



گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل



درس

گسسته دوازدهم ریاضی



نوتروبیست



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

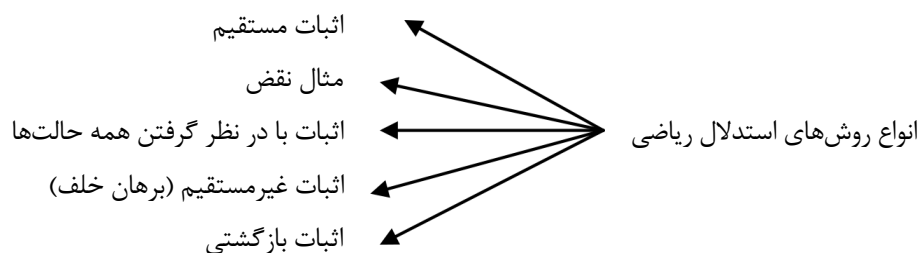
دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۳۲ امیر محمد رضائی	رتبه ۲۰ سینا راضی	رتبه ۱۶ آریا قهرمانی	رتبه ۱۴ امیر محمد کیانی
رتبه ۸۰ محمد مهدی شریفی	رتبه ۷۵ محمد صالح عارفی	رتبه ۶۱ بهار هلالی	رتبه ۵۹ ایمان انفرادی

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲ امیر محمد شکوهی	رتبه ۱۶۹ هانیه خواجه	رتبه ۱۶۰ اشکان کوثری	رتبه ۱۴۷ محدثه حیدری	رتبه ۲۵۹ ابوالفضل ناصریان
رتبه ۴۳۲ سید محمد صادق حسینی	رتبه ۳۴۱ حمیدرضا بشیری	رتبه ۳۰۸ سید علی اکرمی	رتبه ۲۷۱ فاطمه سادات موسوی	رتبه ۴۷۳ زهره بابائی
رتبه ۵۳۹ نجمه کبیا	رتبه ۵۳۷ ریحانه حیدری	رتبه ۵۲۳ فاطمه شاهسونند	رتبه ۵۱۴ محمد پارسا عبدالله آبادی	رتبه ۵۴۶ حسین تقضلی نژاد
رتبه ۶۶۱ فاطمه اصغری	رتبه ۶۰۶ سجاد محمودی زاده	رتبه ۵۷۰ زهره ولی نژاد	رتبه ۵۵۷ محمد صالح زارعی	رتبه ۶۶۷ سیاوش مصطفایی
رتبه ۷۸۱ احسان قنبری	رتبه ۷۱۴ محمد یزدیان	رتبه ۶۹۱ بهار ضرامی	رتبه ۶۷۲ محمد ماهان عنبرستانی	رتبه ۷۸۶ نیما غفاری
رتبه ۹۰۹ کیمیا فدائی	رتبه ۸۹۳ فاطمه مشاوری نجف آبادی	رتبه ۸۰۴ آرمین رضایی	رتبه ۸۰۳ ماتده رنجبر	رتبه ۹۴۷ صفورا بقائی
رتبه ۱۱۲۷ زهره بابائی	رتبه ۱۱۲۲ علی طاهر زاده	رتبه ۱۰۵۸ الینا جلالی فر	رتبه ۱۰۵۲ پویان فریور افشار	رتبه ۱۲۳۴ مطهره توحیدی
رتبه ۱۳۵۰ علی زینلی	رتبه ۱۲۸۴ فاطمه معین زاده	رتبه ۱۲۸۴ بهار امیری	رتبه ۱۲۳۶ مبینا ایزدی	رتبه ۱۳۷۲ پارسا رضایی
رتبه ۱۵۰۳ فاطمه رحیم زاده	رتبه ۱۴۹۳ محمد مهدی خرم زاده	رتبه ۱۴۸۳ سینا خاوری خراسانی	رتبه ۱۴۲۴ سید امیر حسین حسینی	رتبه ۱۵۳۴ فاطمه عبیری
رتبه ۱۶۹۶ ندا ملک شاهی	رتبه ۱۶۷۸ سجاد ینکی	رتبه ۱۶۳۹ ابوالفضل نیرومند	رتبه ۱۶۲۸ امیر محمد فکور حقیقی	رتبه ۱۷۳۱ محمد رضا محسنی
رتبه ۲۵۵۹ سارا حمزه	رتبه ۲۰۱۵ علی شیرزاد	رتبه ۱۹۶۶ مهسا رضایی مقدم	رتبه ۱۷۵۴ هلپا حاجیلوئی	رتبه ۲۶۲۵ زهره جمعی
رتبه ۲۷۹۴ مریم بادلی	رتبه ۲۷۸۱ سعید شبانی	رتبه ۲۷۵۱ فهمیه سید آبادی	رتبه ۲۷۱۱ محمد غلامی	رتبه ۲۸۱۰ هدیه رحیمی
رتبه ۳۳۴۳ سینا ارزمانی	رتبه ۳۲۴۴ هلپا سجادی	رتبه ۳۱۳۳ صبا شایع ثانی	رتبه ۲۸۸۱ پارسا جمال امیدی	

فصل اول: نظریه اعداد



✓ اثبات مستقیم:

مثال: با استفاده از اثبات مستقیم نشان دهید مجموع دو عدد فرد همواره عددی زوج است.

راه‌حل: دو عدد فرد رو به صورت $a = 2k + 1$ و $b = 2k' + 1$ تصور کن! حالا نشون بده مجموع این دو عدد به چی تبدیل میشه؟!

$$a + b = (2k + 1) + (2k' + 1) \Rightarrow 2k + 2k' + 2 \xrightarrow[\text{فاکتور بگیر}]{\text{از یه ۲}} 2(k + k' + 1)$$

$$\Rightarrow 2(k + k' + 1) \Rightarrow 2k''$$

اسم این عبارت رو $2k''$ بزار!

قطعاً $2k''$ عددی زوج!

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید: «مجموع ۳ عدد طبیعی متوالی بر ۳ بخش پذیر است.»

راه‌حل: سه عدد طبیعی متوالی رو به صورت $a = n$ و $b = n + 1$ و $c = n + 2$ تصور کن! حالا با هم جمعشون کن.

$$a + b + c \Rightarrow n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 \xrightarrow[\text{فاکتور بگیر}]{\text{از یه ۳}} 3(n + 1)$$

به همین راحتی و خوشمزگی ثابت شد که مجموع این اعداد حتماً به ۳ بخش پذیره! ☺

مثال: ثابت کنید مجموع هر ۲ عدد گویا عددی گویاست؟

راه‌حل: این مثال از ۲ مثال قبلی جدی‌تره پس خوب حواستو جمع کن. خانم یا آقای که دوازدهم ریاضی هستید؛ تعریف

اعداد گویا به زبان ریاضی چه جوریه؟!

یعنی اعداد گویا برابر است با کسر $\frac{a}{b}$ به شرطی که a عضو مجموعه اعداد $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$ صحیح و b عضو

اعداد طبیعی باشد. مخرج رو جوری تعریف کردیم به وقت خدایی نکرده صفر نباشه!!

حالا مسئله از ما ۲ تا عدد گویا خواسته بود، یکیش مثلاً $\frac{a}{b}$ یکیش هم $\frac{c}{d}$ با همون شرایطی که قبلاً گفتیم، یعنی:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{c}{d} \mid c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{N} \right\}$$

قطعاً حاصل ضرب ۲ عدد صحیح به ما یک عدد صحیح میده!

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

و قطعاً جمع ۲ عدد صحیح باز هم یک عدد صحیح دیگه است!

قطعاً حاصل ضرب ۲ عدد طبیعی به ما یه عدد طبیعی میده!

در نتیجه: $ab, cd \in \mathbb{Z}, bd \in \mathbb{N}$

پس دوباره صورت به عدد صحیح و مخرج هم یه عدد طبیعی! پس حتماً مجموع ۲ عدد گویا همواره عددی گویاست!

مثال نقض:

به مثالی گفته می‌شود که نشان دهد یک نتیجه‌گیری کلی غلط است.

مثال: برای نادرستی هریک از گزاره‌ها یک مثال نقض ارائه دهید.

الف) توان دوم یک عدد همواره از آن بزرگ‌تر است.

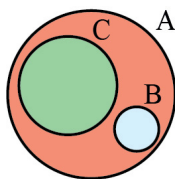
راه‌حل: اگر $x = \frac{1}{4}$ باشد، اون وقت: $x = \frac{1}{4}$ و $x^2 = \frac{1}{16}$

ب) اگر X و Y اعدادی گنگ باشند، آنگاه x^y نیز یک عدد گنگ است.

راه‌حل: اگر $x = 2\sqrt{2}$ و y برابر $\sqrt{2}$ باشد اون وقت: $x^y = (2\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4 \in \mathbb{Q}$

ج) اگر برای ۳ مجموعه A و B و C داشت باشیم: $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ است.

راه‌حل:



$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = A \\ A \cup C = A \end{array} \right\} \Rightarrow A \cup B = A \cup C$$

اما $B \neq C$

اثبات با در نظر گرفتن همه‌ی حالات:

گاهی برای اثبات یه گزاره لازمه که همه‌ی موارد ممکن در مورد مسئله بررسی بشه و هر حالت رو جداگونه اثبات کنیم و بعد با توجه به هم‌ارزی $(p \vee q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ حکم کلی مسئله ثابت میشه.

مثال: ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$ است.

راه‌حل: برای a ۲ حالت ممکنه رخ بده:

الف) $a = 0$ باشه $\leftarrow$ که در این حالت حکم برقراره!

ب) $a \neq 0$ باشه $\leftarrow$ در این حالت a^{-1} «معکوس عدد a » یک عدد حقیقی است و با ضرب a^{-1} در طرفین رابطه‌ی $ab = 0$ داریم:

$$ab = 0 \rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} \times 0$$

$$\rightarrow b = 0$$

پس حکم در هر ۲ حالتی که در نظر گرفتیم برقرار و ثابت!

مثال: نشان دهید حاصل ضرب ۲ عدد صحیح متوالی، همواره عددی زوج است.

راه‌حل: فرض کنیم n و $n+1$ دو عدد صحیح و متوالی باشند. ۲ حالت به وجود میاد!

$$n = 2k \Rightarrow n(n+1) = 2k(2k+1)$$

الف) n زوج باشه؛ که داریم $\Leftarrow$

$$\Rightarrow 2(\underbrace{k(2k+1)}_{k'}) = 2k'$$

ب) پس $n(n+1)$ زوج است!

$$n = 2k+1 \Rightarrow n(n+1) = (2k+1)(\underbrace{2k+2}_{2(k'+1)})$$

ب) n فرد باشه؛ که داریم: $\Leftarrow$

$$\Rightarrow 2(\underbrace{(k+1)(2k+1)}_{k'}) = 2k'$$

پس باز هم $n(n+1)$ زوج است.

در واقع اگر زوج بودن n رو p و فرد بودن n رو با q و همچنین زوج بودن $n(n+1)$ رو با r نشون بدیم؛ با هم ثابت کردیم

$(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ که هم‌ارزه با $p \vee q \Rightarrow r$ و حکم به صورت کلی ثابت شد.

✓ برهان خلف:

قبلاً تو هندسه ۱ با این روش آشنا شدیم.

مراحل ساده‌ای داده خوب حواس‌تو جمع کنی تا یاد بگیری!

۱- فرض خلف: فرض می‌کنیم نتیجه‌ای که مسئله گفته گیرم درست نباشه! فرضه دیگه! اشکالی نداره که!

۲- با استفاده از روش اثبات مستقیم جلو میریم. بعد متوجه می‌شیم یه جای کار میلنگه! چون با این فرض خلف به نتایجی رسیدیم که حقایق قلبی رو نقض می‌کنه!

۳- حالا غلط کردم گویان! می‌فهمیم که به تناقض رسیدیم و در نتیجه فرض خلف غلطه آی غلطه، بنابراین نتیجه‌ای که مسئله همون اول گفته بود ثابت میشه که درست بوده.

چی شده؟! متوجه نشدید؟! بابا نگران نباشید تا منو دارید غم ندارید. الان ۲ تا مثال مشتی می‌زنم براتون که کامل شیرفهم شید. بزن بریم!

مثال: ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $x - y$ نیز گنگ است.

راه‌حل: بیا یاد اصلاً فرض کنیم $x - y$ گویا باشه. «فرض خلف»؛

ما خودمون می‌دونیم تفاضل دو تا عدد گویای فرد حسابی! از هم دیگه باز هم گویاست.

مثلاً تفاضل x که گویاست از $x - y$ که فرض کردیم گویاست برابره با یه عدد گویای دیگه!

$$(x - y) - x \Rightarrow x - x - y \in \mathbb{Q} \Rightarrow -y \in \mathbb{Q} \\ \Rightarrow y \in \mathbb{Q}$$

اوا خاک به سرم مگه حقایق مسئله نگفته بود y عددی گنگ است؟! به تناقض رسیدیم که!

بله دقیقاً همین‌طور، پس حتماً فرض خلف باطل و حکم ثابت است. ☺

مثال: ثابت کنید اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است:

راه‌حل: فرض کنیم $\frac{1}{x}$ گویا باشه «فرض خلف»

همچین ما خودمون می‌دونیم ضرب هر عدد گنگ در گویا گنگ می‌شه.

خب با توجه به چیزی که گفتیم باید ضرب عدد x که گنگه در $\frac{1}{x}$ که فرض کردیم گویاست؛ گنگ بشه.

ولی ای دل غافل؛ $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ مگه ۱ عدد گنگه! پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است.

✓ اثبات بازگشتی:

مثال: اگر a و b دو عدد مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

راه‌حل: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times ab} a^2 + b^2 \geq 2ab \rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$

که بدیهی است $\rightarrow (a - b)^2 \geq 0$

حالا که به یه چیز بدیهی رسیدیم، دونه دونه راه‌حل‌هایی که نوشتیم رو برعکس می‌ریم. البته لازم به ذکره که لازم نیست

اینطوری دوباره از اول بنویسیم: $(a - b)^2 \geq 0 \rightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \rightarrow \dots$

فقط کافیه تو عبارت اولی که نوشته بودیم؛ از آخر شروع کنیم به چک کردن و هر جا که علامت $\rightarrow$ دیدیم تبدیل کنیم به

$\leftrightarrow$. اگر همین درست باشه و همه‌ی علامت‌ها به $\leftrightarrow$ تبدیل شده باشن؛ حکم ثابت میشه. یعنی در آخر به یه همچین چیزی

می‌رسیم:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \xrightarrow{\times ab} a^2 + b^2 \geq 2ab \leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0$$

مثال: ثابت کنید:

الف) اگر هر سه عدد X و Y و Z حقیقی باشند. آنگاه: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

راه حل: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \xrightarrow{\times 2} (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$

در نظر داشته باشید که مجموع چند عدد نامنفی «یعنی مثبت یا صفر» قطعاً یا برابر صفره یا بزرگتره.

ب) اگر هر دو عدد X و Y حقیقی باشند آنگاه: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$

راه حل: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \xrightarrow{\times 2} (x-y)^2 + (y-1)^2 + (x-1)^2 \geq 0$

مثال: درستی رابطه زیر را بررسی کنید: $a^2 + 1 \geq b(2-b)$

$$a^2 + 1 \geq b(2-b) \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2b - b^2 \Leftrightarrow a^2 + (b^2 - 2b + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 \geq 0$$

✓ بخش پذیری و عاد کردن:

عدد صحیح a را بر عدد صحیح $b \neq 0$ بخش پذیر می‌گوییم، هرگاه عدد صحیحی مانند q یافت شود به طوری که $a = bq$

باشد، در این صورت می‌نویسیم $b | a$ یعنی b عاد می‌کند a را: $b | a \Leftrightarrow a = bq$

۱- اگر عبارت $a | 0$ را دیدیم؛ قطعاً a عددی نیست جز صفر. یعنی صفر فقط صفر را عاد می‌کند.

۲- اگر a عددی طبیعی باشد آنگاه $1 | a$ و $a | a$ ، یعنی هر عدد بر خودش و بر ۱ بخش پذیر است.

۳- هر عددی صفر را می‌تواند عاد کند: $a | 0$

✓ خواص و ویژگی‌های روابط عاد کردن:

۱- برای هر عدد طبیعی m و n که n بزرگتر مساوی m باشد داریم: $a^m | a^n$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, m \leq n \Rightarrow a^m | a^n$$

$$\text{مثال: } 2^4 | 2^9 \xrightarrow{q=2^5} 2^9 = 2^4 \times 2^5$$

۲- اگر عدد a عدد b را بشمارد، آنگاه هر مضرب عدد b را نیز می‌شمارد. $a | b \Rightarrow a | mb$

$$\text{مثال: } 7 | 14 \Rightarrow 7 | 14 \times 5$$

۳- اگر a عدد b را بشمارد، آنگاه b^n را به شرطی که $n \in \mathbb{N}$ نیز می‌شمارد. $a | b \Rightarrow a | b^n, n \in \mathbb{N}$

$$\text{مثال: } 3 | 6 \Rightarrow 3 | 3^2$$

۴- اگر عدد a ، عدد b را بشمارد و b نیز c را، آنگاه a عدد c را می‌شمارد «خاصیت تعدی» $a | b \wedge b | c \Rightarrow a | c$

$$\text{مثال: } 3 | 9 \wedge 9 | 18 \Rightarrow 3 | 18$$

۵- هرگاه عددی دو عدد را بشمارد آنگاه مجموع و تفاضل آن دو عدد را نیز می‌شمارد. $a | b \wedge a | c \Rightarrow a | b \pm c$

$$\text{مثال: } 7 | 14 \wedge 7 | 21 \Rightarrow \begin{cases} 7 | 14 + 21 \Rightarrow 7 | 35 \\ 7 | 14 - 21 \Rightarrow 7 | -7 \end{cases}$$

۶- اگر $a | b$ و $b \neq 0$ در این صورت $|a| \leq |b|$

از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که اگر $a | b$ و $b | a$ آنگاه $a = \pm b$

۷- اگر $a | b$ آنگاه $a^n | b^n$ $a | b \Rightarrow a^n | b^n$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9 | 36 \\ 27 | -216 \end{cases} \text{مثال: } -6 | 3$$

۸- اگر $a | b$ و $c | d$ آنگاه داریم: $ac | bd$ $a | b \wedge c | d \Rightarrow ac | bd$

یعنی ۲ طرف بخش پذیری را می‌توان در هم ضرب کرد: $20 | 180 \Rightarrow 5 | 15$, $4 | 12$: مثال

۹- اگر $a | b$ و $a | c$ آنگاه $a | mb \pm nc$, $(n, m \in \mathbb{Z})$ ترکیب خطی $a | b \wedge a | c \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} a | mb \pm nc$

$$\xrightarrow[n=3]{m=5} \begin{cases} 2 | 3 \times 6 + 5 \times 4 \Rightarrow 2 | 38 \\ 2 | 3 \times 6 - 5 \times 4 \Rightarrow 2 | -2 \end{cases} \text{مثال: } 2 | 6, 2 | 4 \text{ «} n \text{ و } m \text{ اعداد صحیح‌اند»}$$

اعداد اول:

هر عدد طبیعی و بزرگتر از ۱ که هیچ شمارنده‌ی مثبت دیگری به جز یک و خودش نداشته باشد، عدد اول نامیده می‌شود پس اگر p عددی اول و a عددی طبیعی باشد و $a | p$ در این صورت $a = 1$ یا $a = p$ است.

مثال: اگر عدد طبیعی a دو عدد $(9k+7)$ و $(7k+6)$ را عاد کند، ثابت کنید $a = 1$ یا $a = 9$ است.

$$\text{راه حل: } a | 9k+7 \Rightarrow a | 7 \times (9k+7) \Rightarrow a | 63k+49$$

$$a | 7k+6 \Rightarrow a | 9 \times (7k+6) \Rightarrow a | 63k+54$$

$$\Rightarrow a | (63k+54) - (63k+49) \Rightarrow a | 5 \xrightarrow{\text{عدد اول است}} a = 1 \quad a = 5$$

تذکره: این جور مسائل رو به خوبی یاد بگیرید؛ قطعاً مشابهش تو امتحانات دی و خردادتون میاد. باید k رو سعی کنید با قوانین ۱ تا ۹ که توضیح دادم از بین ببرید و بعد متوجه شید a چه اعدادی می‌تونه باشه!!

مثال: اگر $a > 1$ و $a | 9k+4$ و $a | 5k+3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

$$\text{راه حل: } a | 5k+3 \Rightarrow a | 9 \times (5k+3) \Rightarrow a | 45k+27$$

$$a | 9k+4 \Rightarrow a | 5 \times (9k+4) \Rightarrow a | 45k+20$$

$$\Rightarrow a | (45k+27) - (45k+20) \Rightarrow a | 7 \xrightarrow{\text{عدد اول است}} a = 1 \quad a = 7$$

با توجه به فرضیات مسئله $a > 1$ پس $a \neq 1$ و $a = 7$ می‌باشد.

بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک (ب.م.م):

عدد طبیعی d را ب.م.م دو عدد صحیح a و b می‌نامیم (a و b هر دو با هم صفر نیستند) و می‌نویسیم $(a, b) = d$ هرگاه ۲ شرط روبه‌رو برقرار باشد:

$$d | a \text{ و } d | b \quad \forall m > 0; m | a, m | b \Rightarrow m \leq d \quad \text{الف)}$$

$$8: (8, 16) \text{ و } 6: (6, 9) = 3 \text{ و } 1: (3, 4) \text{ : مثال}$$

✓ کوچک ترین مضرب مشترک (ک.م.م):

عدد طبیعی C را ک.م.م دو عدد صحیح و ناصفر a و b می نامیم و می نویسیم $-c = [a, b]$ ، هرگاه ۲ شرط زیر برقرار باشد.

$$\forall m > 0, a | m, b | m \Rightarrow c \leq m \quad \text{ب) } a | c \text{ و } b | c \quad \text{الف)}$$

$$[3, 4] = 12 \text{ و } [1, 8] = 8 \text{ و } [-4, 16] = 16 \text{ مثال}$$

✓ با توجه به تعاریف ک.م.م و ب.م.م داریم:

$$1- \text{اگر } a | b \text{ آنگاه } (a, b) = |a|$$

$$2- \text{اگر } a | b \text{ آنگاه } [a, b] = |b|$$

✓ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ، آنگاه $(p, a) = 1$ ، دقت کنید که در مورد اعدادی که اول نباشند این نکته برقرار نیست.

$$\text{مثال} \quad 12 \nmid 8 \xrightarrow{\text{ولی}} (8, 12) = 4 \neq 1$$

سوال: ثابت کنید که $9n+8$ و $8n+7$ نسبت به هم اولند؟

راه حل: برای اثبات $(9n+8, 8n+7) = 1$ ابتدا d را ب.م.م آن در نظر بگیریم:

$$(9n+8, 8n+7) = d \xrightarrow[\text{ب.م.م داریم}]{\text{با توجه به تعاریف}} \begin{cases} d | 9n+8 \\ d | 8n+7 \end{cases} \xrightarrow{\text{ترکیب خطی}} d | 8(9n+8) - 9(8n+7)$$

«یادتونه؟! باید سعی کنیم n رو از بین ببریم»

$$\Rightarrow d | 1 \xrightarrow{d > 0} d = 1$$

✓ قضیه تقسیم:

با این قضیه تو حسابان دوازدهم هم حسابی کار داریم. پس خوب حواستونو جمع کنید!

اگر a عددی صحیح و b عددی طبیعی باشد در این صورت، اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند q و r یافت می شوند به طوری که: الف) $a = bq + r$ و مهم تر از آن: ب) $0 \leq r < b$.

مثال: اگر باقی مانده تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به ترتیب ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را به دست آورید.

راه حل: به به! به یکی از سؤال خیزترین قسمت های گسسته رسیدیم، حواستونو خوب جمع کنید.

با توجه به قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{aligned} m = 17q_1 + 5 &\Rightarrow \begin{cases} 2m = 2 \times 17q_1 + 10 \\ -5n = (-5) \times 17q_2 - 15 \end{cases} \\ n = 17q_2 + 3 &\Rightarrow \\ \Rightarrow (2m - 5n) = 17(2q_1 - 5q_2) - 5 &\xrightarrow[\text{باید } 0 \leq r < b]{\text{از اون جایی که } r} 17(2q_1 - 5q_2 - 1) + 17 - 5 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (2m - 5n) = 17 \underbrace{(q_2 - 1)}_q + 12 \Rightarrow 2m - 5n = 17q + 12 \Rightarrow r = 12$$

پیشنهاد می کنم این سؤال رو به بار دیگه با دقت بخون!!

مثال: در معادله $a = 8q - 5$ مقدار باقی مانده را به دست آورید:

$$\begin{aligned} \text{راه حل: در قضیه تقسیم داشتیم } 0 \leq r < b \text{ پس:} \\ a = 8q - 5 &\Rightarrow a = 8 \underbrace{(q-1)}_{q'} + 8 - 5 \\ &\rightarrow a = 8q' + 3 \rightarrow r = 3 \end{aligned}$$

افراز مجموعه $\mathbb{Z}$ به کمک قضیه تقسیم:

اول از همه افراز رو یادتون میاد دیگه؟! تو آمار احتمال یازدهم خوندم!

فرض می کنیم A یک مجموعه غیر تهی باشد، گوییم A به $n \in \mathbb{N}$ زیر مجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده است اگر

$$A_i = \emptyset, (1 \leq i \leq n) \quad 1-$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \quad 2-$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^n A_i = A \quad 3-$$

حال که افراز یادآوری شد، با توجه به قضیه تقسیم، می دانیم اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، با تقسیم آن بر عدد طبیعی b ، و با توجه به اینکه باقی مانده ی تقسیم یعنی r در رابطه ی $0 \leq r < b$ صدق می کند، برای a بر حسب r دقیقاً b حالت وجود دارد، مثلاً اگر عدد صحیح a را بر 5 تقسیم کنیم و در این صورت یا $a = 5k + 1$ یا $a = 5k + 2$ یا $a = 5k + 3$ یا $a = 5k + 4$ یا $a = 5k$ است. یعنی عدد صحیح a را می توان به یکی از 5 صورت فوق نوشت، همچنین به هریک از حالات یک کلاس گفته می شود.

مثال: ثابت کنید باقی مانده تقسیم مربع هر عدد فرد بر 8 ، مساوی با 1 است.

راه حل: هر عدد فرد رو می شه به صورت $a = 4k + 1$ و $a = 4k + 3$ نوشت. اگر دقت کنید در مسئله ازمون مربع خواستن، پس بیاید زود دست به کار شیم.

$$\begin{aligned} a = 4k + 1 &\Rightarrow a^2 = (4k + 1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 \Rightarrow 8k' + 1 \\ a = 4k + 1 &\Rightarrow a^2 = (4k + 3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 \\ &\Rightarrow 8(2k^2 + 3k + 1) + 1 = 8k'' + 1 \end{aligned}$$

پس در هر دو حالت، مربع هدد فرد به شکل $8k + 1$ نوشته می شه!

مثال: اگر n عددی صحیح باشد، ثابت کنید $3 \mid n^3 - n$

راه حل: بیایید برای n حالت $3k$ و $n = 3k + 1$ و $n = 3k + 2$ در نظر بگیریم.

در این صورت داریم:

$$\Rightarrow 3 \mid (n-1)n(n+1)$$

$$\rightarrow^{(1)} n = 3k : (3k-1)3k(3k+1) \xrightarrow[3k \text{ قطعا}]{\text{که به دلیل وجود عبارت}} 3 \mid (3k-1)3k(3k+1) \quad \checkmark$$

$$\rightarrow^{(2)} n = (3k+1) : 3k(3k+1)(3k+2) \xrightarrow[3k \text{ قطعا}]{\text{که به دلیل وجود عبارت}} 3 \mid 3k(3k+1)(3k+2) \quad \checkmark$$

$$\rightarrow^{(3)} n = 3k+2 : (3k+1)(3k+2)3k \xrightarrow[3k \text{ قطعا}]{\text{که به دلیل وجود عبارت}} 3 \mid (3k+1)(3k+2)3k \quad \checkmark$$

همنهشتی:

برای هر عدد طبیعی همانند m و هر دو عدد صحیح ماند a و b ، اگر $m \mid a - b$ یعنی a بر m هم باقی مانده باشند، می گوییم: a همنهشت با b است و می نویسیم: $a \equiv b \pmod{m}$

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b \quad m \in \mathbb{N}$$

به زبان ریاضی یعنی:

✓ خواص و ویژگی‌های هم‌نهشتی:

$$a \equiv a^m, \forall a \in \mathbb{Z}$$

۱- الف) هر عدد صحیح مانند a به پیمانه m با خودش هم‌نهشت است.

$$a \equiv b^m \Rightarrow b \equiv a^m$$

ب) اگر a هم‌نهشت با b به پیمانه m باشد، آنگاه b هم‌نهشت با a به پیمانه m نیز است.

پ) اگر a هم‌نهشت با b به پیمانه m و b هم‌نهشت با c به پیمانه m باشد، آنگاه a هم‌نهشت با c به پیمانه m نیز است.

$$a \equiv b^m, b \equiv c^m \Rightarrow a \equiv c^m$$

۲- به دو طرف یک معادله و رابطه هم‌نهشتی می‌توان عددی صحیح اضافه یا کم کرد:

$$a \equiv b^m \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c^m$$

۳- دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را می‌توان در عددی صحیح ضرب کرد:

$$a \equiv b^m \Rightarrow ac \equiv bc^m$$

تذکره: قانون حذف برای رابطه‌ی هم‌نهشتی در حالت کلی برقرار نیست. یعنی اگر $ac \equiv bc^m$ ، لزوماً نمی‌توان نتیجه گرفت که $a \equiv b^m$. بلکه؛ قانون حذف شرط و شروط دارد؛ اگر اون شروط که در جلوتر بهش اشاره خواهیم کرد رو نداشته باشه نمی‌تونیم همینطوری عشقی دو تا عدد رو از این ور اون ور رابطه خط بزنیم! 😊

$$a \equiv b^m \Rightarrow a^n \equiv b^n^m \quad (n \in \mathbb{N})$$

۴- دو طرف رابطه‌ی هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان n برسانیم؛ ($n \in \mathbb{N}$)

تذکره: عکس این قانون هم در حالت کلی برقرار نیست؛ یعنی نمی‌توان از دو طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی ریشه گرفت.

۵- دو طرف رابطه‌ی هم‌نهشتی که پیمانه‌های یکسان داشته باشند را می‌توان با هم جمع یا تفریق کرد و یا حتی ضرب:

$$\begin{cases} a \equiv b^m \\ c \equiv d^m \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd^m \quad \text{و} \quad \begin{cases} a \equiv b^m \\ c \equiv d^m \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d^m$$

۶- می‌توان به ۲ طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی هر مضربی از پیمانه را اضافه یا کم کرد.

$$a \equiv b^m \Rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk^m \quad (t, k \in \mathbb{Z})$$

۷- اگر بخواهیم ۲ طرف یک رابطه‌ی هم‌نهشتی را به عددی تقسیم کنیم، باید پیمانه آن هم‌نهشتی را بر ب‌م آن عدد و پیمانه تقسیم کنیم.

$$ac \equiv bc^m, (c, m) = d \Rightarrow a \equiv b^{\frac{m}{d}}$$

این قانون، همون شرط و شروط تو تذکر قانون سوم بود. 😊

$$a = mq + r \Leftrightarrow a - r = mq$$

۸- اگر باقی مانده تقسیم a بر m مساوی r باشد، در این صورت: $a \equiv r^m$

$$\Leftrightarrow m \mid a - r \Leftrightarrow a \equiv r^m$$

نتیجه ۱: هرگاه بخواهیم هم‌نهشت عدد a را به پیمانه m مشخص کنیم، کافیه عدد a را بر m تقسیم و باقی‌مانده رو به دست بیاریم.

نتیجه ۲: اگر a و b بر عدد طبیعی m ، هم باقی مانده باشن، یعنی باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر m با هم برابر باشن، در این صورت: $a \equiv b^m$

مثال: اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۹ برابر ۴ باشد، باقی مانده تقسیم $5 + 2a^2$ بر ۹ چیست؟

راه حل: خب ببینیم... شروع کنید! همین الان ۸ تا نکته خفن یاد گرفتیم؛

اول از همه؛ چون باقی مانده تقسیم a بر ۹ برابر ۴ عه؛ در نتیجه:
پس داریم $\Leftarrow$

$$a \equiv 4 \Rightarrow a^2 \equiv 4^2 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 \equiv 32$$

پس باقی مانده برابر ۱ است!

$$\xrightarrow{+5} 2a^2 + 5 \equiv 37 \xrightarrow{37 \equiv 1} 2a^2 + 5 \equiv 1$$

مثال: باقی مانده تقسیم عدد $A = (53)^{15} + 33$ بر ۱۳ بیابید.

راه حل: می‌دونیم که برای پیدا کردن باقی مانده A بر عدد ۱۳، باید هم‌نهشتی A به پیمانه ۱۳ رو بنویسیم و بعد ساده کنیم.

$$\left. \begin{array}{l} 53 = 13 \times 4 + 1 \Rightarrow 53 \equiv 1 \Rightarrow (53)^{15} \equiv 1^{15} \equiv 1 \\ 33 = 13 \times 2 + 7 \Rightarrow 33 \equiv 7 \end{array} \right\} \Rightarrow (53)^{15} + 33 \equiv 1 + 7 \rightarrow A \equiv 8 \rightarrow r = 8$$

✓ باقی مانده تقسیم بر اعداد خاص:

مثال: رقم یکان اعداد رو به‌رو را به دست آورید. $7^{49} + 2$ و 3^{256}

راه حل: اگر دقت کنی متوجه یه چیزی میشی!

آفرین! برای به دست آوردن رقم یکان این اعداد فقط کافیه باقی مانده‌ی تقسیم آن‌ها بر عدد ۱۰ رو به دست بیاریم. یکم بیشتر فک کن...! آباریکلا 😊

یعنی هم‌نهشتی به پیمانه ۱۰.

$$3^{256} \equiv ? \rightarrow 3^2 \equiv 9 \equiv -1 \rightarrow (3^2)^{128} \equiv (-1)^{128} \rightarrow 3^{256} \equiv 1$$

$$7^{49} + 2 \equiv ? \rightarrow 7^2 \equiv 49 \equiv -1 \rightarrow (7^2)^{24} \equiv (-1)^{24} \rightarrow 7^{48} \times 7 \equiv 1 \times 7$$

$$\rightarrow 7^{49} \equiv 7 \rightarrow 7^{49} + 2 \equiv 9$$

✓ برای به دست آوردن رقم یکان اعداد توان‌دار، کافی‌ست باقی مانده تقسیم آن بر ۱۰ را به دست آوریم، مثلاً عدد n رقمی

$A = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1a_0$ را بسط داده و در هم‌نهشتی به پیمانه‌ی ۱۰ به جای هر توان ۱۰ عدد صفر قرار می‌دهیم و داریم $A \equiv a_0$. چی شد؟! نفهمیدید؟! بابا منظورم همونیه که تو اول راه حل مثال بالا توضیح دادم. زیاد سخت نگیر اگه سوال قبلی رو

متوجه شدی یعنی این نکته رو هم یاد گرفتی. برو نکته بعدی! 😊

❑ باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹ و ۳:

خانم یا آقای محترمی که رشته ریاضیه! مطمئنم تو این چندین سالی که عمر با عزت از خدا گرفتی حداقل یه بار تو زندگیت شنیدی که میگن: «باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۹ و ۳ برابر است با باقی مانده مجموع ارقام آن عدد بر ۹ و ۳» اما نمی دونستی که این نکته از کجا اومده! خب انتظاراتها به پایان رسید چون مربوط به همین هم نهشتیه.

عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0$ را بسط داده و در هم نهشتی به پیمانه ۹، به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می دهیم.

«چرا که: $10^n \equiv 1 \Rightarrow 10 \equiv 1$ »

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + 10^{n-2} \times a_{n-2} + \dots + 10^2 \times a_2 + 10 \times a_1 + a_0$$

$$\rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + 1 \times a_{n-2} + \dots + 1 \times a_2 + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\rightarrow A \equiv a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_2 + a_1 + a_0$$

به همین ترتیب برای عدد ۳ هم اثبات می شود.

❑ باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۱۱:

به دلیل اینکه $10 \equiv -1$ ، بنابراین برای هر n زوج، $10^n \equiv 1$ و برای هر n فرد $10^n \equiv -1$ است اگر در هم نهشتی به پیمانه ۱۱ و در بسط عدد A به جای توان های زوج عدد ۱۰، عدد یک و به جای توان های فرد عدد ۱۰، عدد منفی یک (۱-) قرار دهیم، باقی مانده ی عدد A بر ۱۱ را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \text{مثال: } 354971 \equiv ? \rightarrow A &= 3 \times 10^5 + 5 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 1 \\ \rightarrow A &\equiv 3 \times (-1) + 5 \times 1 + 4 \times (-1) + 9 \times 1 + 7 \times (-1) + 1 \Rightarrow A \equiv -3 + 5 - 4 + 9 - 7 + 1 \\ &\rightarrow A \equiv 1 \rightarrow r = 1 \end{aligned}$$

❑ باقی مانده تقسیم هر عدد بر ۲ و ۵ و ۱۰:

عدد ۱۰ به ۲ و ۵ و ۱۰ بخش پذیر است و دارای باقی مانده صفر می باشد، یعنی:

$$10 \equiv 0 \Rightarrow 10^n \equiv 0, 10 \equiv 0 \Rightarrow 10 \cdot n \equiv 0, 10 \equiv 0 \Rightarrow 10 \cdot n \equiv 0$$

بنابراین اگر در بسط هر عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}...a_2a_1a_0$ به جای توان های عدد ۱۰ در هم نهشتی به پیمانه ۲، ۵، ۱۰ عدد صفر قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$A = 10^{n-1} a_{n-1} + 10^{n-2} a_{n-2} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \Rightarrow A \equiv 0 \times a_{n-1} + \dots + 0 \times a_1 + a_0$$

$$\rightarrow 10 \equiv a_0$$

خلاصه یعنی، کافیه برای باقی مانده تقسیم بر اعداد ۲ و ۵ فقط به یکان ها توجه و بررسی کنیم.

✓ محاسبه روزهای هفته در تاریخ‌های مختلف:

عزیزان دلم، این سوالات در امتحانات مطرح می‌شن تا ببینن در چه حد از هم‌نهشتی و مسائل مختلفش درک دارید؛ نه اینکه تو چرک‌نویس بشینید هفت ساعت تقویم و جدول بکشید.

دست از این کارها بردارید و قلب بنده‌ی حقیر رو خدشه‌دار نکنید به جاش از نکته‌هایی که میگم استفاده کنید:
هر روز از هفته بعد از گذشت ۷ روز دوباره تکرار میشه. به عنوان مثال اگر ۵ آبان روز دوشنبه باشه، در این صورت ۱۲، ۱۹ و ۲۶ آبان نیز دوشنبه است. حالا اگر فاصله‌ی ۵ آبان تا ۲۳ آبان رو حساب کنیم میشه $23 - 5 = 18$ ، ۲۳، ۱۸ روز، و چون $18 \equiv 4 \pmod{7}$ کافیه دوشنبه رو مطابق جدول زیر مبدأ یعنی صفر فرض کنید، بعد ۴ روز بعد رو مشخص کنید که چه روزی از هفته است یا عدد ۴ متناظر با کدوم روزه:

دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
0	1	2	3	4	5	6

در این تیپ سوال‌ها حواستون به سال کیبسه، ۶ ماه اول سال که ۳۱ روزه هستند؛ باشه!

✓ معادله هم‌نهشتی:

یک رابطه‌ی هم‌نهشتی همراه با مجهولی مثل X به فرم $ax \equiv m$ را یک معادله هم‌نهشتی می‌نامیم و منظور از حل، آن پیدا کردن همه‌ی جواب‌هایی مثل $x \in \mathbb{Z}$ است که در معادله فوق صدق کند.

مثال: معادله‌ی $x \equiv 3$ را حل کنید و جواب‌های عمومی این معادله را به دست آورید.

$$x \equiv 3 \rightarrow 4 \mid x - 3 \Rightarrow (x - 3) = 4k \rightarrow x = 4k + 3, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

راه‌حل:

تذکره: در این مثال ضریب X عدد ۱ است. اما اگر ضریب X عددی غیر از یک باشد، برای به دست آوردن جواب‌های عمومی معادله باید از ویژگی‌های هم‌نهشتی استفاده کنیم. به مثال بعد توجه کنید:

مثال: جواب‌های عمومی معادله‌ی $5x \equiv 27$ را به دست آورید:

راه‌حل:

$$\left. \begin{array}{l} 5x \equiv 27 \\ 27 \equiv 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 5x \equiv 3$$

طبق ویژگی‌های هم‌نهشتی و عاد کردن می‌توان به ۲ طرف یک رابطه هر مضربی از پیمانه را کم یا اضافه کرد.

$$a \equiv b \rightarrow a \pm mt \equiv b \pm mk$$

بنابراین اگر $t = 0$ و $k = 2$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} 5x \equiv 3 &\rightarrow 5x + 6 \times 0 \equiv 3 + 6 \times 2 \rightarrow 5x \equiv 15 \xrightarrow{(5,6)=1} x \equiv 3 \\ &\rightarrow x \equiv 3 \rightarrow 6 \mid x - 3 \rightarrow (x - 3) = 6k \rightarrow x = 6k + 3, \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

✓ معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب صحیح است اگر و فقط اگر $(a, m) | b$

کتاب درسی گفته این قضیه رو بدون اثبات بپذیرید پس ما هم بیشتر از این توضیحی نمیدیم چون به دردتون نمیخوره! نتیجه: اگر $(a, m) = 1$ ، چون برای هر b ، همواره $1 | b$ پس معادله‌ی $ax \equiv b^m$ همواره دارای جواب صحیح خواهد بود.

مثال: معادله‌ی $4x \equiv 13$ را حل کنید.

راه‌حل: اع حواستو جمع کن همین الان نکته‌اشو گفتم!

پس سوال سرکاری بود ☺

این معادله دارای جواب صحیح نیست! $\rightarrow 13 \nmid 2 \rightarrow 2 \nmid (4, 6) = 2$

✓ معادله‌ی سیاله:

هرگاه بخواهیم جواب‌های معادله‌ی $ax + by = c$ «یعنی X و Y » را در اعداد صحیح بیابیم $(a, b, c \in \mathbb{Z})$ در این صورت معادله‌ی مذکور « $ax + by = c$ » را یک معادله سیاله درجه اول یا خطی می‌گوییم.

✓ تبدیل معادله سیاله به معادله هم‌نهشتی:

معادله سیاله‌ی $ax + by = c$ دارای دو مجهول است و به ۲ صورت می‌تواند به یک معادله‌ی هم‌نهشتی با یک مجهول «یا X یا Y » تبدیل شود:

$$1) \quad ax + by = c \rightarrow ax - c = (-b)y \rightarrow -b | ax - c \rightarrow b | ax - c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \\ ax \equiv c \quad (b > 0) \\ b \\ ax \equiv c \quad (b < 0) \end{cases} \Rightarrow ax \equiv c^{|b|}$$

$$2) \quad ax + by = c \rightarrow by - c = (-a)x \rightarrow -a | by - c \rightarrow a | by - c$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a \\ by \equiv c \quad (a < 0) \\ a \\ by \equiv c \quad (a > 0) \end{cases} \Rightarrow by \equiv c^{|a|}$$

تذکره: یادمون نره که شرط لازم و کافی برای اینکه معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب صحیح باشه اینه که $(a, b) | c$

✓ روش حل معادله‌ی سیاله:

۱- ابتدا معادله‌ی $ax + by = c$ را به صورت یک معادله‌ی هم‌نهشتی؛ مثلاً $ax \equiv c^{|b|}$ می‌نویسیم.

۲- با استفاده از ویژگی‌های هم‌نهشتی، ضریب X را تبدیل به ۱ می‌کنیم و X را به صورت یک معادله بر حسب k می‌نویسیم.

۳- با جایگذاری مقدار X در معادله‌ی اصلی، مقدار Y را نیز به همین ترتیب به دست می‌آوریم. چی شد؟! گیج شدید؟! مثال بعد رو با دقت نگاه کنید شیرفهم می‌شید. ☺

مثال: جواب‌های عمومی معادله‌ی سیاله خطی $3x + 7y = 17$ را به دست آورید.

راه‌حل: اول اینکه $(3, 7) | 17$ ، پس معادله اوکیه!

ابتدا معادله‌ی $3x + 7y = 17$ را به صورت یک معادله‌ی هم‌نهشتی $3x \equiv 17 \pmod{7}$ می‌نویسیم و سپس مضرب‌هایی از عدد ۷ را به عدد ۱۷ اضافه می‌کنیم تا مضربی از ۳ شود.

$$3x \equiv 17 \pmod{7} \rightarrow 3x \equiv 17 + 1 \times 7 \pmod{7} \rightarrow 3x \equiv 24 \pmod{7} \rightarrow 3x \equiv 3 \times 8 \pmod{7}$$

$$\xrightarrow{(3,7)=1} 3x \equiv 3 \times 8 \pmod{7} \xrightarrow{\div 3} x \equiv 8 \pmod{7} \rightarrow x = 7k + 8$$

حال مقدار x را در معادله‌ی اصلی قرار می‌دهیم:

$$3(7k + 8) + 7y = 17 \rightarrow 21k + 7y = -7 \xrightarrow{\div 7} 3k + y = -1 \rightarrow y = -3k - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7k + 8 \\ y = -3k - 1 \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{جواب‌های عرفی معادله‌ی سیاله‌ی خطی:}$$

مثال: آیا می‌توانیم یک جعبه ۲۳ کیلویی را با وزنه‌های ۲ و ۵ کیلویی وزن کنیم؟ اگر بله؛ به چند طریق؟

راه‌حل: x را تعداد وزنه‌های ۲ کیلویی و y را تعداد وزنه‌های ۵ کیلویی در نظر می‌گیریم.

یعنی معادله سیاله به صورت: $2x + 5y = 23$ خواهد شد.

حال کافیست جواب‌های عمومی معادله را برحسب k بیابیم و به ازای هر $k \in \mathbb{Z}$ که x و y منفی نباشد تعداد حالت‌ها را

شمارش کنیم. $2x + 5y = 23$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به معادله}} 2x \equiv 23 \pmod{5} \rightarrow 2x \equiv 23 - 3 \times 5 \pmod{5} \rightarrow 2x \equiv 8 \pmod{5}$$

$$\xrightarrow{(2,5)=1} 2x \equiv 8 \pmod{5} \xrightarrow{\div 2} x \equiv 4 \pmod{5} \rightarrow x = 5k + 4$$

حال مقدار x را در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$2(5k + 4) + 5y = 23 \Rightarrow 10k + 8 + 5y = 23 \rightarrow 10k + 5y = 15 \xrightarrow{\div 5} 2k + y = 3 \rightarrow y = -2k + 3$$

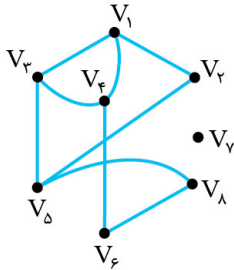
$$\begin{cases} x = 5k + 4 \\ y = -2k + 3 \end{cases} \rightarrow k = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 4 \\ y = 3 \end{cases} \gg k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$$

بنابراین به ۲ طریق فوق می‌توان عمل وزن کردن را انجام داد.

فصل دوم: گراف و مدل سازی

گراف ساده

گراف ساده G زوج مرتبی مثل (V, E) است که در آن V مجموعه‌ای متناهی و ناتهی است که اعضای آن را رأس می‌گوییم و E مجموعه‌ای است که هر عضو آن زیرمجموعه‌ای دو عضوی از V است. به اعضای E یال می‌گوییم. دقت کنید که با داشتن شکل گراف، می‌توانید مجموعه‌های (V, G) و (E, G) را بنویسید و هم چنین با داشتن دو مجموعه (V, G) و (E, G) می‌توانید ابتدا به تعداد $n(V(G))$ که آن را با (V, G) نیز نمایش می‌دهیم؛ رأس مشخص کنید و سپس با توجه به (E, G) ، رأس‌های متناظر را به هم وصل نمایید.



سوال: با توجه به شکل، مجموعه رأس‌ها و یال‌های گراف G را مشخص کنید.

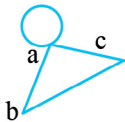
راه‌حل: مجموعه رأس‌های گراف G :

$$V(G) : \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6, V_7, V_8\}$$

مجموعه یال‌های گراف G :

$$E(G) : \{V_1V_2, V_1V_3, V_1V_4, V_1V_5, V_1V_6, V_1V_7, V_1V_8, V_2V_3, V_2V_4, V_2V_5, V_3V_4, V_3V_5, V_4V_5, V_4V_6, V_5V_6, V_6V_7, V_6V_8, V_7V_8\}$$

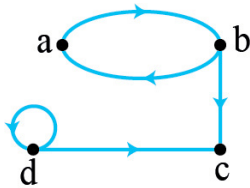
حالت‌های مختلف بررسی گراف:



۱ - طوقه: یالی که از یک رأس به خودش متصل شود؛ مثل شکل روبه‌رو در رأس a

۲- گراف جهت‌دار: یال‌های آن دارای جهت است؛ در این حالت برای نمایش اینکه جهت یک یال از سمت کدام رأس است، یال را با زوج مرتب نمایش می‌دهیم.

$$V = \{a, b, c, d\} \text{ و } E = \{(a, b), (b, a), (b, c), (d, c), (d, d)\} \text{ مثال}$$



۳- گراف چندگانه: گرافی که بین دو رأس آن، ممکن است چندین یال موجود باشد،

مانند گراف روبه‌رو که بین رأس a و b بیش از یک یال وجود دارد.

تذکر: اگر این ۳ حالت فوق برای یک گراف پیش آید، دیگر گراف ساده نیست.

✓ مرتبه گراف: تعداد رأس‌های گراف G یعنی $|V(G)|$ را گویند، با p نمایش می‌دهند.

✓ اندازه گراف: تعداد یال‌های گراف G یعنی $|E(G)|$ را گویند، با q نمایش می‌دهند.

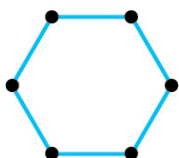
✓ درجه یک رأس: در گراف G برابر است با تعداد یال‌هایی از گراف G که به رأس a متصل‌اند و آن را با (da)

نمایش می‌دهند. اگر درجه یک رأس فرد باشد آن را یک رأس فرد می‌نامند و برعکس!

✓ گراف منتظم: گرافی که درجه تمام رأس‌های آن با هم مساوی و برابر عدد k باشد را گراف k -منتظم می‌نامیم.

مثال: گراف ۲-منتظم از مرتبه ۶، یک گراف با رأس ۶ است که درجه هر رأس ۲ می‌باشد.

مثل شکل مقابل.



✓ رأس تنها «ایزوله» به رأسی که درجه آن صفر باشد، یعنی هیچ یالی نداشته باشد می‌گویند.

✓ گراف تهی: گرافی که تمام رئوس آن رأس ایزوله باشد، یعنی هیچ یالی نداشته باشد را گویند.

مثال: جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

(الف) در یک گراف، یالی که از یک رأس به خودش متصل می‌شود را، می‌نامند.

(ب) مرتبه گراف نشان دهنده تعداد گراف است و با حرف نمایش می‌دهند.

(ج) گرافی که تمام رئوس آن ایزوله باشد را گراف می‌نامیم.

(د) گراف k -منتظم گراف‌یست که

راهنما: (الف) طوقه (ب) رأس‌های P (ج) تهی

(د) درجه تمام رئوس آن با هم برابر و مساوی با عدد k باشد.

✓ مجموعه همسایه‌های یک رأس: فرض کنیم V یکی از رأس‌های گراف G باشد؛

به مجموعه رأس‌هایی از گراف G که به رأس V متصل هستند، «همسایگی باز رأس V » می‌گوییم و با $N_G(V)$ نمایش می‌دهیم. حال اگر خود رأس V را به مجموعه $N_G(V)$ اضافه کنیم، «همسایگی بسته، رأس V » حاصل می‌شود که با $N_G[V]$ نمایش می‌دهیم.

✓ در یال را مجاور گوئیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن رأس متصل باشند.

✓ دو رأس مجاور «همسایه»: دو رأس u و v را دو رأس همسایه یا مجاور گوئیم هرگاه توسط یالی به هم وصل شده باشند، یعنی $uv \in E(G) \Leftarrow$ یعنی یال uv عضو مجموعه یال‌های گراف باشند.

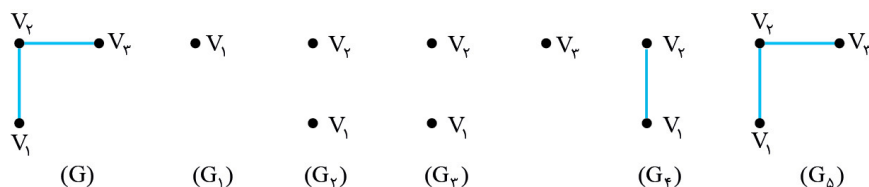
✓ بزرگترین و کوچک‌ترین درجه یک گراف: بزرگترین درجه در بین درجات رئوس گراف را با $\Delta(G)$ یا همان «دلتای بزرگ» و کوچک‌ترین درجه در بین درجات رئوس گراف G را با $\sigma(G)$ یا همان «دلتای کوچک» نمایش می‌دهیم و به ترتیب آن‌ها را ماکسیمم و مینیمم درجه گراف می‌نامیم.

✓ زیرگراف: یک زیرگراف از گراف G ، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه رئوس گراف G و مجموعه یال‌های آن، زیرمجموعه‌ای از مجموعه یال‌های گراف G باشد.

در هر گراف مانند G ، یک رأس تنها می‌تواند کوچک‌ترین زیرگراف باشد.

همچنین هر گراف مانند G ، زیرگراف خود است.

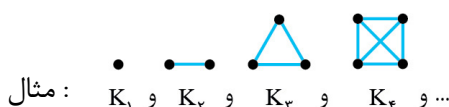
مثال: پنج زیرگراف برای گراف روبه‌رو بنویسید:



✓ مکمل یک گراف: مکمل گرافی مانند G که آن را با G^1 ، G^2 یا $\bar{G}$ نمایش می‌دهیم، گرافی است که مجموعه رأس‌های آن همان مجموعه رأس‌های گراف G است و بین دو رأس از گراف $\bar{G}$ یک یال است؛ اگر و تنها اگر بین همان دو رأس در G یالی وجود نداشته باشد.

اگر گراف‌های G و $\bar{G}$ را روی هم قرار دهیم، به صورتی که رأس‌های هم‌نام روی هم قرار بگیرند، از هر رأس یک یال به رأس‌های دیگر رسم شده است. «گراف کامل»

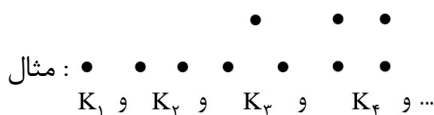
✓ گراف کامل: گرافی که هر رأس آن به تمام رأس‌های دیگر آن وصل باشد را گراف کامل می‌نامیم. گراف کامل P رأسی را با K_P نمایش می‌دهیم.



در گراف کامل، تمام یال‌های ممکن رسم شده است، در نتیجه تعداد یال‌های برابر است با تعداد انتخاب‌های دو رأس از تعداد کل رأس‌ها.

$$q(K_p) = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$$

تعداد یال‌های یک گراف کامل: $q(K_p) = \frac{p(p-1)}{2}$ ؛ برابر با $(p-1)$ است. یعنی یک گراف: $(p-1)$ - منتظم. همچنین مکمل گراف کامل K_p برابر با گراف تهی $\bar{K}_p$ است.



مثال: جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید:

الف) دو یال را می‌نامیم، هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آنها را به هم متصل کند.

ب) در یک گراف K - منتظم؛ ماکزیمم درجه رأس برابر با است.

ج) تعداد یال‌های گراف K_4 ، برابر است.

د) گراف k - منتظم از مرتبه n یعنی

راه‌حل: الف) مجاور **ب)** K **ج)** $q(K_4) = \frac{4 \times 3}{2} = 6$

د) گرافی با تعداد رئوس n که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر عدد k و $(0 \leq k < n)$ باشد.

مثال: در گراف G ، درجه رأس V برابر با ۹ است و درجه رأس V در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید

راه‌حل: از اون جایی که $d_G(V) + d_{\bar{G}}(V) = p - 1$ در نتیجه: $q + 12 = p - 1$

$$\rightarrow p = 22$$

مثال: اگر G یک گراف P رأسی باشد، چه رابطه‌ای بین تعداد یال‌های گراف G و $\bar{G}$ وجود دارد

راه‌حل: مجموع تعداد یال‌های G و $\bar{G}$ برابر با تعداد یال‌های گراف کامل یعنی K_p است.

یعنی: $q_G + q_{\bar{G}} = q_{K_p} \rightarrow q_{K_p} = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$

☑ رابطه بین مرتبه و اندازه: اگر یک گراف ساده از مرتبه p باشد، حداکثر تعداد یال‌های آن یا اندازه گراف، با تعداد انتخاب دو

رأس از رأس p به دست می‌آید و حداقل تعداد یال‌ها با اندازه گراف برابر صفر است.

یعنی: $0 \leq q \leq \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow q_{\max} = \frac{p(p-1)}{2}$ و $q_{\min} = 0$

همچنین اگر G یک گراف و با مرتبه p و اندازه q و $V = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ مجموعه‌ی رئوس آن باشد. آنگاه داریم:

$$d(V_1) + d(V_2) + d(V_3) + \dots + d(V_p) = 2q$$

یعنی مجموع درجات تمام رأس‌ها: برابر با ۲ برابر تعداد یال‌هاست. باور نداری؟! برا خودت مثال بزن من که دروغ ندارم بگه که



مثال: درجه رأس‌های یک گراف به صورت ۱ و ۱ و ۲ و ۳ و ۳ و ۴ و ۵ و ۹ است. مرتبه و اندازه گراف؟

راه‌حل: $1+1+2+3+3+4+5+5=24 \Rightarrow 24=2q \Rightarrow q=12$

مرتبه گراف هم که برابر تعداد رأس‌هاست. تو صورت سوال درجه ۸ رأس رو گفته، پس حتماً $p=8$ بوده!

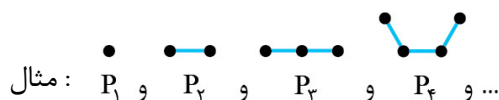
نتیجه: تعداد رأس‌های فرد در هر گراف، عددی زوج است.

☑ مسیر درنگ گراف: اگر u و v در رأس از گراف G باشند، یک مسیر از u و v در گراف G ، دنباله‌ای از رأس‌های روبه‌رو

متمایز در G است که از u شروع و به v ختم می‌شود، به طوری که هر دو رأس متوالی این دنباله، در G مجاور هم باشند.

طول مسیر: طول مسیر برابر است با تعداد یال‌های موجود آن «مسیر در یکی کمتر از تعداد رأس‌های موجود در آن مسیر»
تذکر: حواستون باشه که در طول مسیر u به v ، از روی یک رأس دوبار عبور نکنید!
☒ در یک گراف، تعداد رأس‌های گراف، برابر تعداد مسیرهای به طول صفر است و تعداد یال‌های گراف، برابر تعداد مسیرهای به طول یک است.

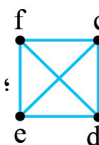
- ☒ همچنین در مشخص کردن مسیر، جهت حرکت اهمیتی ندارد.
☒ گراف P_n : گرافی که تنها از یک مسیر n رأسی تشکیل شده باشد را با P_n نمایش می‌دهیم.
☒ چند نکته مهم در رابطه با گراف P_n :



- ۱- گراف P_1 : هم برابر گراف K_1 و هم برابر گراف تهی $\bar{K}_1$ است.
 - ۲- گراف P_2 : هم برابر با گراف K_2 و هم برابر با گراف 1 -منتظم است.
 - ۳- بین هر دو رأس از گراف P_n ، فقط یک مسیر وجود دارد.
 - ۴- تعداد یال‌ها در گراف P_n ، برابر با $n-1$ است.
- مثال:** چه رابطه‌ای میان مرتبه و اندازه در گراف P_n وجود دارد؟

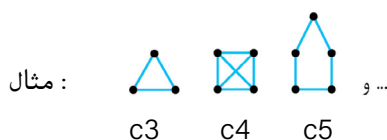
راه‌حل: طبق چیزی که تو تعریف گراف P_n گفتیم، تعداد مرتبه در این گراف یکی از اندازه گراف بیشتره، یعنی $p = q + 1$. بنابراین اندازه و مرتبه در گراف P_n دو عدد متوالی هستند که یکی زوج و یکی فرده. در نتیجه اگر تو سوالی پرسیده شد مجموع اندازه و مرتبه دو گراف P_n فرده یا زوج بلند داد بزیند فرد! 😊
☒ دور: یک دور به طول m در گراف G ، دنباله‌ای از $m+1$ رأس است که m رأس اول آن همگی با هم متفاوت‌اند اما رأس آخر «رأس $m+1$ » همان رأس اول است.

تذکر: حواستون باشه که در مشخص کردن دور، از روی رأس تکراری عبور نکنیم و همواره از روی یال‌ها رد بشیم. همچنین حواستون باشه که دورهایی که دارای تعداد رأس‌های برابر و حروف یکسان هستند، یک دور می‌باشند و با هم فرقی ندارند.



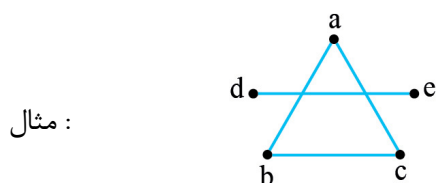
به طور مثال در گراف؛ دورهای $cdec$, $dec d$, $ecde$, $dced$ ، دورهای $edce$ و $cedc$ همگی یک دور هستند.

☒ گراف C_n : گرافی که تنها از یک دور n رأسی تشکیل شده باشد را با C_n به طوری که $n \geq 3$ باشد نمایش می‌دهیم.

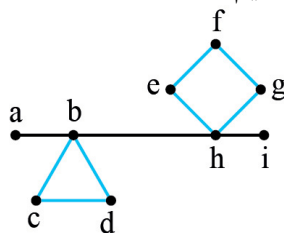


- ☒ چند نکته مهم در مورد گراف C_n :
- ۱- گراف C_3 برابر گراف کامل K_3 است.
 - ۲- مرتبه و اندازه در گراف C_n با هم برابرند $p = q$
 - ۳- گراف C_n یک گراف 2 -منتظم از مرتبه n است!

✓ همبندی در گراف: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن، حداقل یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر اینصورت آن را ناهمبند می‌نامیم.



گراف ناهمبند



گراف همبند

زیرا به طور مثال از رأس e مسیری به رأس b وجود ندارد.

✓ چند نکته مهم راجب گراف‌های همبند و ناهمبند:

۱- گراف کامل K_n همبند است و گراف تهی $\bar{K}_n$ ناهمبند است. البته به جز $\bar{K}_1$ که همبند می‌باشد.

۲- گراف‌های P_n و C_n همبند هستند.

۳- اگر گرافی از مرتبه p دارای تعداد یال‌های کمتر از $p-1$ باشد، یا به عبارتی $(q \leq p-2)$ ، حتماً ناهمبند است.

۴- اگر در گراف ساده G ، بزرگترین درجه گراف برابر $p-1$ باشد، یا به عبارتی $(\Delta = p-1)$ ، همبند است.

مثال: گراف ساده G از مرتبه ۸، ناهمبند است. حداکثر اندازه گراف G ؟

راه‌حل: کافیست یک رأس رو به صورت رأس تنها و ۷ رأس دیگر رو به صورت گراف کامل K_7 در نظر بگیریم تا q در حداکثرترین مقدار خودش باشه و همچنین این گراف ۸ رأسی ناهمبند باشد.

$$q_{\max} = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \Rightarrow q_{\max} = 21$$

✓ مجموعه احاطه‌گر: زیرمجموعه D از رأس‌های گراف G را مجموعه احاطه می‌نامیم؛ هرگاه هر رأس از گراف که در مجموعه D نباشد را انتخاب کنیم؛ حداقل به یکی از رأس‌های مجموعه D وصل باشد،

← در نتیجه قطعاً مجموعه‌ای شامل تمام رأس‌های گراف G ، همواره یک مجموعه‌ی احاطه‌گر است.

✓ مجموعه احاطه‌گر مینیمم: «بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، به مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را عدد احاطه‌گری گراف G می‌نامیم و با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

✓ مجموعه احاطه‌گر مینیمال: یک مجموعه‌ی احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد مجموعه احاطه‌گر مینیمال می‌نامند.

تذکره: با توجه به تعاریف خواستونو خوب جمع کنید که هر مجموعه احاطه‌گر مینیمم، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال است. ولی برعکس این قضیه لزوماً همواره درست نیست.

مینیمال ← حذف شد دیگه احاطه‌گر نیست
جمع‌بندی: مینیم ← یعنی کمترین تعداد رأس رو داشته باشه
⇐ هر مینیممی حتماً مینیمال هست. ولی برعکس لزوماً درست نیست!

✓ اگر a یک عدد حقیقی باشد، $[a]$ را کفِ a و $\lceil a \rceil$ را سقفِ a می‌نامیم.

✓ کران پایین عدد احاطه‌گر: اگر G یک گراف n راسی با ماکسیمم درجه Δ باشد و D یک مجموعه احاطه‌گر در آن باشد،

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq |D| \quad \text{و از آنجا که } \gamma(G) \text{ نیز اندازه یک مجموعه احاطه‌گر است، همواره داریم: } \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

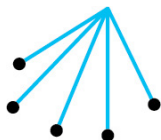
مثال: جاهای خالی را با عبارت مناسب تکمیل کنید:

الف) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ ، در این صورت $\Delta(G)$ برابر است.
 ب) در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G ، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعه احاطه‌گر گراف G می‌نامیم.

ج) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر می‌نامیم.

د) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > 2$ برابر است با

راه‌حل: الف) $p-1$ یعنی تقریباً به طور مثال اگر $p=6$ باشد؛ یه همچنین شکلی داریم:



ب) مینیمم

ج) مینیمال

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil \quad \text{د)}$$

فصل سوم: ترکیبات

✓ شمارش

اصل جمع: اگر بتوان کاری را به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول، m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر، $m + n$ انتخاب وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر بتوان کاری را به k روش انجام داد به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام، m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام کار مورد نظر $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

← در مسائل مربوط به شمردن، ابتدا حالت‌های مختلف را در نظر می‌گیریم و در هر حالت شمارش را انجام می‌دهیم و سپس با استفاده از اصل جمع، تعداد کل را به دست می‌آوریم.

اصل ضرب: برای انجام کارهای یک مرحله‌ای از اصل جمع استفاده می‌کنیم. اما اگر برای انجام دادن یک کار، به انجام چندین مرحله نیاز داشته باشیم، از اصل ضرب استفاده می‌کنیم. اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول، m روش موجود باشد و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم را به توان به n روش انجام داد، در این صورت کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اول n_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله k ام، m_k روش وجود داشته باشد «با فرض این که در هر مرحله انتخاب تمام روش‌های آن مرحله ممکن باشد» کار مورد نظر به $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

✓ جایگشت:

به هریک از حالت‌های قرار گرفتن چند شی متمایز کنار هم، یک جایگشت از آن اشیاء می‌گوییم:

مثال: تمام جایگشت‌های ممکن با حروف a و b و c را بنویسید؟

راه حل: $6 = 3 \times 2 \times 1 \rightarrow$ به عبارتی 6 یا $3! = 6 \rightarrow$ به عبارتی 6 یا $3! = 6$

و یا به عبارتی

abc و acb و bac و bca و cab و cba

فاکتوریل: اگر n ، یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از 1 تا n را به صورت $n!$ «فاکتوریل» نمایش می‌دهیم.

یعنی تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر $n!$ است.

← و حتی می‌توان از $n!$ استفاده کرد که اشیاء متمایز باشند.

به عنوان مثال تعداد کلمات چهار حرفی که بدون تکرار حروف و با حروف a و b و c و d ساخته می‌شود، برابر است با تعداد جایگشت‌های چهار شی متمایز و این تعداد بنابر نکته فوق برابر $4!$ می‌باشد.

← در مسائل مربوط به تعداد کلمات n حرفی با n حرف متمایز (بدون تکرار حروف) و یا تعداد اعداد n رقمی با n رقم متمایز (بدون تکرار ارقام) (در صورتی که فاقد رقم صفر باشد) از $n!$ استفاده می‌کنیم. اگر در رقم‌ها، رقم صفر وجود داشته باشد، ابتدا باید رقم سمت چپ را با بقیه ارقام (به غیر از رقم صفر) پر کرده (به $n-1$ طریق) و سپس بقیه مکان‌ها را با $n-1$ رقم دیگر، به $(n-1)!$ طریق پر نمود.

← اگر در مسائل مربوط به جایگشت گفته شود: «چند شی خاص کنار هم باشند» یا «دو شی خاص کنار هم نباشند»، باید آنها را به عنوان یک بسته و آن بسته را مانند یک شی در کنار بقیه اشیاء در نظر بگیریم. به این نکته هم توجه کنید که اشیاء داخل بسته می‌توانند جایگشت داشته باشند.

مثال: چند عدد شش رقمی با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت. به طوری که همواره ارقام فرد، کنار هم و ارقام زوج نیز کنار هم باشند.

راه‌حل: ۳ رقم فرد را باید مانند یک بسته و به صورت ۷ و ۵ و ۳ در نظر گرفت.

۳ رقم زوج هم همینطور به صورت ۶ و ۴ و ۲ در نظر می‌گیریم. این دو بسته دارای ۲! جایگشت هستند. از طرفی هر بسته ۳! جایگشت دارد. پس طبق اصل ضرب برابر است با:

$$2! \times 3! \times 3! = 72$$

جایگشت‌های ۲ تایی از n شی متمایز:

تعداد جایگشت‌های ۲ تایی از n شی متمایز یا به عبارتی انتخاب‌های r شی از n شی متمایز که در آنها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد؛ چی شد؟! چی گفتیم؟! گفتم ترتیب قرار گرفتن مهم باشد را با $P(n, r)$ نمایش می‌دهیم و به آن تبدیل نیز می‌گوییم.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و بدون تکرار ارقام $P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = 360$ عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت. ← نکته اینجاست که دو استفاده از جایگشت تکرار ارقام و یا اشیاء جایز نیست.

ترکیب:

به هر انتخاب ۲ تایی از n شی متمایز که در آن ترتیب انتخاب اهمیتی نداشته باشد و یا به عبارتی به هر زیرمجموعه r عضوی از n شی متمایز، یک ترکیب ۲ تایی از آن n شی می‌گوییم.

تعداد ترکیب‌های ۲ تایی از n شی متمایز را با $C(n, r)$ یا $\binom{n}{r}$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad (0 \leq r \leq n)$$

برای اینکه فرمول‌ها رو با هم قاطی نکنید این مثال رو حل کنید:

مثال: حاصل عبارت‌های مقابل را بیابید: الف) $\frac{P(5, 3) + P(7, 2)}{P(9, 3)}$ ب) $\frac{C(10, 2) + C(6, 1)}{C(7, 3) + C(8, 0)}$

راه‌حل:

$$\text{الف) } P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60, \quad P(7, 2) = \frac{7!}{(7-2)!} = 42, \quad P(9, 3) = \frac{9!}{(9-3)!} = 504$$

$$\Rightarrow \frac{60 + 42}{504} = \frac{102}{504} = \frac{17}{84}$$

$$\text{ب) } C(10, 2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45, \quad C(6, 1) = \frac{6!}{1!(6-1)!} = 6, \quad C(7, 3) = \frac{7!}{3!(7-3)!} = 35$$

$$C(8, 0) = \frac{8!}{0! \times 8!} = 1 \Rightarrow \frac{45 + 6}{35 + 1} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$$

قرار داد: $0! = 1$

← البته اینا که برا این بود تا فرمول‌ها در ذهنتون نقش ببندد؛ بحث اصلی اینه که بتونی تشخیص بدی تو کدوم مسئله ترتیب مهمه « $P(n,r)$ » و تو کدوم مسئله ترتیب مهم نیست « $C(n,r)$ »

البته نگران نباشید یواش یواش دستتون میاد که چی کار کنید. بابا تا منو دارید غم ندارید.

✓ چند نکته مهم در رابطه با قواعد ترکیب:

یعنی فقط ۱ حالت برای انتخاب ۵ تا یا هیچی از ۵ شی مختلف داریم!

$$۱. \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = ۱ \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۵}{0} = ۱, \binom{۵}{۵} = ۱$$

$$۲. \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۱}{1} = ۱۱, \binom{۱۱}{10} = ۱۱$$

$$۳. \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۰}{7} = \binom{۱۰}{3}$$

$$۴. \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{20}{2} = \frac{20 \times 19}{2} = ۱۹۰$$

$$۵. \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \xrightarrow{\text{مثال}} \binom{۱۰}{3} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{3 \times 2 \times 1} = ۱۲۰$$

مثال: از بین ۲ کتاب فیزیک، ۶ کتاب ریاضی و ۷ کتاب شیمی «کتاب‌ها همگی متمایزند» به چند طریق می‌توان ۴ کتاب انتخاب کرد به طوری که حداقل سه تای آنها ریاضی باشد؟

راه‌حل: اگر ۳ کتاب از ۴ کتاب انتخاب شده و یا اصلاً هر ۴ کتاب انتخاب شده ریاضی باشد، ۲ حالت داریم:

۱. ۳ کتاب ریاضی از ۶ کتاب ریاضی و یک کتاب غیرریاضی از $۷+۲=۹$ کتاب غیرریاضی انتخاب شده:

$$\binom{۶}{3} \times \binom{۹}{1} = ۱۸۰$$

۲. هر ۴ کتاب انتخاب شده ریاضی باشد: $\binom{۶}{4} = ۱۵$
بنابراین $۱۸۰+۱۵=۱۹۵$ راه مختلف داریم.

✓ جایگشت با تکرار:

در عدد ۱۲۱۳۲۲، سه رقم ۲ و یک رقم ۳ و دو رقم ۱ وجود دارد. اگر بخواهیم تمام اعداد ۶ رقمی با این ارقام و با همان تعداد اعداد بنویسیم، آنگاه برای به دست آوردن تعداد آنها از فرمول $۶!$ نمی‌توان استفاده کرد. زیرا اگر یادتان باشد زمانی می‌توانیم از فرمول $۶!$ استفاده کنیم که ۶ شی متمایز داشته باشیم. پس چه کنیم؟

← تعداد جایگشت‌های n شی به طوری که n_1 تای آنها همانند هم و از یک نوع باشند، n_2 تای آنها نیز همانند یکدیگر و به همین ترتیب و n_K تای آنها همانند هم و از یک نوع باشند برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_K!}, \quad (n_1 + n_2 + \dots + n_K = n)$$

به طور مثال در مسئله بالا داریم:

$$\frac{۶!}{۲! \times ۳! \times ۱!} = ۶۰$$

← هنگام استفاده از فرمول جایگشت با تکرار در ساختن عدد؛ وقتی که k رقم صفر وجود داشته باشد، باید در صورت کسر به جای استفاده از $n!$ از $(n-K) \times (n-1)!$ استفاده کرد که $n-K$ همان تعداد ارقام غیر صفر می‌باشند.

مثال: چند عدد صحیح ۵ رقمی با ارقام ۰ و ۰ و ۵ و ۵ و ۶ می‌توان نوشت؟

راه‌حل: با توجه به نکته بالا داریم:

$$\frac{3 \times 4!}{2! \times 2!}$$

تعداد ۵ تا تعداد صفرها

← اگر n شی داشته باشیم، آنگاه تعداد جایگشت‌های n تایی با تعداد جایگشت‌های $(n-1)$ تایی این اشیا با هم برابرند. مثلاً تعداد اعداد پنج رقمی با ارقام متمایز ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ با تعداد اعداد چهاررقمی برابر است. فکر کردید از این نکته مسخره‌هاست که به دردتون نمی‌خوره! مثال بعد رو حل کنید!

مثال: چند عدد شش رقمی با ارقام ۱ و ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۳ و ۳ می‌توان نوشت؟!

راه‌حل: چون ۷ شی داریم و می‌خواهیم تعداد جایگشت‌های ۶ تایی را به دست آوریم، کافیه با توجه به نکته قبل تعداد جایگشت‌های ۷ تایی را با استفاده از فرمول به دست آوریم:

$$\text{تعداد ارقام ۶ رقمی} = \text{تعداد ارقام ۷ رقمی} = \frac{7!}{4! \times 2! \times 1!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 105$$

تعداد ۲ ها تعداد ۳ ها

انتخاب n شاخه گل به دلخواه از k نوع گل مختلف:

تعداد راه‌های مختلف برای n شاخه گل از بین k نوع گل برابر است با:

$$\binom{n+K-1}{K-1}$$

مثال: به چند طریق می‌توان دسته گلی شامل ۸ شاخه گل از بین ۵ نوع گل انتخاب کرد؟ به چند طریق می‌توانیم این دسته گل را انتخاب کنیم. به طوریکه از هر نوع گل یک شاخه گل انتخاب کنیم؟

راه‌حل: تعداد راه‌های انتخاب ۸ شاخه گل از بین ۵ نوع گل $K=5$ برابر است با:

$$\binom{n+K-1}{K-1} = \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4! \times 8!} = 495$$

حالا وقتشه شرط حداقل رو لحاظ کنیم؛ یعنی اول ۵ شاخه گل از هر نوع رو انتخاب کنیم، بعد ۳ شاخه گل باقی مونده رو به طور دلخواه از بین ۵ نوع گل انتخاب کنیم.

$$\binom{n+K-1}{K-1} \xrightarrow[n=3]{K=5} \binom{3+5-1}{5-1} = \frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

پیدا کردن تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_K = n$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_K = n$ برابر است با تعداد انتخاب‌های دلخواه n شاخه گل از بین

k نوع گل، یعنی برابر است با: $(n \geq 0)$

$$\binom{n+K-1}{K-1}$$

در این فرمول، k تعداد مجهول‌های $x_1 + x_2 + \dots + x_K = n$ است. همچنین این تعداد جواب وقتی برقرار است که به ازای هر i ، $x_i \geq 0$ باشد.

البته در این معادله، هیچ یک از متغیرها نباید دارای ضریب، توان و یا ... باشد تا بتوان از فرمول استفاده کرد.

مثال: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 13$ چقدر است؟
راه‌حل: طبق فرمول $K=3$ و $n=13$ است بنابراین: $\binom{13+3-1}{3-1} = \frac{15!}{2! \times 13!} = 105$

مثال: معادله $x_1^2 + x_2 + x_3 = 5$ چند دسته جواب صحیح و نامنفی دارد؟

راه‌حل: با توجه به آخرین نکته‌ای که گفتیم، متغیر x_1 دارای توان ۲۰ است و از فرمول فوق نمی‌تونیم استفاده کنیم پس حالا چه خاکی تو سرمون بریزیم؟!

بیاییم به x_1 که دارای توان است، مقدار صحیح و نامنفی $\{0, 1, 2, \dots\}$ رو یکی یکی بدیم و امتحان کنیم و ببینیم چی

میشه. $x_1 = 0 \rightarrow x_1^2 = 0 \rightarrow 0^2 + x_2 + x_3 = 5 \rightarrow x_2 + x_3 = 5$

توجه کنید که K تعداد مجهول‌هاست

و معادله‌ی $x_2 + x_3 = 5$ دارای ۲ مجهول است: $K=2$
 حالا داریم $\xrightarrow{K=2, n=5} \binom{5+2-1}{2-1} = 6 \rightarrow$

$$x_1 = 1 \rightarrow x_1^2 = 1 \rightarrow x_2 + x_3 = 4 \xrightarrow{K=2, n=4} \binom{4+2-1}{2-1} = 5$$

$$x_1 = 2 \rightarrow x_1^2 = 4 \rightarrow x_2 + x_3 = 1 \rightarrow \binom{1+2-1}{1} = 2$$

$$x_1 = 3 \rightarrow x_1^2 = 9 \rightarrow x_2 + x_3 = -4 \rightarrow \text{غلطه! دیگه غیرممکنه!}$$

چطور ممکنه که جمعه ۲ عدد نامنفی بشه منفی؟! $6 + 5 + 2 = 13$

بنابراین سه دسته جواب به تعداد ۶ و ۵ و ۲ داریم. در نتیجه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی برابر است با: ۱۳
 ← برای برخی یا همه‌ی x_i هایی که دارای شرط حداقلی برای معادله‌ی $x_1 + \dots + x_K = n$ می‌باشند را به صورت زیر حل می‌کنیم.

مثال: معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ با شرط $x_1 \geq 3$, $x_2 > 1$, $x_3 \geq 1$ دارا یچند جواب صحیح و نامنفی است؟

راه‌حل: خوب حواس‌تونو جمع کنید که از این سؤال‌ها زیاد خواهید دید!

اولاً اینکه $x_2 > 1$ رو به صورت $x_2 \geq 2$ می‌نویسیم. قانونشه! پس چی شد؟! هر جا علامت $>$ دیدی تبدیلیش می‌کنی به $\geq$!
 بریم سراغ بقیه سؤال !

$$\left. \begin{aligned} x_1 \geq 3 &\Rightarrow y_1 = x_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow y_1 \geq 0, x_1 = y_1 + 3 \\ x_2 \geq 2 &\Rightarrow y_2 = x_2 - 2 \geq 0 \Rightarrow y_2 \geq 0, x_2 = y_2 + 2 \\ x_3 \geq 1 &\Rightarrow y_3 = x_3 - 1 \geq 0 \Rightarrow y_3 \geq 0, x_3 = y_3 + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

حالا معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ رو برحسب y_1 و y_2 و y_3 می‌نویسیم.

$$(y_1 + 3) + (y_2 + 2) + (y_3 + 1) = 10 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

$$\xrightarrow[n=4]{K=3} \text{تعداد جواب‌ها: } \binom{4+3-1}{3-1} = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$$

← تعداد جوابهای صحیح و مثبت «طبیعی» معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ با تعداد انتخابهای n شاخه گل از این k نوع گل به طوری که از هر نوع حداقل یک شاخه گل انتخاب کنیم، برابر است و این تعداد از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\binom{n-1}{k-1}$$

در انتهای این بحث پیشنهاد می‌کنم کار در کلاس صفحه ۶۱ کتاب درسی رو حتماً با دقت انجام بدین! ☺

✓ مربع لاتین:

یک جدول به شکل یک مربع $n \times n$ که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱ و ۲ و ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد را یک «مربع لاتین» می‌نامیم و هریک از اعداد درون یک مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.

با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از یک مربع لاتین، باز هم مربع حاصل یک مربع لاتین است.

۱	۲	۳	...	n
n	۱	۲	...	$n-1$
$n-1$	n	۱	...	$n-2$
$n-2$	$n-1$	n	۱	...
۲	۳	۴	...	۱

مربع لاتین چرخشی بدین صورت است که:

در هر سطر که به سطر بعدی می‌رویم،

عدد آخر سطر جدا می‌شود و در اول سطر بعدی قرار می‌گیرد!

جایگشت روی اعضا یعنی مثلاً به جای هر ۲، ۳ قرار دهیم و به جای هر ۳، مثلاً ۲ قرار دهیم! $\begin{matrix} 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \end{matrix}$ با انجام این کار، یک مربع جدید به دست می‌آید که باز هم یک مربع لاتین است.

✓ مربع لاتین متعامد:

فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم مرتبه باشند و از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانه‌ی آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B «و یا برعکس» است. در این صورت دو مربع A و B با هم متعامدند. اگر و تنها اگر هیچ یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند. به طور مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

و $B =$

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A, B =$

$$\begin{bmatrix} 33 & 44 & 11 & 22 \\ 41 & 32 & 23 & 14 \\ 12 & 21 & 34 & 43 \\ 24 & 13 & 42 & 31 \end{bmatrix}$$

اگر در دو مربع لاتین هم مرتبه دو درایه یکسان با خانه‌های نظیر یکسان داشته باشیم آن دو مربع لاتین متعامد نمی‌باشند؛ مانند:

	a	
		a

	b	
		a

این دو مربع متعامد نخواهند بود:

جایگشت و تأثیرش بر متعامد بودن ۲ مربع لاتین:

اگر دو مربع لاتین، متعامد باشند، مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می‌آید با مربع لاتین دیگر متعامد است. یعنی اگر A و B دو مربع لاتین متعامد باشند، B_1 مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت بر اعضای B باشد، آنگاه A و B_1 نیز متعامدند.

جمع‌بندی: اگر دو تا متعامد داشته باشیم، بعد یکیش رو با جایگشت عوض کنیم، مربع جدید با اون یکی مربع باز هم متعامد میشه.

ولی حواست باشه که مربع جدید با اون مربع قبله که جایگشت روش انجام شد، متعامد نیست!

امیدوارم قاطی نکرده باشی! ☺

در انتهای این مبحث هم باز پیشنهاد می‌کنم مثال دوم ص ۶۸ و کار در کلاس ص ۶۹ رو با دقت حل کنید؛ سوالات امتحان نهایی شباهت زیادی با این مسئله‌ها دارند!

اصل شمول و عدم شمول:

اگر A یک مجموعه متناهی باشد، تعداد عضوهای A را با $n(A)$ یا $|A|$ نمایش می‌دهیم. حال اصل شمول و عدم شمول برای دو مجموعه A و B : اگر A و B دو مجموعه متناهی از مجموعه S باشند آنگاه تعداد عضوهای مجموعه $A \cup B$ برابر است با:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

مثال: از بین اعداد مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 200\}$ چند عدد وجود دارد که؟

الف) این عدد مضرب ۲ باشد. **ب)** این عدد مضرب ۳ باشد. **ج)** این عدد مضرب ۲ یا ۳ باشد.

راه‌حل: تعداد اعداد طبیعی کوچک‌تر از n که بر k بخش‌پذیر است، برابر $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ است.

$$|A| = \left\lfloor \frac{200}{2} \right\rfloor = 100$$

$$|B| = \left\lfloor \frac{200}{3} \right\rfloor = 66$$

$$|A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{3 \times 2} \right\rfloor = 33$$

$$\rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 100 + 66 - 33 = 133$$

الف)

ب)

ج)

$$|(A \cup B)'| = |\overline{(A \cup B)}| = |S| - |A \cup B|$$

✓ **متمم در اصل شمول و عدم شمول:**

$$\Rightarrow |(A' \cap B')| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

با توجه به تعریف متمم داریم:

✓ **اصل شمول برای سه مجموعه:**

اگر A و B و C مجموعه‌هایی از مجموع مرجع C باشند آنگاه:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$|(A \cup B \cup C)'| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

✓ **متم اصل شمول برای سه مجموعه:**

که طبق قانون دمورگان که در ریاضی دهم و نهم خوانده‌ایم داریم:

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}|$$

✓ **تفاضل دو مجموعه:**

اگر A و B دو مجموعه متناهی باشند، تعداد عضوهای تفاضل این دو مجموعه برابر است با:

$$|A - B| = |A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B|$$

مثال: در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰، $n < 500$ چند عدد وجود دارد که بر ۳ بخش پذیر باشند ولی بر ۴ بخش پذیر نباشد؟
رامحل: A اعداد بخش پذیر بر ۳ و B اعداد بخش پذیر بر ۴ که در این بازه هستند را تعریف می‌کنیم.

$$|A - B| = |A \cap \bar{B}| = |A| - |A \cap B| \quad \text{و} \quad |A| = \left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor = 166 \quad \text{و} \quad |B \cap A| = \left\lfloor \frac{500}{12} \right\rfloor = 41$$

$$\Rightarrow |A \cap \bar{B}| = 166 - 41 = 125$$

✓ **تعداد توابع:**

اول بهتره تعریف تابع رو یادآوری کنیم: اگر f تابعی از مجموعه A، به مجموعه B باشند آنگاه دامنه تابع f با مجموعه A برابر است و برد تابع f، زیرمجموعه‌ای از مجموعه B است. به زبان ریاضی:

$$R_f \subseteq B \quad \text{و} \quad D_f = A \quad \text{و} \quad f: A \rightarrow B \quad \text{تابع}$$

حالا اگر $|A| = m$ و $|B| = n$ ، آنگاه تعداد کل توابع از A به B برابر است با: n^m

نتیجه گیری ← پس چی شد؟! تعداد توابع برابر است با تعداد برد به توان دامنه!

مثال: تعداد توابع از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی؟

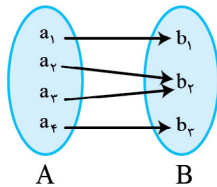
$$\text{رامحل:} \quad \odot \quad 3^4 = 81$$

✓ تابع یک به یک و تعداد آن:

اول بازم بهتره تعریف تابع یک به یک رو یادآوری کنیم: تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب‌هاست را یک تابع یک به یک می‌گوییم هرگاه مؤلفه‌های دوم زوج مرتب‌ها متمایز باشند.

حالا تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی $|A| = n$ عضو، به یک مجموعه $|B| = m$ عضو با شرط اینکه $n \leq m$ یعنی برد؛ بزرگتر مساوی دامنه باشد؛ برابر است با تعداد جایگشت‌های m شی! m شی!

مثال: تعداد توابع یک به یک از مجموعه ۳ عضو به مجموعه ۵ عضو؟



$$(m)_n = p(m, n) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

راه‌حل: $\frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$

✓ تابع پوشا:

تابع f از مجموعه A به مجموعه B ، به طوری که برد تابع برابر مجموعه B باشد، یک تابع پوشا است. یعنی $R_f = B$ به طور مثال در مجموعه مقابل چون روی تمام اعضای $\square$ ، پیکانی رسم شده و به این تابع پوشا می‌گویند.

مثال: به چند طریق می‌توان ۵ مداد متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل امداد داده باشیم.

راه‌حل: تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد توابع از یک مجموعه‌ی ۵ عضو به یک مجموعه ۳ عضو، به طوری که برد این تابع‌ها همه‌ی آن ۳ عضو باشند. یعنی به هر نفر از اعضای برد حداقل یک مداد از دامنه نسبت داده بشود.

$$A_j = \{f: A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 5, 1 \leq j \leq 3\}$$

$$|B| = |B|^{|A|} = 3^5 = 243$$

$$|A_1| = |A_2| = |A_3| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1^5 = 1, \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

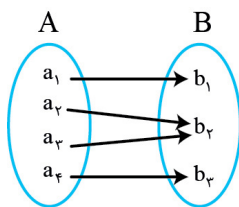
$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 243 - (32 + 32 + 32 - 1 - 1 - 1 + 0) = 150$$

تذکره ۱: این فرمول دو کتاب درسی ذکر شده پس بد نیست آن را حفظ باشیم.

تعداد توابع مثل $f: A \rightarrow B$ با فرض آنکه $|A| = m \geq 3$ و $|B| = 3$ باشد به طوری که $R_f = B$ از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید. $3^m - (3 \times 2^m - 3)$

تذکره ۲: قبلاً برای حل مسائلی که می‌خواستیم n شی یکسان را در k گروه متمایز تقسیم کنیم، در حالت‌های مختلف از جواب‌های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ استفاده می‌کردیم!

اما اگر بخواهیم n شی متمایز را در k گروه متمایز تقسیم کنیم، از تعداد توابع یک به یک و پوشا استفاده می‌کنیم.



مثال: به چند طریق می توان چهار غذای متفاوت را بین ۳ نفر پخش کرد به طوری که هر نفر حداقل یک غذا برسد؟!

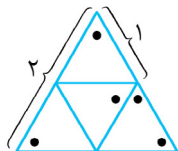
راه حل: اگر چهار غذای متفاوت را با a_i و سه نفر را با b_i نمایش دهیم، یکی از جوابها با نمودار پیکانی زیر نمایش داده شده است.

در نمودار پیکانی، شخص b_1 یک غذای a_1 و به شخص b_2 ، دو غذای a_2 و a_3 و به شخص b_3 غذای a_4 داده شده است. تعداد حالت های ممکن برابر پیدا کردن تعداد توابع از مجموعه ۴ عضوی A به مجموعه ۳ عضوی B با شرط $R_f = B$ است که تعداد این توابع برابر است با :

$$3^m - (3 \times 2^m - 3) \xrightarrow{m=4} 3^4 - (3 \times 2^4 - 3) = 81 - 48 + 3 = 36$$

✓ اصل لانه کبوتری:

اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم به طوری که تعداد کبوترها از تعداد لانه ها بیشتر باشد $m > n$ و همه ی کبوترها درون لانه ها قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که در آن حداقل ۲ کبوتر قرار گرفته است.



مثال: یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ واحد مفروض است. نشان دهید اگر ۵ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم، حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت، به طوری که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از ۱ باشد؟

راه حل: اضلاع مثلث را به ۲ قسمت مساوی تقسیم کرده و نقاط تقسیم شده را به هم وصل می کنیم تا ۴ مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۱ پدید آید، اگر ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث را لانه در نظر بگیریم « $5 > 4$ »، طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر وجود دارد که در یک لانه قرار می گیرند و چون طول هر مثلث برابر ۱ است پس فاصله آن دو نقطه از یکدیگر حتماً کمتر از ۱ خواهد بود. در نتیجه اثبات شد حداقل ۲ نقطه بین این نقاط فاصله کمتر از ۱ دارند.

← تعمیم اصل لانه کبوتری: هرگاه $kn + 1$ کبوتر یا بیشتر، در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل $k + 1$ کبوتر در آن قرار گرفته است. حال اگر $1 \leq r < n$ و $m = nk + r$ کبوتر، n لانه را اشغال کند، در این صورت باز هم حداقل یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $k + 1$ کبوتر قرار می گیرند.

تذکر: برای به دست آوردن مقدار k ، m را بر n تقسیم می کنیم. اگر باقی مانده صفر شود، حداقل تعداد کبوترها همان خارج قسمت (k) و اگر باقی مانده عددی غیر صفر شد، حداقل تعداد کبوترها $k + 1$ « $1 +$ خارج قسمت» خواهد بود.

سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته

۱- درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.

(الف) حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

(ب) حاصل $(3m+1, 3m+2)$ برابر ۱ می باشد.

(ج) تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است.

(د) عدد احاطه‌گری P_1 برابر ۳ است.

۲- جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) در یک گراف از مرتبه p ، اگر $\gamma(G)=1$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یال‌ها برابر است.

(ب) در یک مربع لاتین چرخشی 4×4 مجموعه درایه‌های روی قطر اصلی برابر است.

(ج) تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی برابر است.

۳- اگر x, y, z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$

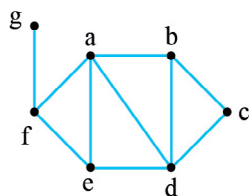
۴- اگر $a \mid 2m+3$ و $a \mid m+7$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برابر a وجود دارد؟

۵- باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد، باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه‌حل)

۶- در معادله سیاله $15x + 19y = 7$ ، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (باه راه‌حل)

۷- به گراف ۸ رأسی ۳- منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه‌حل)

۸- گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سوالات زیر پاسخ دهید.

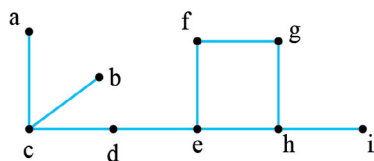


(الف) مجموعه $N_G(g)$ را بنویسید.

(ب) یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید.

(ج) درجه رأس c در گراف $\bar{G}$ (مکمل گراف G) را مشخص کنید.

۹- گراف زیر را در نظر بگیرید.



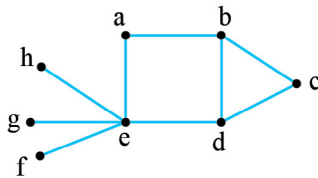
(الف) یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

(ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

(ج) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد؟

۱۰- الف) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۳ داشته باشد.

ب) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۳ داشته باشد.



۱۱- الف) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.

ب) این گراف چند γ -مجموعه دارد؟

۱۲- اگر داشته باشیم $A = \{7, 8, 9\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کارکتر متمایز می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد.

۱۳- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۱۴- قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسأله برنامه ریزی کنید.

۱۵- چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی‌باشد)

۱۶- حداقل افراد شرکت کننده در یک همایش چند نفر باشند، تا با اطمینان بتوان گفت که هر ۵ نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند و رقم یکان کد ملی آن‌ها زوج است.

پاسخنامه

- ۱- الف) درست (صفحه ۵) ب) درست (صفحه ۱۷)
ج) نادرست (صفحه ۴۰) د) نادرست (صفحه ۵۲)

۲- الف) ۱-p (صفحه ۵۳) ب) ۴ (صفحه ۶۳) ج) $\frac{5!}{2!} = 60$ (صفحه ۷۸)

۳- (صفحه ۸)
همواره بدیهی است. $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy + z^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 + z^2 + 1 \geq 0$

۴- (صفحه ۱۱)
$$\begin{cases} a \mid 2m+3 \\ a \mid m+7 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a \mid 2m+3 \\ a \mid 2m+14 \end{cases} \rightarrow a \mid 11 \rightarrow a = 1, a = 11$$

۵- (صفحه ۱۶)
$$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases}$$

$\rightarrow a = 20q' - 1 \rightarrow a = 20q'' + 19$

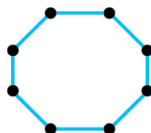
۶-
$$\begin{aligned} 15x \equiv 7 \pmod{19} &\rightarrow 15x \equiv 45 \pmod{19} \xrightarrow{(15,19)=1} x \equiv 3 \pmod{19} \\ &\rightarrow x = 19k + 3 \xrightarrow{k=5} x = 98 \end{aligned}$$
 (صفحه ۲۸)

۷- (صفحه ۴۰)
$$\begin{cases} q = \frac{kn}{2} \rightarrow q = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \\ q = \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow q = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \end{cases} \rightarrow 28 - 12 = 16$$

۸- الف) {f} ب) abdefa یا abcdea ج) ۴ (صفحه ۴۱)

۹- الف) {c,e,h,f} ب) {c,g,i,e} ج) fh (صفحه ۴۷)
در قسمت الف و ب و ج به پاسخ‌های درست دیگر نمره تعلق بگیرد.

ب)



۱۰- الف)



در قسمت الف و ب برای شکل‌های درست دیگر نمره تعلق بگیرد.

۱۱- الف) می‌دانیم $\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ پس داریم $\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{8}{5+1} \right\rceil$ در نتیجه $2 \leq \gamma(G)$ از طرفی مجموعه‌ای مانند $\{e, c\}$ هر کدام از مجموعه‌های $\{e, b\}$ یا $\{e, d\}$ اگر نوشته شد نیز مورد قبول است. یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف (G) می‌باشد پس $\gamma(G) = 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$ (فعالیت صفحه ۵۰)

۱۲- (صفحه ۷۱) $\binom{3}{2} \times \binom{6}{4} \times 6!$

۱۳- (صفحه ۷۱)
$$\begin{cases} x_4 = 0 \xrightarrow{(\cdot/25)} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \xrightarrow{(\cdot/25)} \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = 66 \\ x_4 = 1 \xrightarrow{(\cdot/25)} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \xrightarrow{(\cdot/25)} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 45 \end{cases} \rightarrow 66 + 45 = 111$$

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

و

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

۱۴- (صفحه ۷۲)

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

به مربع‌های لاتین متعامد صحیح دیگر نمره تعلق بگیرد.

۱۵- $|S| = 5^4$: تعداد کل رمزا
 $|A| = 4^4$: تعداد رمزهای فاقد ۳
 $|B| = 4^4$: تعداد رمزهای فاقد ۲
 $|A \cap B| = 3^4$: تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳
 $|A \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$

۱۶- اگر افراد جامعه را به دو دسته افراد با کد ملی زوج و فرد دسته‌بندی کنیم. برای افراد با کد ملی زوج ۱۲ ماه سال را با عنوان ۱۲ لانه در نظر می‌گیریم.

$12 = \text{تعداد ماه‌ها} = \text{تعداد لانه‌ها}$

$k + 1 = 5 \Rightarrow k = 4$ تعداد کبوترها $= nk + 1 \xrightarrow[n=12]{k=4} 12 \times 4 + 1 = 49$

اگر تعداد افراد با کد ملی فرد را m نفر در نظر بگیریم، حداقل $m + 49$ نفر باید در همایش حضور داشته باشند. پس با مقادیر مختلف m مسأله بی‌شمار جواب دارد. (صفحه ۸۳)

سوالات آزمون نهایی درس: ریاضیات گسسته

۱- درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

(ب) برای اعداد صحیح a ، b و c که $a \neq 0$ ، اگر $a | b + c$ آن‌گاه $a | b$ یا $a | c$.

(ج) معادله‌ی هم‌نهشتی $ax \equiv b^m$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m) | b$.

(د) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آن‌گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

۲- برای هر دو عدد حقیقی x و y به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$$

۳- به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b | a + 2$ ، آن‌گاه b نیز عددی فرد است

۴- اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $7 | 2k + 1$ ، ثابت کنید:

$$49 | 4k^2 - 10k - 6$$

۵- باقی مانده تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید.

۶- معادله‌ی هم‌نهشتی $1402 \equiv 11^9$ را حل کنید.

۷- جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

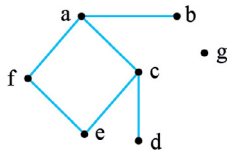
(الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف می‌گوییم.

(ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی است.

(ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه P برابر است.

(د) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد K باشد، گراف می‌گوییم.

۸- گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سوالات زیر پاسخ دهید.



(الف) مرتبه و اندازه آن را بنویسید.

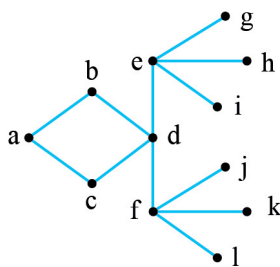
(ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.

(ج) مجموعه $N_G[c]$ را بنویسید.

(د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.

(ه) حاصل عبارت $q(\bar{G}) + \deg_{\bar{G}}(g)$ را به دست آورید.

۹- گراف زیر را در نظر بگیرید:



(الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.

(ب) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.

(ج) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.

۱۰- چهار برادر و سه خواهر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادرها کنار هم قرار بگیرند، آنگاه این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱۱- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۱، ۲، ۲، ۱، ۱ و ۱ چند کد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱۲- معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن که $x_2 = 4$ و $x_4 \geq 3$ باشد؟

۱۳- ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

۱۴- در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($1 \leq n \leq 500$) چند عدد وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟

۱۵- یک نجار در هفته ۴ مدل مختلف صندلی در ۳ رنگ متفاوت می‌سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم، لاقل ۳ صندلی هم رنگ و هم مدل ساخته است؟

پاسخنامه:

- ۱- الف) نادرست (ص ۵) ب) نادرست (ص ۱۱)
ج) درست (ص ۲۵) د) درست (ص ۱۳)

۲- (ص ۸) $2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0$
 $\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-2)^2 \geq 0$

این رابطه همواره برقرار است.

۳- $b = 2k, b | a + 2 \Rightarrow a + 2 = bq \Rightarrow a = 2t$
که با فرض سوال در تناقض است. (ص ۱۶)

۴- (ص ۱۶) $7 | 2k + 1 \Rightarrow \begin{cases} 49 | 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 49 | 4k^2 - 10k - 6 \\ 49 | 14k + 7 \end{cases}$

۵- (ص ۲۱) $63 \equiv -1 \Rightarrow 63^{16} \equiv 1 \Rightarrow A \equiv 2 \Rightarrow r = 2$

۶- (ص ۳۰) $(1 + 4 + 0 + 2)x \equiv 1 + 1 \Rightarrow 7x \equiv 2 \Rightarrow 7x \equiv -7$

$(7, 9) = 1 \Rightarrow x \equiv -1 \Rightarrow x = 9k - 1$

- ۷- الف) همبند (ص ۳۹) ب) زوج (ص ۴۰)
ج) $p - 1$ (ص ۴۲) د) $-k$ منتظم (ص ۳۵)

- ۸- (ص ۳۶) $N_G[c] = \{a, c, d, e\}$ (ص ۳۹) ب) $2q = 12$ (ص ۳۵) الف) $p = 7, q = 6$
(ص ۳۸) $q(\bar{G}) + d_{\bar{G}}(g) = 15 + 6 = 21$ (ص ۳۸) د) acefa

۹- (ص ۴۹) $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta + 1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3$

از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است (۵/۰) بنا به رابطه (*): پس: $\gamma(G) = 3$

ب) $B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۶)

ج) $C = \{a, e, f, b\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۷)

۱۰- (ص ۷۲) $3! \times 4! \times 2! = 288$ (۱)

۱۱- (ص ۵۸) $\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!}$

۱۲- (ص ۶۱) $x_1 + x_3 + x_4 = 8$

$x_4 - 3 = y_4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$

۱۳- نوشتن شرط متعادل بودن
(ص ۶۴ و ص ۶۵)

۲	۳	۲
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱۴- (ص ۷۵)

$$|A| = \left[\frac{500}{5} \right] = 100, \quad |B| = \left[\frac{500}{4} \right] = 125, \quad |A \cap B| = \left[\frac{500}{20} \right] = 25$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |\overline{A \cup B}| = 500 - (100 + 125 - 25) = 300$$

۱۵- (ص ۸۲)

$$k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2, \quad n = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow kn + 1 = 12 \times 2 + 1 = 25$$

سوالات امتحان نهایی درس: ریاضیات گسسته

۱- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

(الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.

(ب) اگر $a|b+c$ آن‌گاه $a|b$ یا $a|c$.

(پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b \neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ برقرار است.

(ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.

۲- در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.

(الف) حاصل $([m^2, m], m^5)$ برابر با است.

(ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ ، می‌گوییم a و b هستند.

(پ) یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر می‌نامیم

(ت) تعداد یال‌های گراف K_n برابر است.

۳- گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

«برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »

۴- اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m+5)$ و $(5m+6)$ بر a بخشپذیر باشند ثابت کنید $a = \pm 1$.

۵- اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیابید.

۶- باقی مانده تقسیم عدد $200! + 199! + 198! + \dots + 3! + 2! + 1!$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل می‌باشد)

۷- معادله هم‌نهشتی $4x \equiv 10 \pmod{6}$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.

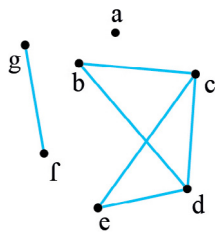
۸- در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

(الف) تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم.

(ب) گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد.

(پ) اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G) + q(\bar{G})$ برابر با $n(n-1)$ ، $\frac{n(n-1)}{2}$ است.

(ت) گراف C_n تنها یک (دور، مسیر) n رأسی دارد.



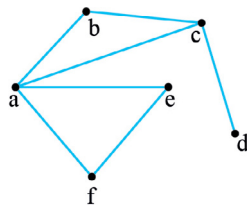
۹- گراف G (شکل مقابل) را در نظر بگیرید:

(الف) $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

(ب) دوری به طول ۴ بنویسید.

(پ) دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس b بنویسید.

(ت) $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.



۱۰- عدد احاطه‌گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

۱۱- یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۲- می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر

بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟

۱۳- به چند روش می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که، از گل نوع سوم فقط

۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهارشاخه انتخاب کنیم؟

۱۴- قرار است سه مدرس T_1 ، T_2 و T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1 ، C_2 و C_3 به گونه‌ای

تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده

از مربع لاتین، برنامه‌ریزی کنید



۱۵- چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشپذیرند؟

۱۶- هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است

پاسخنامه:

- 1- الف) درست (ب) نادرست (پ) نادرست (ت) درست

2- الف) m^2 (ب) نسب به هم اول (ص ۱۳) (پ) مینیمال (ص ۴۶) (ت) ۲۱ (ص ۳۸)

3- $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$
(ص ۷ و ۸) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است. $\Rightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0$

4- (ص ۱۱)
 $a \mid 6(\delta m + 4) \rightarrow a \mid 6(\delta m + 5) - 6(\delta m + 4) \rightarrow a \mid 1 \rightarrow a = \pm 1$
 $a \mid 5(\delta m + 5)$

5- می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $4k + 1$ می‌باشد. ($k \in \mathbb{Z}$) پس داریم (ص ۱۶)
$$\begin{cases} a^2 = 4k + 1 \\ b^2 = 4k' + 1 \end{cases} \rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 4k + 1 + 4k' + 1 + 5 \rightarrow a^2 + b^2 + 5 = 4k'' + 7 \rightarrow r = 7$$

6- می‌دانیم $1! \equiv 1$ و $2! \equiv 2$ و $3! \equiv 6$ و $4! \equiv 9$ و $5! \equiv 0$ و $200! \equiv 0$ پس داریم: (ص ۳۹)
 $1! + 2! + 3! + 4! + 5! + \dots + 200! \equiv 1 + 2 + 6 + 24 + 0 + 0 + \dots + 0 \equiv 3$

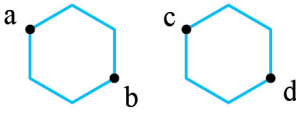
7- چون $20 \mid (12, 8)$ معادله جواب دارد. (صفحه ۳۰)
 $4x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 4 \rightarrow x \equiv 1 \rightarrow x = 3k + 1$

8- الف) مرتبه (ب) مسیر (پ) $\frac{n(n-1)}{2}$ (ت) دور (ص ۳۵ و ۳۸)

9- الف) $\Delta(G) = 3$ ، $\delta(G) = 0$ (ب) $b c e d b$
(پ) $bcde$ یا $bdec$ یا $bdce$ (ت) $N_G(f) = \{g\}$ (ص ۴۱)

10- روش اول می‌دانیم $\left| \frac{n}{\Delta + 1} \leq \gamma(G) \right|$ پس داریم $\left[\frac{6}{5} \right] \leq \gamma(G)$ بنابراین $2 \leq \gamma(G)$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم $\gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$.
روش دیگر: این گراف با مجموعه دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می‌شود. پس عدد احاطه‌گری این گراف کوچکتر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq 2$ اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رئوس را احاطه می‌کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > 1$ بنابراین $1 < \gamma(G) \leq 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$.

۱۱- رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه‌گری آن



(ص ۵۳)

به شکل‌های دیگر نیز نمره داده شود. مانند

۱۲- (ص ۷۱) $4! \times 2^4 = 384$

۱۳- (ص ۷۱) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16 \quad x_2 = 3 \quad x_4 \geq 3, x_5 \geq 5 \xrightarrow{x_2=3, x_4=y_2+3, x_5=y_5+5}$
 $x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 + 5 = 16 \quad x_1 + x_2 + y_4 + y_5 = 5 \quad x_1 \geq 0, y_5 \geq 0 \rightarrow \binom{5+4-1}{4-1} = 56$

۱۴- فرض کنیم هر سطر نشان دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱۵- $|\overline{A \cup B}| = |s| - |A \cup B| = |s| - |A| - |B| + |A \cap B|$
 (ص ۸۳) $|s| = 630, |A| = 210, |B| = 126, |A \cap B| = 42$
 $\Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 336$

۱۶- ابتدا مستطیل مورد نظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری دست کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است. با توجه به قضیه فیثاغورس داریم: (ص ۸۴)

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 \rightarrow AB^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < \sqrt{8}$$