^2 \cdot \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times \frac{x^2}{2}}{x^2 \times 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^3}{x^2} = \frac{1}{2}$$

راه دوم: روش هوییتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ باشد و f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \tan^2 x - \cos x}{2x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \frac{x^2}{2}}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

هم‌ارزی:

۶۹-۱۷-۱۴

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 + \tan x} = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{4}} \frac{(1 + \tan x)}{\tan x(1 + \tan x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

توجه کنید که $\tan \frac{3\pi}{4} = \cot \frac{3\pi}{4} = -1$ است.

۶۱-۱۹-۲۰

گزینه ۴

می‌دانیم:

$$1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{2 + 2 \cos x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{2(1 + \cos x)}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{\sqrt{2 \times 2 \cos^2 \frac{x}{2}}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin x - \sin 3x}{2 \left| \cos \frac{x}{2} \right|}$$



توجه: می‌دانیم وقتی $x \rightarrow \pi^+$ آنگاه کمان $\frac{x}{2}$ به صورت $\frac{\pi^+}{2}$ است که در ناحیه دوم قرار دارد و کسینوس در ناحیه دوم منفی است:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x - \sin 3x}{-2 \cos \frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow \pi} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi + t) - \sin(3\pi + 3t)}{-2 \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{t}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t + \sin 3t}{2 \sin \frac{t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t + 3t}{2(\frac{t}{2})} = 2$$

۸۳-۹-۹

۷۰. گزینه ۱ در مخرج کسر از اتحاد $1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{\sin 3x}{\cos 3x}}{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cos 3x - \sin 3x}{\sqrt{2 \cos 3x |\sin \frac{x}{2}|}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x \cos 3x}{\sqrt{2 \cos 3x} \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin 3x}{\sqrt{2 \cos 3x} \sin \frac{x}{2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}} - \frac{3x}{\sqrt{2} \times 1 \times \frac{x}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۸۰-۵-۱۵

۷۱. گزینه ۱ در هم‌ارزی‌های مثلثاتی می‌دانیم $\lim_{u \rightarrow 0} \sin u \sim u$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{1 - 2 \cos 3x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(\pi + t)}{1 - \cos(3\pi + 3t)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos t}{1 - \cos 3t} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin^2 \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{3t}{2}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\frac{t^2}{2}}{\frac{9t^2}{2}} = \frac{1}{9} \lim_{x \rightarrow \pi} \sin(1 + \cos x) \sim 1 + \cos x, \lim_{x \rightarrow 0} \sin \sim x$$

۸۲-۹-۹

۷۲. گزینه ۳ صورت کسر را در مزدوجش ضرب می‌کنیم سپس از تغییر متغیر $x - \pi = t$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(2 - \sqrt{x})}{\cot \frac{\pi x}{\lambda}} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(2 - \sqrt{x})}{\cot \frac{\pi x}{\lambda}} \times \frac{(2 + \sqrt{x})}{(2 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{4 - x}{\pi \cot \frac{\pi x}{\lambda}}, x - \pi = t \rightarrow x = t + \pi, \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-t}{\pi \cot \frac{\pi(t+\pi)}{\lambda}} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-t}{\pi \cot(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi t}{\lambda})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-t}{-\pi \tan(\frac{\pi t}{\lambda})} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{t}{\pi \times \frac{\pi t}{\lambda}} = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

۷۹-۸-۱۳

۷۳. گزینه ۳ طبق فرض داریم:

$$\begin{aligned} f(x) = xg(x) + 1 &\Rightarrow g(x) = \frac{f(x) - 1}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - 1)^2}{(\sin x + 1)^2} - 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - 1)^2 - (\sin x + 1)^2}{x(1 + \sin x)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \sin x}{x \times 1} = -4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -4 \end{aligned}$$

۳۹-۳۶-۲۴

۷۴. روش اول: با تغییر متغیر $t = x - \frac{1}{2}$ حد را برحسب t می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} x - \frac{1}{2} = t \rightarrow x = t + \frac{1}{2} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\cos \pi(t + \frac{1}{2})}{1 - \sqrt{2(t + \frac{1}{2})}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\cos(\frac{\pi}{2} + \pi t)}{1 - \sqrt{2t + 1}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi t}{1 - \sqrt{2t + 1}} \times \frac{1 + \sqrt{2t + 1}}{1 + \sqrt{2t + 1}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin \pi t(1 + \sqrt{2t + 1})}{1 - 2t - 1} = \frac{\pi t(2)}{-2t} = -\pi \end{aligned}$$

روش دوم:

می‌دانیم: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و هر دو در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه روش هوییتال برای رفع ابهام $\frac{0}{0}$ به‌قرار زیر است:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0} \quad H : \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

نکته: در محاسبه حد، هرگاه x به سمت ریشه ساده قدر مطلق میل کرد، ابتدا قدر مطلق را تعیین علامت و سپس حاصل حد را می‌یابیم.

$$\begin{aligned} x \rightarrow (\frac{1}{2})^+ : x > \frac{1}{2} \Rightarrow \pi x > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \pi x < 0 \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{|\cos \pi x|}{1 - \sqrt{2x}} &= \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{-\cos \pi x}{1 - \sqrt{2x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{\pi \sin \pi x}{2\sqrt{2x}} = -\pi \end{aligned}$$

۷۴-۱۱-۱۶

۷۵ گزینه ۱ با تبدیل $\tan \pi x = \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x}$ و استفاده از مزدوج مخرج و در ادامه مزدوج صورت خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{1 - \frac{\sin \pi x}{\cos \pi x}}{2x - \sqrt{x}} \times \frac{(2x + \sqrt{x})}{(2x + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi x - \sin \pi x(1)}{(2x^2 - x) \cos \pi x} \times \frac{(\cos \pi x + \sin \pi x)}{\cos \pi x + \sin \pi x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\cancel{\cos^2 \pi x} - \sin^2 \pi x}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2})(\cancel{2x^2 - x})} \xrightarrow{x - \frac{1}{2} = t} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2\pi(t + \frac{1}{2})}{(t + \frac{1}{2})(4t)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin 2\pi t}{\frac{1}{2}(4t)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\frac{\sin 2\pi t}{2\pi t}) \times 2\pi t}{t} = -2\pi$$

۷۲-۷-۲۱

۷۶ گزینه ۳ کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x} \times \frac{(1 + \cos \sqrt{x})}{(1 + \cos \sqrt{x})} = \frac{1 - \cos^2 \sqrt{x}}{x(1 + \cos \sqrt{x})} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \sqrt{x}}{x(2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\frac{\sin \sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}})^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

۶۷-۹-۲۴

۷۷ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\cos x(1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

۴۳-۲۴-۳۴

۷۸ گزینه ۲

هرگاه x به سمت عددی میل کند که به موجب آن جواب حد یک نوع بی‌نهایت شود (مثلاً فقط $-\infty$) آن عدد ریشه مضاعف مخرج است. یعنی $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج است. بنابراین:

$$x^2 + ax + b = (x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

در نتیجه داریم:

$$a + b = -4 + 4 = 0$$

۳۶-۲۶-۳۸

۷۹ گزینه ۴ گزینه چهارم صحیح است زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + \underbrace{|x|}_{+}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{x + x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

توجه کنید تابع در همسایگی چپ صفر، تعریف نمی‌شود زیرا مخرج به صورت $x - x$ یعنی صفر مطلق می‌شود.

۲۹-۲۳-۴۸

۸۰ گزینه ۱ به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه اول: درست: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^-} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = -\infty$

گزینه سوم: نادرست: $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^+} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = +\infty$

گزینه چهارم: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^+} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^-} \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + 2(\frac{-1}{2})^-} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{0^-} = +\infty \end{array} \right. \rightarrow \text{نادرست}$



توجه کنید:

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)^+ = \left(-\frac{1}{2}\right)^- \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)^- = \left(-\frac{1}{2}\right)^+ \end{cases}$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)^+ = \left(-\frac{1}{2}\right)^+ \\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)^- = \left(-\frac{1}{2}\right)^- \end{cases}$$

۳۰-۳۷-۳۳

گزینه ۳

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{\cot x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{\tan x}{1} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \tan^2 x = (-\infty)^2 = +\infty$$

 $\left(\frac{\pi}{2}\right)^+$ در ناحیه‌ی دوم است و در این ناحیه تانژانت، منفی است.

۴۳-۲۱-۳۷

۸۲ با توجه به اینکه $(x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \sin x < x)$ داریم $\frac{\sin x}{x} = 1^-$ و می‌دانیم که حاصل $[1^-]$ عدد صفر مطلق است و $0 \times \infty = 0$ و $0 \div \infty = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cot x = 0,$$

۵۲-۲۵-۲۳

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x + \sqrt{x+2}}{x+2} = \frac{-2 + 0}{\underbrace{(-2)^+ + 2}_{-1.9}} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

۴۰-۱۰-۵۰

گزینه ۱

می‌توانیم تابع $g \circ f$ را تشکیل داده و سپس حد بگیریم:

$$|a| > 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases} \text{ یادآوری:}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= 2^{\frac{1}{x}} \\ g(x) &= \frac{2x-3}{x+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g\left(2^{\frac{1}{x}}\right) = \frac{2\left(2^{\frac{1}{x}}\right) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\left(2^{\frac{1}{x}}\right) - 3}{2^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{2\left(2^{-\infty}\right) - 3}{\left(2^{-\infty}\right) + 1} = \frac{2 \times (0) - 3}{0 + 1} = -3$$

۵۵-۱۱-۳۴

گزینه ۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+5}{(x-1)(x-3)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 2^{-\infty} = 0$$

$$|a| > 1 \rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases} \text{ یادآوری:}$$

۴۸-۲۹-۲۳

ابتدا عبارت داخل براکت را تعیین عدد می‌کنیم.

گزینه ۱

$$x \rightarrow \left(-\frac{1}{2}\right)^- \Rightarrow x^2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+ \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{x^2} \rightarrow 12^- \\ \frac{2}{x^2} = 8^- \Rightarrow -\frac{2}{x^2} \rightarrow (-8)^+ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{3}{x^2}\right] = 11 \\ \left[-\frac{2}{x^2}\right] = -8 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{10x - 5 + 11}{16x + 8} = \frac{-5 - 5 + 11}{-8 + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

۱۷-۴۹-۳۴

۸۷ گزینه ۲ وقتی $x \rightarrow -\frac{1}{2}^+$ داریم:

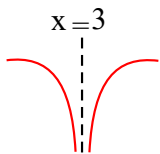
$$x > -\frac{1}{2} \Rightarrow x^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{x^2} > 4 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{x^2} < -4 \Rightarrow \left[-\frac{2}{x^2}\right] = -9 \\ \frac{3}{x^2} > 12 \Rightarrow \left[\frac{3}{x^2}\right] = 12 \end{cases}$$

پس حد را می‌توان به صورت زیر بازنویسی و حل کرد:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{16x - (-9)}{24x + 12} = \frac{-8 + 9}{(-12) + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۶۰-۲۴-۱۶

۸۸ گزینه ۳



تابع $\frac{x-4}{2x^2+ax+b}$ در حوالی $x=3$ باید به صورت مقابل باشد زیرا در هر دو حالت $x \rightarrow 3^+$, $x \rightarrow 3^-$ جواب حد است. مقدار صورت در $x=3$ منفی است بنابراین مخرج دارای ریشه مضاعف $x=3$ است.

$$2x^2 + ax + b = 2(x-3)^2 = 2x^2 - 12x + 18 \Rightarrow a = -12, b = 18 \Rightarrow a + b = 6$$

۷۱-۶-۲۳

۸۹ گزینه ۴ از حد داده شده می‌فهمیم که مخرج به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ برابر صفر می‌شود:

$$a \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

حال ببینیم که مخرج کسر داده شده به ازای $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)^+$ از چه سمتی به صفر نزدیک می‌شود:

$$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{3}\right)^+ : \sqrt{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^+ - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^+ = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^- - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^+ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^- - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^+ \rightarrow 0^-$$

پس حد مخرج کسر به صورت 0^- شده و نتیجه می‌گیریم که حد صورت عددی مثبت خواهد بود.

$$ax + b \Big|_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} > 0 \Rightarrow \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3}\right) + b > 0 \Rightarrow b > \frac{-\pi}{\sqrt{3}} \simeq -1,000$$

کمترین مقدار صحیح b برابر ۱- می‌شود.

۸۰-۶-۱۴

۹۰ گزینه ۳

$$\begin{cases} (0, 2a) \in f \\ (3a, 0) \in f \end{cases} \Rightarrow a' = \frac{2a}{-3a} = -\frac{2}{3} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 2a, \quad \begin{cases} (0, 2m) \in g \\ (-m, 0) \in g \end{cases} \Rightarrow a'' = \frac{2m}{m} = 2 \Rightarrow g(x) = 2x - m$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - m}{\left|-\frac{2}{3}x + 2a\right|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-\frac{2}{3}x} = -3$$

۳۴-۳۷-۲۹

۹۱ گزینه ۳ با توجه به مقدار حد که $+\infty$ است، صورت کسر بایست عدد حقیقی منفی باشد؛ زیرا $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0^-$.

بررسی گزینه‌ها:



$$1 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 1 = 1$$

$$2 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\frac{x}{\pi}\right] - 1 = 0$$

$$3 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left[\frac{x}{\pi}\right] - 2 = -1$$

$$4 \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2\left[\frac{x}{\pi}\right] + 2 = +2$$

۵۹-۱۰-۳۰

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{f(x)}{\sin x} = -\infty$$

چون $\lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0^+$ است (x در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است) پس باید حد تابع $f(x)$ وقتی $x \rightarrow \pi^-$ عددی حقیقی و منفی باشد.

با بررسی گزینه‌ها داریم:

$$4 \text{ گزینه } : \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{3x}{\pi}\right] - 3 = [3^-] - 3 = 2 - 3 = -1$$

پس گزینه ۴ صحیح است.

۶۰-۹-۳۲

گزینه ۳: حد داده شده دارای ابهام $+\infty - \infty$ است که از کتاب حذف شده است و متأسفانه طراحان بدون توجه به کتاب درسی این سؤال را طرح کرده‌اند، برای رفع ابهام، عبارت را در مزدوجش ضرب و تقسیم کرده و پس از استفاده از اتحاد مزدوج از صورت و مخرج جملات با توان بیشتر را انتخاب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2 + x}) \times \frac{2x - \sqrt{4x^2 + x}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 4x^2 - x}{2x - \sqrt{4x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{4x} = -\frac{1}{4}$$

۳۵-۳۷-۲۸

گزینه ۱

می‌دانیم در ∞ ، عبارت $\sqrt{4x^2 + 15x}$ ، هم‌ارز با $\sqrt{4x^2}$ است که برابر با $|2x|$ خواهد شد:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - \sqrt{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{3x - 2|x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{5x}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n = 1$ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax}{5x} = \frac{a}{5} = -1 \rightarrow a = -5$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} &\times \frac{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}}{3x + \sqrt{4x^2 + 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(-5x + 15)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{\underbrace{9x^2 - 4x^2 - 15x}_{5x^2 - 15x}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5(x-3)(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{5x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(3x + \sqrt{4x^2 + 15x})}{x} = \frac{-(9+9)}{3} = -6 \end{aligned}$$

البته حد را می‌توان از قاعده هوییتال نیز محاسبه کرد.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5x + 15}{3x - \sqrt{4x^2 + 15x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-5}{3 - \frac{1(8x+15)}{2\sqrt{4x^2+15x}}} = \frac{-5}{3 - \frac{39}{18}} = \frac{-5}{\frac{15}{18}} = -6$$

۷۲-۷-۲۱

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + x}}{x} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

۳۱-۲۷-۴۲

گزینه ۲ ۹۶

می‌دانیم در ∞ عبارت $\sqrt{4x^2} + 5$ هم‌ارز با $|2x|$ است:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2} + 5}{2x + 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \sqrt{4x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2|x|}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a+2)x}{2x} = \frac{a+2}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow a = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{4x^2} + 5}{2x + 2} &= \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{1(\lambda x)}{2\sqrt{4x^2} + 5}}{2} = \frac{2 - \frac{1}{6}}{2} = \frac{\frac{10}{6}}{2} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

۶۵-۱۱-۲۴

گزینه ۳ ۹۷

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{-x} = -a = 3 \Rightarrow a = -3$$

$$\text{پس: } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3x + 9}{1 - x + \sqrt{x+1}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{-1 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \frac{-3}{-1 + \frac{1}{4}} = \frac{-3}{-\frac{3}{4}} = 4$$

۵۳-۷-۴۰

در حدهای کسری وقتی x به سمت بی‌نهایت میل کند و جواب عدد شود باید بزرگ‌ترین توان x صورت و مخرج باید با هم برابر باشند و دقت کنید چون $n > 3$ است در نتیجه $n - 2 > 1$ و جمله‌ی پرتوان مخرج حتماً mx^{n-2} است.

$$m + 3 = n - 2 \Rightarrow m - n = -5$$

$$\text{پرتوان صورت و مخرج} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{m+3}}{mx^{n-2}} = \frac{1}{m} = -2 \Rightarrow m = \frac{-1}{2}, n = \frac{9}{2} \Rightarrow m + n = 4$$

۶۵-۹-۲۶

گزینه ۲ ۹۹ چون نمودار تابع f از نقطه $(2, 1)$ می‌گذرد، مختصات آن در ضابطه تابع f صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(2) = 1 \Rightarrow \frac{2a + 1 + \sqrt{25}}{3(2) - 2} = 1 \Rightarrow \frac{2a + 6}{4} = 1 \Rightarrow 2a + 6 = 4 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 1 + \sqrt{4x^2} + 9}{3x - 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 2|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$$

۵۵-۱۳-۳۲

گزینه ۲ ۱۰۰

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{ax^n - 6} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \sqrt{x^2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + |x|}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax^n}$$

چون جواب حد، عدد شده است پس بزرگترین توان x صورت و مخرج با هم برابرند یعنی $n = 1$ پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a} = -\frac{1}{2} \rightarrow a = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + \sqrt{x^2 - 3x}}{-6x - 6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + \frac{1(2x - 3)}{2\sqrt{x^2 - 3x}}}{-6} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{-6} = \frac{-1}{8}$$

۵۳-۹-۳۸

گزینه ۳ ۱۰۱ در $x \rightarrow 1^+$ مقدار $[x]$ دقیقاً برابر ۱ است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - [x])g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (4 - 1)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 6 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{|x - 1|} = 2$$

حد مخرج در $x \rightarrow 1^+$ برابر صفر است و چون حاصل حد برابر عدد متناهی ۲ است، پس باید حد صورت هم صفر شود و عبارت زیر رادیکال یعنی $ax^2 + bx + c$ باید به فرم $a(x - 1)^2$ باشد.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{a(x-1)^2}}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|\sqrt{a}}{|x-1|} = \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a = 4$$

حال حاصل $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ را می‌یابیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + bx + c}}{|x-1|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2|x|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x} = 2$$

۷۶-۶-۱۸

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\overbrace{|x^2 - 4|}^+}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ ، $x^2 - 4 < 0$ بوده و لذا $x^2 - 4 = 4 - x^2$ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-(x-2)(x+2)}{-(x+2)(x-1)} = \frac{4}{3}$$

دقت کنید $(-2)^+$ را حدوداً ۱/۹۹- در نظر می‌گیریم.

۵۲-۲۱-۲۷

گزینه ۱ می‌دانیم که $0 = (-\infty)$ (عدد بزرگتر از یک) است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 2^{1-2n}}{2^{2n+1} + 3 \times 2^{1-2n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} - 0}{2^{2n+1} + 0} = 1$$

۶۱-۱۰-۲۸

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{2}{3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n - 3x + 1}{3x^2 + x} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^n}{3x^2} \stackrel{n=2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2}{3x^2} = \frac{a}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow a = 2$$

حال با معلوم بودن مقادیر a و n ، مقدار $f(-1)$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{a=2} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + x} \Rightarrow f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{3(-1)^2 + (-1)} = \frac{2 + 3 + 1}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

۶۲-۹-۲۹

گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{ax^n + 4} \stackrel{\text{پرتوان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\sqrt{x^2}}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\overbrace{x}^+}{ax^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{ax^n} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ a = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 5}}{-2x + 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{-2x}{2\sqrt{x^2 + 5}}}{-2} = \frac{-4}{-2} = \frac{1}{2}$$

۶۱-۶-۳۴

گزینه ۲

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n - 6x^2 + 1}{ax^2 + 7x^2 - 2} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^n}{ax^2} \stackrel{n=2}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{ax^2} = \frac{4}{a} = 2 \rightarrow a = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 6x^2 + 1}{2x^2 + 7x^2 - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{12x^2 - 12x}{6x^2 + 14x} = \frac{3 - 6}{3 + 7} = \frac{-3}{10} = \frac{-6}{20}$$

۵۹-۶-۳۵

گزینه ۲ می‌دانیم که $0 = (-\infty)$ (عدد بزرگتر از یک) است.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 2^{-2n+1}}{2 \times 3^{2n} + 3^{-2n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{2n} - 0}{2 \times 3^{2n} - 0} = \frac{1}{2}$$

۲۲-۴۴-۳۴

گزینه ۱ ۱۰۸

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{3x^n - 12} \stackrel{\text{توان بیشتر}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{3x^n} \stackrel{n=1}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax}{3x} = \frac{a}{3} = \frac{1}{6} \rightarrow 6a = 4 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3}x - \sqrt[3]{x^3 - 1}}{3x - 12} = \frac{0}{0} \stackrel{HOP}{\rightarrow} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{3} - \frac{1(3x)}{3\sqrt[3]{(x^3 - 1)^2}}}{3 - 12} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{6}{12}}{3 - 12} = \frac{\frac{1}{6}}{3 - 12} = \frac{1}{24}$$

۳۶-۳۵-۲۹

گزینه ۳ توجه: هرگاه داخل جزء صحیح، بی نهایت شود. جزء صحیح به پیرانتز تبدیل می شود.

گزینه ها را بررسی نموده و حد هریک را محاسبه می کنیم:

$$\text{حد متناهی ۱: } x \rightarrow 0^- \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} x \left[\frac{1}{x} \right] \approx \lim_{x \rightarrow 0^-} x \times \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{حد متناهی ۲: } x \rightarrow 0^+ \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] \approx \lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{حد نامتناهی ۳: } x \rightarrow -\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^- \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot [0^-] = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(-1) = +\infty$$

$$\text{حد نامتناهی ۴: } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot [0^+] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \times 0 = 0$$

بنابراین حاصل حد گزینه ۳ نامتناهی است.

۶۳-۱۳-۲۴

گزینه ۳ ۱۱۰

اولین قدم در حل مسائل حدی عددگذاری است:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left[\frac{1}{x} \right] = -\infty [0^-] = -\infty \times -1 = +\infty$$

۲۸-۳۰-۴۳

گزینه ۱ ۱۱۱

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2 + 9x}}{3x + \sqrt{x}} \stackrel{\text{پر توان}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{4x^2}}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2|x|}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 2x}{3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{3x} = \frac{-1}{3}$$

۳۷-۱۳-۵۰

گزینه ۴ ابتدا زیر هریک از رادیکال ها مخرج مشترک می گیریم و عبارت $\sqrt{x}$ را به زیر رادیکال ها برده و با x هایی که از مخرج کسر ها، فاکتور گرفته ایم ساده می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^2+x}} - \sqrt{\frac{1}{x^2+x}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+1}} - \sqrt{\frac{1}{x^2+x}} \right) = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2}$$

در واقع رفع ابهام $\infty \times 0$ است که مربوط به نظام قدیم است اما با ساده سازی عبارت می توان به جواب رسید.

۴۱-۳۶-۲۳

گزینه ۲ می دانیم: $1 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n+1)$ مجموع n عدد زوج

چون حد تابع در منفی بی نهایت خواسته شده است پس از قاعده پرتوان استفاده می کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{2+4+\dots+100} x^{2+4+\dots+100}}}{a^{49} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[5]{a^{50 \times 51} x^{50 \times 51}}}{a^{49} x^k} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|a^{51} x^{51}|}{a^{49} x^k} = -1$$

واضح است که $k = 51$ است. از طرفی اگر $a = -1$ باشد با توجه به اینکه $x \rightarrow -\infty$ می رود عبارت از داخل قدر مطلق مثبت خارج می شود و خواهیم داشت $a^k = -1$ که نادرست است پس $a = 1$.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-a^{51} x^{51}}{a^{49} x^k} = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \xrightarrow{a>0} a = 1$$

۷۵-۱۲-۱۴

گزینه ۱ ۱۱۴

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2+x+1}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{ax^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{a}}{x} = \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

مشخص است که چون حد فوق برابر $\frac{1}{4}$ است، پس باید $a > 0$ باشد و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{a}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{a}}{x} = \sqrt{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

حال خواست سؤال را محاسبه می کنیم.



$$x \rightarrow -1^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow \frac{1}{x} > -1 \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left[\frac{1}{x}\right] f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -f(x) = -\lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x + 1} = -\sqrt{\frac{1}{4}(-1)^2 + (-1) + 1} = \sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

۶۹-۱۰-۲۲

گزینه ۳ ۱۱۵

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{ax - 2}$$

$$\text{پرتوان} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - \overline{x}}{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - (-x)}{ax} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{ax} = \frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - \sqrt{x^2 + 6x}}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \frac{2x+6}{2\sqrt{x^2+6x}}}{1} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{1} = \frac{3}{4}$$

۶۲-۱۶-۲۲

گزینه ۴ ۱۱۶

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - x^2 + 1} + \sqrt{x^2 + 1} - x^2}{x} \xrightarrow{\text{توان بیشتر}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + |x| - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overline{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x} = -1$$

۲۶-۴۲-۳۲

گزینه ۳ ۱۱۷

$$f \text{ تابع } \Rightarrow (\circ, 3m)(m, \circ)$$

$$\Rightarrow f(x) = -3x + 3m$$

$$g \text{ تابع } (3, \circ)(-3, \circ) \Rightarrow g(x) = \frac{3}{4}x - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|-3x + 3m|}{\frac{3}{4}x - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x}{\frac{3}{4}x} = -4$$

۶۲-۱۵-۲۲

طبق فرض داریم: گزینه ۳ ۱۱۸

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \xrightarrow{g=\frac{1}{f}} g(x) = \frac{cx + d}{ax + b}$$

$$\text{نکته: } \begin{cases} f^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a} \\ g^{-1}(x) = \frac{-bx + d}{ax - c} \end{cases}$$

طبق برابری‌های حد در $(x \rightarrow -\infty)$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}(x)}{g(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{-a}} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{b}{a} = \pm 1$$

$$\text{سوال: } \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-dx + b}{cx - a} = \frac{-b}{a} = 1 \text{ یا } (-1)$$

۴۰-۳۶-۲۵

گزینه ۴ ۱۱۹

ابتدا با کمک قاعده پرتوان و مثبت بودن عبارت درون قدر مطلق خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{ax^2} = \frac{1}{a} = -1 \Rightarrow a = -1$$

	-2	+2
$x^2 - 4$	+	-
	+	+

وقتی $x \rightarrow (-2)^+$ ، $x^2 - 4 < 0$ بوده زیرا

ولذا $|x^2 - 4| = 4 - x^2$ می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{|x^2 - 4|}{ax^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{4 - x^2}{-x^2 - x + 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-2x}{-2x - 1} = \frac{4}{3}$$

۶۱-۱۷-۲۲

گزینه ۴ ۱۲۰

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{a + 3[-x]}{1 - 2x} = -\infty \Rightarrow \frac{a + 3 \left[-\left(\frac{1}{2} \right)^+ \right]}{1 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^+} = \frac{a - 3}{1 - 1^+} = \frac{a - 3}{0^-} = -\infty$$

$$\Rightarrow a - 3 > 0 \Rightarrow a > 3$$

چون $a > 3$ است پس عبارت داخل براکت کوچکتر از صفر است

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \left[\frac{x}{a} - a \right] = \left[\frac{\frac{1}{2}}{a} - \frac{1}{2} \right] = \left[\frac{1}{2a} - \frac{1}{2} \right] \rightarrow \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^- \right] = -1$$

۲۹-۳۹-۳۲

گزینه ۴ ابتدا تابع داده شده را ساده می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 2x & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

حد راست و حد چپ و مقدار تابع را باید در $x = 1$ و $x = -1$ بدست آوریم.

$$x = 1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2(1) = 2 \\ f(1) = 2(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = 1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x = -1 : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 2x = 2(-1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x - 1) = -1 - 1 = -2 \\ f(-1) = 2(-1) = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ پیوسته است.}$$

۵۰-۲۷-۲۴

گزینه ۱ کافی است حد چپ تابع در $x = -2$ و مقدار تابع در $x = -2$ با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{1 + x^2}{\underbrace{|x + 2|}} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{-(x + 2)} = -12$$

درضمن $f(-2) = a$ است پس $a = -12$ است.

۳۱-۳۸-۳۰

گزینه ۴ شرط اینکه تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و باهم برابر باشند.

راه حل اول:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} \times \frac{1 + \sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times (1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times (1 + \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x} = 2$$

به علاوه $f(0) = a$ در نتیجه $a = 2$.

راه حل دوم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1(-1)}{2\sqrt{1-x}}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$f(0) = a$$

پس $a = 2$ است.

۵۵-۱۲-۳۴

گزینه ۱ می دانیم اگر $x = k$ یکی از ریشه های تابع $f(x)$ باشد آن گاه $f(x)$ بر $x - k$ بخش پذیر است.

کافی است شرط پیوستگی (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = 2$ اعمال کنیم.



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x^2 + 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x^2 - x - 2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - x - 2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x + b) = 4 + b \\ f(2) &= 4 + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = 4 + b \Rightarrow b = -4$$

۳۱-۱۴-۵۵

شرط پیوستگی تابع f در $x = a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی با هم برابر باشند.

گزینه ۲

۱۲۵

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (a \log_v^{1+x}) = a \log_v^2 = a \log_v^2 = 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 2^{x-2}) = 3a + 1 \\ f(2) &= a \log_v^2 = a \log_v^2 = 2a \end{aligned} \right\} \rightarrow 3a + 1 = 2a \rightarrow a = -1$$

ضابطه‌ی بالا y پس: $f(2) = 2a + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} = -1,5$

۴۲-۶-۵۲

باید حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{4}$ با هم برابر باشند.

گزینه ۱

۱۲۶

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^+} a \cos 2x = a \cos \frac{2\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{4})^-} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = a \cos \frac{2\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\text{پس: } -\frac{\sqrt{2}}{2}a = 1 \Rightarrow -a\sqrt{2} = 2 \Rightarrow a = -\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow a = -\sqrt{2}$$

۱۸-۶-۷۶

گزینه ۳

۱۲۷

شرط اینکه تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + ax) = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{ax + 3} = \sqrt{a + 3} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \sqrt{a + 3} = 1 + a \xrightarrow{\text{ابتدا}} a + 3 = a^2 + a + 2a$$

$$a^2 + a - 2 = 0 \rightarrow (a + 2)(a - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\text{پس: } f(\frac{-3}{4}) = \sqrt{-\frac{3}{4}a + 3} = \sqrt{-\frac{3}{4} + 3} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

۴۴-۶-۵۰

ابتدا $f(x) + g(x)$ را تشکیل می‌دهیم و سپس شرط پیوستگی (یعنی تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع) را در $x = 1$ اعمال می‌کنیم.

گزینه ۱

۱۲۸

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2x + a + 1 & x < 1 \\ \frac{a}{x+1} + 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{حد راست: } \lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\frac{a}{x+1} + 1) = \frac{a}{2} + 1$$

$$\text{حد چپ: } \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + a + 1) = 2 + a + 1 = a + 3$$

$$\text{مقدار تابع: } (f + g)(1) = \frac{a}{2} + 1$$

$$\text{پس: } \frac{a}{2} + 1 = a + 3 \rightarrow a + 2 = 2a + 6 \rightarrow a = -4$$

۳۲-۱۱-۵۸

گزینه ۳ ۱۲۹

برای این که تابع f در نقطه ی مرزی $x = -1$ پیوسته باشد، باید حد راست، حد چپ و مقدار تابع در این نقطه برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{x+a} = \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (x^r + ax) = (-1)^r + a(-1) = 1-a \\ f(-1) &= \frac{1}{-1+a} = \frac{-1}{1-a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-1}{1-a} = 1-a \Rightarrow (1-a)^2 = -1 \Rightarrow \text{امکان ندارد}$$

۶۱-۴-۳۵

گزینه ۱ ۱۳۰

شرط پیوستگی یک تابع در نقطه‌ای به طول $x = a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x}(\sqrt{\cos x} - 1)}{(1 - \sqrt{\cos x})(1 + \sqrt{\cos x})(1 + \cos x)} = -\frac{1}{2 \times 2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

بنابراین $f(0) = a = -\frac{1}{4}$ است.

۷۴-۱۷-۹

گزینه ۴ ۱۳۱ کافی است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 2$ محاسبه کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^r - 4}{2|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^r - 4}{2|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{-2(x-2)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$f(2) = 2$$

بنابراین تابع در $x = 2$ از راست پیوسته است.

۱۶-۳۱-۵۳

گزینه ۳ ۱۳۲ شرط پیوسته بودن تابع در نقطه‌ای به طول $x = a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$f(1) = a - a + 2 = 2$$

بنابراین به ازای هر مقدار a ، تابع در $x = 1$ پیوسته است.

۵۴-۲۱-۲۶

گزینه ۳ ۱۳۳

شرط پیوستگی تابع f در $x = a$ این است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{2x}}{2 - x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{Hop} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{2x}}}{-1} = -\frac{1}{2}$$

پس $f(2) = a = -\frac{1}{2}$ است

۵۳-۹-۳۸

گزینه ۳ ۱۳۴ شرط اینکه تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} \times \frac{x + \sqrt{x+2}}{x + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x - 6)(x + \sqrt{x+2})}{x^2 - x - 2}$$



$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{(x-2)(x+1)} = \frac{3(4)}{3} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = 2a - 1 \rightarrow 2a - 1 = 4 \rightarrow 2a = 5 \rightarrow a = \frac{5}{2} = 2,5$$

البته توجه کنید که حد راست تابع را می‌توان با استفاده از قاعده هوییتال نیز به دست آورد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{1 - \frac{1(1)}{2\sqrt{x+2}}} = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{3}{4}} = 4$$

۷۱-۷-۲۲

۱۳۵ گزینه ۴ شرط آن که تابع f در $x = a$ پیوسته باشد آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin^2 x - \sin x - 1}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-(2 \sin x + 1)(1 - \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} &= \frac{-(2 + 1)}{2 + 0} = -1,5 \end{aligned}$$

توجه کنید که $f(\frac{\pi}{2}) = a$ است، پس $a = -1,5$ است.

۷۷-۷-۱۷

۱۳۶ گزینه ۲

حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 0$ باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} a \sin(x + \frac{\pi}{6}) = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \\ f(0) &= a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

۶۲-۹-۲۹

۱۳۷ گزینه ۴

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 - bx^2 + 2}{ax^2 - bx + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2}{ax^2} = 1$$

تابع یک مجانب افقی به صورت $y = 1$ دارد چون فقط در دو نقطه ناپیوسته است و دو مجانب موازی با محورهای مختصات دارد باید یک مجانب قائم نیز داشته باشد. در واقع باید مخرج دو ریشه داشته باشد که یکی از آنها ریشه مشترک با صورت است و به عنوان یک نقطه ناپیوستگی (نه مجانب) باشد. این ریشه را به دست می‌آوریم.

$$ax^2 - bx^2 + 2 = ax^2 - bx + 2 \Rightarrow bx^2 = bx \Rightarrow bx^2 - bx = 0 \Rightarrow bx \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

$x=1$ ریشه مخرج

$$\xrightarrow{x=1} a - b + 2 = 0 \Rightarrow b = a + 2$$

$$f(x) = \frac{ax^2 - (a+2)x^2 + 2}{ax^2 - (a+2)x + 2} = \frac{ax^2 \cdot (x-1) - 2(x-1)(x+1)}{ax^2 \cdot (x^2-1) - 2(x-1)} = \frac{ax^2 - ax^2 - 2x^2 + 2}{ax^2 - ax - 2x + 2} = \frac{(x-1)(ax^2 - 2x - 2)}{(x-1)(ax^2 + ax - 2)}$$

در نتیجه عبارت $ax^2 + ax - 2$ باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Delta = 0 \xrightarrow{\Delta=0} a^2 + 4a = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \quad \text{غ ق ق} \\ a = -4 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

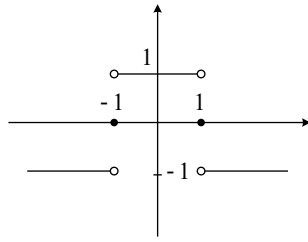
۸۶-۵-۹

۱۳۸ گزینه ۳ تابع $g \circ f$ را با توجه به توابع f و g تعریف می‌کنیم:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 1 & f(x) > 0 \\ 0 & f(x) = 0 \\ -1 & f(x) < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x)) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = \pm 1 \\ -1 & x > 1 \quad \text{یا} \quad x < -1 \end{cases}$$

$x = -1$ و $x = 1$ طول نقاط ناپیوستگی هستند.



۲۸-۴۰-۳۲

گزینه ۴ x_0 پیوسته هستند بنابراین مجموع و تفاضل آن‌ها نیز در x_0 پیوسته است. یعنی:

$$y = (f + g) + (f - g) = 2f: \text{در } x_0 \text{ پیوسته } f \Rightarrow \text{در } x_0 \text{ پیوسته } 2f$$

$$y = (f + g) - (f - g) = 2g: \text{در } x_0 \text{ پیوسته } g \Rightarrow \text{در } x_0 \text{ پیوسته } 2g$$

۵۸-۱۲-۲۹

گزینه ۱ حد چپ و حد راست و مقدار تابع را در $x = 0$ محاسبه می‌کنیم و سپس با هم مقایسه می‌کنیم.

$$f(0) = 1 \quad \text{مقدار تابع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} \cdot [x] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1} \cdot [0^+] = 0 \quad \text{حد راست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} \cdot [x] = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{-1} \cdot [0^-] = (-1) \times (-1) = 1 \quad \text{حد چپ}$$

چون حد چپ با مقدار تابع برابر است پس پیوستگی چپ دارد.

۵۵-۲۱-۲۳

گزینه ۱ کافی است $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ با $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ مقایسه شود. لذا خواهیم داشت:

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}: \sin x < 1 \Rightarrow 2 \sin x < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} [2 \sin x] = [2^-] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = [2 \sin \frac{\pi}{2}] = [2(1)] = 2$$

در نتیجه تابع $f(x)$ هم از راست و هم از چپ ناپیوسته است.

۴۶-۲۵-۲۹

گزینه ۳ برای پیوسته بودن باید حد چپ و راست با مقدار تابع برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \quad \text{حد چپ}$$

$$f(2) = 2a - 1 \quad \text{مقدار تابع}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - \sqrt{x + 2}} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x - 6)(x + \sqrt{x + 2})}{(x - \sqrt{x + 2})(x + \sqrt{x + 2})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x - 6)(x + \sqrt{x + 2})}{x^2 - x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x - 2)(x + \sqrt{x + 2})}{(x + 1)(x - 2)} = \frac{3 \times (2 + \sqrt{4})}{(2 + 1)} = 4 \quad \text{حد راست}$$

با توجه به تعریف پیوستگی داریم:

$$2a - 1 = 4 \Rightarrow a = 2.5$$

۱۶-۴۶-۳۸

گزینه ۱ به دلیل وجود عامل $(-1)^{[x]}$ پیوستگی تابع f را در نقاط زوج و فرد بررسی می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} f(2k) &= \lim_{x \rightarrow 2k^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2k^+} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2} x = (-1)^{2k} \sin k\pi = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2k^-} f(x) &= (-1)^{2k-1} \sin k\pi = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در نقاط زوج پیوسته است}$$



$$\left. \begin{aligned} f(2k+1) &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)^+} f(x) = (-1)^{2k+1} \sin \frac{\pi}{2}(2k+1) = -\sin \frac{\pi}{2}(2k+1) \\ \lim_{x \rightarrow (2k+1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (2k+1)^-} (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2}x = (-1)^{2k} \sin \frac{\pi}{2}(2k+1) = \sin \frac{\pi}{2}(2k+1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{در نقاط فرد پیوسته نیست}$$

۷۴-۱۲-۱۴

۱۴۴- گزینه ۳ با توجه به این که هر دو تابع f و g در $x = 0$ ناپیوسته‌اند، در مورد پیوستگی جمع و تفریق و تقسیم و نیز ترکیب آن‌ها با هم یعنی fog و gof و fof نمی‌توان اظهار نظر قطعی نمود و باید در هر گزینه ضابطه‌ی تابع داده شده را تشکیل و مورد بررسی قرار داد. بررسی هر چهار گزینه:

$$\begin{aligned} ۱) (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \begin{cases} -2x - \frac{1}{2} & ; x < 0 \\ 2x + 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \text{ تابع } f+g \text{ در } x=0 \text{ ناپیوسته است} \\ ۲) (fof)(x) &= f(f(x)) = \begin{cases} f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} & ; x < 0 \\ f(2x) = 4x & ; x \geq 0 \end{cases} \text{ تابع } fof \text{ در } x=0 \text{ ناپیوسته است} \\ ۳) gof(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} g(-\frac{1}{2}) = -2(-\frac{1}{2}) = 1 & ; x < 0 \\ g(2x) = 1 & ; x \geq 0 \end{cases} \text{ ق ق } \Rightarrow \text{تابع } gof \text{ در } x=0 \text{ پیوسته است} \\ ۴) fog(x) &= f(g(x)) = \begin{cases} f(-2x) = 2(-2x) = -4x & ; x < 0 \\ f(1) = 2(1) = 2 & ; x \geq 0 \end{cases} \text{ تابع } fog \text{ در } x=0 \text{ ناپیوسته است} \end{aligned}$$

۷۳-۸-۱۹

۱۴۵- گزینه ۲

برای پیوسته بودن باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1^- \quad \lim_{x \rightarrow 0} |\sin x| < \lim_{x \rightarrow 0} |x| \quad \text{می دانیم:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin x}{x} \right] \cos 2x = [1^-] \cos 0 = 0 \times 1 = 0 \\ f(0) &= a \\ \text{شرط پیوستگی} &\rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

۵۸-۲۲-۲۰

۱۴۶- گزینه ۱ توابع براکتی به‌ازای هر عددی که داخل براکت را صحیح کند، ناپیوسته است و اگر آن عدد ریشه ضریب براکت باشد، تابع در آن پیوسته خواهد بود. اگر $a = 0$ باشد در این صورت تابع به‌صورت زیر درمی‌آید که فقط در حالت $b = 0$ پیوسته خواهد بود که غیرقابل قبول است:

$$y = b[x^r]$$

۲) اگر $a \neq 0$ باشد در این صورت $[x(x-a)]$ در نقاط $x = a$ و $x = 0$ ناپیوسته است و با شرط $b = 0$ پیوسته خواهد شد؛ در این صورت:

$$\begin{aligned} y &= 0[x^r - ax] - 2a = -2a \\ \frac{a}{f(b)} &= \frac{a}{-2a} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

۳۶-۴۶-۱۸

۱۴۷- گزینه ۱

$$\begin{aligned} x = a \text{ پیوستگی در نقطه} &\Rightarrow \frac{2 \sin b}{3\sqrt{a+2}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{3x^2 + (m-1)x + (m-4)}}{|x^3 + ((m-7)x+a)^2|} = \frac{\sqrt{3a^2 + (m-1)a + (m-4)}}{|a^3 + ((m-7)a+a)^2|} \\ \Rightarrow a^3 + ((m-6)a)^2 &= a^3 + (m-6)^2 a^2 = a^2(a+m-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 6-m \end{cases} \\ \Rightarrow 3(6-m)^2 + (m-1)(6-m) + m - 4 &= 3(36 + m^2 - 12m) + (-m^2 - 7m - 6) + m - 4 = 2(m-7)^2 = 0 \\ \Rightarrow m = 7 &\Rightarrow a = 6-m = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3x^2 + 6x + 3}}{|x^3 + 1|} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3}|x+1|}{|x^3 + 1|} = \\ \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3} \cancel{|x+1|}}{\cancel{|x+1|} |x^2 - x + 1|} &= \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

۹۱-۳-۶

۱۴۸- گزینه ۱ عدد a می‌بایست تنها ریشه زیر رادیکال باشد و از طرفی مخرج را هم صفر کند. آنجا که تابع پیوسته است پس باید -1 ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد تا زیر رادیکال در R تعریف‌پذیر شود. داریم:

$$\Delta = 0 \Rightarrow (m+3)^2 - 12m = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m=3; x=a = \frac{-(m+3)}{2(6)} \xrightarrow{m=3} x=a = \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6(x+\frac{1}{2})^2}}{2x^2 + \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6} \left| x + \frac{1}{2} \right|}{2 \left| x^2 + \frac{1}{4} \right|} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{6} \left| x + \frac{1}{2} \right|}{2 \left| x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right|} = \frac{\sqrt{6}}{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2 \tan b}{\sqrt{-\left(-\frac{1}{2}\right)}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sqrt{2} \tan b = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$

۴۹-۳۹-۱۳

۱۴۹ گزینه ۲ سؤال را در دو بخش n زوج و n فرد حل می‌کنیم:

الف) فرض کنیم n زوج است، داریم:

$$x=n \rightarrow [x] = \text{زوج}$$

$$f(n) = |n - [-n]| = |2n|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(n) = |n - [-n]| = |2n| \\ f(n^+) \xrightarrow{[n^+] = \text{زوج}} = |n - [-(n^+)]| = |n - \overbrace{[-n^-]}^{-n-1}| = |2n+1| \end{cases}$$

نیازی به محاسبه $f(n^-)$ نیست چون در حالت n زوج، $f(n) \neq f(n^+)$ است، پس به ازای n زوج، تابع f در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته نیست:

ب) فرض کنیم n فرد است، داریم:

$$x=n \rightarrow [x] = \text{فرد}$$

$$f(n) = n - [n] + k = n - n + k = k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(n) = n - [n] + k = n - n + k = k \\ f(n^+) \xrightarrow{[n^+] = \text{فرد}} = n - [n^+] + k = n - n + k = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(n^+) \xrightarrow{[n^+] = \text{فرد}} = n - [n^+] + k = n - n + k = k \\ f(n^-) \xrightarrow{[n^-] = \text{زوج}} = |n - [-(n^-)]| = |n - \underbrace{[-n^+]}_{-n}| = |2n| \end{cases}$$

در این حالت، تابع f اگر بخواهد در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته باشد، باید:

$$k = k = |2n|$$

با شرط n فرد طبیعی، به ازای $k=2n$ ، تابع f در $x=n$ و $x=-n$ پیوسته است.

۴۷-۳۹-۱۳

۱۵۰ گزینه ۱

$$(f \circ f) \circ g = f \circ f(g(x)) \xrightarrow{-1, 0, 1} \begin{cases} ff(-1) = f(0) = 0 \\ ff(0) = f(0) = 0 \\ ff(1) = f(0) = 0 \end{cases}$$

پس تابع $(f \circ f) \circ g = 0$ است (تابع ثابت) و هیچ نقطه ناپیوستگی ندارد.

۲۲-۴۶-۳۲

۱۵۱ گزینه ۴

می‌دانیم: روش هوپیتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x=a$ مشتق پذیر باشند آنگاه:

$$H: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

برای پیوسته بودن باید: $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(3)$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x-3} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = -\frac{1 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$$

$$f(3) = 3a - 3a - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax - 3a - \frac{3}{8}) = -\frac{3}{8}$$

چون حد تابع با مقدار تابع برابر است پس به ازای هر مقدار a این تابع پیوسته است.

۷۵-۱۴-۱۱

۱۵۲ گزینه ۲ در بازه داده شده داخل قدرمطلق، مثبت است.



$$f(x) = x(3 - x^2) = -x^3 + 3x \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = -1 \rightarrow \begin{cases} f(-1, 5) = f(-\frac{3}{2}) = -\frac{9}{8} \\ f(\sqrt{3}) = 0 \\ f(1) = 2 \\ f(-1) = -2 \rightarrow \text{Min مطلق} \end{cases}$$

۲۲-۴۵-۳۳

۱۵۳- گزینه ۱ به ازای $k \in \mathbb{Z}$ می‌دانیم $\sin(\pi k) = 0$ و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow k} (-1)^{[x]} \sin \pi x = (-1)^{[k]} \times 0 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{تابع } f \text{ در نقاط صحیح، همواره پیوسته است.} \\ f(k) = (-1)^{[k]} \times \sin(\pi k) = (-1)^{[k]} \times 0 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

۷۵-۶-۱۹

۱۵۴- گزینه ۴

کافی است حد راست و حد چپ و مقدار تابع را در $x = 1$ به دست آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|(x+2)(x-1)|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x+2)(x-1)}{(x-1)} = -3$$

این تابع در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد.

۶۳-۱۴-۲۲

۱۵۵- گزینه ۴

روش اول: تابع به فرم $y = [f(x)]$ در نقاطی که داخل جزء صحیح مقداری صحیح شود و به شرط آنکه این نقطه طول Min نسبی تابع f نباشد ناپیوسته است.

$$0 \leq x \leq \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq \pi x \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \leq \sin^2 \pi x \leq 1 \rightarrow 0 \leq 3 \sin^2 \pi x \leq 4$$

$$3 \sin^2 \pi x = 0 \rightarrow \sin \pi x = 0 \rightarrow \pi x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$3 \sin^2 \pi x = 1 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{1}{3} = \sin^2 \frac{\pi}{6} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{1}{6}$$

$$3 \sin^2 \pi x = 2 \rightarrow \sin^2 \pi x = \frac{2}{3} = \sin^2 \frac{\pi}{4} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{1}{4}$$

$$3 \sin^2 \pi x = 3 \rightarrow \sin^2 \pi x = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$3 \sin^2 \pi x = 4 \rightarrow \sin^2 \pi x = 1 = \sin^2 \frac{\pi}{2} \rightarrow \pi x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

ابتدای بازه بسته پیوستگی راست و انتهای بازه بسته پیوستگی چپ اگر برقرار باشد نقطه، نقطه ناپیوستگی نمی‌باشد. تابع در $x = 0$ پیوستگی راست دارد پس $x = 0$ نقطه ناپیوستگی

نمی‌باشد و تابع در $x = \frac{1}{2}$ پیوستگی چپ ندارد پس نقطه ناپیوستگی محسوب می‌شود بنابراین مجموعه نقاط ناپیوستگی تابع به صورت $\left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \right\}$ است.

۶۹-۱۷-۱۵

۱۵۶- گزینه ۴ کافی است شرط پیوستگی را در $x = \frac{\pi}{2}$ بررسی کنید (تساوی حد راست و چپ و مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} b \cos 2x = b \cos \pi = -b \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (a + \sin 3x) = a + \sin \frac{3\pi}{2} = a - 1 \\ f(\frac{\pi}{2}) = 2 \end{cases}$$

$$\text{پس: } -b = 2 \rightarrow b = -2, a - 1 = 2 \rightarrow a = 3 \rightarrow a - b = 5$$

۷۳-۳-۲۴

۱۵۷- گزینه ۲ چون تابع، بر روی مجموعه اعداد حقیقی بزرگ‌تر از یک پیوسته است پس حتماً در $x = 6$ نیز باید پیوسته باشد. یعنی حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 6$

باید با هم برابر باشند.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^+} (a + \cos^2 \frac{\pi x}{36}) = a + \cos^2 \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4} \\ \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 6^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ f(6) &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

۳۱-۴-۶۵

۱۵۸ گزینه ۱ چون هر دو ضابطه پیوسته هستند، برای آنکه تابع دو ضابطه‌ای f روی R (مجموعه‌ی اعداد حقیقی) پیوسته باشد، کافی است شرایط پیوستگی تابع را تنها در نقطه مرزی آن، یعنی $x = 2$ برقرار نماییم.

$$\left\{ \begin{aligned} \text{حد راست} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax - 5) = 4 + 2a - 5 = 2a - 1 \\ \text{حد چپ} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax - 1) = 2a - 1 \end{aligned} \right.$$

چون به ازای هر مقدار a ، حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = 2$ با هم برابر هستند، پس نتیجه می‌گیریم که به ازای هر مقدار حقیقی a ، تابع f روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

۳۴-۱۱-۵۵

$$159 \text{ گزینه ۱ می‌دانیم که } k > 0 \Rightarrow -k \leq f(x) \leq k \text{ و } k > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq k \\ f(x) \leq -k \end{cases} \text{ یا } |f(x)| \geq k \text{ است.}$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & -1 < x-1 < 1 \\ x^2 + ax + b & x-1 \geq 1 \text{ یا } x-1 \leq -1 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

چون تابع همواره پیوسته است، پس حتماً در $x = 2$ و $x = 0$ نیز پیوسته است.

$$x = 0 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)[x] = -1[0^+] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + ax + b) = b \rightarrow b = 0 \\ f(0) = b \end{cases}$$

$$x = 2 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = 1[2^-] = 1 \rightarrow 4 + 2a = 1 \rightarrow a = -\frac{3}{2} \\ f(2) = 4 + 2a \end{cases}$$

۳۱-۴۲-۲۶

۱۶۰ گزینه ۱ کافی است شرط پیوستگی یعنی تساوی حدود راست و چپ و مقدار تابع با هم را در $x = 1$ بررسی کنیم.

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4) = -1 + 4 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 5x - a) = a + 5 - a = 5 \\ f(1) &= -1 + 4 = 3 \end{aligned} \right.$$

تابع f در $x = 1$ پیوسته نمی‌باشد. بنابراین به ازای هیچ مقداری برای a تابع f در بازه $[-2, 2]$ پیوسته نمی‌باشد.

۳۰-۷-۶۲

۱۶۱ گزینه ۴ برای پیوستگی f در بازه $[\frac{\pi}{4}, 2\pi]$ تنها کافی است شرایط پیوستگی را در نقطه‌ی مرزی $x = \frac{3\pi}{4}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و مقدار تابع)

$$\left\{ \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^+} \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos \pi = -1 \\ \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{4})^-} a \sin 2x = a \sin \frac{3\pi}{2} = -a \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1 \\ f(\frac{3\pi}{4}) &= \cos(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) = \cos \pi = -1 \end{aligned} \right.$$

۱۹-۱۰-۷۰

۱۶۲ گزینه ۴

$$f(x) = [x] \sin \pi x, -2 \leq x \leq 2$$

اعداد $-1, 0, 1$ داخل جزء صحیح را صحیح کرده و باعث ناپیوستگی آن می‌شوند ولی چون این سه عدد $\sin \pi x$ را صفر می‌کنند (ضرب صفرشونده) نقاط ناپیوستگی محسوب نمی‌شوند. همچنین در ابتدای بازه پیوستگی راست و در انتهای بازه پیوستگی چپ برقرار است. پس این تابع روی بازه مورد نظر پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.

۱۶-۸-۷۶



گزینه ۲ ۱۶۳

توابع براکتی به ازای هر عددی که داخل براکت را صحیح می‌کند، ناپیوسته است مگر آنکه آن عدد Min داخل براکت یا ریشه ضریب براکت باشد. اگر بازه مورد بررسی بسته باشد، باید ابتدای بازه از راست و انتهای بازه از چپ پیوسته باشد.

$$f(x) = \left[x - \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = \left[x - \frac{1}{3} + 1 \right] - 1 + \left[x + \frac{2}{3} \right]$$

$$f(x) = \left[x + \frac{2}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] - 1 = 2 \left[x + \frac{2}{3} \right] - 1$$

ابتدا پیوستگی تابع را در ابتدا و انتهای بازه بررسی می‌کنیم:

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{5}{3}\right)^+} 2 \left[x + \frac{2}{3} \right] - 1 = -3$$

در نتیجه در $x = -\frac{5}{3}$ تابع از راست پیوسته است.

در انتهای بازه پیوسته است چون به ازای $x = \frac{5}{3}$ داخل براکت صحیح نمی‌شود.

حال پیوستگی تابع را در بازه $\left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$ بررسی می‌کنیم:

$$-\frac{5}{3} < x < \frac{5}{3} \Rightarrow -1 < x + \frac{2}{3} < \frac{7}{3}$$

در بازه $\left(-1, \frac{7}{3}\right)$ سه عدد صحیح وجود دارد. پس تابع $f(x)$ در ۳ نقطه ناپیوستگی دارد.
۶۹-۱۸-۱۳

گزینه ۳ ۱۶۴

شرط پیوسته بودن تابع f در $x = a$ آن است که حد راست و حد چپ و مقدار تابع در $x = a$ موجود و متناهی و با هم برابر باشند.

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & -1 < x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases}$$

چون تابع بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس حتما در $x = 1$ و $x = -1$ نیز پیوسته است.

$$x = 1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + b) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x[x] = 1 \times 0 = 0 \rightarrow a + b = 0 \quad (I) \\ f(1) = a + b \end{cases}$$

$$x = -1 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} x[x] = -1[(-1)^+] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (ax + b) = -a + b \rightarrow -a + b = 1 \quad (II) \\ f(-1) = -a + b \end{cases}$$

از I و II نتیجه می‌شود که $b = \frac{1}{2}$ و $a = -\frac{1}{2}$ است.

۶۵-۶-۲۹

گزینه ۱ ۱۶۵ برای پیوستگی تابع f در بازه $[0, 2\pi]$ ، تنها کافی است شرایط پیوستگی تابع را در نقطه‌ی مرزی به طول $x = \frac{\pi}{4}$ اعمال کنیم. (تساوی حد راست و حد چپ و

مقدار تابع)

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \sqrt{r} \cos 3x = \sqrt{r} \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{r} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} (a + \sin^r x) = a + \sin^r \frac{\pi}{4} = a + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^r = a + \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{r} \cos \frac{3\pi}{4} = \sqrt{r} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

۷۶-۷-۱۶

گزینه ۳ ۱۶۶

تابع $f(x) = [x^2] - 3$ در نقاط $\{x^2 \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$ ناپیوسته است و نیز دامنه تابع $2 \leq x < 2 + k$ است و اولین عددی که در دامنه قرار دارد ۲ است.

$$x = 2 \rightarrow [x^2] = 4 \Rightarrow 4 \leq x^2 < 5 \Rightarrow 2 \leq x < \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow x \in [2, \sqrt{5}) \xrightarrow{[2, 2+k)} 2 + k = \sqrt{5} \Rightarrow k = \sqrt{5} - 2$$

۷۹-۴-۱۸

۱۶۷ گزینه ۱ نکته: تابع $y = g(x) \cdot [f(x)]$ به ازای ریشه های $g(x)$ همواره پیوسته است.

عدد ۱- از داخل براکت خارج می شود و نقشی در نقاط ناپیوستگی ندارد. توابع براکتی در نقاطی که عبارت داخل براکت مقداری صحیح باشد، ناپیوسته می باشند، لذا داریم:

$$\left[\frac{1}{3}x\right] : \frac{1}{3}x = k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = 3k \rightarrow 0 < 3k < 9 \rightarrow 0 < k < 3 \rightarrow k = 1, 2 \rightarrow x = 3, 6$$

از طرفی چون تابع $y = (x - 3)\left[\frac{1}{3}x - 1\right]$ است، در نتیجه تابع در نقطه $x = 3$ پیوسته می باشد چون ریشه ی ضریب جزء صحیح است و $x = 6$ تنها نقطه ناپیوستگی تابع است.
۶۸-۹-۲۳

۱۶۸ گزینه ۳ برای آن که تابع f بر $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، کافی است در نقطه ای به طول $x = 2$ پیوسته باشد. برای این منظور حد راست، حد چپ و مقدار تابع را در $x = 2$ محاسبه کرده و برابر هم قرار می دهیم. داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 2a + b \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + bx - 1) = 4 + 2b - 1 = 2b + 3 \Rightarrow 2b + 3 = 5 \Rightarrow b = 1 \\ f(2) = 5 \end{cases}$$

$$2a + b = 5 \Rightarrow 2a + 1 = 5 \Rightarrow a = 2$$

۶۰-۳-۳۸

۱۶۹ گزینه ۲ توابع کسری به ازای ریشه های مخرج ناپیوسته هستند بنابراین تابع فوق در $x = -2$ که ریشه معادله $1 + \sqrt[3]{x+1} = 0$ است ناپیوسته است.
توجه: ریشه مخرج کسر دومی عدد $x = -5$ است اما زیر رادیکال فرجه زوج را منفی می کند پس قابل قبول نیست.
۷۵-۱۵-۱۰

۱۷۰ گزینه ۱ در نقاط صحیح باید بررسی کنیم که در بازه داده شده نقاط $x = 0$ و $x = 1$ هستند که تابع در نقطه به طول $x = 1$ پیوسته است و در نقطه به طول $x = 0$ ناپیوسته است. چون:

$$f(x) = [x]([x] - 1) \\ f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2 \quad f(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

۶۷-۱۲-۲۱

۱۷۱ گزینه ۲ چون در $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس باید در نقطه مرزی $x = 0$ هم پیوسته باشد یعنی حد تابع و مقدار تابع در $x = 0$ باهم برابرند. با توجه به تابع، مقدار تابع در $x = 0$ برابر $\frac{1}{12}$ است؛ پس حد تابع هم باید همین باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+a} - b}{x} = \frac{\sqrt[3]{0+a} - b}{0}$$

چون مخرج کسر صفر است باید صورت هم صفر باشد.

$$\sqrt[3]{a} - b = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a} = b \Rightarrow \boxed{a = b^3}$$

راحل اول:

$$\text{می دانیم } \boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3} \text{ لذا:}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+a} - b}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+b^3} - b}{x} \times \frac{\sqrt[3]{(x+b^3)^2} + b\sqrt[3]{x+b^3} + b^2}{\sqrt[3]{(x+b^3)^2} + b\sqrt[3]{x+b^3} + b^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + b^3 - b^3}{x \times (\sqrt[3]{(x+b^3)^2} + b\sqrt[3]{x+b^3} + b^2)} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+b^3)^2} + b\sqrt[3]{x+b^3} + b^2} \\ &= \frac{1}{b^2 + b^2 + b^2} = \frac{1}{3b^2} = \frac{1}{12} \Rightarrow \boxed{b = \pm 2} \end{aligned}$$

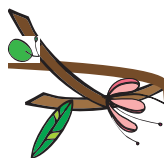
راحل دوم:

می دانیم: روش هوییتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ مشتق پذیر باشند آنگاه:

$$H: \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+a} - b}{x} = \frac{0}{0} \quad H: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+a)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}$$

باید حد تابع با مقدار تابع برابر باشد.



$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{12} \Rightarrow \sqrt[3]{a^2} = 12 \Rightarrow a^2 = 64 \Rightarrow a = \pm 8$$

$$b^2 = \pm 8 \Rightarrow \boxed{b = \pm 2}$$

۷۱-۹-۲۰

گزینه ۲ ۱۷۲

می‌دانیم:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

تابع $y_1 = \sin \pi x$ و تابع $y_2 = 1 - x$ هر دو در $\mathbb{R}$ پیوسته هستند. تابع $y = \frac{\sin \pi x}{1 - x}$ در کل دامنه اش یعنی $R - \{1\}$ پیوسته است. بنابراین برای این که تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد باید $f(1)$ را مناسب تعریف کرد. داریم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{1 - x} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1 - x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi - \pi x)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi(1 - x)}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi \sin \pi(1 - x)}{\pi(1 - x)} = \pi$$

بنابراین اگر $a = \pi$ باشد، تابع f در کل $\mathbb{R}$ پیوسته خواهد بود.

۵۹-۱۶-۲۵

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \quad \text{گزینه ۴ می‌دانیم:}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \notin \mathbb{Z} \\ f(x) - 1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1$$

همواره پیوسته است

۸۰-۵-۱۵

گزینه ۲ راه حل اول: ۱۷۴

حد چپ، حد راست و مقدار تابع را در $x = -1$ محاسبه می‌کنیم و برابر قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3 - x}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3 - x}}{x + 1} \times \frac{2 + \sqrt{3 - x}}{2 + \sqrt{3 - x}} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{4 - (3 - x)}{(x + 1)(2 + \sqrt{3 - x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x + 1)}{(x + 1)(2 + \sqrt{3 - x})} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1) = -a + 1$$

در نتیجه کافیت:

$$-a + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

راه حل دوم:

هر دو ضابطه در دامنه‌هایشان پیوسته هستند و برای اینکه در R پیوسته باشد فقط نقطه مرزی را بررسی می‌کنیم. برای پیوستگی تابع در یک نقطه باید حد چپ، حد راست و مقدار تابع در آن نقطه با هم برابر باشند، برای این تابع در نقطه $x = -1$ داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2 - \sqrt{3 - x}}{x + 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOP} \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\frac{1}{2\sqrt{3-x}}}{1} = \frac{1}{4} \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) &= f(-1) = -a + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

۶۶-۶-۲۸

راه حل اول: برای پیوسته بودن تابع در $(2, 3)$ باید در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - [x]}{x^2 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{(x - 2)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{4 + 4 + 3} = \frac{1}{11} = f(2) = a$$

راه حل دوم:

می‌دانیم: روش هوییتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

$$H : \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

برای اینکه تابع $f(x)$ در بازه $[2, 3]$ پیوسته باشد باید در نقطه $x = 2$ پیوستگی از راست داشته باشد یعنی $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$f(2) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - [x]}{x^2 - x - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x^2 - x - 6} = \frac{0}{0} \quad \text{مبهم} \quad H: \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{3x^2 - 1} = \frac{1}{11} \Rightarrow a = \frac{1}{11}$$

۷۵-۶-۱۹

۱۷۶ گزینه ۱ تابع f در نقاط $x = 1$ و $x = 5$ پیوسته است، پس:

$$x = 1 \text{ در پیوستگی در } \tan \frac{3\pi}{4} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{a(1-x)} \Rightarrow -1 = \frac{3}{-a} \Rightarrow a = 3$$

$$x = 5 \text{ در پیوستگی در } b(5 - [-5]) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} \Rightarrow 1 \circ b = \frac{28}{3(-4)} \Rightarrow b = \frac{-7}{3 \circ}$$

$$a \times b = 3 \times \left(\frac{-7}{3 \circ}\right) = \left(\frac{-7}{1 \circ}\right) = -7 \circ$$

۷۹-۶-۱۵

۱۷۷ گزینه ۲

$$f(x) = a[x] + b[x+1] = a[x] + b[x] + b = (a+b)[x] + b$$

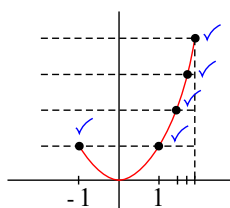
چون تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته است پس به ناچار باید $a+b=0$ باشد بنابراین $a=-b$

ضابطه تابع f به صورت تابع ثابت $f(x) = b$ خواهد بود که در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{f(a)}{a} = \frac{b}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

۷۷-۶-۱۷

۱۷۸ گزینه ۳



راه حل اول: باتوجه به نمودار تابع $y = x^2$ تابع $f(x) = [x^2]$ در نقاط مشخص شده ناپیوسته است.

راه حل دوم: ابتدا باید ببینیم در بازه داده شده، چه اعدادی عبارت داخل جزء صحیح را صحیح می کنند.

$$x^2 = k \rightarrow x = \pm \sqrt{k} \xrightarrow{-1 \leq x \leq 2} x = 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, -1, 2$$

اما چون $x = 0$ طول نقطهٔ مینیمم عبارت x^2 است، پس علی رغم صحیح شدن پیوسته می باشد از طرفی باید پیوستگی راست تابع در ابتدای بازه و پیوستگی چپ تابع در انتهای بازه را نیز بررسی کنیم.

$$x = -1 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} [x^2] = [(+1)^-] = 0 \\ f(-1) = [(-1)^2] = +1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{تابع در } x = -1 \text{ ناپیوسته است.}$$

$$x = +2 \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow (2)^-} [x^2] = [4^-] = 3 \\ f(2) = [4] = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \text{تابع در } x = 2 \text{ ناپیوسته است.}$$

پس تابع در نقاط $\{-1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2\}$ یعنی در ۵ نقطه ناپیوسته است.

۵۷-۳۲-۱۰

۱۷۹ گزینه ۳ هر دو ضابطه در دامنهٔ خودشان پیوستگی دارند لذا کافی است شرط $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ برقرار شود. لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)|x| = (2-1) \times 2 = 2$$

$$\text{حد راست و مقدار تابع} \quad f(2) = a + 2 \sin \frac{\pi}{2} = a + 2 \Rightarrow a + 2 = 2 \Rightarrow a = 0$$

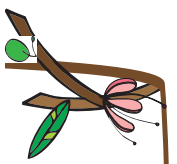
۶۵-۸-۲۸

۱۸۰ گزینه ۲

ابتدا دامنه تابع را باز می کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq -1, x \geq 1 \\ x \cdot [x] & -1 < x < 1 \end{cases}$$

باید تابع در نقاط مرزی یعنی $x = 1$ و $x = -1$ پیوسته باشد پس:



$$\begin{cases} x \rightarrow 1^+ = a(1) + b = a + b \rightarrow a + b = 0 \\ x \rightarrow 1^- = 1[1^-] = 0 \\ x \rightarrow -1^+ = -1[-1^+] = 1 \rightarrow -a + b = 1 \\ x \rightarrow -1^- = a(-1) + b = -a + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & |x| \geq 1 \\ x \cdot [x] & |x| < 1 \end{cases}$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2} = -1$$

برای محاسبه $f\left(\frac{3}{2}\right)$ از ضابطه بالایی استفاده می‌کنیم.

۷۷-۱۲-۱۲

گزینه ۲

$$f(x) = a[x+1] + b[x+[a+1]] = a([x]+1) + b([x]+[a]+1) = (a+b)[x] + (a+b+b[a])$$

f پیوسته است؛ بنابراین ضرب $[x]$ باید صفر باشد. در نتیجه:

$$a+b=0 \Rightarrow b=-a \Rightarrow f(x) = -a[a]$$

$$\frac{a[a]}{f(a)} = \frac{a[a]}{-a[a]} = -1$$

۸۰-۶-۱۵

برای دامنه تابع $f(x) = [x] \sin \pi x$ دو حالت داریم:

$$f(x) = [x] \cdot \sin \pi x \quad [-2, 2]$$

$$۱) \text{ if } : x \notin \mathbb{Z} \rightarrow$$

در این حالت $[x]$ و $\sin \pi x$ هر دو پیوسته هستند، بنابراین حاصل ضربشان نیز پیوسته است.

$$۲) \text{ if } : x \in \mathbb{Z} \rightarrow$$

در این حالت $[x]$ ناپیوستگی دارد اما تابع $\sin \pi x$ در اعداد صحیح همواره صفر است پس حد تابع و مقدار تابع $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$ در اعداد صحیح صفر است. بنابراین همواره پیوسته است پس تابع فوق در $\mathbb{R}$ پیوستگی دارد.

۲۰-۴۸-۳۲

گزینه ۲

چون هر دو ضابطه همواره پیوسته است پس در نقطه مرزی $x = a$ هم پیوسته است و حد چپ و حد راست در $x = a$ برابر هستند.

$$۱ - \frac{a}{4} = \frac{1}{a} \Rightarrow 4a - a^2 - 4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

۵۸-۹-۳۳

$$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \text{ می‌دانیم: گزینه ۱}$$

و می‌دانیم تابع به فرم $y = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Z} \\ g(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ در صورتی همواره پیوسته هستند که $f(x) = g(x)$ باشد.

$$f(x) = \begin{cases} [x] + [-x] & ; x \notin \mathbb{Z} \\ a & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

برای پیوستگی باید دو ضابطه برابر شوند پس: $a = -1$

۶۶-۱۳-۲۱

گزینه ۲ ابتدا باید دامنه تابع را باز کنیم.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot [x] & -1 < x < 1 \\ ax + b & x \geq 1, x \leq -1 \end{cases}$$

همانطور که می‌بینیم هر دو ضابطه در دامنه‌هایشان همواره پیوسته هستند لذا فقط پیوستگی نقاط مرزی را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a + b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \times [1^-] = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = 0$$

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 \times [-1^+] = 1 \Rightarrow -a + b = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$$

۷۴-۸-۱۸

می‌دانیم: روش هوییتال: اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ و $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند آنگاه:

$$H : \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

گزینه ۳

برای پیوسته بودن یک تابع باید در تمام نقاط دامنه، حد تابع با مقدار تابع برابر باشند.. در این تابع هردو ضابطه در دامنه‌هایشان همواره پیوسته هستند پس فقط باید پیوستگی را در نقطهٔ مرزی $x = 2$ بررسی کنیم.

مقدار تابع $f(2) = 2 - a$ و حد چپ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 - a$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a \cdot (1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \quad H: \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a \cdot \left(0 + \frac{-1}{3\sqrt[3]{(1-x)^2}}\right)}{2x - 2} = \frac{-\frac{a}{3}}{2} = -\frac{a}{6}$$

$$2 - a = -\frac{a}{6} \Rightarrow a = \frac{12}{5} = 2,4$$

برای پیوسته شدن باید $2 - a = 2 - 2,4 = -0,4$



پاسخنامه کلیدی

۱	۳	۳۹	۴	۷۷	۴	۱۱۵	۳	۱۵۳	۱
۲	۱	۴۰	۱	۷۸	۲	۱۱۶	۴	۱۵۴	۴
۳	۱	۴۱	۲	۷۹	۴	۱۱۷	۳	۱۵۵	۴
۴	۴	۴۲	۲	۸۰	۱	۱۱۸	۳	۱۵۶	۴
۵	۳	۴۳	۱	۸۱	۳	۱۱۹	۴	۱۵۷	۲
۶	۲	۴۴	۴	۸۲	۲	۱۲۰	۴	۱۵۸	۱
۷	۱	۴۵	۳	۸۳	۱	۱۲۱	۴	۱۵۹	۱
۸	۴	۴۶	۲	۸۴	۱	۱۲۲	۱	۱۶۰	۱
۹	۴	۴۷	۲	۸۵	۱	۱۲۳	۴	۱۶۱	۴
۱۰	۱	۴۸	۱	۸۶	۱	۱۲۴	۱	۱۶۲	۴
۱۱	۲	۴۹	۴	۸۷	۲	۱۲۵	۲	۱۶۳	۲
۱۲	۴	۵۰	۱	۸۸	۳	۱۲۶	۱	۱۶۴	۳
۱۳	۱	۵۱	۲	۸۹	۴	۱۲۷	۳	۱۶۵	۱
۱۴	۱	۵۲	۴	۹۰	۳	۱۲۸	۱	۱۶۶	۳
۱۵	۳	۵۳	۱	۹۱	۳	۱۲۹	۳	۱۶۷	۱
۱۶	۳	۵۴	۱	۹۲	۴	۱۳۰	۱	۱۶۸	۳
۱۷	۱	۵۵	۱	۹۳	۳	۱۳۱	۴	۱۶۹	۲
۱۸	۲	۵۶	۴	۹۴	۱	۱۳۲	۳	۱۷۰	۱
۱۹	۲	۵۷	۲	۹۵	۴	۱۳۳	۳	۱۷۱	۲
۲۰	۳	۵۸	۱	۹۶	۲	۱۳۴	۳	۱۷۲	۲
۲۱	۱	۵۹	۴	۹۷	۳	۱۳۵	۴	۱۷۳	۴
۲۲	۳	۶۰	۲	۹۸	۲	۱۳۶	۲	۱۷۴	۲
۲۳	۱	۶۱	۲	۹۹	۲	۱۳۷	۴	۱۷۵	۱
۲۴	۳	۶۲	۴	۱۰۰	۲	۱۳۸	۳	۱۷۶	۱
۲۵	۲	۶۳	۱	۱۰۱	۳	۱۳۹	۴	۱۷۷	۲
۲۶	۲	۶۴	۳	۱۰۲	۴	۱۴۰	۱	۱۷۸	۳
۲۷	۳	۶۵	۱	۱۰۳	۱	۱۴۱	۱	۱۷۹	۳
۲۸	۴	۶۶	۱	۱۰۴	۴	۱۴۲	۳	۱۸۰	۲
۲۹	۱	۶۷	۱	۱۰۵	۴	۱۴۳	۱	۱۸۱	۲
۳۰	۲	۶۸	۱	۱۰۶	۲	۱۴۴	۳	۱۸۲	۴
۳۱	۱	۶۹	۴	۱۰۷	۲	۱۴۵	۲	۱۸۳	۲
۳۲	۴	۷۰	۱	۱۰۸	۱	۱۴۶	۱	۱۸۴	۱
۳۳	۳	۷۱	۱	۱۰۹	۳	۱۴۷	۱	۱۸۵	۲
۳۴	۲	۷۲	۳	۱۱۰	۳	۱۴۸	۱	۱۸۶	۳
۳۵	۳	۷۳	۳	۱۱۱	۱	۱۴۹	۲		
۳۶	۴	۷۴	۱	۱۱۲	۴	۱۵۰	۱		
۳۷	۱	۷۵	۱	۱۱۳	۲	۱۵۱	۴		
۳۸	۲	۷۶	۳	۱۱۴	۱	۱۵۲	۲		