



گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل



# درس ریاضی یازدهم

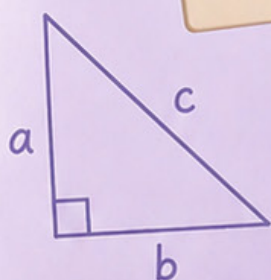
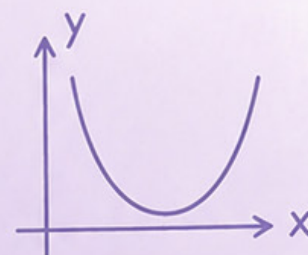
نوترویست



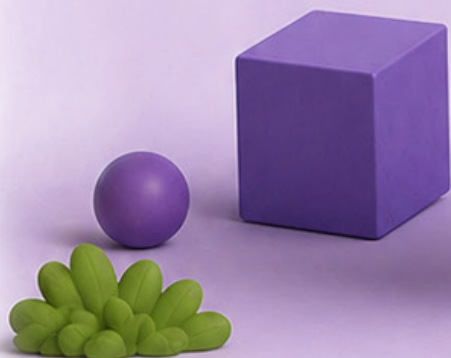
$\sqrt{x}$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

ریاضی



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$





# نوטר وفیل خونہ رتبہ برترها

## قبولی های کنکور ۱۴۰۴



### تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۸  
ایمان نیک نام جهرمی

رتبه ۳۲  
امیرمحمد رضائی

رتبه ۲۰  
سینا راضی

رتبه ۱۶  
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴  
امیرمحمد کیانی

### دور رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۸۰  
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵  
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱  
بهار هلالی

رتبه ۵۹  
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵  
مهسا سیاوشی

### سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲  
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۱۶۹  
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰  
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷  
محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲  
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۳۴۱  
حمیدرضا بشیری

رتبه ۳۰۸  
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱  
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹  
ابوالفضل ناصران

رتبه ۵۳۹  
نجمه کیخا

رتبه ۵۳۷  
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۲  
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۱۴  
محمدپارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳  
زهرا بابائی

رتبه ۶۶۱  
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶  
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰  
زهرا ولی نژاد

رتبه ۵۵۷  
محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶  
حسین تفضلی نژاد

رتبه ۷۸۱  
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴  
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱  
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲  
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷  
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹  
کیلیما فدائی

رتبه ۸۹۳  
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴  
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳  
ماتده رنجبر

رتبه ۷۸۶  
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷  
زهرا بابائی

رتبه ۱۱۲۲  
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸  
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲  
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷  
صفورا بقائی

رتبه ۱۳۵۰  
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴  
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴  
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶  
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴  
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳  
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳  
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳  
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴  
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲  
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶  
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۶۷۸  
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹  
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸  
امیرمحمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴  
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹  
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵  
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶  
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴  
هللیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱  
محمدرضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴  
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱  
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱  
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۱۱  
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵  
زهرا جمعی

رتبه ۳۳۴۳  
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴  
هللیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳  
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱  
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰  
هدیه رحیمی

## فصل اول: هندسه تحلیلی و جبر

## هندسه تحلیلی

**سوال ۱** اگر  $A(1, 4)$  و  $B(-2, -2)$  و  $C(4, 2)$  سه رأس مثلث  $ABC$  می‌باشند آنگاه

الف) معادله ارتفاع  $BH$  را به دست آورید.

ب) طول ارتفاع  $BH$  را به دست آورید.

**پاسخ:** الف)

۱- ابتدا شیب را حساب می‌کنیم.

$$m_{BH} = \frac{1}{m_{AC}}$$

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{2 - 4}{4 - 1} = -\frac{2}{3} \rightarrow m_{BH} = -\frac{3}{2}$$

$$y - (3) = -\frac{3}{2}(x - (-2)) \rightarrow y + 2 = -\frac{3}{2}x + 3 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 1$$

۲- پیدا کردن معادله خط

$$\text{معادله } AC \Rightarrow y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y + 2x - 14 = 0$$

$$BH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2 \times (-2) + 3(-2) + (14)|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} \Rightarrow BH = \frac{??}{\sqrt{13}}$$

ب)

**سوال ۲** فاصله نقطه‌ی  $P(7, -4)$  از خط  $2x + y = 5$  را به دست آورید. (با راه حل و جواب را گویا کنید)

**پاسخ:**

$$P(7, -4) \quad 2x + y - 5 = 0 \quad a = 2, b = 1, c = -5$$

$$d = \frac{|2 \times 7 + 1 \times (-4) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}}$$

$$d = \frac{|14 - 5 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$$

**سوال ۳** نقاط  $A(4, 1)$  و  $B(-2, 2)$ ،  $C(2, -3)$  رئوس مثلث  $ABC$  هستند:

الف) معادله میانه  $BN$  را به دست آورید.

ب) خط  $BN$  محور  $x$  ها و  $y$  ها را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

**پاسخ:** الف) ابتدا مختصات نقاط  $N$  وسط ضلع  $AC$  را به دست می‌آوریم:

$$N\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right) \Rightarrow N(3, -1)$$

با داشتن مختصات نقاط  $N(3, -1)$  و  $B(-2, 2)$  فرمول زیر، معادله خط گذرا از نقاط  $B$  و  $N$  را به دست آوریم:

$$y - y_B = \frac{y_N - y_B}{x_N - x_B}(x - x_B) \Rightarrow y - 2 = \frac{-2 - 1}{3 - (-2)}(x + 2) \Rightarrow y - 2 = -\frac{3}{5}(x + 2)$$

$$\Rightarrow BN: 3x + 5y - 4 = 0$$

ب) محل برخورد با محور  $x$  ها یعنی جایی که  $y = 0$

و محل برخورد با محور  $y$  ها یعنی جایی که  $x = 0$

محل برخورد با محور X  $\xrightarrow{y=0} 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}, 0\right)$

محل برخورد با محور Y  $\xrightarrow{x=0} 5y - 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{5} \Rightarrow \left(0, \frac{4}{5}\right)$

**معادله درجه دوم و تابع درجه دوم:**

**سوال ۴** به ازای کدام مقدار  $m$  معادله درجه دوم  $x^2 - (m-1)x + 9$  فاقد ریشه حقیقی است؟

**پاسخ:** شرط نداشتن ریشه این بود:  $\Delta < 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$(m-1)^2 - 4(1)(9) < 0 \Rightarrow (m-1)^2 < 36 \xrightarrow{\sqrt{a^2=|a|}} |m-1| < 6$

$\rightarrow -6 < m-1 < 6 \rightarrow \boxed{-5 < m < 7}$

**سوال ۵** الف) معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن  $1 + \sqrt{2}$  و  $1 - \sqrt{2}$  باشد.

ب) آیا دو تابع با ضابطه  $f(x) = x - 2$  و  $g(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$  با هم برابرند؟ چرا؟

**پاسخ:** الف)

$$\left. \begin{array}{l} \text{جمع ریشه‌ها } S = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \\ \text{ضرب ریشه‌ها } P = (1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 2x - 1 = 0}$$

ب) شرط برابری دو تابع دامنه آن تابع است.

$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R} - \{-2\}$

**سوال ۶** اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ریشه‌های معادله  $x^2 - 6x - 2 = 0$  باشند آنگاه حاصل عبارت  $4\alpha^2 - 12\alpha + 2\beta^2$  کدام است؟

**پاسخ:**

$x^2 - 6x - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} \left\{ \begin{array}{l} S = -\frac{b}{a} = 6 \\ P = \frac{c}{a} = -2 \end{array} \right.$   
دارای دو ریشه

عبارت  $4\alpha^2 - 12\alpha + 2\beta^2$  را به صورت زیر می‌نویسیم:

$2\alpha^2 + 2\beta^2 + 2\alpha^2 - 12\alpha = 2(\alpha^2 + \beta^2) + \underbrace{2\alpha^2 - 12\alpha}_{(2)} \Rightarrow$

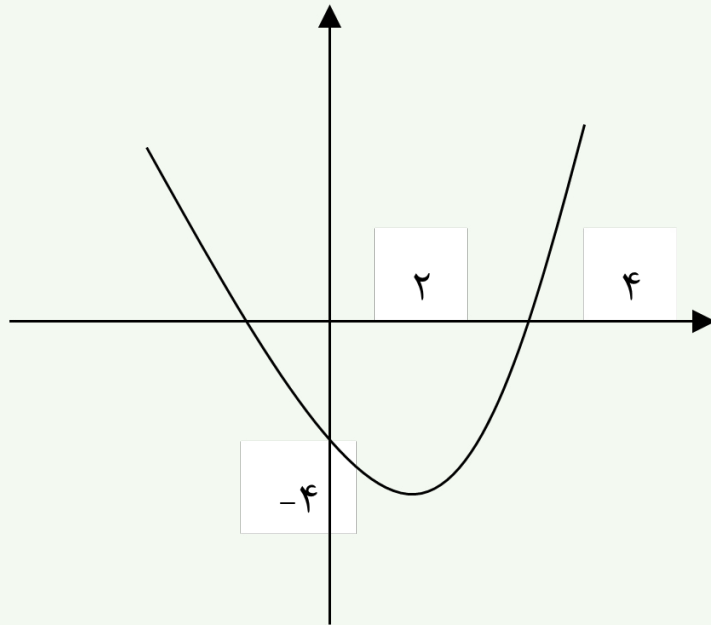
$2(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2(S^2 - 2P) = 2(36 + 4) = 80$

برای به دست آوردن عبارت (۲) کافیست معادله درجه دوم را  $x^2 - 6x = 2$  نوشته و سپس  $x = a$  را که یکی از ریشه‌های آن است در معادله جایگذاری می‌کنیم

$a^2 - 6a = 2 \xrightarrow{\times 2} 2a^2 - 12a = 4 \Rightarrow (1), (2) \Rightarrow 80 + 40 = 120$

سوال ۷ سهمی به معادله  $y = x^2 - 4x$  را رسم کنید.

**پاسخ:** چونکه  $a > 0$  پس دهانه سهمی رو به بالا است رأس سهمی از  $x_s = -\frac{b}{2a}$  و  $y_s = \frac{4ac - b^2}{4a}$  به دست آورید



$$\text{رأس سهمی} \begin{cases} x_s = 2 \\ y_s = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases}$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = \boxed{2}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری معادله}} y_s = 2^2 - 2(2) = \boxed{-4}$$

سوال ۸ از معادله  $\sqrt{4a^2 - 4a - 7} = a$  ، حاصل  $\frac{a-2}{a-1}$  کدام است؟

**نکته** در معادلات رادیکالی این است که با توان رسانی رادیکال را از بین ببریم و به یک معادله برسیم.

$$\sqrt{4a^2 - 4a - 7} = a \xrightarrow{\text{توان رسانی ۲}} 4a^2 - 4a - 7 = a^2$$

**پاسخ:**

$$\Rightarrow 3a^2 - 4a - 7 = 0 \xrightarrow{\begin{matrix} a+c=b \\ a=-1, x=\frac{-c}{a} \end{matrix}} \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{7}{3} \end{cases}$$

$a = -1$  در معادله صدق می‌کند و فقط  $a = \frac{7}{3}$  تنها جواب معادله است. حال خواسته‌ی سوال:

$$\frac{a-2}{a-1} = \frac{\frac{7}{3}-2}{\frac{7}{3}-1} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{4}$$

**سوال ۹** اگر مجموع جواب‌های معادله  $\frac{5}{x^2+3x-4} - \frac{3}{x^2+5x+4} = \frac{m}{x}$  برابر ۸- باشد  $m$  کدام است؟

**پاسخ:** در عبارت‌های گویا باید سعی کنیم مخرج را از بین ببریم.

$$\begin{aligned} \frac{5}{(x+4)(x-1)} - \frac{3}{(x+4)(x+1)} &= \frac{m}{x} \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{5}{(x+4)(x-1)(x+1)} - \frac{3}{(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x} \\ \rightarrow \frac{5(x+1) - 3(x-1)}{(x+4)(x-1)(x+1)} &= \frac{m}{x} \rightarrow \frac{5x+5-3x+3}{(x+4)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x} \\ \rightarrow \frac{2x+8}{(x+4)(x-1)} &= \frac{m}{x} \Rightarrow \frac{2(x+4)}{(x+4)(x-1)} = \frac{m}{x} \Rightarrow \frac{2}{x-1} = \frac{m}{x} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2x = m(x-1) \Rightarrow mx^2 - m - 2x = 0 \xrightarrow{\text{مرتب کردن}} \boxed{mx^2 - 2x - m = 0}$$

$$\xrightarrow{\text{مجموع جواب‌ها}} S = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{m} = -8 \Rightarrow S = -\frac{-2}{m} = -8 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1}{4}}$$

**سوال ۱۰** تعداد جواب‌های معادله  $\sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{x^2-3x} = 0$  را به دست آورید.

**پاسخ:** مجموع دو رادیکال با فرجه زوج برابر صفر است پس معادله زمانی جواب دارد که دو رادیکال همزمان صفر باشند.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$$

فقط  $x=3$  در معادله صدق می‌کند.

**سوال ۱۱** جواب‌های معادله زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{2x+1} = x-2$$

**پاسخ:** طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم تا معادله از حالت گنگ خارج شود.

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (2x+1) = (x-2)^2 \Rightarrow 2x+1 = x^2-4x+4 \Rightarrow x^2-6x+3=0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-6)^2 - 4(1)(3) \Rightarrow 36 - 12 = 24 > 0$$

دو جواب دارد

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{24}}{2(1)} = \begin{cases} \frac{6+2\sqrt{6}}{2} = 3+\sqrt{6} \\ \frac{6-2\sqrt{6}}{2} = 3-\sqrt{6} \end{cases}$$

غ ق ق چون که در دامنه معادله اولیه نیست.

**سوال ۱۲** مجموع معکوس دو عدد طبیعی زوج متوالی، ۷ برابر اختلاف معکوس آنها است آن دو عدد را به دست آورید

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} = 7 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{2x+2}{x^2+2x} = \frac{14}{x^2+2x}$$

$$\Rightarrow 2x+2=14 \Rightarrow 2x=12 \Rightarrow \boxed{x=6}$$

اعداد زوج که داشتیم:

اولی:  $x = 6$

دومی:  $x + 2 = 8$

**فصل دوم: ترسیم‌های هندسی**

**سوال ۱۳** نقطه‌ی M روی عمود منصف پاره خط BA است و فاصله‌ی آن تا A برابر  $4x - 3$  و تا B برابر  $x^2 - 15$  است مقدار x کدام است؟

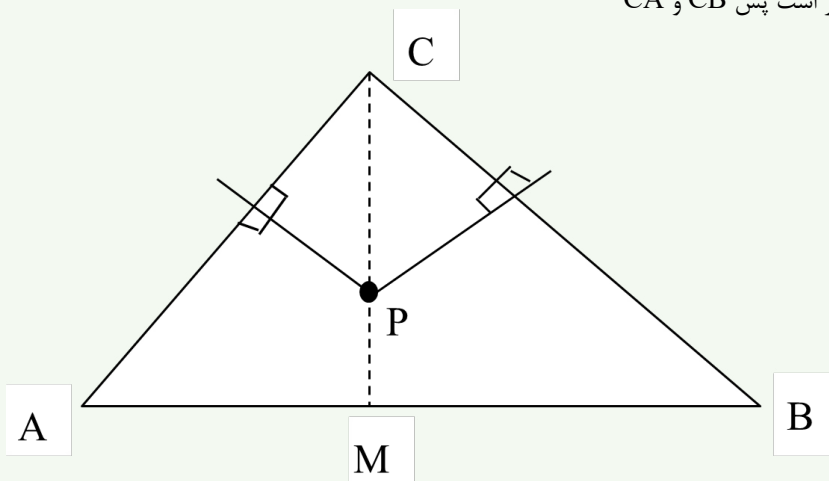
**پاسخ:** فاصله‌ی هر نقطه روی عمود منصف پاره خط AB تا A و B یکسان است بنابراین:

$$x^2 - 15 = 4x - 3 \rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0 \rightarrow (x - 6)(x + 2) = 0$$

$$\begin{cases} x - 6 = 6 \rightarrow \boxed{x = 6} \\ x + 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = -2} \end{cases}$$

**سوال ۱۴** عمود منصف‌های دو ضلع CA و CB و میانه MC از مثلث ABC در نقطه‌ی P یکدیگر را قطع می‌کنند نوع مثلث ABC و برابری ضلع‌ها را بررسی کنید

**پاسخ:** در هر مثلث، سه عمود منصف هم راسند، پس علاوه بر این که میانه AB است ارتفاع وارد بر آن و عمود منصف نیز هست. در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع با میانه برابر است پس CA و CB



**سوال ۱۵** نقطه‌ی M روی عمود منصف پاره خط AB قرار دارد اگر فاصله‌ی A تا M برابر  $3x + 2$ ، فاصله‌ی B تا M برابر  $6x - 1$  و فاصله‌ی M تا پاره خط AB برابر  $x + 3$  باشد طول پاره خط AB را به دست آورید.

**نکته** نکته مهم این سوال این است که بدانیم علامت منفی پشت کل تابع، را نسبت به محور x ها قرینه می‌کند و علامت منفی پشت x تابع را نسبت به محور y ها قرینه می‌کند. پس در اینجا تابع را نسبت به محور y ها قرینه و ۲ واحد به سمت بالا می‌بریم



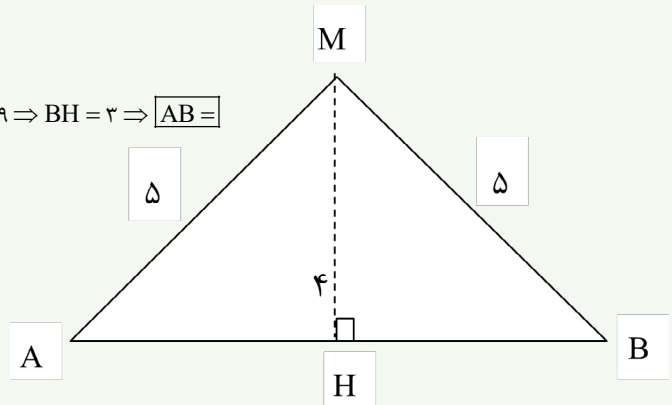
**پاسخ:** چون M روی عمود منصف AB قرار دارد، پس:

$$AM = BM \Rightarrow 3x + 2 = 6x - 1 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\text{فاصله} = x + 3 \xrightarrow{x=1} MH = 4$$

M تا پاره خط AB

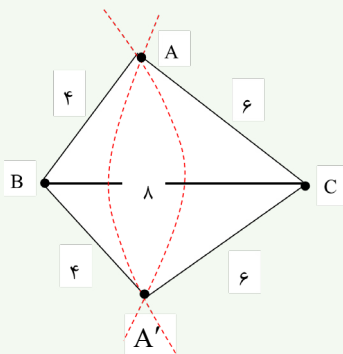
$$\text{رابطه فیثاغورث} \quad BH^2 = BM^2 - MH^2 \Rightarrow BH^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow BH = 3 \Rightarrow \boxed{AB = 6}$$



**سوال ۱۶** طریقه‌ی رسم مثلثی به اضلاع ۴ و ۶ و ۸ را با رسم فرض کنید می‌خواهیم مثلث CBA را رسم کنیم که در آن

$$AB = 4, AC = 6, BC = 8 \text{ است}$$

**پاسخ:** پاره خط  $BC = 8$  را رسم می‌کنیم (به این صورت)



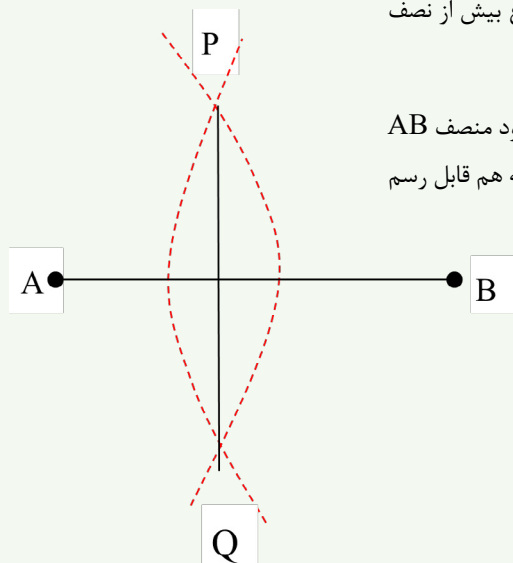
از آنجا که  $AB = 4$ ، رأس A روی دایره‌ای به مرکز B و شعاع ۴ واحد قرار دارد پس به مرکز B و شعاع ۴ واحد، کمانی رسم می‌کنیم همچنین از آنجا که  $AC = 6$ ، رأس A روی دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۶ واحد قرار دارد پس به مرکز C و شعاع ۶ واحد کمانی رسم می‌کنیم محل برخورد این دو کمان رأس A را مشخص می‌کند یعنی در شکل بالا، دو مثلث هم‌نشست ABC و  $A'BC$  مثلث‌هایی به طول ضلع‌های ۴ و ۶ و ۸ واحد هستند.

**سوال ۱۷** طریقه‌ی رسم عمود منصف یک پاره خط را توضیح دهید.

**پاسخ:** فرض کنید می‌خواهیم عمود منصف پاره خط AB را رسم کنیم به مرکزهای A و B با

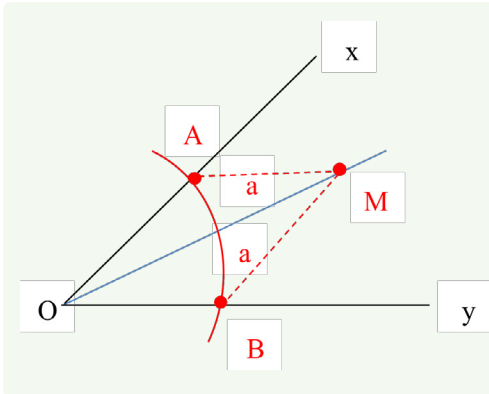
شعاعی یکسان، دو کمان را طوری رسم می‌کنیم که با هم متقاطع باشند (اگر شعاع بیش از نصف طول AB باشد این دو کمان متقاطع خواهند بود)

نقاط برخورد این دو مکان  $(P, Q)$ ، از A و B به یک فاصله هستند پس روی عمود منصف AB قرار دارند و از آنجا که هر خط با معلوم بودن فقط از آن و وصل کردن این دو نقطه به هم قابل رسم است می‌توان گفت خط گذرنده از P و Q عمود منصف AB است.



سوال ۱۸

روش رسم نیمساز یک زاویه را با رسم شکل توضیح دهید.



**پاسخ:** فرض کنید می‌خواهیم نیمساز زاویه‌ی  $Y$  و  $X$  را رسم کنیم ابتدا به مرکز  $O$  کمان دلخواهی رسم می‌کنیم تا  $Ox$  و  $Oy$  را به ترتیب در نقاط  $A$  و  $B$  قطع کند سپس دهانه‌ی پرگذر را به مقدار بیشتر از نصف طول  $AB$  باز کرده و یکبار به مرکز  $A$  و بار دیگر به مرکز  $B$  - کمان‌هایی با شعاع برابر رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه‌ی  $M$  قطع کند از نقطه  $O$  به  $M$  وصل کرده و  $OM$  را از سمت  $M$  ادامه می‌دهیم تا نیم خط  $OZ$  حاصل شود.

تشابه مثلث‌ها:

سوال ۱۹

در دو مثلث مشابه- نسبت مساحت‌های آن برابر  $\frac{9}{16}$  است اگر اضلاع مثلث بزرگ‌تر ۹ و ۲۱ و ۵۱ باشد

محیط مثلث کوچک‌تر کدام است؟

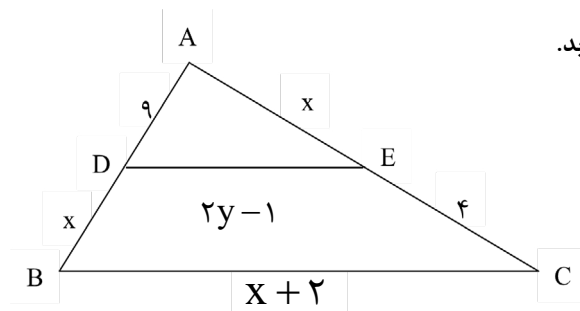
**پاسخ:** محیط مثلث بزرگ‌تر برابر است با:  $9 + 12 + 15 = 36$

اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر با  $K$  باشد نسبت مساحت آنها برابر  $K^2$  است همچنین نسبت محیط مثلث‌ها برابر  $K$  است بنابراین:

$$\frac{\text{محیط مثلث کوچک}}{\text{محیط مثلث بزرگ}} = \sqrt{\frac{9}{16}} \Rightarrow \frac{\text{محیط مثلث کوچک‌تر}}{36} = \frac{3}{4} \rightarrow \text{محیط مثلث کوچک‌تر} = \frac{3 \times 36}{4} = 27$$

سوال ۲۰

در شکل مقابل  $OE \parallel BC$  مقدار  $x$  و  $y$  را به دست آورید.



**پاسخ:** طبق قضیه‌ی تالس:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{9}{9+x} = \frac{x}{4+x} = \frac{2y-1}{x+2}$$

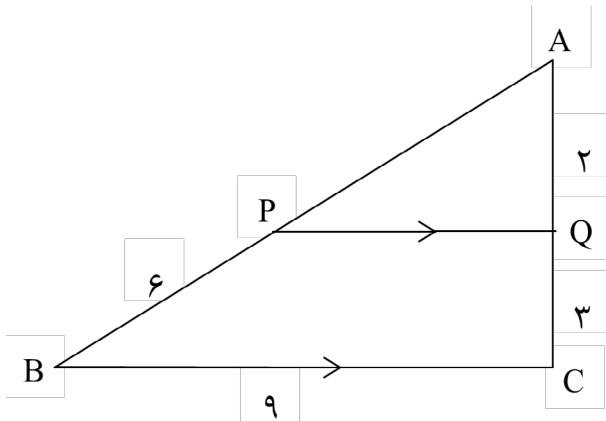
از تناسب:  $\frac{9}{9+x} = \frac{x}{4+x}$  داریم:  $36 + 9x = 9x + x^2$

در معادله جاگاری می‌کنیم  $x^2 = 36 \rightarrow x = 6$  لذا داریم:  $\frac{9}{15} = \frac{6}{10} = \frac{2y-1}{8}$

از تناسب  $\frac{6}{10} = \frac{2y-1}{8}$  داریم:  $48 = 20y - 10 \rightarrow 20y = 58 \rightarrow y = \frac{58}{20} = \frac{29}{10}$  پس  $y = \frac{29}{10}$



سوال ۲۱ در شکل زیر  $PQ \parallel BC$  است مقادیر  $AP$  و  $PQ$  را به دست آورید.

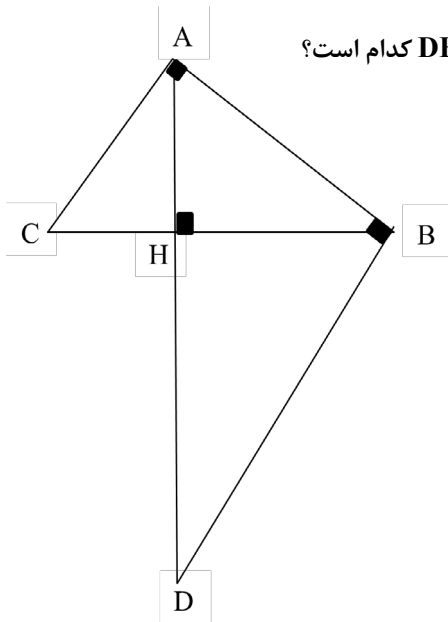


$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{6} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{AP = 4}$$

پاسخ: طبق قضیه‌ی تالس:

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} \Rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5} = \frac{PQ}{a} \Rightarrow \boxed{PQ = \frac{18}{??}}$$

سوال ۲۲ با توجه به شکل زیر اگر  $AB = 5$  ،  $BC = \frac{5}{4}$  آنگاه طول پاره خط  $DB$  کدام است؟



پاسخ:

$$BC = \frac{5}{4} \quad AB = 5 \Rightarrow \begin{cases} BC = 5 \\ AB = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{فیثاغورث}} AC = 3$$

دو مثلث قائم‌الزاویه  $ABC$  و  $ABD$  زوایای حاده برابر دارند.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow BD = \frac{AB^2}{AC} = \frac{16}{3}$$

**سوال ۲۳** مثلثی به طول اضلاع ۱۰ و ۸ و a با مثلثی به طول اضلاع ۱۸ و ۱۴ و b متشابه است بیشترین مقدار ممکن برای عدد b کدام است؟

**پاسخ:** با توجه به این که دو مثلث متشابه‌اند  $\frac{10}{14} \neq \frac{8}{18}$  و  $\frac{8}{14} \neq \frac{10}{18}$  پس دو ضلع به طول‌های a و b از دو مثلث نمی‌توانند متناظر باشند بنابراین ضلع به طول a از مثلث اول یا با طول ۱۴ از مثلث دوم برابر است (متناظر است) یا با ضلع به طول ۱۸ متناظر است هر یک از این دو حالت را باید بررسی کنیم تا a به دست آید:

(حالت اول)

$$\frac{a}{18} = \frac{8}{14} = \frac{10}{14} \Rightarrow \boxed{b = \frac{56}{5}}, \boxed{a = \frac{90}{7}}$$

$$\frac{a}{18} = \frac{8}{14} = \frac{10}{b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{70}{4}}, \boxed{a = \frac{72}{7}}$$

(حالت دوم)

$$\frac{a}{14} = \frac{8}{18} = \frac{10}{b} \Rightarrow \boxed{b = \frac{45}{2}}, \boxed{a = \frac{56}{9}}$$

:

$$\frac{a}{14} = \frac{8}{14} = \frac{10}{18} \Rightarrow \boxed{b = \frac{72}{5}}, \boxed{a = \frac{70}{9}}$$

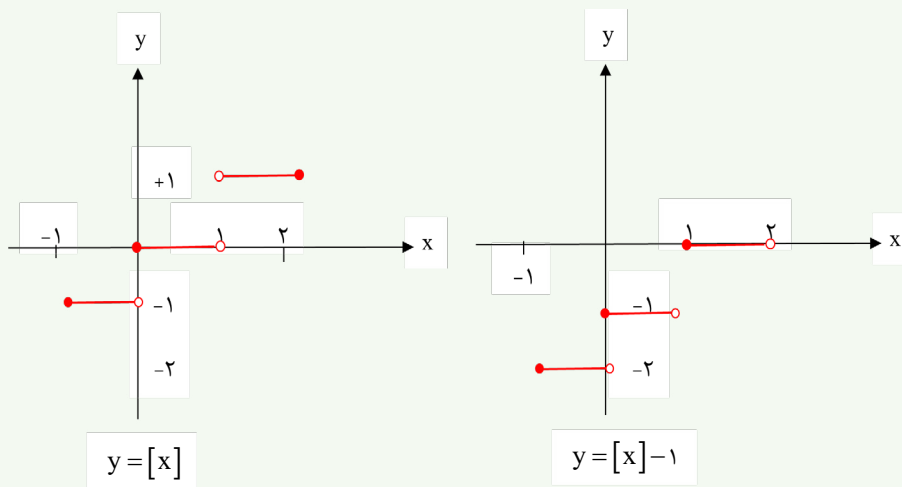
از مقادیر به دست آمده برای b مقدار  $\frac{45}{2}$  بیشترین مقدار را داراست.

ضلع به طول a از مثلث اول و ضلع به طول ۱۴ از مثلث دوم

### فصل سوم: تابع (قسمت ۱، آشنایی با برخس از انواع تابع)

**سوال ۲۴** به کمک انتقال نمودار  $f(x) = [x] - 1$  را در بازه  $(-1, 2]$  رسم کنید.

**پاسخ:**





**سوال ۲۵** الف) مقدار  $\left\lfloor \frac{۲۵}{۴} \right\rfloor$  را به دست آورید.

ب) نمودار تابع با ضابطه‌ای  $f(x) = [x] + ۲$  را در بازه  $[-۱, ۲)$  را رسم کنید.

**پاسخ:** الف) در توابع براکت:

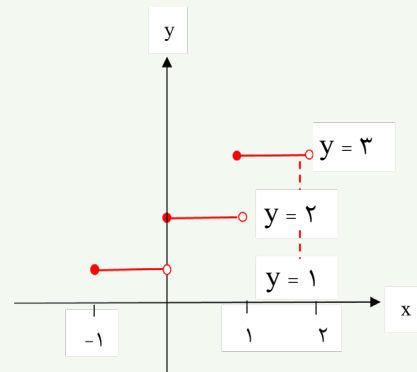
$$\left\lfloor \frac{۲۵}{۴} \right\rfloor = \left[ \frac{۲۵}{۴} \right] = ۶$$

$$[۸+k] \xrightarrow{k < ۱} n$$

ب)

$$f(x) = [x] + ۲ \quad [-۱, ۲)$$

$$\left. \begin{aligned} -1 \leq x < 0 &\rightarrow [x] = -1 \rightarrow y = -1 + 2 = 1 \\ 0 \leq x < 1 &\rightarrow [x] = 0 \rightarrow f(x) = 0 + 2 = 2 \\ 1 \leq x < 2 &\rightarrow [x] = 1 \rightarrow f(x) = 1 + 2 = 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow$$



**سوال ۲۶** به ازای چند عدد صحیح  $m$  دامنه تابع  $f(x) = \frac{mx + 2}{(m-1)x^2 + (2m-1)x - 1}$  مجموعه اعداد حقیقی است؟

**پاسخ:** چون که  $D_p = \mathbb{R}$  است مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد. بنابراین:

$$\Delta < 0 \Rightarrow (2m-1)^2 - 4(m-1)(-1) < 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 + 4m - 4 < 0$$

$$\rightarrow 4m^2 - 3 < 0 \rightarrow m^2 < \frac{3}{4} \rightarrow |m| < \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} < m < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

تنها عدد صحیح  $m = 0$  در بازه فوق قرار دارد.

**سوال ۲۷** به ازای کدام مقدار  $a$ ، دو تابع  $f$  و  $g$  با هم برابرند؟

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2} & x \neq -1 \\ 2a - 1 & x = -1 \end{cases}, \quad g(x) = x - 2$$

**پاسخ:** شرط تساوی دو تابع  $f$  و  $g$  آن است که دامنه‌ها برابر باشند  $D_f$  و  $D_g$  به ازای هر  $x$  عضو دامنه داشته باشیم  $f(x) = g(x)$ .

$$D_f = D_g = \mathbb{R}$$

$$\xrightarrow{x \neq -2} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = x - 2 = g(x)$$

$$\xrightarrow{x = -2} f(-2) = 2a - 1, \quad g(-2) = -2 - 2 = -4$$

$$\Rightarrow 2a - 1 = -4 \Rightarrow 2a = -3 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

**سوال ۲۸** حاصل  $\left[ \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} \right]$  برابر کدام است؟ ( [ ] و علامت جز صحیح است)

**پاسخ:**

$$A = \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} \xrightarrow{\text{توان } 2} A^2 = 4 + \sqrt{7} + 4 - \sqrt{7} + 2\sqrt{4+\sqrt{7}} \times \sqrt{4-\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow A^2 = 8 + 2\sqrt{16-7} = 8 + 2\sqrt{9} = 8 + 6 = 16$$

$$\text{عبارت داده شده} = \left[ \sqrt{16} \right] = 4$$

### فصل سوم:

### بخش دوم: اعمال جبری روی توابع

**سوال ۲۹** اگر  $f(x) = -\sqrt{x}$  باشد حاصل  $(f \circ f^{-1})(1)$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$f(x) = -\sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} D_f = [0, +\infty) \\ R_f = (-\infty, 0] \end{cases}$$

می‌دانیم  $D_{f^{-1}} = R_f$  است بنابراین  $1 \in (-\infty, 0]$ ، در نتیجه  $f^{-1}(1)$  تعریف نشده است.

**سوال ۳۰** آیا دو تابع زیر با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$g(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+1}$$

**پاسخ:**

$$\left. \begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} - \{-1\} \\ D_g &= \mathbb{R} - \{-1\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{(x+1)}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{1}{x+1} \Rightarrow f(x) = g(x)$$

**سوال ۳۱** دو تابع  $f$  و  $g$  به صورت زیر داده شده‌اند:

$$f = \{(1, -1), (2, 3), (3, 1), (4, 1)\}$$

$$g = \{(1, 2), (2, 0), (3, 1), (5, 2)\}$$

الف) تابع  $f + g$  را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

ب) دامنه تابع  $\frac{f}{g}$  و مقدار  $\frac{f}{g}(1)$  را به دست آورید.



**پاسخ:** دامنه دو تابع به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} D_f &= \{1, 2, 3, 4\} \\ D_g &= \{1, 2, 3, 5\} \end{aligned} \Rightarrow f + g(1) = f(1) + g(1) = -1 + 2 = 1$$

$$f + g(2) = f(2) + g(2) = 3 + 0 = 3$$

$$f + g(3) = f(3) + g(3) = 1 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow f + g = \{(1, 1)(2, 3)(3, 2)\}$$

(الف)

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{g(x) = 0\} = \{1, 2, 3\} - \{2\} = \{1, 3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{f(1)}{g(1)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

(ب)

**سوال ۳۲** اگر  $f + 2g = \{(5, 6)(-2, 2)(0, 4)\}$  و  $f - g = \{(0, 5)(-1, 4)(5, 6)\}$  آنگاه کدام است؟

**پاسخ:** با توجه به تابع  $f - g$  تابع  $2f - 2g$  را به دست می‌آوریم:

$$2(f - g) = 2f - 2g = \{(0, 10)(-1, 8)(5, 12)\}$$

حال با جمع کردن دو تابع  $f + 2g$  و  $2f - 2g$  داریم:

$$\Rightarrow f = \left\{ \left(0, \frac{14}{3}\right) \left(-1, \frac{10}{3}\right) (5, 6) \right\}$$

$$\Rightarrow f(0) - f(5) = \frac{14}{3} - 6 = \frac{-4}{3}$$

**سوال ۳۳** اگر  $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$  و  $g = \{(0, 4)(3, -1)(2, 1)(1, 2)\}$  باشند تابع  $f \times g$  کدام است؟

**پاسخ:** ابتدا دامنه  $f \times g$  را درمی‌یابیم سپس از اشتراک دامنه‌ها مقدار را حساب می‌کنیم.

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}, D_g = \{0, 3, 2, 1\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \{0, 3, 1\}$$

$$f \times g = \{(0, f(0) \times g(0))(3, f(3) \times g(3))(1, f(1) \times g(1))\}$$

$$f \times g = \left\{ \left(0, \frac{-1}{4} \times 4\right) \left(3, \frac{4}{5} \times (-1)\right) \left(1, \frac{-2}{3} \times 2\right) \right\} \left\{ (0, -1) \left(3, -\frac{4}{5}\right) \left(1, \frac{-4}{3}\right) \right\}$$

**سوال ۳۴** اگر  $f = \{(2, 3)(3, 4)(5, 6)(6, 7)\}$  و  $g^{-1} = \{(4, 5)(5, 6)(6, 7)\}$  باشند آنگاه مقدار

$f^{-1}(3) + g(6)$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$(2, 3) \in f \Rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

$$(5, 6) \in g \Rightarrow g(6) = 5$$

$$\Rightarrow f^{-1}(3) + g(6) = 2 + 5 = 7$$

### فصل ۴: مثلثات (بحث اول: واحدهای اندازه‌گیری زاویه)

**سوال ۳۵** زوایای مثلثی با اعداد ۳ و ۳ و ۹ متناسبند مجموع دو زاویه‌ی کوچک‌تر چند رادیان است؟

**پاسخ:** مجموع زوایای مثلث  $180^\circ$  است که معادل  $\pi$  رادیان است. اگر زوایای مثلث را  $3k$  و  $6k$  و  $9k$  فرض کنیم آنگاه:

$$3k + 6k + 9k = \pi \Rightarrow 18k = \pi \Rightarrow k = \frac{\pi}{18}$$

$$\text{مجموع دو زاویه‌ی کوچک‌تر} = 3k + 6k + 9k = \frac{9\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \text{ (rad)}$$

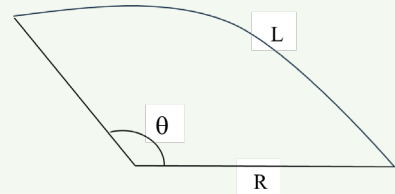
**سوال ۳۶** محیط قطاع با زاویه‌ی  $135^\circ$  و شعاع  $4\text{ cm}$  را محاسبه کنید.

**پاسخ:** ابتدا زاویه را به رادیان تبدیل می‌کنیم.

$$\frac{135^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

اگر قطاع مورد نیاز به صورت زیر باشد طول کمان از رابطه  $L = R\theta$  قابل محاسبه است.

$$L = R\theta \Rightarrow L = 4 \times \frac{3\pi}{4} = 3\pi \text{ cm}$$



در نتیجه محیط قطاع برابر با:  $2R + L = 2 \times 4 + 3\pi = 8 + 3\pi \text{ cm}$

تذکر: برای به دست آوردن محیط طول کمان باید دو برابر شعاع جمع شود. و زاویه برحسب رادیان باشد.

**سوال ۳۷** زاویه  $\theta$  کمانی به طول ۱ سانتی‌متر در دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر بریده است مقدار  $\theta$  برحسب رادیان کدام است؟

**پاسخ:** با توجه به رابطه زیر می‌توان نوشت:

$$r\theta = L \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} = \frac{1}{2}$$

اندازه برحسب رادیان برابر  $\frac{1}{2}$  می‌باشد.

**سوال ۳۸** در مدت ۴۸ دقیقه، عقربه‌های ساعت شمار در مجموع چند رادیان طی می‌کند؟

**پاسخ:** عقربه دقیقه شمار در هر ساعت  $2\pi$  رادیان و عقربه ساعت شمار در هر ساعت  $\frac{\pi}{6}$  رادیان طی می‌کنند بنابراین داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عقربه دقیقه شمار} : \frac{48}{60} = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow x = \frac{8\pi}{5} \text{ rad} \\ \text{عقربه ساعت شمار} : \frac{48}{60} = \frac{y}{\pi} \Rightarrow y = \frac{2\pi}{15} \text{ rad} \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = \frac{8\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} = \frac{26\pi}{15}$$

فصل ۳: بخش دوم: روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

سوال ۳۹ اگر  $\tan 18^\circ = a$  و  $\frac{A \sin 108^\circ + \cos 72^\circ}{A \sin 918^\circ}$  ، آنگاه A همواره کدام است؟

پاسخ: با استفاده از روابط مستقیم داری:

$$\sin 108^\circ = \sin(90^\circ + 18^\circ) = \cos 18^\circ$$

$$\cos 72^\circ = \cos(90^\circ - 18^\circ) = \sin 18^\circ$$

و با استفاده از روابط مکمل:

$$\sin 918^\circ = \sin(720^\circ + 198^\circ) = \sin(198^\circ) = \sin(180^\circ + 18^\circ) = -\sin 18^\circ$$

خواسته مسئله

$$\frac{A \sin 108^\circ + \cos 72^\circ}{A \sin 918^\circ} = \frac{A \cos 18^\circ + \sin 18^\circ}{-A \sin 18^\circ} = \frac{2}{3} \Rightarrow -\cot 18^\circ - \frac{1}{A} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{a} - \frac{2}{3} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{-3-2a}{3a} \Rightarrow A = \frac{3a}{-3-2a} = \frac{-3a}{3+2a}$$

سوال ۴۰ اگر  $\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$  باشد آنگاه حاصل  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$  کدام است؟

پاسخ:

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow \tan\left(-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \frac{2}{3} \rightarrow -\cot x = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \cot x = -\frac{2}{3} \rightarrow \tan x = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = (1 + \cot^2 x) - (1 + \tan^2 x) \\ = \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right) - \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$$

نتیجه

سوال ۴۱ مقدار  $\sin \frac{2\pi}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$  کدام است؟

پاسخ:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{سوال خواسته} : \sin \frac{2\pi}{3} + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

**سوال ۴۲** مقدار  $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$  کدام است؟

**پاسخ:** با استفاده از رابطه‌های  $\cos(-a) = \cos a$  و  $\cos(\pi - a) = -\cos a$  داریم:

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ربع دوم  $\cos < 0$

**سوال ۴۳** اگر  $3 \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = 5 \cos(\pi + \theta)$  و  $\theta$  در ربع چهارم نباشد،  $\tan \theta$  کدام است؟ ( $\cos \theta \neq 0$ )

**پاسخ:**

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) = 5 \cos(\pi + \theta) \Rightarrow 3 \cot \theta = -5 \cos$$

$$3 \frac{\cancel{\cos \theta}}{\sin \theta} = -\cancel{\cos \theta} \Rightarrow \boxed{\sin \theta = -\frac{3}{5}} \rightarrow \theta \text{ در ربع چهارم نیست}$$

$$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\frac{9}{25}} \rightarrow \cot^2 \theta = \frac{25}{9} - 1$$

$$\rightarrow \cot^2 \theta = \frac{16}{9} \xrightarrow{\cot \theta > 0} \cot \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{\tan \theta = \frac{3}{4}}$$

**سوال ۴۴** اگر فرض شود  $\sin \frac{3\pi}{5} - 3 \sin \frac{\pi}{10} = 0$  باشد مقدار  $\tan \frac{2\pi}{5}$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$\sin \frac{3\pi}{5} - 3 \sin \frac{\pi}{10} = 0 \Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = 3 \sin \frac{\pi}{10}$$

$$\rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}\right) = 3 \cos \frac{2\pi}{5} = 3 \left(-\cos\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \sin \frac{3\pi}{5} = -3 \cos \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \frac{\sin \frac{3\pi}{5}}{\cos \frac{2\pi}{5}} = -3 \Rightarrow \tan \frac{3\pi}{5} = -3$$

$$\Rightarrow \tan\left(\pi - \frac{2\pi}{5}\right) = -3 \Rightarrow -\tan \frac{2\pi}{5} = -3 \Rightarrow \boxed{\tan \frac{2\pi}{5} = +3}$$



**سوال ۴۵** نمودار دو تابع  $y = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$  و  $y = -\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$  در بازه  $(0, 2\pi)$  همدیگر را در چند

نقطه قطع می‌کنند؟

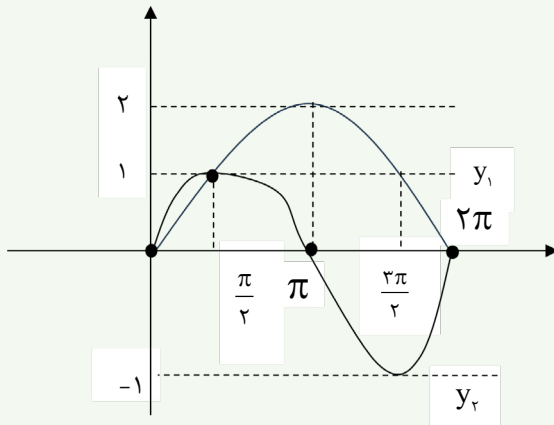
**پاسخ:**

$$y_1 = 1 - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \Rightarrow y_1 = 1 - \cos x$$

$$y_2 = -\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

ناحیه سوم

بنابراین مطابق شکل در بازه  $(0, 2\pi)$  دو تابع همدیگر را فقط در نقطه  $x = \frac{\pi}{2}$  قطع می‌کنند.



**سوال ۴۶** اگر  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$ ، آنگاه بیشترین مقدار عبارت مثلثاتی  $A = V \sin \alpha + 2 \cos \beta - 2$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \beta = \frac{3\pi}{2} - \alpha \xrightarrow{\text{از طریق cos}}$$

$$\cos \beta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha$$

$$\Rightarrow A = V \sin \alpha + 2(-\sin \alpha) - 2 = \Delta \sin \alpha - 2$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -\Delta \leq \Delta \sin \alpha \leq \Delta \Rightarrow -7 \leq \Delta \sin \alpha - 2 \leq 3$$

$\Rightarrow -7 \leq A \leq 3 \rightarrow$  بنابراین بیشترین مقدار  $a$  برابر ۳ است.

**سوال ۴۷** به ترتیب حداکثر و حداقل مقدار تابع  $y = -2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$  کدام است.

**پاسخ:** حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ۱ و حداقل آن -۱ است.

$$y \text{ حداکثر مقدار} = (-2) \times (-1) + 1 = 3$$

$$y \text{ حداقل مقدار} = (-2) \times (1) - 2 + 1 = -1$$

**سوال ۴۸** تعداد نقاط برخورد منحنی دو تابع  $f(x) = \cos(x - \pi)$  و  $g(x) = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$  بازه  $[-2\pi, 2\pi]$  کدام است؟

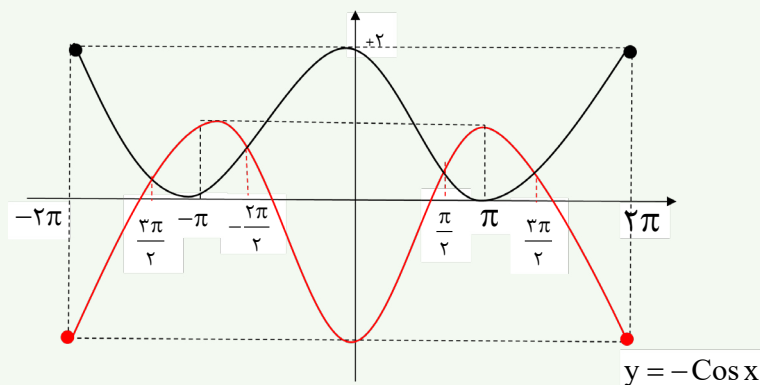
**پاسخ:** کافیست نمودار تابع  $f$  و  $g$  را رسم کنیم ابتدا محاسبه توابع:

$$f(x) = \cos(x - \pi) = \cos(-(x - \pi)) = \cos(x - \pi) = -\cos x$$

برای رسم نمودار  $f(x)$  کافیست نمودار تابع  $y = \cos x$  را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کنیم.

$$g(x) = 1 + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = \cos x + 1$$

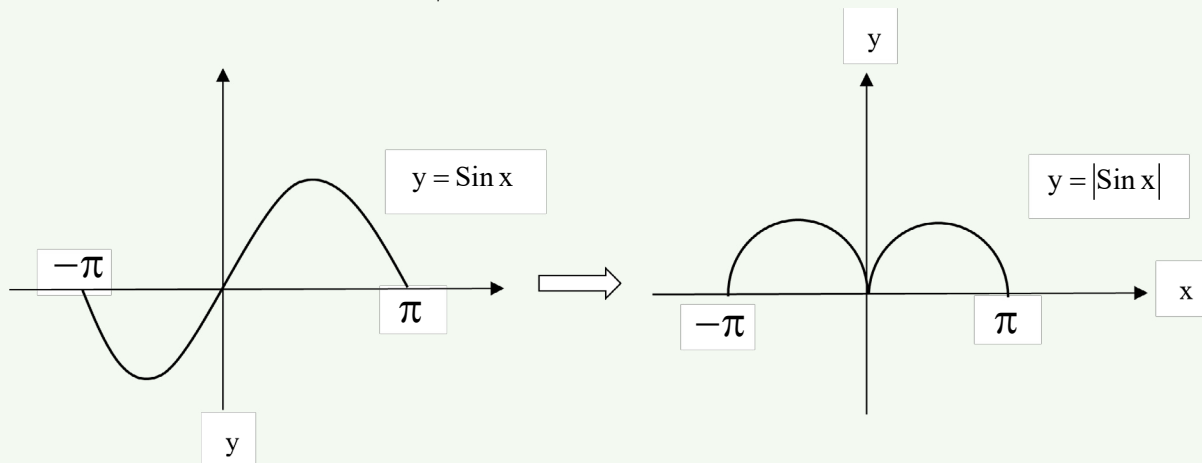
برای رسم نمودار  $g(x)$  کافیست نمودار تابع  $y = \cos x$  را روی محور  $y$ ها یک واحد به بالا انتقال دهید

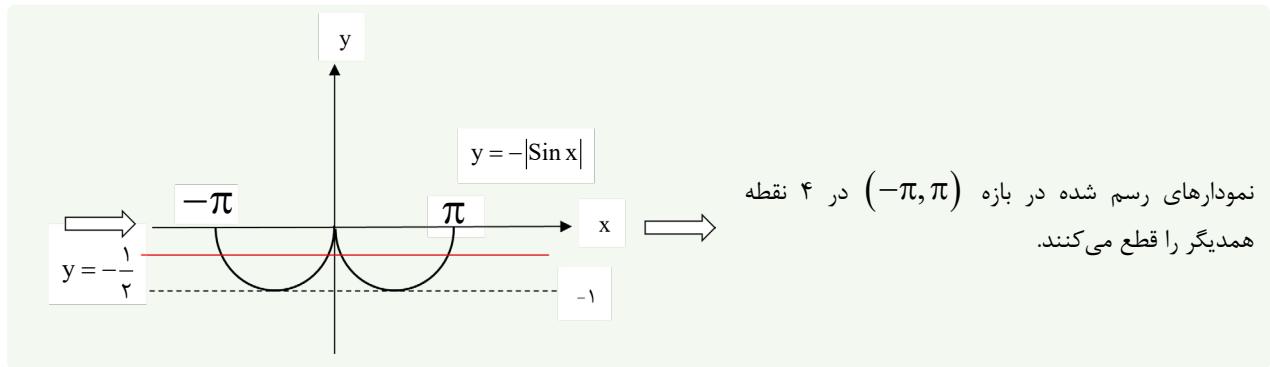


همانطور که از نمودار دو تابع  $f$  و  $g$  پیداست دو تابع در چهار نقطه متقاطع‌اند.

**سوال ۴۹** نمودارهای توابع  $y = -\frac{1}{2}$  و  $y = -|\sin x|$  در بازه  $(-\pi, \pi)$ ، در چند نقطه همدیگر را قطع می‌کنند؟

**پاسخ:** برای حل این سوال ابتدا  $y = -|\sin x|$  را رسم می‌کنیم و سپس با خط  $y = -\frac{1}{2}$  قطع می‌دهیم.





**فصل پنجم: توابع نمایی و لگاریتمی (بخش اول تابع نمایی و ویژگی‌های آن)**

**سوال ۵۰** مقدار  $x$  در معادله  $\left(\frac{9}{25}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+2}$  کدام است؟

**پاسخ:** دو طرف تساوی را به صورت عددی توان‌دار با پایه برابر می‌نویسیم:

$$\left(\frac{9}{25}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x+2} \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{4x-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-x-2} \Rightarrow 4x-2 = -x-3 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{5}}$$

هم رادیکال می‌گیریم  
هم توان ۲ می‌رسونم

معکوس می‌کنیم توان  
در -۱ ضرب میشه

**سوال ۵۱** اگر  $2^{2x-3} < 2^{x-1}$  باشد حدود  $x$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$2^{2x-3} < 2^{x-1} \Rightarrow -3 < x-1 \Rightarrow \boxed{x < 2}$$

**سوال ۵۲** اگر  $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} = \frac{8}{343}$  و  $9^y = 27^{y-1}$  باشند مقدار  $x + y$  چقدر است؟

**پاسخ:**

$$\left(\frac{2}{7}\right)^{2x-1} = \frac{8}{343} = \left(\frac{2}{7}\right)^3 \Rightarrow 2x-1 = 3 \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow$$

$$9^y = 27^{y-1} \Rightarrow 3^{2y} = 3^{3y-3} \Rightarrow 2y = 3y-3 \Rightarrow y-3 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

سوال خواسته  $x + y = 2 + 3 = \boxed{5}$

**سوال ۵۳** در معادله  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \times 9^{2x+1} = \frac{1}{27}$  حاصل جمع ریشه‌ها کدام است؟

**پاسخ:**

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2} \times 9^{2x+1} = 3^{-2} \Rightarrow 3^{-x^2} \times 3^{4x+2} = 3^{-2}$$

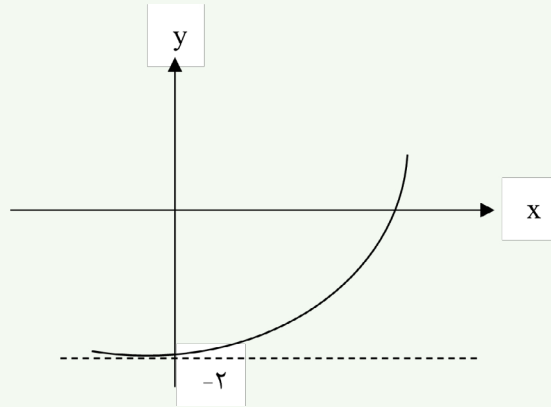
$$\Rightarrow 3^{-x^2+4x+2} = 3^{-2} \Rightarrow -x^2 + 4x + 2 = -2 \Rightarrow \boxed{x^2 - 4x - 5 = 0}$$

جمع ریشه‌ها  $S = -\frac{b}{a} = \frac{4}{1} = \boxed{4}$

**سوال ۵۴** اگر نمودار تابع  $f(x) = (2m^x - m) - n$  به صورت زیر باشد مقادیر قابل قبول برای  $m$  کدام است؟

**پاسخ:** در تابع نمایی  $f(x) = a^x + b$ ، اگر با افزایش مقدار  $x$  مقادیر تابع  $f$  افزایش یابند آنگاه  $a > 1$  می‌باشد بنابراین:

$$2m^x - m > 1 \Rightarrow 2m^x - m - 1 > 0 \Rightarrow (2m + 1)(m - 1) > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$$



**سوال ۵۵** نمودار  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{ax-1}$  و  $g(x) = 3 \cdot 2^{x-1}$  در نقطه‌ای به عرض  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  متقاطع‌اند در این صورت  $a$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = 3 \cdot 2^{x-1} \Rightarrow 2^{-\frac{x}{2}} = 2^{\Delta(x-1)} \Rightarrow -\frac{x}{2}(\Delta x - 5) \Rightarrow 5 - \frac{x}{2} = \Delta x \Rightarrow \frac{y}{2} = \Delta x \Rightarrow \boxed{x = \frac{y}{10}}$$

پس نقطه‌ی  $\left(\frac{y}{10}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$  برخورد است لذا مختصات آن در تابع  $f$  نیز صدق می‌کند:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{a\left(\frac{y}{10}\right)-1} \Rightarrow 2^{-\frac{x}{2}} = 2^{1-\frac{y}{10}a} \Rightarrow -\frac{x}{2} = 1 - \frac{y}{10}a \Rightarrow 1 + \frac{x}{2} = \frac{\Delta}{10} \Rightarrow a = \frac{\frac{y}{2}}{\frac{y}{10}} = \frac{\Delta}{10} = \frac{25}{y}$$

### فصل ۵ بخش دوم: تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

**سوال ۵۶** اگر  $\log^2 = 0/3$  و  $\log^6 = 0/8$  باشد حاصل  $\log^4$  کدام است؟

**پاسخ:** چون که لگاریتم‌های داده شده در مبنای ۱۰ هستند پس لگاریتم خواسته شده را هم به مبنای ۱۰ تبدیل می‌کنیم.

$$\log_b^a = \frac{\log^a}{\log^b}$$

$$\log^a = 1 - \log^r$$

$$\log^4 = \frac{\log^r}{\log^1} = \frac{\log(2^r \times 5)}{\log 3^r} = \frac{r \log^r + \log 5}{r \log^r} = \frac{r \log^r + (1 - \log^r)}{r(\log^r - \log^r)} = \frac{0/9 + 0/7}{2(0/8 - 0/3)} = \frac{1/6}{1} = \frac{8}{5}$$



**سوال ۵۷** اگر  $x = 8 \log_4^{\sqrt{r}}$  باشد آنگاه لگاریتم عدد  $4(x+3)$  در پایه  $x$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$x = 8 \log_4^{\sqrt{r}} = 8 \log_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} = 8 \times \frac{3}{2} \log_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} = \frac{24}{2} = 12$$

به ازای  $x = 6$  خواسته مسئله را حساب می‌کنیم.

$$\log_x^{4(x+3)} = \log_6^{\frac{24}{2}} = 2 \log_6^6 = 2$$

**سوال ۵۸** از معادله  $\log_{x-2}^{(x-1)} + \log_{2-x}^{(x+2)} = \log_{2-x}^4$  مقدار لگاریتم در مبنای ۸ کدام است؟

**پاسخ:**

$$\log^a + \log^b = \log^{ab}$$

$$\log_c^a = \log_c^b \Rightarrow a = b$$

$$\log_{x-2}^{(x-1)(x+2)} = \log_{2-x}^4 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 4 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ok} \\ x = -3 ?? \end{cases}$$

$$x = 2 \Rightarrow \log_8^{(x+2)} = \log_8^4 = \log_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} = \frac{2}{3} \log_{\frac{r}{2}}^{\frac{r}{2}} = \frac{2}{3}$$

**سوال ۵۹** جواب معادله  $\log_{\sqrt{r}}^{x^2} + \log_x^r = 4$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$$

$$\log_{\sqrt{r}}^{x^2} + \log_x^r = 4 \rightarrow \frac{2}{\frac{1}{2}} \log_r^x + \log_x^r = 4 \Rightarrow 4 \log_r^x + \frac{1}{\log_r^x} = 4 \xrightarrow{\log_r^x = t} 4t + \frac{1}{t} = 4 \xrightarrow{\text{طرفین } \times t}$$

$$\rightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \rightarrow (2t-1)^2 = 0 \rightarrow t = \frac{1}{2} \rightarrow t = \log_r^x = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = r^{\frac{1}{2}} = \sqrt{r}}$$

**سوال ۶۰** اگر  $2 \log(\sqrt{2}m) - \log^1 = 3 \log^2 + \log(2x+1)$  باشد آنگاه مقدار  $m$  کدام است؟

**پاسخ:** بنابر ویژگی‌های لگاریتم، می‌دانیم است  $\log_a^1 = 0$  لذا داریم:

$$2 \log^{\sqrt{2}m} - \log^1 = 3 \log^2 + \log^{(x+1)} \rightarrow \log^{2m^2} = \log^{(m+1)} \Rightarrow m^2 - 4m - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 - 2\sqrt{2} (\dots) \\ m = 2 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

در نتیجه تنها مقدار ممکن برای  $m$ ،  $2 + \sqrt{2}$  می‌تواند باشد.

## فصل پنجم قسمت سوم (نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی)

**سوال ۶۱** شدت دو زلزله در مقیاس ریشتر به اندازه  $0/6$  اختلاف دارند نسبت دو انرژی آزاد شده کدام می‌تواند باشد؟

$$(\log E = 11/8 + 1/5M)$$

**پاسخ:** انرژی آزاد شده را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

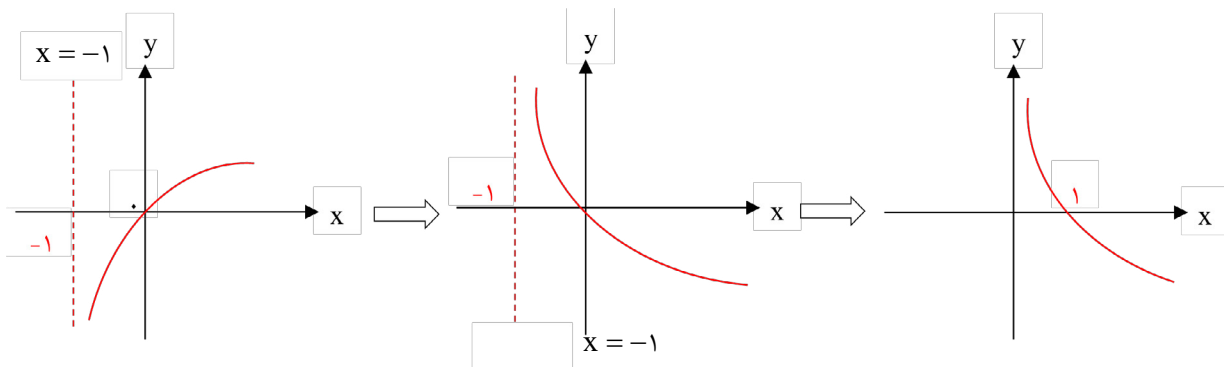
$$\log E = 11/8 + 1/5M \Rightarrow E = 10^{11/8 + 1/5M}$$

بنابراین:

$$E_2 = 10^{11/8 + 1/5M_2}, E_1 = 10^{11/8 + 1/5M_1}$$

$$\frac{E_2 - M_2 = -0/6}{E_1} \rightarrow \frac{E_2}{E_1} = 10^{11/8 + 1/5M_2 - (11/8 + 1/5M_1)} = 10^{1/5(M_2 - M_1)} = 10^{1/5(0/6)} = 10^{-0/9}$$

**سوال ۶۲** نمودار تابع  $y = -\log_{1/2}(x+1)$  از کدام نواحی عبور می‌کند؟



**پاسخ:** این نمودار فقط از ناحیه اول و سوم می‌گذرد.

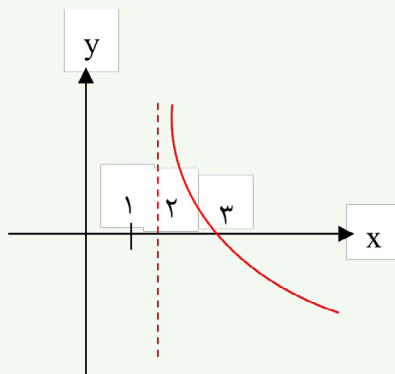
**سوال ۶۳** اگر  $\log^2 = a$  و  $\log^y = b$  باشد، مقدار  $\log^{-3/5}$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$\log^{-3/5} = \log_{10}^{3/5} = \log^{3/5} - \log^{10} = \log^{3/5} - 1 = \log^y - \log^2 - 1 = -a - 1$$

**سوال ۶۴** نمودار تابع  $y = -\log_3(x-2)$  کدام است؟

**پاسخ:** نمودار را نسبت به محور  $x$ ها قرینه کرده و سپس دو واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم بنابراین داریم:





**سوال ۶۵** جواب معادله  $2^{\left(\log_2^3\right)^x} = 3^{\left(\log_3^2 x\right)^x}$  را به دست آورید.

**پاسخ:** از طریق معادله  $2^{\left(\log_2^3\right)^x} = 3^{\left(\log_3^2 x\right)^x}$  ، لگاریتم در مبنای ۲ می‌گیریم:

$$\log_2^{\left(\log_2^3\right)^x} = \log_2^{\left(\log_2^2 x\right)^x} \Rightarrow \left(\log_2^3\right)^x \log_2^x = \left(\log_2^2 x\right)^x \cdot \log_2^x$$

$$\Rightarrow \left(\log_2^3\right)^x = \frac{1}{\left(\log_2^2 x\right)^x} \cdot \log_2^x = \left(\log_2^2 x\right)^{-x} \cdot \log_2^x$$

$$\Rightarrow \left(\log_2^3\right)^x = \left(\log_2^2\right)^{-x+1} \Rightarrow x = -x+1 \rightarrow 2x=1 \rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

**سوال ۶۶** مجموع ریشه‌های معادله  $\log_2^{\left(2^{x+15}\right)} - x = 3$  را به دست آورید.

**پاسخ:**

$$\boxed{2^{x+3} = 2^x \times 2^3}$$

$$\log_2^{\left(2^{x+15}\right)} = x+3 \rightarrow 2^{x+3} = 2^x + 15 \Rightarrow \left(2^x\right)^3 - 8\left(2^x\right) + 15 = 0$$

$$\xrightarrow{2^x=t} t^3 - 8t + 15 = 0 \rightarrow (t-5)(t-3) = 0 \begin{cases} t=3 \\ t=5 \end{cases}$$

$$\rightarrow t = 2^x = 3 \rightarrow \boxed{x_1 = \log_2^3} \quad 2^x = 5 \rightarrow \boxed{x_2 = \log_2^5}$$

### فصل ۶: حد و پیوستگی (مبحث اول فرایندهای حدی)

**سوال ۶۷** اگر بازه  $(-x+2, 5)$  یک همسایگی از عدد  $2x$  باشد مجموعه مقادیر ممکن برای  $x$  همسایگی چند عدد

صحیح می‌تواند باشد؟

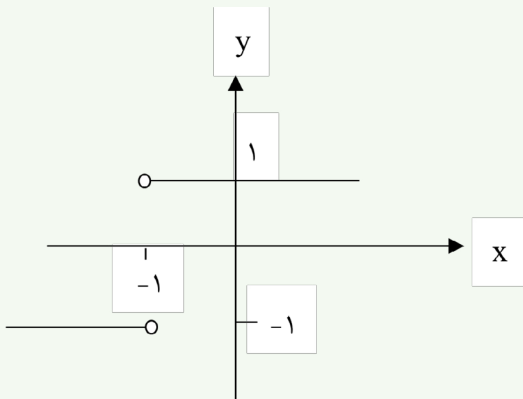
**پاسخ:**

$$2x \in (-x+2, 5) \Rightarrow \begin{cases} -x+2 < 2x \Rightarrow \frac{2}{3} < x \\ 2x < 5 \Rightarrow x < \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{2}{3}, \frac{5}{2}\right)$$

فقط  $\begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}$  از میان اعداد صحیح در این بازه قرار دارد.

**سوال ۶۸** تابع  $f(x) = \frac{|x+1|}{x+1}$  در  $x = -1$  دارای چه رفتاریه؟

**پاسخ:** نمودار تابع  $f(x)$  را رسم می‌کنیم:



با توجه به شکل تابع  $f(x)$  در  $x = -1$  حد ندارد.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > -1 \\ -1 & x < -1 \end{cases}$$

**سوال ۶۹** اگر  $(a-2, 3a+2)$  یک همسایگی نقطه  $x = 1$  باشد حدود  $a$  کدام است.

**پاسخ:** عدد ۱ عضو بازه  $(a-2, 3a+2)$  است پس:

$$\begin{cases} a-2 < 1 \rightarrow a < 3 \\ 3a+2 > 1 \rightarrow a > \frac{-1}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{-1}{3} < a < 3$$

**سوال ۷۰** به ازای چند مقدار صحیح  $m$ ، بازه  $(-1, m^2 - 3m)$  یک همسایگی برای عدد ۴ نمی‌باشد.

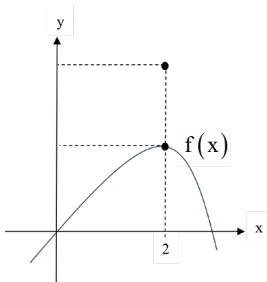
**پاسخ:** برای این که بازه  $(-1, m^2 - 3m)$  یک همسایگی ۴ نباشد باید  $-1 < m^2 - 3m \leq 4$  پس.

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -1, 0, 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

$$m > \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} m = -1, 0, 3, 4$$

**سوال ۷۱** با توجه به نمودار  $f(x)$ ،  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} [f(x)]$  را محاسبه نمایید.



**پاسخ:** با توجه به نمودار  $f(x)$  داریم:

بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = [2] = 2$$

هم‌چنین در یک همسایگی محذوف کوچک  $x = 2$  مقادیر تابع نزدیک ۲ و کوچک‌تر از آن هستند. پس تابع  $[f]$  در این همسایگی با تابع

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1$$

$y = 1$  برابر است. بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow 2} [f(x)] - \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 - 2 = -1$$



فصل ۶: حد و پیوستگی (قسمت دوم: محاسبه حد توابع)

**سوال ۷۲** اختلاف حد چپ و راست تابع  $f(x) = \frac{|1-x^2|}{3x-3}$  در  $x=1$  ، کدام است؟

**پاسخ:** ابتدا حد راست به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|1-x^2|}{3x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{3x-3} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{3(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{3} = \frac{2}{3}$$

با توجه به آن که ریشه ساده داخل قدر مطلق است پس حد چپ و راست در این نقطه قرینه یکدیگر هستند بنابراین:

$$\frac{2}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

**سوال ۷۳** حاصل  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2+2x-15}$  ، کدام است؟

**پاسخ:**

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x^2+2x-15} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2+2x-15} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-(x-3)}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{x+5} = \frac{-1}{8}$$

**سوال ۷۴** حاصل  $\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} \frac{|1+\sin x|}{\cos^2 x}$  ، کدام است؟

**پاسخ:**

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} \frac{|1+\sin x|}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{3\pi}{2})^+} \frac{(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

**سوال ۷۵** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} \frac{???}{2x^2-5x+3} & , x < 2 \\ 3x+a & , x = 1 \\ \frac{\sqrt{x^2+3}+2a}{[x]} & , x > 1 \end{cases}$  در  $x=1$  پیوستگی چپ داشته باشد، آنگاه حد راست در  $x=1$  کدام است؟

**پاسخ:** برای پیوستگی چپ تابع در  $x=1$  ، باید حد چپ و مقدار تابع در این نقطه با هم برابر باشند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x|x-1|}{2x^2-5x+3} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x-1)}{(2x-3)(x-1)} = \frac{-x}{2x-3} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$f(1) = 3(1) + a = 3 + a \rightarrow 3 + a = 1 \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+3}+2(-2)}{[x]} = \frac{-2}{1} = -2$$

**سوال ۷۶** تابع  $f(x) = \begin{cases} 6x^2 + 4a & ; x > 1 \\ 2ax + 4 & ; x < 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  حد دارد مقدار  $a$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2ax + 4) = 2a + 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (6x^2 + 4a) = 6 + 4a \begin{cases} 2a + 4 = 6 + 4a \\ 2a = -2 \rightarrow \boxed{a = -1} \end{cases}$$

### فصل ۶: حد و پیوستگی (قسمت سوم: پیوستگی)

**سوال ۷۷** تابع  $f(x) = \begin{cases} 5(x+2) & ; x > -2 \\ |2+x| & ; x \leq -2 \end{cases}$  در بازه  $[-3, 0]$  پیوسته  $a$  کدام است؟

**پاسخ:** اگر  $x > -2$  باشد، آنگاه  $x + 2 > 0$  و  $|x + 2| = x + 2$  است پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 5 & x > -2 \\ ax + 1 & x \leq -2 \end{cases}$$

هر کدام از ضابطه‌ها در دامنه‌ها خود پیوسته هستند پس برای پیوسته بودن تابع  $f$  در بازه  $[-3, 0]$  کفایت شرط پیوستگی در  $x = -2$  را لحاظ کنیم:

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = a(-2) + 1 = 1 - 2a \xrightarrow{\text{حد راست}} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} = 5 \Rightarrow 1 - 2a = 5 \rightarrow \boxed{a = -2}$$

**سوال ۷۸** اگر تابع  $f(x) = \begin{cases} x + b & x < 1 \\ a[x] + 3 & x \geq 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته باشد، آنگاه  $b$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$f(1) = a[1] + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + b) = 1 + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (a[x] + 3) = a[1] + 3 = a + 3$$

$$a + 3 = 1 + b \Rightarrow a = b - 2$$

**سوال ۷۹** تابع ضابطه  $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax & x \geq 1 \\ -4x + 2a - 1 & x < 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته است حاصل  $f(2a)$  کدام است؟

**پاسخ:** تابع  $f(x)$  در  $x = 1$  پیوسته است بنابراین داریم:  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 - a = -4(1) + 2a - 1 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

در نتیجه ضابطه تابع به صورت  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 1 \\ -4x + 3 & x < 1 \end{cases}$  خواهد بود.

حال مقدار  $f(2a)$  را به دست آوریم.

$$f(2a) = f(4) = 4^2 - 2(4) = 8$$



**سوال ۸۰** تابع  $f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$  در چند نقطه ناپیوسته است.

**پاسخ:**  $0 \leq x - [x] < 1$  پس عبارت زیر رادیکال همواره مثبت است پس کافی است فقط نقاط صحیح را بررسی کنید چون که  $[x]$  فقط

در تمام نقاط صحیح ناپیوسته است.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = [a^+] + \sqrt{a - [a^+]} = a + \sqrt{a - a} = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = [a^-] + \sqrt{a - [a^-]} = a - 1 + \sqrt{a - (a - 1)} = a$$

$a \in \mathbb{Z}$  فرض می‌کنیم  $\Rightarrow$

$$f(x) = [a] + \sqrt{a - [a]} = a$$

پس همواره پیوسته است.

**سوال ۸۱** تابع  $f(x) = \begin{cases} a|x| + 2 & x < 1 \\ 3 & x = 1 \\ b[-x] - a + 1 & x > 1 \end{cases}$  در  $x = 1$  پیوسته است کدام است. ( [ ] نماد جز صحیح است )

**پاسخ:** شرط پیوستگی تابع  $f$  در  $x = 1$  آن است که در این نقطه حد داشته باشد و مقدار  $f(1)$  این حد با مقدار برابر باشد.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} a|x| + 2 &= \lim_{x \rightarrow 1^-} ax + 2 = a + 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow a + 2 = 3 \rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} b[-x] - a + 1 = b[-1^+] - a + 1 = -2b - a + 1$$

$$\rightarrow -2b - 1 + 1 = 3 \rightarrow \boxed{b = \frac{-3}{2}}$$

سوال خواسته  $f(a) + f(b) \stackrel{a=1}{b=\frac{-3}{2}} = f(1) + f\left(\frac{-3}{2}\right) = 3 + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$

**سوال ۸۲** تابع  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{x} & x \geq a \\ 3x + a & x < a \end{cases}$  به ازای چه مجموعه مقادیر  $a$  در  $\mathbb{Q}$  پیوسته است؟

**پاسخ:**

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} \left( x + \frac{3}{x} \right) &= a + \frac{3}{a} \\ \lim_{x \rightarrow a^-} (3x + a) &= 3a \end{aligned} \right\} a + \frac{3}{a} = 3a \rightarrow a^2 + 3 = 3a^2 \rightarrow 3a^2 = 3 \rightarrow \boxed{a = \pm 1}$$

اگر  $a = 1$  باشد  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{x} & x > 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases}$  پیوسته است.

ولی اگر  $a = -1$  باشد  $f(x) = \begin{cases} x + \frac{3}{x} & x \geq -1 \\ 3x - 1 & x < -1 \end{cases}$  می‌شود که  $x = 0$  پیوسته نیست پس فقط  $a = 1$  قابل قبول است.

### فصل هفتم: آمار و احتمال (بخش اول: احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل)

**سوال ۸۳** خانواده‌ای دارای چهار فرزند است می‌دانیم که دو فرزند اول آنها پسر هستند احتمال آن که دو فرزند دیگر این خانواده دختر باشد کدام است؟

**پاسخ:** جنسیت فرزندان مستقل از همدیگر هستند این که دو فرزند اول پسر هستند تاثیری در فرزند سوم و چهارم ندارد.

$$P(\text{فرزند سوم و چهارم دختر}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**سوال ۸۴** در خانواده‌ای با ۵ فرزند با کدام احتمال فرزند دوم پسر و فرزند پنجم دختر است؟

**پاسخ:** فرزندان یک خانواده مستقل از هم هستند پس جنسیت فرزند دوم و پنجم ربطی به جنسیت سایر فرزندان ندارد پس داریم:

$$P(\text{دختر بودن فرزند پنجم}) \times P(\text{پسر بودن فرزند سوم}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

**سوال ۸۵** اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد مستقل در فضای نمونه‌ای؟ بوده و  $P(B) = \frac{3}{4}$  و  $P(A') = \frac{1}{4}$  حاصل

$P(A \cap B)$  کدام است

**پاسخ:**

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(B) = 1 - P(B') = \frac{3}{4}$$

$$P(B) = \frac{3}{4} P(A') \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3}{4} P(A') \Rightarrow P(A') = \frac{1}{4}$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

$$P(A \cap B) = P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B')$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{7}{16}$$

**سوال ۸۶** در کیسه‌ای ۴ مهره آبی و ۵ مهره سبز و ۲ مهره قرمز وجود دارد دو مهره به تصادف، پی در پی و بدون

جایگذاری از کیسه خارج می‌کنیم با چه احتمالی مهره اول آبی و دومی دی قرمز است؟

**پاسخ:**

$$P(\text{اولی آبی و دومی قرمز}) = \frac{4}{11} \times \frac{2}{10} = \frac{8}{110} = \frac{4}{55}$$

**سوال ۸۷** احتمال داشتن مهارت  $A$  برابر  $\frac{7}{11}$  و احتمال داشتن مهارت  $B$  برابر  $\frac{5}{11}$  است در صورتی که احتمال

داشتن حداقل یکی از دو مهارت  $A$  و  $B$  برابر  $\frac{7}{11}$  باشد احتمال این که شخصی هر دو مهارت را داشته باشد کدام است؟

**پاسخ:**

$$P(A) = \frac{7}{11}, \quad P(B) = \frac{5}{11}, \quad P(A \cup B) = \frac{7}{11}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{7}{11} = \frac{7}{11} + \frac{5}{11} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{5}{11}$$

**سوال ۸۸** در کلاس A، ۳۰ درصد دانش‌آموزان و در کلاس B، ۷۰ درصد دانش‌آموزان دو رشته والیبال ثبت نام کرده‌اند اگر تعداد دانش‌آموزان کلاس A دو برابر کلاس B باشد و فردی به تصادف از بین ثبت نام کنندگان در رشته والیبال انتخاب کنیم با کدام احتمال این فرد از کلاس B است؟

**پاسخ:** فرض کنیم کلاس B دارای x دانش‌آموز است پس تعداد دانش‌آموزان کلاس a برابر ۲x خواهد بود روی هم ۳x دانش‌آموز داریم:

$$A \text{ کلاس} = \frac{30}{100} \times 2x = 0.6x$$

$$B \text{ کلاس} = \frac{70}{100} \times x = 0.7x$$

$$P(B|B) = \frac{P(B \cap \text{والیبال})}{P(\text{والیبال})} = \frac{0.7x}{0.6x + 0.7x} = \frac{0.7}{1.3} = \frac{7}{13}$$

**سوال ۸۹** فرض کنید در ضربات پنالتی، هر تیم ۵ ضربه دارد که باید همه‌ی آنها استفاده شود اگر احتمال گل کردن

توپ در هر نوبت برای تیم‌های A و B به ترتیب از راست به چپ  $\frac{5}{8}$  و  $\frac{4}{5}$  باشد، چه احتمالی مسابقه با نتیجه پنالتی به صورت ۴ به ۱ به سود تیم B پایان می‌یابد؟

**پاسخ:** اگر گل را g و از دست دادن پنالتی را f در نظر بگیریم احتمال آن که تیم B، ۴ گل زده بزند:

$$(f, g, g, g, g), (g, f, g, g, g), (g, g, f, g, g),$$

$$(g, g, g, f, g), (g, g, g, g, f) \rightarrow$$

$$P(B) = 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right) \rightarrow$$

به همین ترتیب برای زدن یک گل توسط تیم A داریم:

$$P(A) = 5 \times \left(\frac{5}{8}\right)^4 \times \left(\frac{3}{8}\right)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = 5 \times \left(\frac{4}{5}\right)^4 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times 5 \times \left(\frac{5}{8}\right)^4 \times \left(\frac{3}{8}\right)$$

$$= \frac{\cancel{5} \times \cancel{4}^4 \times \cancel{5} \times \cancel{5}^4 \times 3}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times 8 \times \frac{5^4}{(2^2 \times 2)^4}} = \frac{3^4}{25 \times 2^7} = \frac{81}{3200}$$

**سوال ۹۰** دو نفر به سمت یک هدف تیراندازی می‌کنند A به احتمال  $\frac{1}{3}$  و B به احتمال  $\frac{3}{4}$  به هدف می‌زند احتمال

آن که فقط B به هدف بزند چند برابر احتمال آن است که فقط A به هدف بزند.

**پاسخ:** احتمال این که فقط A به هدف بزند  $P(A \cap B')$  و احتمال این که فقط B به هدف بزند  $P(B \cap A')$  و چون که پیشامدهای A و B مستقل اند داریم:

$$\frac{P(B \cap A')}{P(A \cap B')} = \frac{P(B) \times P(A')}{P(A) \times P(B')} = \frac{\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{3} \left(1 - \frac{3}{4}\right)} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = 6$$

**سوال ۹۱** دو پیشامد مستقل هستند به طوری که  $P(A-B) = P(A \cap B)$  در این صورت حاصل  $P(A-B) + P(B-A)$  کدام است؟

**پاسخ:**

$$P(A-B) = P(A \cap B) \Rightarrow P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B)$$

$$P(A) = 2P(A \cap B) \Rightarrow P(A) = 2 \times P(A) \times P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A-B) + P(B-A) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$

حال عبارت خواسته شده را می‌یابیم.

$$\frac{P(A) - 2P(A \cap B)}{P(A) - 2P(A \cap B)} \rightarrow P(B) = \frac{1}{2} = 0.5$$

### فصل هفتم: احتمال (بخش دوم: آمار توصیفی)

**سوال ۹۲** در داده‌های ۵۲ و ۰۲ و ۱۲ و ۶۲ و ۲۱ و ۴۱ و ۵۱ و ۴۲ و ۰۲ و ۶۱ و ۴۱ و ۸۱ میانگین تقریبی «داده‌های بزرگتر از چارک اول و کوچک‌تر از چارک سوم کدام است؟»

**پاسخ:** ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

۱۲, ۱۴, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۸, ۲۰, ۲۱, ۲۴, ۲۵, ۲۶

$$Q_1 = \frac{14+15}{2} = 14.5 \quad Q_2 = \frac{18+20}{2} = 19 \quad Q_3 = \frac{21+24}{2} = 22.5$$

با توجه به این که چارک اول  $Q_1 = 14.5$  و چارک سوم  $Q_3 = 22.5$  است پس میانگین داده‌های بزرگتر از  $Q_1$  و کوچک‌تر از  $Q_3$  برابر است با:

$$\text{میانگین} = \frac{15+16+18+20+20+21}{6} = \frac{110}{6} = 18.33$$

**سوال ۹۳** اختلاف میانه و میانگین داده‌های آماری ۲، ۲، ۲، ۴، ۵، ۱، ۵، ۴، ۳ و ۴ کدام است؟

**پاسخ:** برای به دست آوردن میانه با مرتب کردن داده‌ها داریم:

۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۴, ۴, ۴, ۵, ۵  
میانه

با توجه به این که تعداد داده‌ها فرد باشد عدد وسطی میانه است پس ۳ میانه است.

$$\bar{X} = \frac{1+1+2+2+2+3+4+4+4+5+5}{11} = \frac{33}{11} = 3$$

$$\text{اختلاف میانه و میانگین} = 3 - 3 = 0$$

**سوال ۹۴** ضریب تغییرات ۰۳ داده آماری برابر  $\frac{3}{6}$  است اگر  $\bar{x}$  برابر میانگین این داده‌ها را به جهت آنها اضافه کنیم ضریب تغییرات داده‌های جدید چقدر خواهد بود؟

**پاسخ:** ضریب تغییرات حاصل تقسیم انحراف معیار بر میانگین است. یعنی:

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = 3/6$$

**نکته**

می‌دانیم اگر همه داده‌ها را با عدد ثابت  $a$  جمع کنیم میانگین نیز با  $a$  جمع خواهد شد اما انحراف معیار تغییر نمی‌کند.

در سوال گفته شده ۳ برابر میانگین به میانگین اضافه می‌شود در این صورت انحراف معیار قایت می‌ماند.

$$\bar{X}_r = \bar{X}_1 + 3\bar{X}_1 = 4\bar{X}_1$$

$$CV_r = \frac{\sigma_r}{X_r} = \frac{1}{4} \times \frac{\sigma_1}{X_1} = \frac{1}{4} \times 3/6 = 0.125$$

**سوال ۹۵** واریانس داده‌های کمتر از چارک اول در مجموعه اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۳۱ کدام است؟

**پاسخ:** میانه در داده‌های ۳۰ و ۲ و ۱ برابر ۱۵/۵ است حال میانه داده‌های ۱۵ و ... و ۲ و ۱ برابر ۸ است پس باید واریانس داده‌های ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ را حساب کنیم

$$\bar{X} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = 4$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n} = \frac{9+4+1+0+1+4+9}{7} = 4$$

**سوال ۹۶** ضریب تغییرات داده‌های ۷۱ و ۴۱ و ۲۱ و ۹ و ۸ کدام است؟

**پاسخ:** ابتدا میانگین داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\bar{X} = \frac{8+9+12+14+17}{5} = 12$$

با استفاده از فرمول مقابل ابتدا واریانس و سپس انحراف معیار داده‌ها را حساب می‌کنیم:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n} = \frac{(8-12)^2 + (9-12)^2 + (12-12)^2 + (14-12)^2 + (17-12)^2}{5}$$

$$= \frac{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2 + (2)^2 + 5^2}{5} = \frac{16+9+0+4+25}{5} = \frac{54}{5} = 10.8$$

انحراف معیار  $\sigma = \sqrt{10.8/8}$

ضریب تغییرات  $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{10.8/8}}{12}$

**سوال ۹۷** قدر مطلق اختلاف از میانگین داده‌هایی برابر ۳ و ۳ و ۲ و ۲ و ۲ است اگر مجموع این داده‌ها ۱۵ باشد ضریب تغییرات

داده‌ها کدام است؟

**پاسخ:**

$$|x_i - \bar{X}| = 2, 2, 2, 3, 3$$

ابتدا پیدا کردن میانگین:

طبق؟؟؟ سوال

$$\bar{X} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \dots + (x_n - \bar{X})^2}{n} = \frac{2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2}{5} = 3.2$$

$\sigma^2 = 6 \rightarrow \sigma = \sqrt{6}$

$CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

**سوال ۹۸** در کارخانه‌ای دو محصول A و B تولید می‌شوند میانگین و واریانس نمرات کیفیت برای محصول A به ترتیب از راست به چپ ۴۲ و ۱۸ و برای محصول B به ترتیب از راست به چپ ۸۱ و ۹۴ است کدام محصول برای تولید به صرفه‌تر است؟

**پاسخ:** هر محصول که ضریب تغییرات کمتری داشته باشد برای تولید به صرفه‌تر است.  
بنابراین محصول A بهتر است.

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} = \frac{\sqrt{181}}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{4} \approx 0.75$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} = \frac{\sqrt{49}}{18} = \frac{7}{18} \approx 0.39$$

**سوال ۹۹** اگر ۴۰ داده آماری را ۸ برابر کرده و پس از هر یک ۱۶ واحد کم کنیم ضریب تغییرات داده‌های جدید ۲۰ درصد افزایش می‌یابد مجموع داده‌های جدید کدام است؟

**پاسخ:** میانگین و انحراف معیار جدید برحسب میانگین و انحراف معیار قدیم و به صورت مقابل محاسبه می‌شود:

$$\bar{X}' = \bar{X} - 16 \rightarrow \sigma' = 8\sigma$$

ضریب تغییرات ۲۰ درصد افزایش داشته پس ۱/۲ برابر شده است:

$$\frac{CV'}{CV} = 1/2 \Rightarrow \frac{\frac{\sigma'}{\bar{X}'}}{\frac{\sigma}{\bar{X}}} = 1/2 \Rightarrow \frac{8\sigma}{\bar{X} - 16} = 1/2 = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

$$\Rightarrow \frac{8\bar{X}}{8\bar{X} - 16} = 1/2 \Rightarrow \frac{\bar{X}}{\bar{X} - 2} = 1/2 \Rightarrow \bar{X} = 1/2\bar{X} - 2/4$$

$$\Rightarrow 0.5\bar{X} = 2/4 \Rightarrow \bar{X} = 12 \Rightarrow \bar{X}' = 8(12) - 16 = 80$$

$$\text{مجموع داده‌های جدید} = 80 \times 40 = 3200$$

**سوال ۱۰۰** با فرض این که میانگین داده‌های  $X_1 + 9$  و  $X_2 + 2$  و  $X_3 + 1$  و  $X_4 - 9$  برابر میانگین داده‌های  $2X_1 - 1$  و  $2X_2 - 1$  باشد میانگین داده‌های  $X_1$  و  $X_2$  را به دست آورید.

**پاسخ:** فرض کنید میانگین داده‌های  $X_1$  و  $X_2$  و  $X_3$  برابر  $\bar{X}$  باشد در این صورت میانگین  $X_1 + 9$  و  $X_2 + 1$  و  $X_3$  و نیز  $2X_1 - 9$

و ... و  $2X_2 - 1$  و  $2X_3$  به ترتیب برابر با  $\bar{X} + \frac{9}{2}$  و  $2\bar{X} - \left(\frac{9+9}{2}\right)$  خواهد بود پس:

$$\bar{X} + \frac{9}{2} = 2\bar{X} - \frac{9}{2} \Rightarrow \boxed{\bar{X} = 9}$$