



بیستوفیل

هندسه یازدهم - ریاضی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دور رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۳۲ امیر محمد رضائی	رتبه ۲۰ سینا وافی	رتبه ۱۶ آریا قهرمانی	رتبه ۱۴ امیر محمد کیانی
رتبه ۸۰ محمد مهدی شریفی	رتبه ۷۵ محمد صالح عارفی	رتبه ۶۱ بهار هلالی	رتبه ۵۹ ایمان انفرادی

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲ امیر محمد شکوهی	رتبه ۱۶۹ هانیه خواجه	رتبه ۱۶۰ اشکان کوثری	رتبه ۱۴۷ محدثه حیدری	رتبه ۲۵۹ ابوالفضل ناصریان
رتبه ۴۳۲ سید محمد صادق حسینی	رتبه ۳۴۱ حمیدرضا بشیری	رتبه ۳۰۸ سید علی اکرمی	رتبه ۲۷۱ فاطمه سادات موسوی	رتبه ۴۷۳ زهره بابائی
رتبه ۵۳۹ نجمه کیخا	رتبه ۵۳۷ ریحانه حیدری	رتبه ۵۳۲ فاطمه شاهسوند	رتبه ۵۱۴ محمد پارسا عبدالله آبادی	رتبه ۵۴۶ حسین تفضلی نژاد
رتبه ۶۶۱ فاطمه اصغری	رتبه ۶۰۶ سجاد محمودی زاده	رتبه ۵۷۰ زهره ولی نژاد	رتبه ۵۵۷ محمد صالح زارعی	رتبه ۶۶۷ سیاوش مصطفایی
رتبه ۷۸۱ احسان قنبری	رتبه ۷۱۴ محمد یزدیان	رتبه ۶۹۱ بهار ضرغامی	رتبه ۶۷۲ محمد ماهان عنبرستانی	رتبه ۷۸۶ نیما غفاری
رتبه ۹۰۹ کیمیا فدائی	رتبه ۸۹۳ فاطمه مشاوری نجف آبادی	رتبه ۸۰۴ آرمین رضایی	رتبه ۸۰۳ ماتده رنجیر	رتبه ۹۴۷ صفورا بقائی
رتبه ۱۱۲۷ زهره بابائی	رتبه ۱۱۲۲ علی طاهر زاده	رتبه ۱۰۵۸ الینا جلالی فر	رتبه ۱۰۵۲ پویان فریور افشار	رتبه ۱۲۳۴ مطهره توحیدی
رتبه ۱۳۵۰ علی زینلی	رتبه ۱۲۸۴ فاطمه معین زاده	رتبه ۱۲۸۴ بهار امیری	رتبه ۱۲۳۶ مبینا ایزدی	رتبه ۱۳۷۲ پارسا رضایی
رتبه ۱۵۰۳ فاطمه رحیم زاده	رتبه ۱۴۹۳ محمد مهدی خرم زاده	رتبه ۱۴۸۳ سینا خاوری خراسانی	رتبه ۱۴۲۴ سید امیر حسین حسینی	رتبه ۱۵۳۴ فاطمه عبیری
رتبه ۱۶۹۶ ندا ملک شاهی	رتبه ۱۶۷۸ سجاد ینکی	رتبه ۱۶۳۹ ابوالفضل نیرومند	رتبه ۱۶۲۸ امیر محمد فکور حقیقی	رتبه ۱۷۳۱ محمد رضا محسنی
رتبه ۲۵۵۹ سارا حمزه	رتبه ۲۰۱۵ علی شیرزاد	رتبه ۱۹۶۶ مهسا رضایی مقدم	رتبه ۱۷۵۴ هلیا حاجیلوئی	رتبه ۲۶۲۵ زهره مجمعی
رتبه ۲۷۹۴ مریم بادلی	رتبه ۲۷۸۱ سعید شبانی	رتبه ۲۷۵۱ فهمیه سید آبادی	رتبه ۲۷۱۱ محمد غلامی	رتبه ۲۸۱۰ هدیه رحیمی
رتبه ۳۳۴۳ سینا ارزمانی	رتبه ۳۲۴۴ هلیا سجادی	رتبه ۳۱۳۳ صبا شایع ثانی	رتبه ۲۸۸۱ پارسا جمال امیدی	



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل هندسه فصل ۱ یازدهم

سال یازدهم
ریاضی

فهرست

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

- ۱..... طول کمان و مساحت قطاع
- ۱..... وتر و کمان و نظیر آن
- ۲..... زوایای مرکزی، محاطی و ظلی
- ۳..... زوایای بین وترها و مماس ها
- ۴..... مسائل ترکیبی درس ۱

درس دوم : رابطه های طولی در دایره

- ۴..... روابط طولی در دایره
- ۷..... رسم مماس بر دایره
- ۷..... اوضاع نسبی دو دایره
- ۷..... مماس مشترک دو دایره
- ۸..... مسائل ترکیبی درس ۲

درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی

- ۹..... چند ضلعی های محاطی و ویژگی های آن ها
- ۹..... چند ضلعی های محیطی و ویژگی های آن ها
- ۹..... دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث
- ۱۰..... چند ضلعی های منتظم



درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در

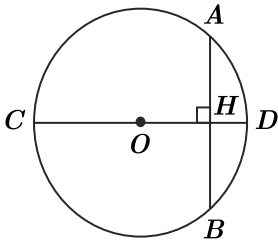
دایره

طول کمان و مساحت قطاع

۱ اگر طول یک کمان 60° از دایره C_1 با طول کمان 45° از دایره C_2 برابر باشد، آنگاه نسبت مساحت دایره C_1 به مساحت دایره C_2 چقدر است؟

وتر و کمان و نظیر آن

۲ در شکل مقابل وتر AB بر قطر CD عمود است. ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می کند.



۳ درستی یا نادرستی گزاره های زیر را معلوم کنید.

الف هر چندضلعی منتظم، هم محیطی و هم محاطی است.

ب عمود منصف هر وتر دایره، از مرکز آن دایره می گذرد.

۴ در یک دایره وتر AB و قطر CD بر هم عمودند. ثابت کنید قطر CD وتر AB و کمان AB را نصف می کند.

۵ در دایره $C(O, R)$ قطر CD کمان AB را نصف کرده است. نشان دهید قطر CD بر وتر AB عمود است و آن را نصف می کند.

۶ دو دایره هم مرکز با شعاع های ۶ و ۲ مفروضند، طول وتری از دایره بزرگ تر را که بر دایره کوچک تر مماس است محاسبه کنید.

۷ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف اگر نقطه ای مانند A درون دایره $C(O, r)$ باشد فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

ب شرط لازم و کافی برای اینکه یک خط بر یک دایره مماس باشد این است که این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع وارد بر آن نقطه عمود باشد.

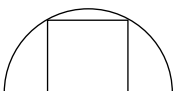
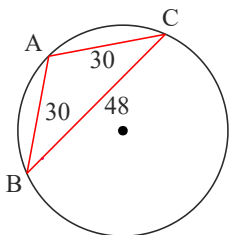
ج کمان های دایره های مختلف که اندازه های برابر دارند همواره طول های برابر دارند.

د اگر کمان های محدود به دو وتر یک دایره با هم برابر باشند آن دو وتر موازی اند.

۸ مساحت ناحیه واقع بین دو دایره هم مرکز $\frac{25\pi}{3}$ سانتی متر مربع است، طول وتری از دایره بزرگ تر که بر دایره کوچک تر مماس باشد،

بر حسب سانتی متر کدام است؟

۹ در شکل مقابل شعاع دایره چقدر است؟

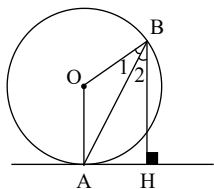


۱۰ در شکل مقابل شعاع نیم دایره ۷٫۵ سانتی متر است، مساحت مربع محاط در نیم دایره چند سانتی متر مربع است؟





۱۱ در شکل مقابل ثابت کنید: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$



زوایای مرکزی، محاطی و ظلّی

۱۲ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

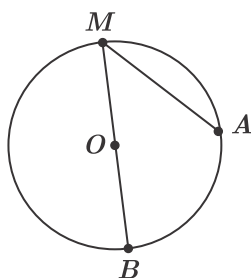
الف

در هر دایره، طول یک کمان، برابر با اندازه زاویه مرکزی مقابل به آن کمان است.

ب

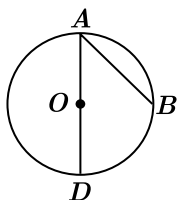
دو دایره به طول شعاع‌های ۳ و ۵ سانتی‌متر و طول خط‌المركزین ۲ سانتی‌متر، مماس برون هستند.

۱۳ در شکل زیر O مرکز دایره است. ثابت کنید؛ اندازه زاویه محاطی $\hat{M}$ ، برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است.



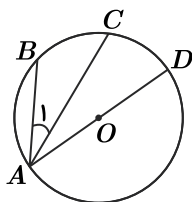
۱۴ اندازه هر زاویه ظلّی برابر است با اندازه کمان روبه‌رو به آن زاویه.

۱۵ در شکل مقابل AD قطر دایره است. ثابت کنید: «زاویه محاطی DAB نصف کمان $\widehat{BD}$ است.»

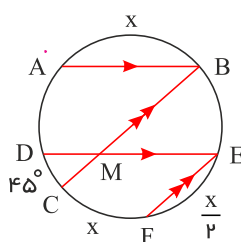


۱۶ ثابت کنید اگر دو وتر از دایره، بیرون دایره متقاطع باشند، زاویه بین دو وتر با نصف قدرمطلق تفاضل کمان‌های محدود به دو وتر برابر است.

۱۷ ثابت کنید اگر دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف قطر باشند، اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روی آن است.

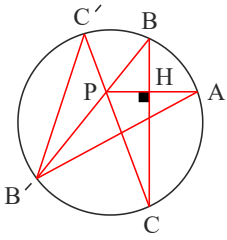


۱۸ در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



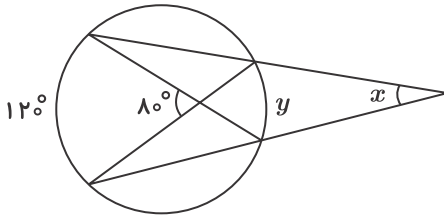


۱۹ در شکل مقابل BC عمود منصف AP است. اگر $\widehat{PCH} = \alpha$ باشد، اندازه زاویه $BB'A$ را بر حسب α بیابید.

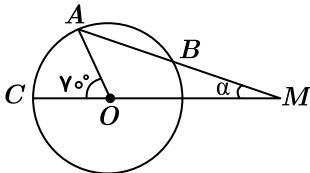


زوایای بین وترها و مماس‌ها

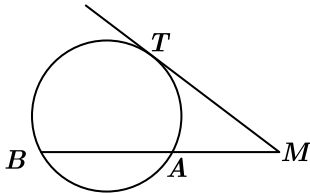
۲۰ با توجه به شکل، مقدار x را محاسبه کنید.



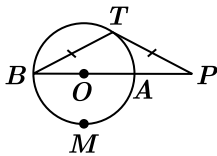
۲۱ در شکل زیر O مرکز دایره و وتر AB مساوی شعاع دایره است. زاویه α را بیابید.



۲۲ در شکل زیر MT مماس بر دایره و MB قاطع می‌باشد. ثابت کنید: $MT^2 = MA \cdot MB$.

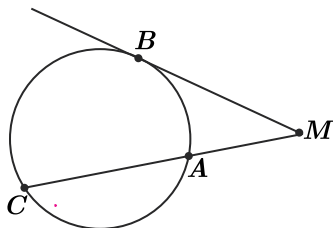


۲۳ در شکل مقابل مماس PT برابر با وتر TB رسم شده و AB قطر دایره است، اندازه زاویه $\widehat{P}$ را بیابید.



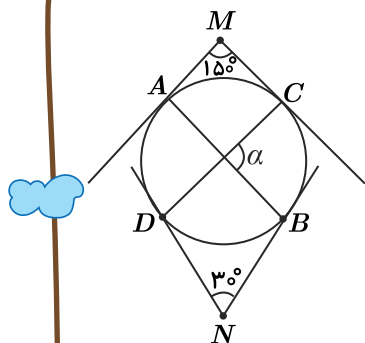
۲۴ در شکل زیر از نقطه تماس B خطی موازی وتر AC رسم کنید

$$\widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2} \text{ سپس ثابت کنید:}$$

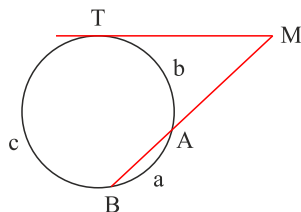




۲۵ در شکل زیر اضلاع زاویه‌های $\hat{M}$ و $\hat{N}$ بر دایره مماس هستند و داریم $\hat{M} = 15^\circ$ و $\hat{N} = 30^\circ$ در این صورت ثابت کنید وترهای AB و CD برهم عمودند.

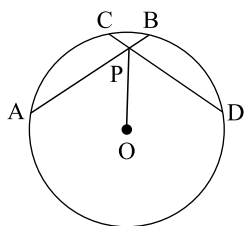


۲۶ در شکل زیر داریم: $a = \frac{b}{2} = \frac{c}{3}$. اندازه زاویه $\hat{M}$ چقدر است؟



مسائل ترکیبی درس ۱

۲۷ در شکل زیر، دو وتر AB و CD برابرند و در نقطه P یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت کنید OP نیمساز $\hat{APD}$ است.



درس دوم: رابطه‌های طولی در دایره

روابط طولی در دایره

۲۸ از نقطه P خارج دایره، مماس PT و خط قاطعی نسبت به دایره رسم خط قاطع دایره را در نقاط A و B قطع می‌کند. ثابت کنید:

$$PT^2 = PA \times PB$$

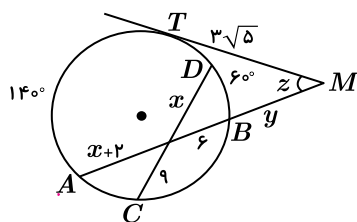
۲۹ ثابت کنید هر گاه خط‌های شامل دو وتر دلخواه AB و CD در نقطه‌ای مانند M (بیرون دایره) یکدیگر را قطع کنند، آنگاه:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

۳۰

در شکل مقابل مقادیر x ، y و z را بیابید.

($\widehat{TA} = 140^\circ$ و $\widehat{TB} = 60^\circ$ بر دایره مماس است و MT)

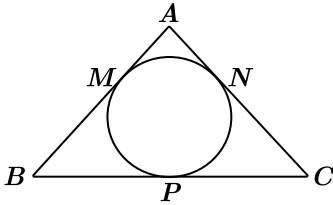


۳۱ جاهای خالی را تکمیل کنید.

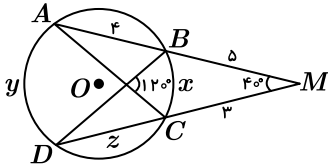
الف مساحت قطاع 30° از دایره‌ای به شعاع 4cm برابر سانتی‌متر مربع است.



ب با توجه به شکل مقابل $AC = 7$ و $BM = 3$. محیط مثلث ABC برابر است.



۳۲ در دایره مقابل x ، y و z را بیابید.



۳۳ از نقطه M خارج دایره، یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کرده‌ایم، ثابت کنید مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع.

۳۴ جاهای خالی زیر را با عبارت (کلمات) مناسب کامل کنید.

الف: هرگاه از یک نقطه خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم طول مماس بین دو قطعه قاطع است.

ب: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $OO' = d = R + R'$ نسبت به هم وضعیت دارند.

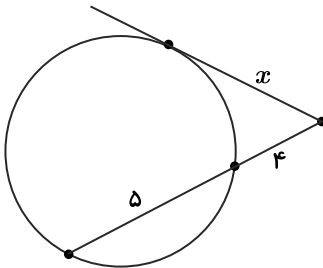
ج: طول مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های R و R' در حالت مماس خارج با فرمول محاسبه می‌شود.

د: در حالتی که دو دایره متقاطع باشند خط‌المركزین OO' وتر مشترک دو دایره است.

۳۵ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) در شکل مقابل مقدار x کدام است؟

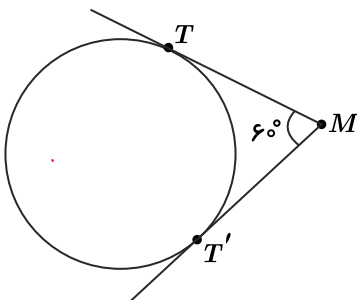
- (۱) $\sqrt{20}$ (۲) ۲۰ (۳) ۶ (۴) $\sqrt{6}$



ب) کمترین و بیشترین فاصله نقطه A از محیط دایره‌ای ۳ و ۱۵ می‌باشد. مساحت دایره کدام است؟

- (۱) 36π (۲) 12π (۳) 18π (۴) 24π

ج) از نقطه M دو مماس MT و MT' را بر دایره $C(O, 4)$ با زاویه بین دو مماس 60° رسم کرده‌ایم. طول TT' کدام است؟

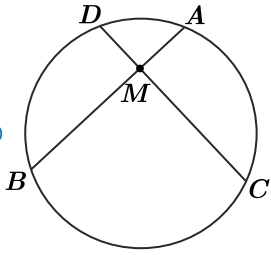


- (۱) $3\sqrt{5}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) ۶ (۴) $4\sqrt{3}$

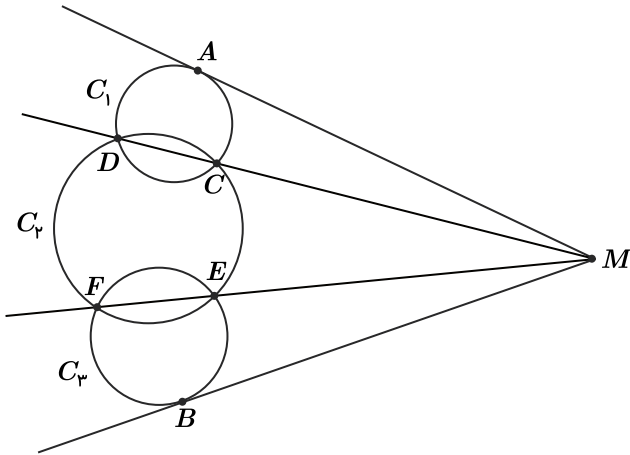
۳۶ ثابت کنید هرگاه دو وتر از دایره درون دایره متقاطع باشند. حاصل ضرب قطعه‌های ایجاد شده روی هر وتر با هم برابر است.



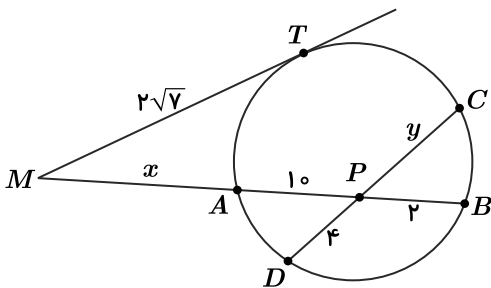
۳۷ در دایره $C(O, R)$ وتر AB و وتر CD به طول ۳۰ را به نسبت ۲ به ۳ تقسیم کرده است. اگر $AB = ۳۳$ ، آنگاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع می‌کند؟ ($MA < MB$)



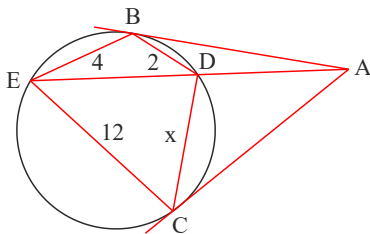
۳۸ در شکل زیر MA و MB بر دو دایره C_1 و C_2 مماس هستند. ثابت کنید: $MA = MB$



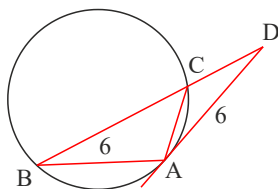
۳۹ در شکل زیر مقادیر x و y را محاسبه کنید. (MT مماس بر دایره است.)



۴۰ در شکل مقابل B و C نقاط تماس هستند. مقدار x چقدر است؟



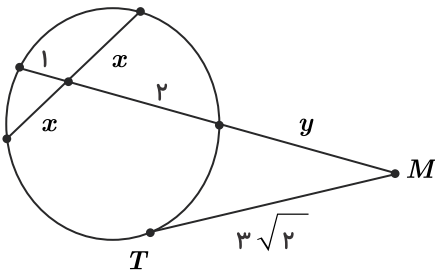
۴۱ در شکل مقابل AD بر دایره مماس بوده و $AB = AD = ۶$ است. اگر محیط مثلث ABC برابر با ۱۶ باشد، اندازه BC چقدر است؟





رسم مماس بر دایره

۴۲ در شکل زیر MT به طول $3\sqrt{2}$ مماس بر دایره است. مقادیر عددی x و y را به دست آورید.



۴۳ هرگاه از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ دو مماس بر دایره رسم کنیم و T و T' نقاط تماس باشند، ثابت کنید:

الف) اندازه‌های دو مماس با هم برابرند.

ب) OM نیمساز $\widehat{TMT'}$ است.

۴۴ از نقطه M خارج دایره‌ای مماس MT به طول $8\sqrt{2}$ را بر آن رسم کرده‌ایم (T روی دایره است). همچنین خطی از M گذرانده‌ایم که

دایره را در دو نقطه A و B قطع کرده است به طوری که $MA < MB$ و $AB = 28$. طول‌های MA و MB را بیابید.

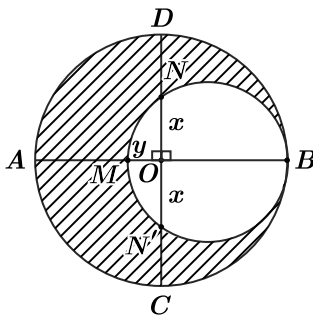
۴۵ طرز رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره به کمک خط‌کش و پرگار را با ذکر دلیل توضیح دهید.

اوضاع نسبی دو دایره

۴۶ طول خط‌المركزین دو دایره مماس درونی، 2cm و مساحت ناحیه محدود بین آنها $16\pi\text{cm}^2$ است. شعاع‌های دو دایره را بیابید.

۴۷ در شکل مقابل دو دایره مماس داخل بوده و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = 6$ و $ND = 4$ ، مساحت

قسمت هاشورخورده را بیابید.



۴۸ دو دایره $C(O, 3K + 4)$ و $C'(O', 3K + 8)$ مماس درون هستند و مساحت ناحیه بین آنها 64π است. طول شعاع‌های دو دایره را به

دست آورید.

مماس مشترک دو دایره

۴۹ دو دایره متخارج داریم که طول مماس مشترک داخلی و خارجی آنها به ترتیب برابر ۱۰ و ۲۴ سانتی‌متر و طول خط‌المركزین آنها مساوی

۲۶ سانتی‌متر است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

۵۰ طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون به شعاع‌های R و R' برابر $2\sqrt{R + R'}$ است. (درست - نادرست)

۵۱ درستی یا نادرستی جملات زیر را معلوم کنید.

الف) کایت (شبه‌لوزی)، یک چهارضلعی محیطی است.

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر $\sqrt{2RR'}$ است.

پ) هر تبدیلی که اندازه زاویه را حفظ کند، تبدیلی طولیا (ایزومتری) است.

ت) نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای بازتاب موازی، یک تبدیل انتقال است.



۵۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف: دو دایره $C(O, 5)$, $C'(O', 3)$ و $OO' = 10$ متخارج هستند.

ب: از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ مماس MT را در نقطه T بر دایره رسم کرده‌ایم، دایره‌ای به قطر OM از T عبور می‌کند.

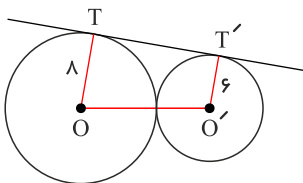
ج: دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ با فرض $OO' = d$ مماس درون هستند. هرگاه: $d = R - R'$

(د) هرگاه دو مماس مشترک خارجی دو دایره متقاطع باشند نقطه تقاطع روی خط شامل OO' خواهد بود.

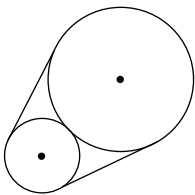
۵۳ برای دو دایره $C(O, 8)$ و $C'(O', 3)$ با فرض $OO' = 13$ مقدار m را طوری بیابید که طول مماس مشترک خارجی دو دایره $3m - 3$ باشند.

۵۴ جمع شعاع‌های دو دایره $\sqrt{17}$ و اختلاف آنها $\sqrt{11}$ می‌باشد. اگر طول مماس مشترک خارجی آنها $\sqrt{70}$ باشد، طول مماس مشترک داخلی آنها را بیابید.

۵۵ در شکل روبه‌رو دو دایره به شعاع‌های ۶ و ۸ مماس خارج و TT' مماس مشترک خارجی آنهاست. محیط و مساحت $OTT'O'$ چقدر می‌شود؟

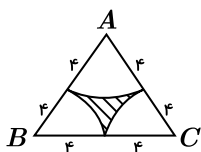


۵۶ دو تیر استوانه‌ای به قطرهای ۶ و ۸ سانتی‌متر مطابق شکل، کنار یکدیگر قرار گرفته و با سیم به هم بسته شده است. طول سیم که دور آنها می‌پیچد؛ چقدر است؟

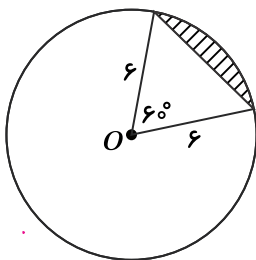


مسائل ترکیبی درس ۲

۵۷ در شکل زیر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است، مساحت قسمت هاشورخورده را بیابید.

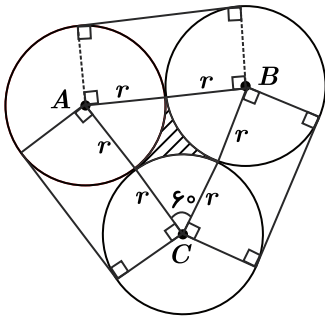


۵۸ در شکل زیر دایره به شعاع ۶ است. مساحت ناحیه سایه‌زده را محاسبه کنید.





۵۹ نخه به طول $6\pi + 18$ مطابق شکل زیر، سه دایره با شعاع‌های برابر که دو به دو بر هم مماس هستند را به هم بسته است. مساحت ناحیه هاشورخورده را محاسبه کنید. (راهنمایی طول نخ $6r + 2\pi r =$)



درس سوم: چند ضلعی‌های محاطی و

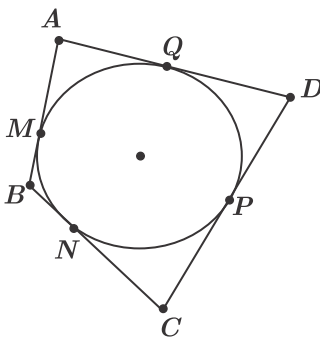
چند ضلعی‌های محاطی و ویژگی‌های آن‌ها محیطی

۶۰ ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محاطی باشد، آنگاه دو زاویهٔ مقابل آن مکمل هستند.

۶۱ ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محاطی باشد، دو زاویهٔ مقابل آن مکمل یکدیگر هستند.

چند ضلعی‌های محیطی و ویژگی‌های آن‌ها

۶۲ در چهارضلعی محیطی زیر ثابت کنید؛ مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر با مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر است.



۶۳ جاهای خالی را تکمیل کنید.

الف مرکز دایرهٔ محاطی درونی برای چندضلعی‌های محیطی، محل هم‌رسی است.

ب تبدیلی که هر نقطه از صفحه را به همان نقطه از صفحه نظیر می‌کند، تبدیل است.

پ تنها تبدیل طولپایی که همواره شیب را حفظ می‌کند، تبدیل است.

ت در مثلث $\triangle ABC$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

۶۴ ثابت کنید اگر در یک چهارضلعی، مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشند، آنگاه چهارضلعی محیطی است.

۶۵ ثابت کنید اگر یک چهارضلعی محیطی باشد آنگاه جمع اضلاع روبه‌روی آن برابر است.

دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث

۶۶ در هر قسمت، پاسخ مناسب را بنویسید.

الف در هر مثلث، نقطهٔ هم‌رسی نیمسازها، مرکز دایرهٔ مثلث است. (محیطی، محاطی)



۶۷ مثلثی به طول اضلاع a, b, c با شعاع دایره محاطی دایره به اندازه r و سه ارتفاع به طول‌های h_a, h_b, h_c را در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$$

۶۸ اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی یک مثلث و شعاع دایره محاطی داخلی آن برابر ۴ باشد، حاصل $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ برابر است.

۶۹ در مثلث قائم‌الزاویه‌ای با اضلاع زاویه قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره محاطی داخلی را محاسبه کنید.

۷۰ ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کند.

۷۱ در مثلث $\triangle ABC$ ، $AB = 6$ و زاویه مقابل به آن سی درجه می‌باشد. قطر دایره محیطی این مثلث کدام است؟
 ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

۷۲ در مثلثی ارتفاع‌های وارد بر سه ضلع با اندازه‌های ۲ و ۳ و ۴ مفروض‌اند، شعاع دایره محاطی داخلی مثلث را بیابید.

۷۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) در هر دایره، منظور از اندازه کمان، همان طول کمان است.

ب) دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند، اگر موازی باشند، کمان‌های محدود بین آنها مساوی است.

ج) اگر از نقطه M خارج دایره $C(O, R)$ مماس MT را بر دایره رسم کنیم در حالت کلی داریم: $MT^2 = R \times OM$

د) مثلثی می‌توان رسم کرد که محاطی باشد اما محیطی نباشد.

۷۴ اگر S و p به ترتیب مساحت و نصف محیط مثلثی دلخواه باشند و r شعاع دایره محاطی درونی مثلث باشد، در حالت کلی ثابت کنید:

$$r = \frac{S}{p}$$

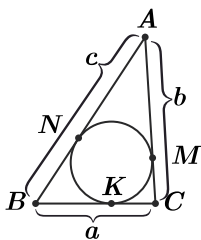
۷۵ ثابت کنید عمودمنصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۷۶ اگر نقاط تماس دایره محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع آن M, N, K باشند

و T و T' نقطه‌های تماس یک دایره محاطی خارجی با خط‌های شامل دو ضلع زاویه A باشند ثابت کنید:

$$AM = AN = p - a$$

(p نصف محیط مثلث)



۷۷ شعاع دایره محاطی داخلی مثلثی با اضلاع ۸ و ۱۵ و ۱۷ چقدر است؟

چندضلعی‌های منتظم

۷۸ هر چندضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است. (درست - نادرست)

۷۹ مساحت ناحیه محدود بین دایره محیطی و دایره محاطی یک شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۱۰ سانتی‌متر را محاسبه کنید.



۸۰ شش ضلعی منتظم $ABCDEF$ مفروض است. با امتداد دادن اضلاع شش ضلعی، مطابق شکل، مثلث MNP را ساخته ایم.

الف) نشان دهید MNP متساوی الاضلاع است.

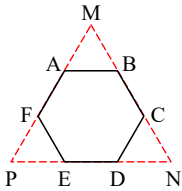
ب) نشان دهید مساحت شش ضلعی، دو سوم مساحت مثلث MNP است.

پ) از نقطه دلخواه T درون شش ضلعی عمودهای TH ، TH' و TH'' را به ترتیب بر BC ، ED و AF رسم کنید. با توجه به آنچه از هندسه پایه

۱ می دانید، مجموع طولهای این سه عمود با کدام جزء از مثلث MNP برابر است؟

ت) مجموع مساحت های مثلث های TBC ، TDE و TAF چه کسری از مساحت مثلث MNP است؟ نشان دهید:

$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$





پاسخنامه تشریحی

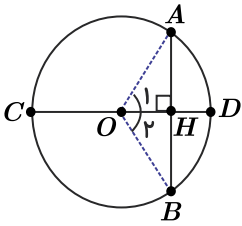
۱ اگر شعاع دایره C_1 را R_1 و شعاع دایره C_2 را R_2 فرض کنیم، آنگاه طول کمان‌های موردنظر برابر است با:

$$L_2 = \frac{45}{360} (2\pi R_2), L_1 = \frac{60}{360} (2\pi R_1)$$

و در نتیجه:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow 45R_2 = 60R_1 \Rightarrow 3R_2 = 4R_1 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{9}{16}$$

۲ روش اول:



$$\begin{cases} OA = OB \\ OH = OH \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \Delta AOH \cong \Delta BOH \rightarrow$$

$$AH = BH, \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \rightarrow AD = BD$$

روش دوم:

$$OA = OB = r \Rightarrow OAB \text{ متساوی الساقین}$$

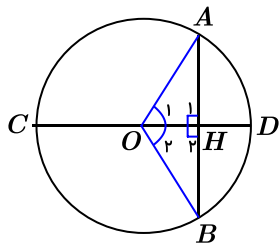
چون در مثلث متساوی الساقین، ارتفاع، نیمساز و میانه هم هست داریم:

$$AH = BH, O_1 = O_2 \Rightarrow AD = BD$$

۳
الف درست

ب درست

۴

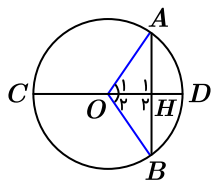


$$\begin{cases} OA = OB = R \\ \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ \\ OH = OH \end{cases}$$

$$\Delta OAH \cong \Delta OBH$$

$$\Rightarrow AH = BH, \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \rightarrow \widehat{AD} = \widehat{BD}$$

۵



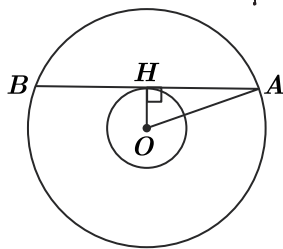
$$\widehat{AD} = \widehat{BD} \Rightarrow \widehat{O_1} = \widehat{O_2}$$

$$\begin{cases} \widehat{O_1} = \widehat{O_2} \\ OH = OH \\ OA = OB = r \end{cases} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} \Delta OAH \cong \Delta OBH$$

$$\Rightarrow AH = BH$$

$$\widehat{H_1} + \widehat{H_2} = 180^\circ \xrightarrow{\widehat{H_1} = \widehat{H_2}} 2\widehat{H_1} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{H_1} = \widehat{H_2} = 90^\circ$$

۶



می‌دانیم شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است و شعاع عمود بر وتر و کمان مقابل آن را نصف می‌کند؛ بنابراین داریم:

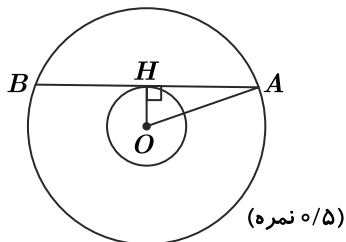
$$\left. \begin{array}{l} OH = 2 \\ OA = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow AH^2 = OA^2 - OH^2 = 36 - 4 = 32$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$AB = 2AH = 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$$

(صفحه ۱۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$OH^2 + AH^2 = OA^2 \Rightarrow AH = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ (نمره ۵/۵)}$$

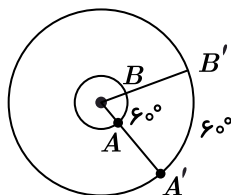
$$AB = 2AH \Rightarrow AB = 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2} \text{ (نمره ۵/۵)}$$

(۵/۵ نمره)

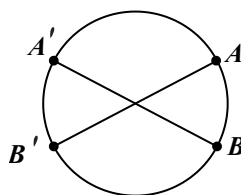
۷ الف) نادرست؛ اگر نقطه درون دایره باشد فاصله آن تا مرکز کمتر از شعاع آن دایره است.

ب) درست؛ یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع وارد بر آن نقطه عمود باشد.

ج) نادرست؛ با توجه به شکل مقابل مشاهده می‌شود که کمان‌ها با اندازه‌های برابر می‌توانند طول‌های نابرابر داشته باشند:



د) نادرست؛ مثال نقض در شکل زیر $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$ اما $AB' \nparallel A'B$



(صفحه ۱۰ تا ۱۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) نادرست (۲۵ نمره)

ب) درست (۲۵ نمره)

ج) نادرست (۲۵ نمره)

د) نادرست (۲۵ نمره)

۸

مساحت ناحیه واقع بین دو دایره برابر است با:

بنابراین:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \pi R_2^2 - \pi R_1^2$$

$$\pi R_2^2 - \pi R_1^2 = \frac{25\pi}{2} \Rightarrow R_2^2 - R_1^2 = \frac{25}{2}$$

$$HB^2 = R_2^2 - R_1^2$$

از طرف دیگر در مثلث قائم‌الزاویه OHB داریم:



در نتیجه:

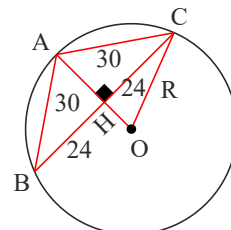
$$HB^2 = \frac{25}{2} \Rightarrow HB = \frac{5}{\sqrt{2}} \Rightarrow AB = 2HB = \frac{5}{\sqrt{2}} \times 2 = 5\sqrt{2}$$

چون $AB = AC$ ، پس A وسط کمان BC قرار دارد و پاره خط OA بر وتر BC عمود است. داریم:

$$\triangle ABH : \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow AH^2 = 30^2 - 24^2 \Rightarrow AH = 18$$

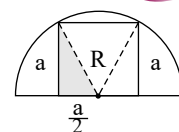
$$OH = R - 18$$

$$\triangle OHC : R^2 = 24^2 + (R - 18)^2 \Rightarrow R = 25$$



از مرکز دایره به دو رأس بالایی مربع وصل می کنیم و در مثلث هاشور خورده رنگ رابطه فیثاغورس را می نویسیم:

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = R^2 \Rightarrow 5a^2 = 4R^2 \Rightarrow 5a^2 = 4\left(\frac{15}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 = 45$$



شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است. داریم:

$$\begin{cases} \hat{A} = 90^\circ, \hat{H} = 90^\circ \Rightarrow OA \parallel BH \Rightarrow \hat{OAB} = \hat{B}_r \Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{B}_r \\ OA = OB \Rightarrow \hat{OAB} = \hat{B}_1 \end{cases}$$

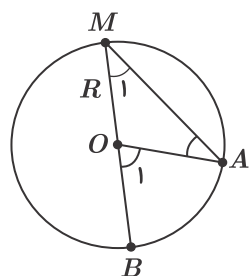
۱۲

الف نادرست

ب نادرست

۱۳ روش اول:

مرکز دایره را به نقطه A وصل می کنیم.



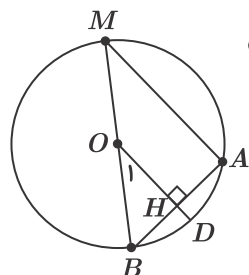
$$OM = OA = R \Rightarrow \hat{M}_1 = \hat{A} \quad (1)$$

$$\hat{O}_1 \text{ زاویه } \hat{O}_1 \text{ در مثلث } \triangle OAM \text{ خارجی است. لذا: } (2) \quad \hat{O}_1 = \hat{M}_1 + \hat{A}$$

$$(1), (2) \Rightarrow \hat{O}_1 = 2\hat{M}_1 \Rightarrow \widehat{BA} = 2\hat{M}_1 \Rightarrow \hat{M}_1 = \frac{\widehat{BA}}{2}$$

روش دوم:

وتر AB و شعاع عمود بر آن را رسم می کنیم. در نتیجه:

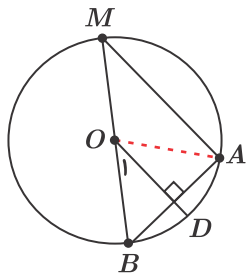


$$OH \perp AB \Rightarrow BH = AH, \quad \widehat{BD} = \widehat{DA}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{BO}{BM} &= \frac{BH}{BA} = \frac{1}{2} \\ \widehat{B} &= \widehat{B} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \triangle OBH \sim \triangle MAB \Rightarrow \hat{M} = \hat{O}_1 = \widehat{BD} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

روش سوم:

وتر AB و شعاع عمود بر آن را رسم می کنیم. در نتیجه:



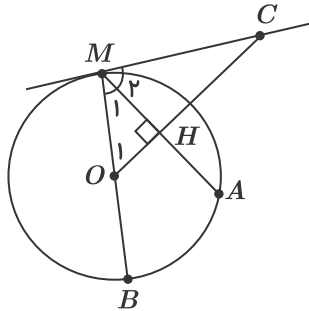
$$OD \perp AB \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DA} \Rightarrow \hat{O}_1 = \frac{\widehat{BA}}{2} \quad (1)$$

از طرفی چون در مثلث AMB میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع است، لذا مثلث قائم‌الزاویه است. پس:

$$\left. \begin{array}{l} MA \perp AB \\ OD \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow MA \parallel OD \Rightarrow \hat{M} = \hat{O}_1 \xrightarrow{(1)} \hat{M} = \frac{\widehat{BA}}{2}$$

روش چهارم:

از نقطه M خطی بر دایره، مماس می‌کنیم. همچنین از نقطه O به وتر AM عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا خط مماس را در نقطه C قطع کند. در نتیجه:

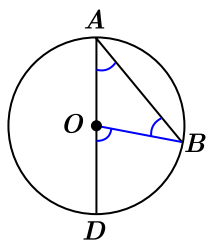


$$\left. \begin{array}{l} OH \perp AM = O_1 = \frac{\widehat{AM}}{2} \\ O_1 + M_1 = M_r + M_1 = 90^\circ \Rightarrow M_r = O_1 \\ M_1 + M_r = 90^\circ = \frac{180^\circ}{2} = \frac{\widehat{BA} + \widehat{AM}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow M_1 + \frac{\widehat{AM}}{2} = \frac{\widehat{BA} + \widehat{AM}}{2} \Rightarrow M_1 = \frac{\widehat{BA}}{2}$$

۱۴ نصف

۱۵

شعاع OB را رسم می‌کنیم:

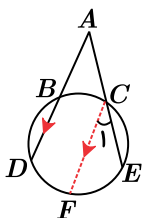


$$\begin{aligned} OA = OB &\rightarrow \widehat{A_1} = \widehat{B_1} \\ \widehat{O_1} = 2\widehat{A_1} &\text{ زاویه خارجی است:} \\ \widehat{O_1} = \widehat{DB} &\text{ زاویه مرکزی است:} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\widehat{DB} = 2\widehat{A_1} \rightarrow \widehat{A_1} = \frac{1}{2}\widehat{DB}$$

۱۶ از C وتر CF را موازی BD رسم می‌کنیم. می‌دانیم کمان‌های محدود به دو وتر موازی در دایره با هم برابرند.



بنابر قضیه موازی و مورب داریم:

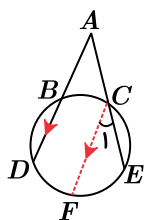
$$\hat{A} = \hat{C}_1 = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC})$$

(صفحه ۱۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



رسم شکل (نمره ۵)

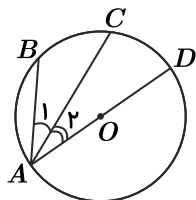


$$\hat{A} = \hat{C}_1 = \frac{\widehat{EF}}{2} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{DF}) \quad (\text{نمره ۵})$$

$$\widehat{BC} = \widehat{DF} \Rightarrow \hat{A} = \frac{1}{2}(\widehat{DE} - \widehat{BC}) \quad (\text{نمره ۵})$$

۱۷

می‌دانیم اگر یک ضلع زاویه محاطی قطری از دایره باشد، اندازه زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روست.



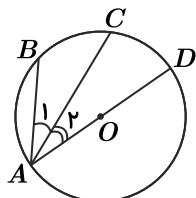
$$\hat{A}_{\text{کل}} = \hat{A}_1 + \hat{A}_r \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_{\text{کل}} - \hat{A}_r$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BCD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

(صفحه ۱۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

می‌دانیم اگر یک ضلع زاویه محاطی قطر دایره باشد، اندازه آن نصف کمان روبه‌رو است. (نمره ۵)



$$\hat{A}_{\text{کل}} = \hat{A}_1 + \hat{A}_r \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_{\text{کل}} - \hat{A}_r \quad (\text{نمره ۵})$$

$$\Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BCD}}{2} - \frac{\widehat{CD}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad (\text{نمره ۵})$$

۱۸ می‌دانیم که اگر در دایره‌ای دو وتر موازی باشند، کمان‌های بین آنها مساوی‌اند. داریم:

$$\begin{cases} EF \parallel BC \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{CF} = x \\ AB \parallel DE \Rightarrow \widehat{BE} = \widehat{AD} = x \end{cases} \Rightarrow 36^\circ = x + x + x + x + \frac{x}{2} + 45^\circ$$

$$\Rightarrow 315^\circ = \frac{9x}{2} \Rightarrow x = 70^\circ$$

۱۹ از C به A وصل می‌کنیم. دو مثلث ACH و PCH به حالت دو ضلع و زاویه بین (قائمه) هم‌نهشت هستند. داریم:

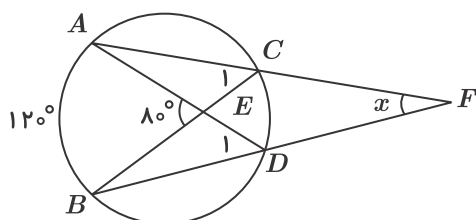
$$\begin{cases} \hat{HCA} = \hat{HCP}, \hat{HCP} = \frac{\widehat{BC'}}{2} \\ \hat{HCP} = \alpha \end{cases} \Rightarrow \widehat{BC'} = 2\alpha$$

$$\hat{HCA} = \hat{HCP} = \alpha \Rightarrow \widehat{AB} = 2\alpha, (\text{محاطی}) \widehat{BB'A} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$$

۲۰ روش اول:

$$\frac{120^\circ + y}{2} = 80^\circ, \frac{120^\circ - y}{2} = x \Rightarrow y = 40^\circ, x = 40^\circ$$

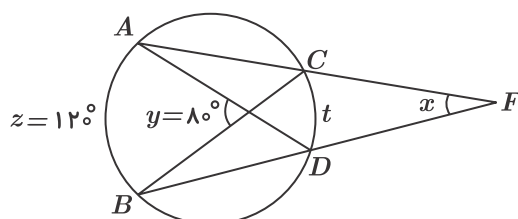
روش دوم: با استفاده از ویژگی‌های زاویه محاطی و زاویه خارجی داریم:



$$80^\circ = \hat{C}_1 + \hat{A} = \frac{120^\circ}{2} + \hat{A} \Rightarrow \hat{A} = 20^\circ (*)$$

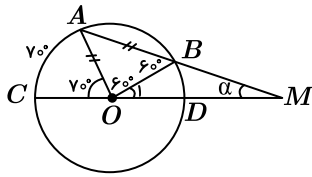
$$\left. \begin{aligned} \hat{D}_1 &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \\ \hat{D}_1 &= \hat{A} + x \stackrel{(*)}{=} 20^\circ + x \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 40^\circ$$

روش سوم:



$$y = \frac{z+t}{2}, x = \frac{z-t}{2} \Rightarrow x+y = z \Rightarrow x+80^\circ = 120^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

۲۱

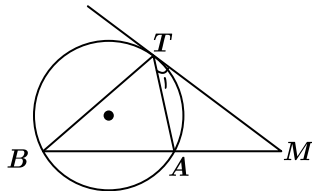


چون $AB = R$ است، پس مثلث OAB متساوی الاضلاع است.

چون CD قطر است پس: $\widehat{O_1} = \widehat{BD} = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ$

در نتیجه: $\alpha = \frac{70^\circ - 50^\circ}{2} = 10^\circ$

۲۲

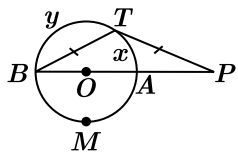


داریم: $\widehat{M} = \widehat{MT_1} = \widehat{B} = \frac{\widehat{TA}}{2}$

پس: $\triangle MTA \sim \triangle MTB$

بنابراین: $\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT}$ یعنی $MT^2 = MA \cdot MB$

۲۳



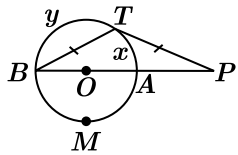
محاطی $TP = BT \Rightarrow \widehat{B} = \widehat{P} = \frac{\widehat{x}}{2}$

قطر $AB \Rightarrow \widehat{x} + \widehat{y} = 180^\circ$

$\widehat{P} = \frac{\widehat{y} - \widehat{x}}{2} = \frac{\widehat{x}}{2} \Rightarrow \widehat{y} = 2\widehat{x} \Rightarrow 3\widehat{x} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{x} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{P} = 30^\circ$

(صفحه ۱۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

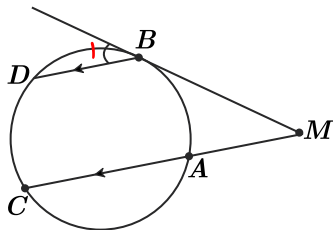


محاطی $\widehat{P} = \widehat{B} = \frac{\widehat{x}}{2} = \frac{\widehat{y} - \widehat{x}}{2}$ (نمره ۵)

$\widehat{y} = 2\widehat{x}$, $\widehat{x} + \widehat{y} = 180^\circ$ (نمره ۵)

$\widehat{x} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{P} = \frac{\widehat{x}}{2} = 30^\circ$ (نمره ۵)

۲۴



می دانیم در هر دایره وترهای موازی، کمان های مساوی از دایره جدا می کنند؛ بنابراین $\widehat{DC} = \widehat{AB}$

اندازه زاویه ظلی نصف کمان روبه روست پس

$$\widehat{B_1} = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

بنا بر قضیه موازی و مورب داریم:

$$\widehat{M} = \widehat{B_1} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{BDC} - \widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{M} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$$

(صفحه ۱۶ کتاب درسی)

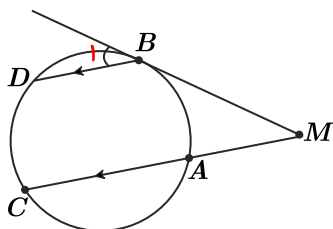
راهنمای تصحیح:

$BD \parallel AC \Rightarrow \widehat{DC} = \widehat{AB}$ (نمره ۵)

$\widehat{B_1} = \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{BCD} - \widehat{DC}}{2}$ (نمره ۵)

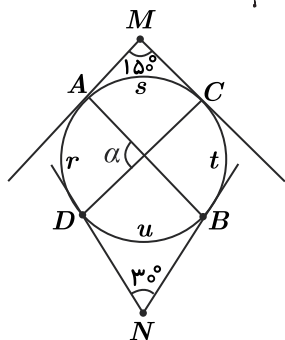
$\widehat{M} = \widehat{B_1} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{AB}}{2}$ (نمره ۵)

۲۵





فرض کنیم کمان‌های محصور r, s, t, u باشند بنابراین:



$$\left. \begin{aligned} \frac{r+u+t-s}{2} &= 15^\circ \\ \frac{r+s+t-u}{2} &= 3^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2r+2t}{2} = 18^\circ \Rightarrow r+t = 18^\circ$$

$$\hat{\alpha} = \frac{r+t}{2} = \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ \Rightarrow AB \perp DC$$

(صفحة ۱۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\left. \begin{aligned} \hat{M} &= \frac{\widehat{AD} + \widehat{DB} + \widehat{BC} - \widehat{AC}}{2} = 15^\circ \text{ (نمره ۲۵)} \\ \hat{N} &= \frac{\widehat{AD} + \widehat{AC} + \widehat{BC} - \widehat{DB}}{2} = 3^\circ \text{ (نمره ۲۵)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \widehat{AD} + \widehat{BC} = 18^\circ \text{ (نمره ۵)}$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\widehat{AD} + \widehat{BC}}{2} = \frac{18^\circ}{2} = 9^\circ \Rightarrow AB \perp CD \text{ (نمره ۵)}$$

۲۶

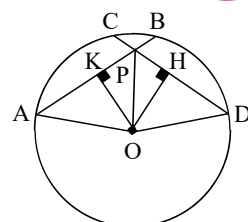
$$a+b+c=36^\circ, \quad b=2a, c=3a \Rightarrow a+2a+3a=36^\circ$$

$$\Rightarrow a=6^\circ, \quad b=12^\circ, \quad c=18^\circ \Rightarrow \hat{M} = \frac{c-b}{2} = \frac{18^\circ-12^\circ}{2} = 3^\circ$$

۲۷ می‌دانیم که شعاع عمود بر وتر آن را نصف می‌کند، بنابراین:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} AB=CD &\xrightarrow{+} DH=AK \\ \hat{H}=\hat{K}=90^\circ \\ OA=OD=R \end{aligned} \right. \Rightarrow \triangle OAK \cong \triangle ODH \Rightarrow OH=OK$$

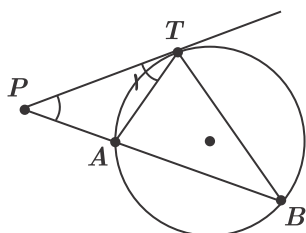
(وتر و یک ضلع)



چون نقطه O از دو ضلع زاویه APD به یک فاصله است، پس روی نیمساز آن قرار دارد، یعنی: $\hat{APO} = \hat{DPO}$.

۲۸ روش اول:

از نقطه T به A و B وصل می‌کنیم.

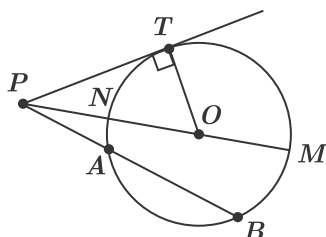


$$\left\{ \begin{aligned} \hat{P} &= \hat{P} \\ \hat{T}_1 = \hat{B} &= \frac{\widehat{TA}}{2} \end{aligned} \right. \Rightarrow \triangle PAT \sim \triangle PBT \Rightarrow \frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow PT^2 = PA \times PB$$

روش دوم:

نقطه P را به مرکز دایره وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم. سپس نقاط برخورد با دایره را M و N می‌نامیم. قرار می‌دهیم $OP = d$. پس:

$$PN \times PM = PA \times PB \Rightarrow (d-R)(d+R) = PA \times PB \Rightarrow PA \times PB = d^2 - R^2 \quad (1)$$

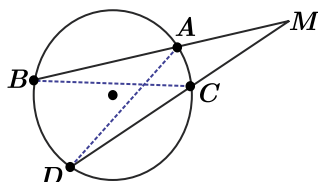


از طرفی در مثلث قائم الزاویه $\triangle OPT$ داریم.

$$OT^r + PT^r = OP^r \Rightarrow PT^r = d^r - R^r \quad (۲)$$

بنابر روابط (۱) و (۲) داریم $PT^r = PA \times PB$ (در صورتی که PA از مرکز بگذرد، اثبات به روش مشابه برقرار است).

مثلت‌های MBC و MAD مشابه هستند. ۲۹



$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{B} = \widehat{D} = \frac{AC}{r} \\ \widehat{M} = \widehat{M} \end{array} \right. \xrightarrow{(ز)} \frac{MB}{MD} = \frac{MC}{MA} \rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$

$$9x = 6(x + 2) \rightarrow x = 4$$

$$(3\sqrt{5})^r = y(y + 6 + 6) \rightarrow 45 = y^r + 12y$$

$$y^r + 12y - 45 = 0 \rightarrow (y + 15)(y - 3) = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow z = \frac{140^\circ - 60^\circ}{2} = 40^\circ$$

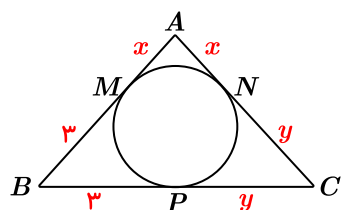
۳۰

۳۱

الف $\frac{4\pi}{3}$

ب

با در نظر گرفتن $AN = x$ و $NC = y$ داریم:

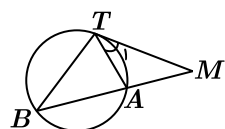


$$AC = x + y = 7$$

$$\triangle ABC \text{ محیط} = 3 + 3 + 2x + 2y = 6 + 2(x + y) = 6 + 2 \times 7 = 20$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y - x = 80^\circ \\ y + x = 240^\circ \end{array} \right. \Rightarrow y = 160^\circ, x = 80^\circ$$

$$5(9) = 3(3 + z) \Rightarrow 45 = 9 + 3z \Rightarrow z = 12$$



مماس MT : فرض

حکم: $MT^r = MA \times MB$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{M} = \hat{M} \\ \hat{T}_{ظلی} = \hat{B}_{محاطی} = \frac{\widehat{AT}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ATM \sim \triangle BTM \quad (ز)$$

$$\Rightarrow \frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT} \Rightarrow MT^r = MA \times MB$$

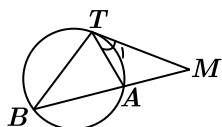
اثبات:

(صفحه ۱۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



رسم شکل (۵، ۵، ۵)



$$\left. \begin{array}{l} \hat{T}_1 = \hat{B} \\ \hat{M} = \hat{M} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ATM \sim \triangle BTM \text{ (نمره ۵، ۵، ۵)}$$

$$\frac{MT}{MA} = \frac{MB}{MT} \Rightarrow MT^2 = MA \times MB \text{ (نمره ۵، ۵، ۵)}$$

۳۴ الف) بنابر قضیه‌ای «هرگاه از یک نقطه خارج دایره یک مماس و یک قاطع بر دایره رسم کنیم طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع خواهد شد.» (صفحه ۱۹ کتاب درسی)

ب) در اوضاع نسبی دو دایره نسبت به هم در حالتی که $d = R + R'$ باشد دو دایره مماس برون هستند. (صفحه ۲۰ کتاب درسی)

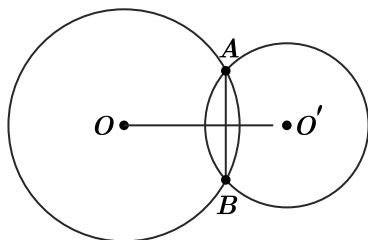
ج)

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad d = R + R' \quad \sqrt{R^2 + R'^2 + 2RR' - R^2 - R'^2 + 2RR'} \\ \Rightarrow TT' = \sqrt{4RR'} = 2\sqrt{RR'}$$

(صفحه ۲۲ کتاب درسی)

د) چون O و O' از دو سر پاره خط AB به یک فاصله هستند.

بنابراین OO' عمودمنصف AB خواهد شد.



راهنمای تصحیح:

۱) واسطه هندسی (۵، ۵، ۵)

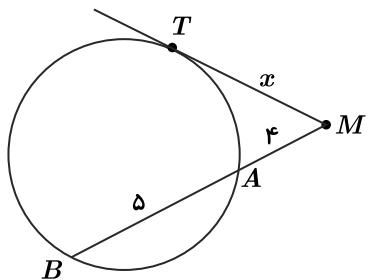
۲) مماس برون (مماس خارج) (۵، ۵، ۵)

۳) $TT' = 2\sqrt{RR'}$ (۵، ۵، ۵)

۴) عمودمنصف (۵، ۵، ۵)

۳۵

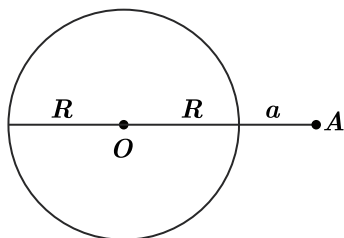
الف)



$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow$$

$$x^2 = 4 \times (4 + 5) \Rightarrow x^2 = 4 \times 9 = 36 \Rightarrow x = 6$$

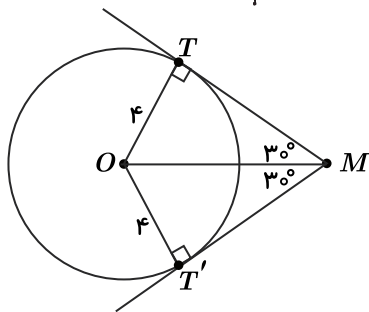
(صفحه ۱۹ کتاب درسی)



ب) کمترین فاصله $a = 3$

بیشترین فاصله $a + 2R = 15$

بنابراین $R = 6$ پس مساحت دایره 36π

بنابر این $OM = 8$ بنابر رابطه فیثاغورس:

$$MT^{\mathfrak{r}} + 1\mathfrak{f} = \mathfrak{f}\mathfrak{r} \Rightarrow MT = TT' = \sqrt{\mathfrak{r}\lambda} = \mathfrak{r}\sqrt{\mathfrak{r}}$$

۳۶

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} = \hat{C} &= \frac{\overbrace{BD}}{\underbrace{}} \\ \hat{B} = \hat{D} &= \frac{\overbrace{AC}}{\underbrace{}} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{MAD} \sim \overset{\Delta}{MBC} \quad (ج) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$

(۲۵، ۰ نمره)

$$\left. \begin{aligned} \widehat{A} = \widehat{C} &= \frac{\widehat{BD}}{2} \\ \widehat{B} = \widehat{D} &= \frac{\widehat{AC}}{2} \end{aligned} \right\} \text{ (نمره ۰,۲۵)}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{MA} \sim \overset{\Delta}{MB} \quad (\text{ز}) \quad (\text{نمره ۲۵}) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD \quad (\text{نمره ۵})$$

$$\frac{MD}{MC} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{r}} \Rightarrow \frac{MD}{\mathfrak{r}} = \frac{MC}{\mathfrak{r}} = t \Rightarrow \begin{cases} MD = \mathfrak{r}t \\ MC = \mathfrak{r}t \end{cases}$$

$$CD = \mathfrak{r} \circ \Rightarrow \mathfrak{r}t + \mathfrak{r}t = \mathfrak{r} \circ \Rightarrow t = \mathfrak{r} \Rightarrow \begin{cases} MD = \mathfrak{r}\mathfrak{r} \\ MC = \mathfrak{r}\mathfrak{r} \end{cases}$$

می‌دانیم $\overbrace{MA \times MB}^{(1)} = MC \times MD$ طبق فرض داریم:



$$(1) \Rightarrow MA \times MB = 12 \times 18 = 216$$

$$AB = MA + MB = 33$$

$$MA \times (33 - MA) = 216 \Rightarrow -MA^2 + 33MA - 216 = 0$$

$$\Rightarrow (MA - 9)(MA - 24) = 0 \Rightarrow MA = \begin{cases} 9 \Rightarrow MB = 24 \\ 24 \Rightarrow MB = 9 \end{cases} (M_A < M_B)$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

(صفحه ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{فرض} \begin{cases} MD = 2t \\ MC = 3t \end{cases} \Rightarrow t = 6 \Rightarrow \begin{cases} MD = 12 \\ MC = 18 \end{cases} \text{ (نمره ۵)}$$

$$MA \times MB = MC \times MD \Rightarrow \begin{cases} MA \times MB = 216 \\ MA + MB = 33 \end{cases} \text{ (نمره ۵)}$$

$$\begin{cases} MA = 9 \\ MB = 24 \end{cases} \Rightarrow \frac{MA}{MB} = \frac{3}{8} \text{ (نمره ۵)}$$

۳۸

با توجه به روابط طولی در دایره داریم:

روابط طولی قاطع‌های متقاطع در M را برای هر یک از سه دایره می‌نویسیم.

$$\left. \begin{aligned} MA^2 &= MC \times MD \\ MC \times MD &= ME \times MF \\ MB^2 &= ME \times MF \end{aligned} \right\} \Rightarrow MA^2 = MB^2 \Rightarrow MA = MB$$

(صفحه ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\left. \begin{aligned} MA^2 &= MC \times MD \text{ (نمره ۲۵)} \\ MC \times MD &= ME \times MF \text{ (نمره ۲۵)} \\ MB^2 &= ME \times MF \text{ (نمره ۲۵)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow MA^2 = MB^2 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow MA = MB \text{ (نمره ۵)}$$

۳۹ بنابر روابط طولی در دایره داریم:

$$PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow 10 \times 2 = y \times 4 \Rightarrow y = 5$$

$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow (2\sqrt{y})^2 = x \times (x + 12)$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow (x + 14)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -14 \text{ (غیرممکن)} \\ x = 2 \text{ (قانونی)} \end{cases}$$

راهنمای تصحیح:

$$\displaystyle PA \times PB = PC \times PD \Rightarrow 10 \times 2 = y \times 4 \Rightarrow y = 5 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$MT^2 = MA \times MB \Rightarrow (2\sqrt{y})^2 = x \times (x + 12) \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -14 \text{ (غیرممکن)} \\ x = 2 \text{ (قانونی)} \end{cases} \text{ (نمره ۵)}$$

۴۰

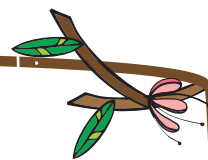
$$\begin{cases} \frac{BD}{BE} \sim \frac{AD}{AE} \Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{AD}{AE} \\ \frac{CD}{CE} \sim \frac{AC}{AE} \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{AC}{AE} \end{cases}, AB = AC \text{ مماس‌های رسم‌شده بر دایره}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BE} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 6$$

۴۱

$$AB = AD \Rightarrow \hat{B} = \hat{D}, \quad (\text{مماسی}) \quad \hat{B} = \frac{\widehat{AC}}{2}, \quad (\text{ظلی}) \quad \hat{A} = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{D} = \frac{\widehat{AC}}{2} \Rightarrow AC = CD$$

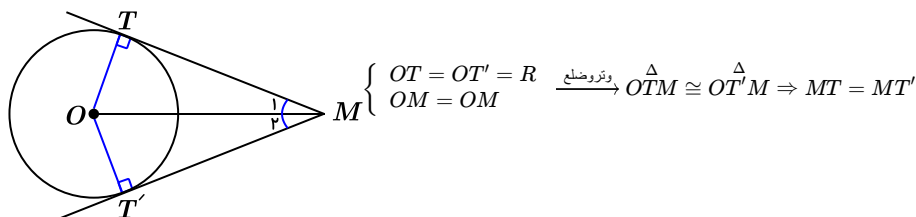


$$\begin{aligned} \triangle ABC \text{ محیط} &= 16 = AB + AC + BC = 6 + AC + BC \Rightarrow AC + BC = 10 \\ CD = AC &\Rightarrow BD = BC + CD = BC + AC = 10 \Rightarrow BD = 10 \\ AD^2 &= CD \times BD \Rightarrow 36 = CD \times 10 \Rightarrow CD = 3.6 \\ \Rightarrow BC &= BD - CD = 10 - 3.6 = 6.4 \end{aligned}$$

۴۲

$$\begin{aligned} x \times x &= 2 \times 1 \rightarrow x^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2} \\ (3\sqrt{2})^2 &= y(y+3) \rightarrow y^2 + 3y - 18 = 0 \rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

۴۳

الف) داریم: $\widehat{T} = \widehat{T'} = 90^\circ$ پس:ب) چون دو مثلث هم نهشت‌اند؛ پس: $\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$ و در نتیجه OM نیمساز $\widehat{M}$ است.

۴۴

می‌دانیم طول مماس MT واسطه هندسی بین MA و MB است بنابراین:

$$\begin{aligned} MT^2 &= MA \times MB \Rightarrow \\ (8\sqrt{2})^2 &= x(x + 28) \Rightarrow \\ x^2 + 28x - 128 &= 0 \Rightarrow \\ (x + 32)(x - 4) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق ق} \\ x = -32 \text{ غ ق} \end{cases} \\ \Rightarrow MA = x = 4, MB = x + 28 = 32 \end{aligned}$$

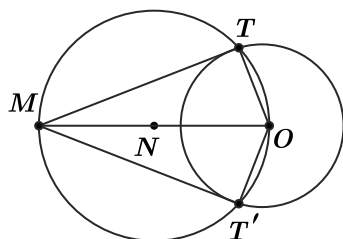
(صفحه ۱۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} (8\sqrt{2})^2 &= x(x + 28) \quad (\text{نمره ۵}) \\ x^2 + 28x - 128 &= 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \text{ ق ق} \\ x = -32 \text{ غ ق} \end{cases} \quad (\text{نمره ۵}) \\ MA = 4, MB = 32 & \quad (\text{نمره ۵}) \end{aligned}$$

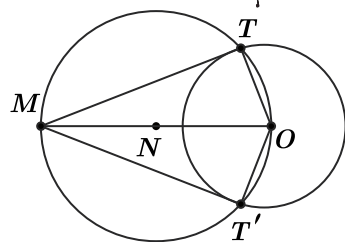
۴۵

دایره‌ای به مرکز O و نقطه‌ای مانند M خارج از آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم، این دایره، دایرهٔ مفروض را در دو نقطهٔ T و T' قطع می‌کند. هر دو زاویهٔ $\widehat{MTO}$ و $\widehat{MT'O}$ محاطی روبه‌رو به قطر هستند. بنابراین قائمه می‌شوند و چون شعاع‌های OT و OT' بر MT و MT' عمود شده‌اند. بنابراین MT و MT' هر دو مماس بر دایرهٔ مفروض هستند.



(صفحه ۱۹ کتاب درسی)

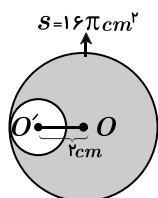
راهنمای تصحیح:



رسم شکل فرضی (۵/نمره)
دایره‌ای به مرکز O و نقطه‌ای مانند M خارج از آن در نظر می‌گیریم. دایره‌ای به قطر OM رسم می‌کنیم، این دایره، دایرهٔ مفروض را در دو نقطهٔ T و T' قطع می‌کند. (۵/نمره)

$$\widehat{MTO} = \widehat{MT'O} = 90^\circ \text{ (محاطی روی‌پرو به قطر)}$$

$$\Rightarrow MT, MT' \text{ مماس‌بر دایره هستند (۵/نمره)}$$



$$\pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow (R - R')(R + R') = 16$$

$$\xrightarrow{R-R'=2} 2(R + R') = 16 \Rightarrow \begin{cases} R + R' = 8 \\ R - R' = 2 \end{cases} \Rightarrow R = 5, R' = 3$$

۴۶

فرض کنید شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر R و شعاع دایره کوچک‌تر R' باشد. طبق رابطهٔ طولی حاصل از تقاطع MB و NN' در دایره کوچک‌تر داریم:

$$OM \times OB = ON \times ON' \Rightarrow (R - 6) \times R = (R - 4)^2$$

$$R^2 - 6R = R^2 - 8R + 16 \Rightarrow R = 8$$

$$AB = AM + MB \Rightarrow 16 = 6 + 2R' \Rightarrow R' = 5$$

$$\text{مساحت هاشورخورده} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 39\pi$$

(صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$OM \times OB = ON \times ON' \Rightarrow (R - 6) \times R = (R - 4)^2 \text{ (نمره ۵/۵)}$$

$$R^2 - 6R = R^2 - 8R + 16 \Rightarrow R = 8 \text{ (نمره ۵/۵)}$$

$$AB = AM + MB \Rightarrow 16 = 6 + 2R' \Rightarrow R' = 5 \text{ (نمره ۵/۵)}$$

$$\text{مساحت هاشورخورده} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 39\pi \text{ (نمره ۵/۵)}$$

۴۸ چون دو دایره مماس درون هستند. بنابراین: $d = |R - R'|$

$$\begin{cases} R = 3K + 4 \\ R' = 3K + 8 \end{cases} \Rightarrow |R - R'| = 4 = d$$

$$\text{مساحت بین} = |\pi R^2 - \pi R'^2| = \pi \overbrace{|R - R'|}^4 (R + R') = 64\pi$$

$$\xrightarrow{R' > R} \begin{cases} R' - R = 4 \\ R' + R = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R' = 10 \\ R = 6 \end{cases}$$

(صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{cases} R = 3K + 4 \\ R' = 3K + 8 \end{cases} \Rightarrow |R - R'| = 4 = d \text{ (نمره ۵/۵)}$$

$$\text{مساحت بین} = |\pi R^2 - \pi R'^2| = \pi |R^2 - R'^2| = 64\pi \text{ (نمره ۵/۵)}$$

$$|R - R'| (R + R') = 64 \xrightarrow{R' > R} \begin{cases} R' = 10 \\ R = 6 \end{cases} \text{ (نمره ۵/۵)}$$

۴۹ فرض کنیم طول خط‌المركزین دو دایره برابر d و طول شعاع‌های آنها R و R' باشد. ($R > R'$)

$$\text{طول مماس مشترک خارجی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \text{ و طول مماس مشترک داخلی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2}$$

در نتیجه

$$10^2 = 26^2 - (R + R')^2 \text{ و } 24^2 = 26^2 - (R - R')^2$$

$$\Rightarrow R + R' = 24, R - R' = 10 \Rightarrow R = 17, R' = 7$$

۵۰ نادرست

۵۱

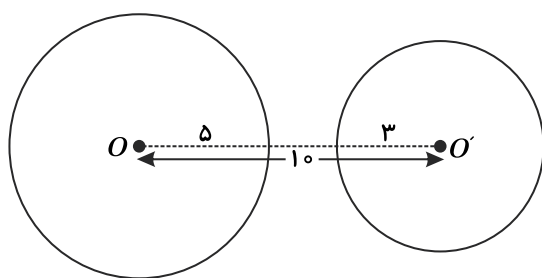
الف درست

ب نادرست

پ نادرست

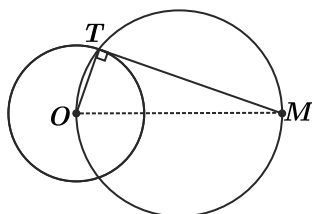
ت درست

۵۲ الف) درست؛ چون $d = 10 > R + R' = 8$ است. پس دو دایره متخارج هستند.



(صفحة ۲۰ کتاب درسی)

ب) درست؛ چون شعاع در نقطه تماس T بر خط مماس عمود است. پس دایره‌ای به قطر OM از T عبور می‌کند.



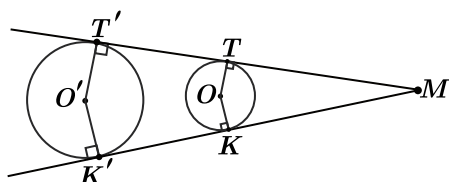
(صفحة ۱۹ کتاب درسی)

ج) نادرست؛ ممکن است $R < R'$ باشد و در این حالت $d < 0$ خواهد شد.

نکته: اگر $d = |R - R'|$ می‌توان نتیجه گرفت که دو دایره مماس درون هستند.

(صفحة ۲۲ کتاب درسی)

د) درست؛ اگر نقطه تقاطع را M و نقاط تماس T و K و T' و K' باشند، O و O' روی نیمساز $\widehat{MTM'}$ قرار می‌گیرند، زیرا:



$$\left. \begin{array}{l} OT = OK \rightarrow O \text{ روی نیمساز } \widehat{MTM'} \text{ است.} \\ OT' = OK' \rightarrow O' \text{ روی نیمساز } \widehat{MTM'} \text{ است.} \end{array} \right\} \rightarrow O, O', M \text{ هم خط اند.}$$

(صفحة ۱۸ تا ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست (۲۵، نمره)

ب) درست (۲۵، نمره)

ج) نادرست (۲۵، نمره)

د) درست (۲۵، نمره)

۵۳

$$\text{می‌دانیم: } \begin{cases} R = 8, R' = 3, d = 13 \\ TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow (3m - 3) = \sqrt{169 - 25} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3m - 3 = 12 \Rightarrow 3m = 15 \Rightarrow m = 5$$

(صفحة ۲۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$\begin{cases} R = 8 \\ R' = 3 \\ d = 13 \end{cases}, TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \quad (\text{نمره ۵})$$

$$\overbrace{(3m - 3)}^{(\text{نمره ۵})} = \sqrt{13^2 - (8 - 3)^2} \Rightarrow \overbrace{3m - 3}^{(\text{نمره ۵})} = 12 \Rightarrow m = 5$$

۵۴

$$\left. \begin{aligned} TT' &= \sqrt{70} \text{ خارجی} \\ R + R' &= \sqrt{17} \\ |R - R'| &= \sqrt{11} \\ TT' &= \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \text{ خارجی} \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\sqrt{70})^2 = d^2 - (\sqrt{11})^2 \Rightarrow d^2 = 81$$

$$TT' \text{ داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{81 - 17} = \sqrt{64} \Rightarrow TT' \text{ داخلی} = 8$$

(صفحه ۲۱ و ۲۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$TT' \text{ خارجی} = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow \sqrt{70} = \sqrt{d^2 - (\sqrt{11})^2} \Rightarrow d^2 = 81 \Rightarrow d = 9 \text{ (نمره ۵)}$$

$$TT' \text{ داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} \Rightarrow \sqrt{81 - (\sqrt{17})^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{64} \Rightarrow TT' = 8 \text{ (نمره ۵)}$$

۵۵

$$TT' = \sqrt{OO'^2 - (R - R')^2} = \sqrt{14^2 - 2^2} = \sqrt{12 \times 16} = 8\sqrt{3}$$

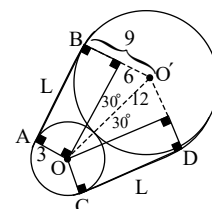
$$\begin{cases} \text{محیط} = 8\sqrt{3} + 6 + 8 + (6 + 8) = 28 + 8\sqrt{3} \\ \text{مساحت} = \frac{1}{2}(OT + O'T') \times TT' = \frac{1}{2}(8 + 6) \times 8\sqrt{3} = 56\sqrt{3} \end{cases}$$

چون دو دایره بر هم مماس هستند، طول خط‌المركزین برابر است با:

$$OO' = R_1 + R_2 = 3 + 9 = 12$$

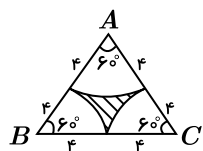
از O عمودهایی بر شعاع‌های $O'B$ و $O'D$ فرود می‌آوریم، در نتیجه دو مستطیل به وجود می‌آید، بنابراین طول سیم برابر است با دو برابر طول مماس مشترک خارجی و مجموع یک کمان 120° از دایره کوچک (چرا؟) و یک کمان 240° از دایره بزرگ (چرا؟):

$$x = 2\sqrt{12^2 - (6)^2} + \frac{120}{360}(2\pi \times 3) + \frac{240}{360}(2\pi \times 9) = 12\sqrt{3} + 2\pi + 12\pi = 12\sqrt{3} + 14\pi$$

توجه: اگر دو دایره مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی آنها را از رابطه $L = 2\sqrt{RR'}$ هم می‌توان به دست آورد.

۵۷

مساحت نیم‌دایره - مساحت مثلث = مساحت هاشورخورد

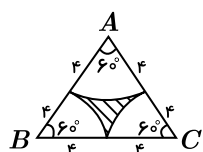


$$S_{\text{هاشورخورد}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$S_{\text{هاشورخورد}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 - \frac{1}{2}\pi \times 4^2 = 16\sqrt{3} - 8\pi$$

(صفحه ۲۳ کتاب درسی)

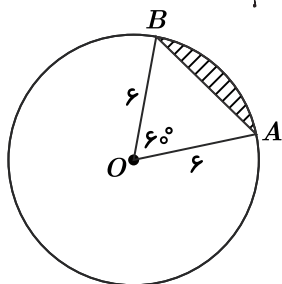
راهنمای تصحیح:



$$S_{\text{هاشورخورد}} = S_{\text{مثلث}} - S_{\text{نیم‌دایره}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 \text{ (نمره ۵)}$$

$$S_{\text{هاشورخورد}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 - \frac{1}{2}\pi \times 4^2 = 16\sqrt{3} - 8\pi \text{ (نمره ۵)}$$

۵۸



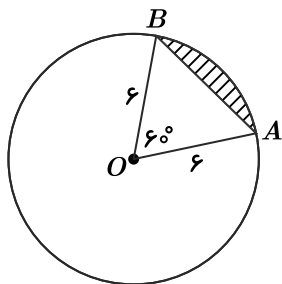
میدانیم مثلث متساوی الساقینی که زاویه رأس آن 60° باشد، متساوی الاضلاع است. بنابراین مثلث OAB متساوی الاضلاع است.

$$(\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}) - (\text{مساحت دایره}) = \frac{1}{6} = \text{مساحت هاشور خورده}$$

$$\Rightarrow \text{مساحت هاشور خورده} = \frac{1}{6} \pi \times 36 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

(صفحه ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$(\text{مساحت مثلث متساوی الاضلاع}) = S_{OAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 \quad (\text{نمره ۵})$$

$$(\text{مساحت قطاع OAB}) = \frac{1}{6} \pi \times 36 = \frac{1}{6} \pi \times 36 \quad (\text{نمره ۵})$$

$$(\text{مساحت هاشور خورده}) = \frac{1}{6} \pi \times 36 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 36 = 6\pi - 9\sqrt{3} \quad (\text{نمره ۵})$$

۵۹ با توجه به شکل:

$$6r + 2\pi r = 18 + 6\pi \Rightarrow (6 + 2\pi)r = 3(6 + 2\pi) \Rightarrow r = 3$$

مساحت دایره با شعاع r - مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $(2r)$ = مساحت هاشور خورده

(صفحه ۲۳ کتاب درسی)

$$\text{مساحت هاشور خورده} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 - \pi r^2 = 9\sqrt{3} - 9\pi$$

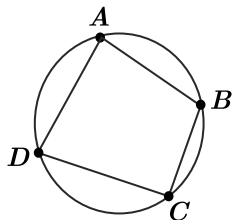
راهنمای تصحیح:

$$6r + 2\pi r = 18 + 6\pi \Rightarrow r = 3 \quad (\text{نمره ۵})$$

(نمره ۵) مساحت دایره با شعاع r - مساحت مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $(2r)$ = مساحت هاشور خورده

$$\text{مساحت هاشور خورده} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 - \pi r^2 = 9\sqrt{3} - 9\pi \quad (\text{نمره ۵})$$

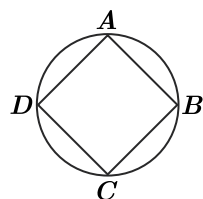
۶۰ طبق فرض می‌دانیم نقاط A, B, C و D روی دایره هستند.



$$\begin{cases} \hat{A} = \frac{DCB}{2} \\ \hat{C} = \frac{DAB}{2} \end{cases} \rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{DCB + DAB}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

به طور مشابه $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$

۶۱ فرض کنیم چهار ضلعی ABCD محاطی باشد، می‌دانیم زاویه محاطی نصف کمان روبه‌روی آن است. بنابراین:

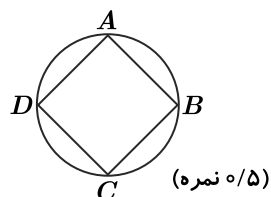


$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= \frac{\widehat{BCD}}{2} \\ \hat{C} &= \frac{\widehat{BAD}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$ ، بنابراین زاویه‌های روبه‌رو مکمل هستند.

(صفحه ۲۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$\hat{A} = \frac{\widehat{BCD}}{2} \text{ (نمره ۲۵)}, \hat{C} = \frac{\widehat{BAD}}{2} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \text{ (نمره ۲۵)}, \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ \text{ (نمره ۲۵)}$$

۶۲ روش اول:

$$\begin{aligned} AB + CD &= (AM + BM) + (DP + CP) = (AQ + BN) + (DQ + CN) \\ &= (AQ + DQ) + (BN + CN) = AD + BC \end{aligned}$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} AM = AQ = x, QD = DP = y &\Rightarrow \begin{cases} MB = BN = AB - x \\ PC = NC = DC - y \end{cases} \\ \Rightarrow AD + CB = (x + y) + (AB - x + CD - y) &= AB + CD \end{aligned}$$

۶۳

الف نیمسازهای داخلی

ب همانی

پ انتقال

ت $A < 90^\circ$

۶۴

طبق فرض: $AB + CD = BC + AD$

نیمسازهای دو زاویه B و C همدیگر را در I قطع می‌کنند.

بنابراین I از سه ضلع AB, BC و CD به یک فاصله است.

بنابراین دایره‌ای وجود دارد که بر سه ضلع AB, BC و CD مماس باشد.

حال اگر این دایره بر AD هم مماس باشد که حکم ثابت است.

اما اگر مماس نباشد از A بر آن مماسی رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند.

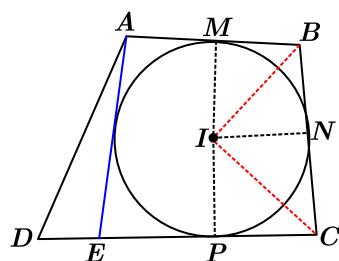
$$\text{پس: } AB + CE = BC + AE$$

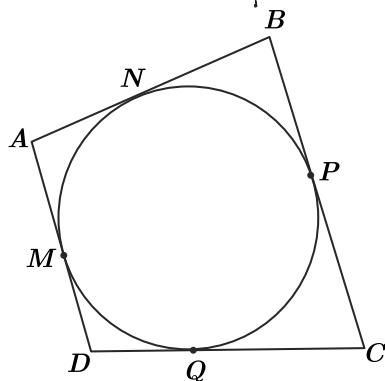
بنابراین: $BC + AD - DE = BC + AE$ اما طبق فرض: $AB + CD - DE = BC + AE$

پس: $AD = DE + AE$ اما این نتیجه با اصل نامساوی مثلث در تناقض است. بنابراین E همان D است و دایره بر AD هم مماس است.

(اگر D بین E و P قرار گیرد و اثبات کامل بیان شده باشد، ۱٫۵ نمره کامل تعلق گیرد.)

۶۵





فرض کنیم $ABCD$ محیطی باشد با توجه به قضیه دو مماس می‌دانیم:

$$CP = CQ, BN = BP, AN = AM, DM = DQ$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} AB + DC &= AN + BN + DQ + QC \\ &= AM + BP + DM + PC = AD + BC \end{aligned}$$

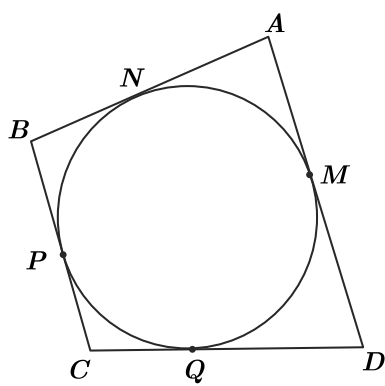
(صفحه ۲۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل و تشخیص برابر بودن طول مماس‌های رسم شده از نقاط خارج دایره بر دایره: (۵-نمره)

$$AB + DC = AN + BN + DQ + QC \quad (۵-نمره)$$

$$= AM + BP + DM + PC = AD + BC \quad (۵-نمره)$$



۶۶

محاطی

الف

روش اول:

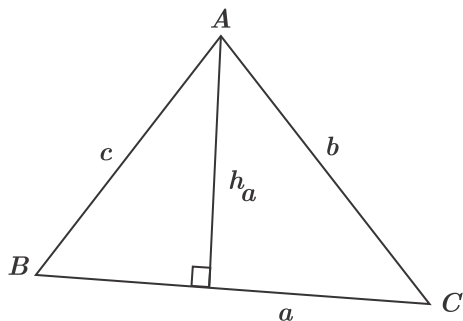
۶۷

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S} \quad (۱) \quad \text{بمطور مشابه} \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}, \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{1}{r}$$

روش دوم:

با توجه به شکل داریم:



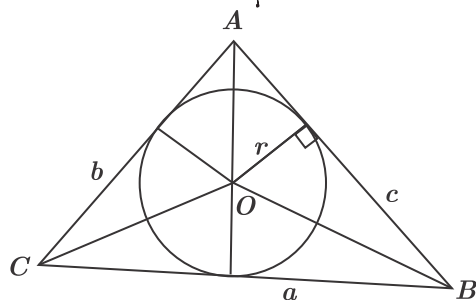
$$h_a = c \sin B \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{1}{c \sin B} \quad (۱)$$

$$\text{بمطور مشابه} \quad \frac{1}{h_c} = \frac{1}{b \sin A}, \frac{1}{h_b} = \frac{1}{a \sin C} \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{c \sin B} + \frac{1}{a \sin C} + \frac{1}{b \sin A}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{ca \sin B} + \frac{b}{ab \sin C} + \frac{c}{bc \sin A} \\ &= \frac{a}{2S} + \frac{b}{2S} + \frac{c}{2S} = \frac{2P}{2S} = \frac{P}{S} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

روش سوم: ابتدا دایره محاطی داخلی مثلث را رسم می‌کنیم. حال با توجه به شکل داریم:



$$S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} = S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = S = \frac{1}{2}ah_a$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{ar + br + cr}{a} = \frac{rP}{a} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{rP} \quad (1)$$

$$\text{بمطور مشابه} \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{rP}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{rP} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{rP} + \frac{b}{rP} + \frac{c}{rP} = \frac{rP}{rP} = \frac{1}{r}$$

روش چهارم:

$$S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow rP = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{a}{rP} \quad (1)$$

$$\text{بمطور مشابه} \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{rP}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{rP} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{rP} + \frac{b}{rP} + \frac{c}{rP} = \frac{rP}{rP} = \frac{1}{r}$$

روش پنجم: فرض کنیم شعاع دایره محیطی مثلث باشد. پس:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \left(\frac{c}{2R} \right) = \frac{abc}{4R} \\ S &= \frac{1}{2}ah_a \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{h_a} = \frac{rP}{bc}, \quad abc = 4RS \quad (1)$$

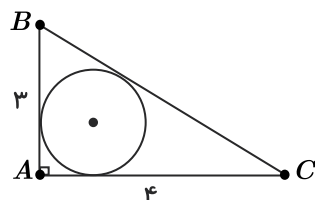
$$\text{بمطور مشابه} \quad \frac{1}{h_c} = \frac{rP}{ab}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{rP}{ac} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{rP}{bc} + \frac{rP}{ac} + \frac{rP}{ba} = \frac{rP(a+b+c)}{abc} = \frac{rP}{RS} = \frac{1}{r}$$

۶۸

۶۹

روش اول:

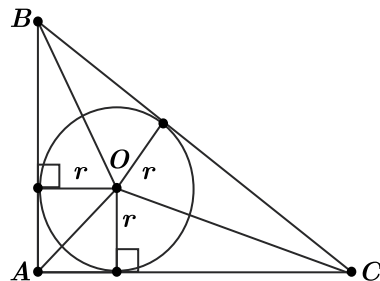


$$BC = 5$$

$$3 + 4 + 5 = 2P \rightarrow P = 6 \rightarrow S = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$r = \frac{S}{P} = \frac{6}{6} = 1$$

روش دوم:



$$BC = 5$$

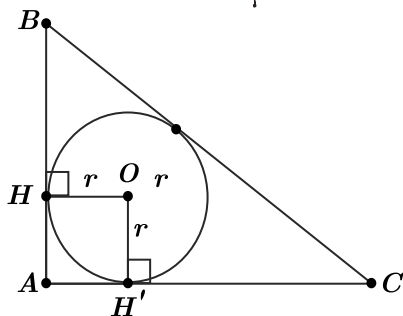
$$S_{ABC} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$$

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB}$$

$$= \frac{r \times BC}{2} + \frac{r \times AC}{2} + \frac{r \times AB}{2}$$

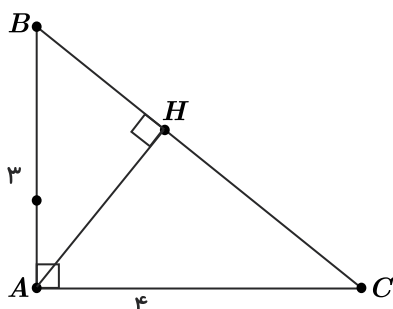
$$= \frac{r \times 5}{2} + \frac{r \times 4}{2} + \frac{r \times 3}{2} = 6r = 6 \Rightarrow r = 1$$

روش سوم:

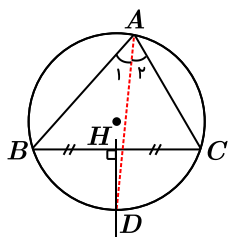


مربع $HAH'O$
 $\Rightarrow AH = r$
 $BC = 5$
 $\Rightarrow P = \frac{3+4+5}{2} = 6$
 $r = AH = p - a = 6 - 5 = 1$

روش چهارم:



$BC = 5$
 $AB \times AC = AH \times BC$
 $\Rightarrow 3 \times 4 = AH \times 5 \Rightarrow AH = \frac{12}{5}$
 $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$
 $\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = 1$



روش اول: عمودمنصف BC دایره را در D قطع می‌کند. پس: $BD = CD$

در نتیجه: $\widehat{BD} = \widehat{CD}$ یعنی $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

بنابراین نیمساز و عمودمنصف روی دایره همدیگر را قطع کرده‌اند.

روش دوم: فرض می‌کنیم نیمساز زاویه A دایره محیطی مثلث ABC را در D قطع می‌کند.

اکنون باید نشان دهیم عمودمنصف ضلع BC نیز از D می‌گذرد.

AD نیمساز زاویه A است. پس: $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ در نتیجه: $\widehat{BD} = \widehat{CD}$ پس: $BD = CD$.

یعنی D از دو سر پاره خط BC به یک فاصله است. لذا D روی عمودمنصف ضلع BC است و حکم ثابت است.

گزینه ۴ درست است.

۷۲

می‌دانیم:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{6+4+3}{12} = \frac{13}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{13}$$

(صفحه ۳۰ کتاب درسی)

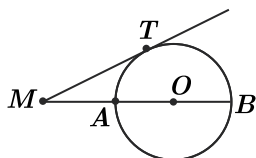
راهنمای تصحیح:

(نمره ۵) $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{r}$
 (نمره ۵) $\frac{6+4+3}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow \frac{13}{12} = \frac{1}{r} \Rightarrow r = \frac{12}{13}$

۷۳ الف) در هر دایره منظور از اندازه کمان، همان اندازه زاویه مرکزی آن تعریف می‌شود و واحد آن درجه است. (صفحه ۱۲ کتاب درسی)

ب) دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آنها مساوی باشد. (صفحه ۱۵ کتاب درسی)

ج) اگر از M بر دایره یک مماس و یک قاطع رسم کنیم، داریم: $MT^2 = MA \times MB$ (صفحه ۱۹ کتاب درسی)



د) چون در هر مثلث هر سه نیمساز همرسند و هر سه عمودمنصف نیز همرسند پس هر مثلث، هم محیطی و هم محاطی خواهد بود. (صفحه ۲۵ و ۲۶ کتاب درسی)



راهنمای تصحیح:

الف) نادرست (نمره ۰٫۲۵) (ب) درست (نمره ۰٫۲۵) (ج) نادرست (نمره ۰٫۲۵) (د) نادرست (نمره ۰٫۲۵)

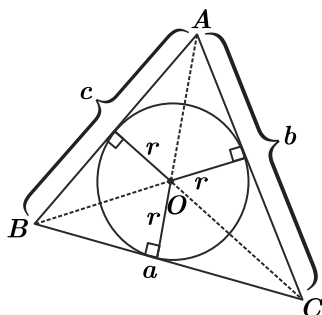
۷۴

می‌دانیم نیمسازهای هر مثلث هم‌سند و محل هم‌رسی نیمسازها مرکز دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث است؛ بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$S_{ABC} = S_{OBC} + S_{OAC} + S_{OAB} \Rightarrow$$

$$S = \frac{1}{2}r \times a + \frac{1}{2}r \times b + \frac{1}{2}r \times c \Rightarrow$$

$$S = r \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \Rightarrow S = r \times p \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$



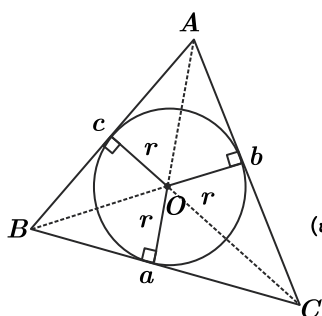
(صفحهٔ ۲۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$S_{ABC} = S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OAC} \quad (\text{نمره ۰٫۵})$$

$$S = \frac{1}{2}r \times c + \frac{1}{2}ra + \frac{1}{2}rb = r \left(\frac{a+b+c}{2} \right) \quad (\text{نمره ۰٫۵})$$

$$\Rightarrow S = r \times p \Rightarrow r = \frac{S}{p} \quad (\text{نمره ۰٫۲۵})$$



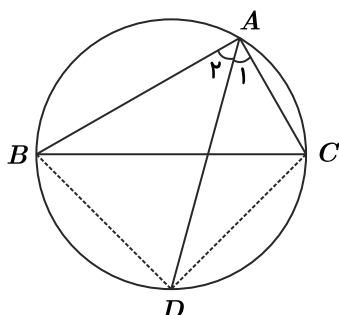
(نمره ۰٫۲۵)

۷۵

دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم.

اگر نیمساز زاویهٔ A دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ D قطع کند داریم:

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DC} \Rightarrow BD = DC$$

 $\Rightarrow D$ از دو سر BC به یک فاصله است

D روی عمود منصف BC قرار دارد.

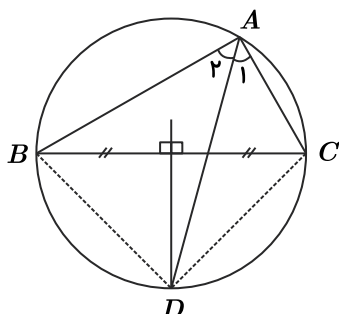
(صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم (نمره ۰٫۲۵).

اگر نیمساز زاویهٔ A دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ D قطع کند داریم:

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_2} \Rightarrow \frac{\widehat{BD}}{2} = \frac{\widehat{DC}}{2} \Rightarrow \widehat{BD} = \widehat{DC} \quad (\text{نمره ۰٫۵}) \Rightarrow BD = DC$$

 $\Rightarrow D$ از دو سر BC به یک فاصله است

(نمره ۰٫۵) D روی عمود منصف BC قرار دارد.

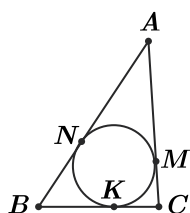
۷۶

فرض کنیم نصف محیط برابر p باشد می‌دانیم اگر از نقطه‌ای خارج دایره دو مماس بر دایره رسم کنیم طول مماس‌ها برابر است بنابراین:

$$2p = AB + AC + BC \Rightarrow$$

$$2p = \underline{AN} + \underline{BN} + \underline{AM} + \underline{MC} + \underline{BK} + \underline{CK} \Rightarrow$$

$$2p = 2AM + 2BK + 2CK \Rightarrow p = AM + BC \Rightarrow AM = p - a$$



$$AM = AN, BN = BK, CM = CK \text{ (نمره ۵)}$$

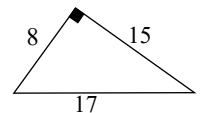
$$\text{محیط } \triangle ABC = AB + AC + BC = AN + NB + AM + MC + BK + CK \text{ (نمره ۵)}$$

$$\Rightarrow 2p = 2AM + 2BK + 2CK \Rightarrow p = AM + BC \Rightarrow AM = p - a \text{ (نمره ۵)}$$

$$17^2 = 15^2 + 8^2 \text{ اعداد } 17 \text{ و } 15 \text{ و } 8 \text{ اعداد فیثاغورسی هستند:}$$

پس مثلث داده شده قائم الزاویه است و شعاع دایره محاطی آن برابر است با:

$$r = \frac{S}{P} = \frac{\frac{1}{2} \times 8 \times 15}{\frac{17+15+8}{2}} = \frac{8 \times 15}{40} = 3$$



درست ۷۸

۷۹

$$R = 10 \rightarrow S = 100\pi \text{ دایره محیطی:}$$

$$r = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} \rightarrow s = 75\pi \text{ دایره محاطی:}$$

$$s' = 100\pi - 75\pi = 25\pi$$

۸۰ قسمت‌های (الف) و (ب): زوایای داخلی شش ضلعی منتظم برابر با 120° می‌باشد. پس زوایای مثلث‌های ABM و PFE و CDN برابر با 60° می‌باشد. بنابراین:

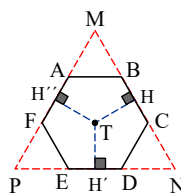
$$\hat{M} = \hat{N} = \hat{P} = 60^\circ$$

$$(a \text{ ضلع شش ضلعی}) \Rightarrow \triangle MNP \text{ ضلع } = 3a \Rightarrow S_{\triangle MNP} = \frac{\sqrt{3}}{4} (3a)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{مساحت شش ضلعی} = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \Rightarrow \text{مساحت شش ضلعی} = \frac{2}{3} \times S_{\triangle MNP}$$

قسمت‌های (پ) و (ت): مجموع طول‌های سه عمود TH و TH' و TH'' برابر است با ارتفاع مثلث MNP :

$$\begin{aligned} \triangle MNP \text{ ارتفاع} &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times (3a) = \frac{3\sqrt{3}}{2} a \\ S_{\triangle TBC} + S_{\triangle TDE} + S_{\triangle TAF} &= \frac{1}{2} (TH + TH' + TH'') \times a = \frac{3\sqrt{3}}{4} a^2 \\ &= \frac{1}{2} S_{\text{شش ضلعی}} \Rightarrow S_{\triangle TAB} + S_{\triangle TEF} + S_{\triangle TCD} = \frac{1}{2} \times S \end{aligned}$$





مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل هندسه فصل ۲ یازدهم

سال یازدهم
ریاضی

فهرست

درس اول : تبدیل های هندسی

- ۱.....نگاشت و تبدیل و مفاهیم آن - طولپایی تبدیل ها
- ۲.....بازتاب خطی و ویژگی های آن
- ۳.....انتقال و ویژگی های آن
- ۴.....دوران و ویژگی های آن
- ۵.....تجانس و ویژگی های آن
- ۶.....ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

درس دوم : کاربرد تبدیل ها

- ۷.....مسائل قرینه یابی و هم محیطی
- ۸.....مسائل پیدا کردن کوتاه ترین مسیر
- ۹.....حل مسائل ترکیبی یا ویژگی های تبدیل ها



درس اول : تبدیل های هندسی



نگاشت و تبدیل و مفاهیم آن - طولیایی تبدیل ها

۱ ثابت کنید، در هر تبدیل طولی، تبدیل یافته یک زاویه، زاویه ای هم اندازه آن است.

۲ برای هر کدام از عبارات گروه A، تبدیل مناسب را از گروه B انتخاب کنید. (یک مورد از گروه B اضافی است.)

گروه B	گروه A
دوران	الف) تبدیلی که جهت شکل را حفظ نمی کند.
همانی	ب) تبدیلی که نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای متقاطع است.
بازتاب	پ) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند.
انتقال	

۳ ثابت کنید دوران تبدیلی طولی است. (اثبات را در حالتی بیان کنید که مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران، از زاویه $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد.)

۴ جاهای خالی را تکمیل کنید.

الف) مرکز دایره محاطی درونی برای چندضلعی های محیطی، محل هم رسی است.

ب) تبدیلی که هر نقطه از صفحه را به همان نقطه از صفحه نظیر می کند، تبدیل است.

پ) تنها تبدیل طولیایی که همواره شیب را حفظ می کند، تبدیل است.

ت) در مثلث $\triangle ABC$ اگر و تنها اگر $a^2 < b^2 + c^2$

۵ درستی یا نادرستی جملات زیر را معلوم کنید.

الف) کایت (شبه لوزی)، یک چهارضلعی محیطی است.

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج، برابر $\sqrt{2}RR'$ است.

پ) هر تبدیلی که اندازه زاویه را حفظ کند، تبدیلی طولی (ایزومتري) است.

ت) نتیجه دو بازتاب متوالی با محورهای بازتاب موازی، یک تبدیل انتقال است.

۶ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) هر تبدیل طولی، اندازه زاویه را حفظ می کند.

ب) در تبدیل دوران به مرکز O با زاویه α ، جهت شکل حفظ می شود.

ج) اگر نقطه M' مجانس نقطه M به مرکز O با نسبت K باشد، نقطه M مجانس M' با نسبت $(-K)$ خواهد بود.

د) فقط در حالتی که خط n با محور بازتاب d موازی باشد بازتاب شیب خط را حفظ می کند.

۷ جاهای خالی را با کلمات (عبارات) مناسب کامل کنید.

الف) اگر دایره ای باشد که از همه رئوس یک چندضلعی عبور کند، دایره را می نامیم.

ب) وضعیت نسبی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در حالتی که $|R - R'| < OO'$ به صورت است.

ج) یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن باشند.

د) تبدیل هایی که طول پاره خط را حفظ می کنند، تبدیلات نامیده می شوند.





۸ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) در هر تبدیل، نقطه‌ای که تبدیل یافته آن بر خود نقطه منطبق می‌شود، چه نام دارد؟
(۱) نقطه تصویر (۲) مرکز تبدیل (۳) نقطه ثابت (۴) نقطه منفرد

ب) دایره $C(O, 6)$ بر یک شش ضلعی منتظم محیط شده است، طول هر ضلع شش ضلعی کدام است؟

(۱) $12\sqrt{3}$ (۲) $4\sqrt{3}$ (۳) ۱۲ (۴) ۶

ج) دایره‌ای بر هر سه ضلع مثلثی با اضلاع ۶ و ۸ و ۱۰ مماس شده است، شعاع این دایره کدام است؟

(۱) ۲ (۲) ۴ (۳) 2.5 (۴) 3.5

۹ واژه‌های زیر را تعریف کنید.

الف) ایزومتري (ب) دو خط متناظر (ج) صفحه عمود منصف یک پاره خط

بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۱۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید.

الف) تبدیل انتقال، جهت شکل را حفظ می‌کند.

ب) تبدیل بازتاب نسبت به خط، بی‌شمار نقطه ثابت دارد.

۱۱ نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط L است. اگر $AA' = 16$ و نقطه O روی خط L و $OA = 10$ باشد، تعیین کنید فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟

۱۲ جاهای خالی را تکمیل کنید.

الف) نتیجه حاصل از دو بازتاب متوالی با محورهای بازتاب موازی، یک تبدیل است.

ب) در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس K ، اگر باشد؛ تصویر شکل، بزرگ‌تر می‌شود و آن را انبساط می‌نامیم.

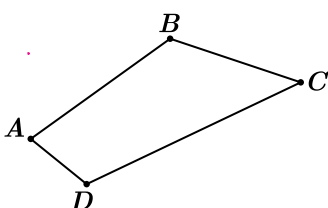
۱۳ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را معلوم کنید.

الف) تبدیل بازتاب، هیچ‌گاه نمی‌تواند یک تبدیل همانی باشد.

۱۴ در حالتی که پاره خط AB با محور بازتاب، نه موازی و نه متقاطع باشد و همچنین بر آن عمود نباشد، ثابت کنید اندازه پاره خط AB تحت بازتاب ثابت می‌ماند.

۱۵ نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = 12$ و نقطه O روی خط l و $OA = 10$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟

۱۶ در شکل زیر تصویر چهارضلعی $ABCD$ را تحت بازتاب محوری نسبت به d رسم کنید و بررسی کنید آیا بازتاب محوری جهت شکل را حفظ می‌کند؟





۱۷ گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) تعداد نقاط ثابت در تبدیل بازتاب محوری کدام است؟

- (۱) بی شمار (۲) صفر (۳) ۱ (۴) ۲

ب) در کدام تبدیل همواره اگر A' تصویر A تحت تبدیل T باشد، خود A هم تصویر A' تحت همان تبدیل T است؟

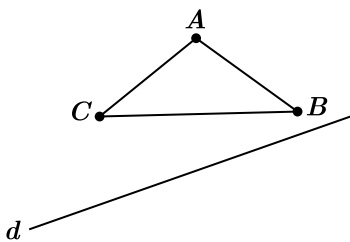
- (۱) انتقال (۲) تجانس (۳) دوران (۴) بازتاب

ج) کدام تبدیل در حالت کلی جهت را حفظ نمی‌کند؟

- (۱) بازتاب (۲) دوران (۳) ترکیب دو بازتاب محوری (۴) انتقال

۱۸ در حالتی که پاره خط AB با محور بازتاب d ، نه موازی و نه متقاطع باشد، ثابت کنید تبدیل بازتاب محوری نسبت به d ، ایزومتري است.

۱۹ بازتاب شکل زیر را نسبت به خط d رسم کنید و بررسی کنید آیا با توجه به شکل، تصویر ایجاد شده از بازتاب، جهت شکل را حفظ می‌کند؟

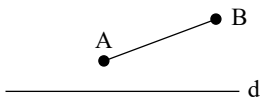


۲۰ در حالتی که پاره خط AB محور بازتاب d را در نقطه‌ای مانند M قطع کند ثابت کنید تبدیل بازتاب محوری ایزومتري است.

۲۱ ثابت کنید بازتاب محوری در حالت کلی، شیب خط را حفظ نمی‌کند.

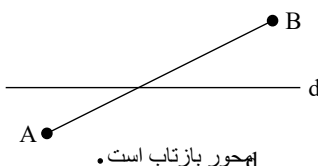
۲۲ ثابت کنید بازتاب محوری یک تبدیل طولپا است. (مسئله را در دو حالت زیر بررسی کنید)

الف



محور بازتاب است.

ب



محور بازتاب است.

انتقال و ویژگی های آن

۲۳ در هر قسمت، پاسخ مناسب را بنویسید.

الف

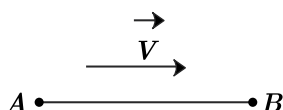
شیب خط ، همواره حفظ می‌شود. (انتقال، دوران)

ب

دورانی به مرکز O و زاویه ، تبدیلی همانی است. (180° , 360°)

۲۴ با توجه به شکل زیر نشان دهید در تبدیل انتقال، اندازه هر پاره خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند.

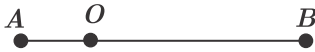
($AB \parallel \vec{V}$ و اندازه $\vec{V}$ از اندازه پاره خط AB کوچک تر است).



۲۵ در حالتی که پاره خط AB با بردار انتقال $\vec{V}$ موازی نباشد، ثابت کنید تبدیل انتقال طولپاست.

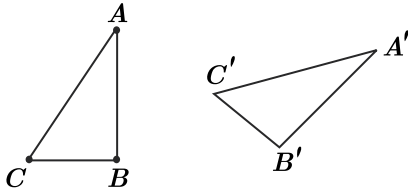
دوران و ویژگی های آن

۲۶ مطابق شکل زیر، نقطه O روی پاره خط AB است. ثابت کنید؛ تحت دورانی به مرکز O و هر زاویه حاده α ، اندازه پاره خط AB با تصویر آن با هم برابرند.



۲۷

نقاط A' ، B' و C' به ترتیب دوران یافته نقاط A ، B و C هستند. روش یافتن مرکز دوران را شرح دهید.



۲۸

نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 0)$ و $C(5, 2)$ رأس های یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه $90^\circ +$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلع AC و تصویرش را به دست آورده و باهم مقایسه کنید.

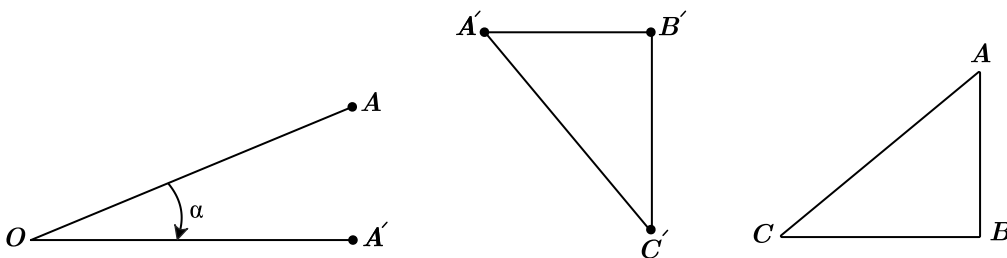
۲۹

با رسم شکل، مثالی از تبدیل دوران غیرهمانی ارائه دهید که دارای نقطه ثابت باشد.

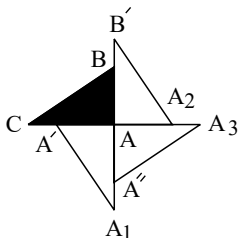
۳۰

در حالتی که مرکز دوران روی پاره خط AB قرار داشته باشد، ثابت کنید دوران به مرکز O با زاویه α ، طولی است.

۳۱ نقطه A' دوران یافته نقطه A در دوران به مرکز O و زاویه α است. ابتدا نشان دهید عمود منصف AA' از نقطه O می گذرد؛ سپس بررسی کنید اگر $A'B'C'$ دوران یافته $\triangle ABC$ باشد، چگونه می توان مرکز دوران را مشخص کرد؟

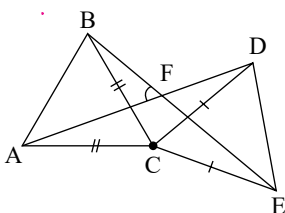


۳۲ در حالتی که مرکز دوران O بر پاره خط AB و امتداد آن واقع نباشد و زاویه دوران از زاویه $\widehat{AOB}$ بیشتر باشد، ثابت کنید دوران ایزومتري است.



۳۳

در شکل مقابل، چند دوران از شکل سایه دار وجود دارد؟



۳۴

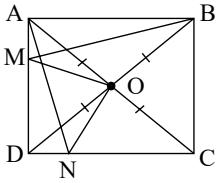
در شکل روبه رو، مثلث های $\triangle ABC$ و $\triangle DEC$ متساوی الاضلاع هستند. الف) با کدام تبدیل و به چه صورت

نقطه A بر B و نقطه D بر E تصویر می شود؟

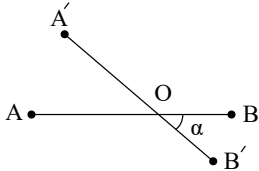
ب) با استفاده از ویژگی های تبدیل قسمت (الف)، ثابت کنید که: $AD = BE$ و $\angle AFB = 60^\circ$.



۳۵ در مربع $ABCD$ ، O مرکز مربع و $AM = DN$. ثابت کنید با دوران به مرکز O و زاویه 90° ، مثلث ABM بر مثلث ADN تصویر می‌شود.



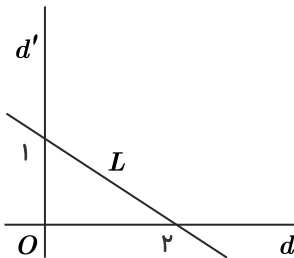
۳۶ در شکل مقابل، ثابت کنید دوران طولیا است.



تجانس و ویژگی های آن

۳۷ محل برخورد قطرهای مستطیلی را O می‌نامیم. در تجانسی به مرکز O و نسبت $\frac{2}{3}$ ، مساحت بین آن مستطیل و تصویرش برابر ۱۰ است. مساحت مستطیل اولیه را محاسبه کنید.

۳۸ در شکل روبه‌رو اگر خط L را در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس $\frac{7}{4}$ تصویر کنیم و آن را L' بنامیم؛ مساحت بین خط L و L' و خطوط d و d' چقدر است؟



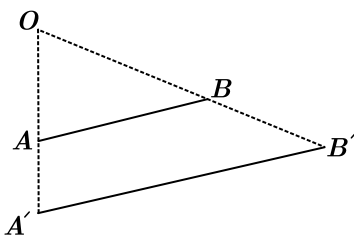
۳۹ ثابت کنید تجانس، شیب خط را حفظ می‌کند. (حالتی را در نظر بگیرید که مرکز تجانس روی پاره‌خط قرار ندارد و $k > 1$)

۴۰ فرض کنید پاره‌خط $A'B'$ مجانس پاره‌خط AB در تجانس به مرکز O و نسبت تجانس k باشد.

با توجه به شکل مقابل ثابت کنید:

$$\frac{A'B'}{AB} = k \quad (\text{الف})$$

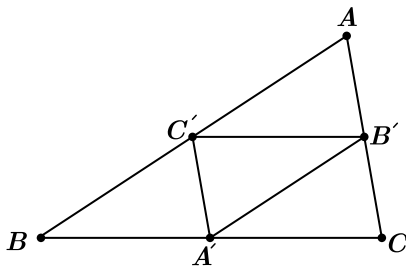
(ب) اگر n ضلعی $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ مجانس n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ باشد، ثابت کنید این دو n ضلعی با هم متشابه‌اند.



۴۱ یک مربع را در تجانس با نسبت تجانس $\frac{5}{4}$ به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده‌ایم، اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۹ باشد، محیط مربع اولیه را بیابید.

۴۲ در حالتی که مرکز تجانس روی پاره‌خط AB نباشد و نسبت تجانس K مثبت باشد، ثابت کنید تجانس شیب خط را حفظ می‌کند.

۴۳ وسط‌های اضلاع مثلث ABC را مطابق شکل زیر متوالیاً به هم وصل می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ متجانس با ABC ایجاد شود، مرکز تجانس و نسبت تجانس و نسبت مساحت $A'B'C'$ به مساحت ABC را بیابید.

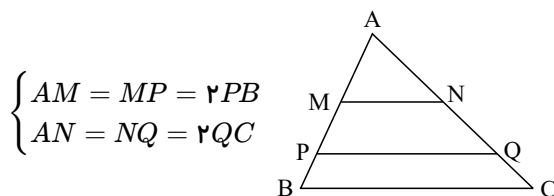


۴۴ فرض کنید G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد و $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G با نسبت $K = -\frac{1}{3}$ باشد. جایگاه رأس‌های A' ، B' و C' نسبت به مثلث ABC و نسبت مساحت $A'B'C'$ به مساحت ABC را مشخص کنید.

۴۵ در حالتی که $K > 0$ ، ثابت کنید تجانس به مرکز O با نسبت K ، اندازه زاویه را حفظ می‌کند.

۴۶ یک مربع را در تجانسی با نسبت تجانس $\frac{5}{3}$ و به مرکز محل تلاقی قطرهای تصویر کرده‌ایم؛ اگر مساحت بین مربع و تصویرش ۱۶ باشد، محیط مربع اولیه را محاسبه کنید.

۴۷ در شکل مقابل داریم:



الف) با کدام تبدیل مثلث AMN بر مثلث APQ تصویر می‌شود؟ چگونه؟

ب) با کدام تبدیل مثلث APQ بر مثلث ABC تصویر می‌شود؟ چگونه؟

۴۸ دو خط d و d' متقاطع‌اند. با چند تبدیل زیر می‌توان خط d را بر خط d' تصویر نمود؟

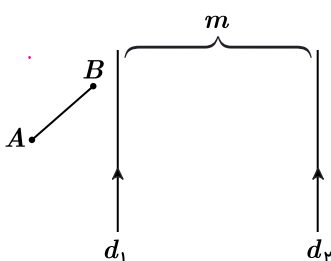
الف) انتقال (ب) دوران (پ) بازتاب محوری (ت) تجانس

۴(۱) ۲(۲) ۳(۳) ۱(۴)

۴۹ مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم مثلث ABC به مرکز تجانس O می‌باشد. اگر $\frac{OA'}{AA'} = 3$ و نوع تجانس انقباضی باشد، مساحت مثلث ABC چند برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است؟

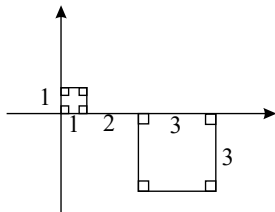
ترکیب تبدیل‌ها و ویژگی‌های آن

۵۰ بازتاب پاره‌خط AB را ابتدا نسبت به خط d_1 رسم کنید تا $A'B'$ ایجاد شود، سپس بازتاب $A'B'$ را نسبت به خط d_2 که موازی d_1 با فاصله m از d_1 است، رسم کنید تا $A''B''$ به دست آید. اولاً ثابت کنید $AA'' = 2m$ ، ثانیاً با چه تبدیلی AB را می‌توان به صورت مستقیم به $A''B''$ تصویر کرد؟



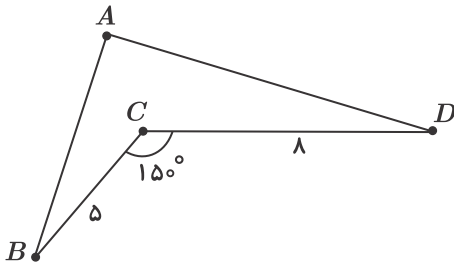


۵۲ ✨ مطابق شکل، با ترکیب کدام تبدیل‌ها، مثلث OAB بر مثلث OCD تصویر می‌شود؟



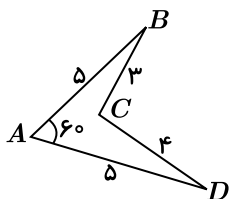
۵۳ ✨ با ترکیب کدام تبدیل‌ها، مربع کوچک‌تر به مربع بزرگ‌تر تبدیل می‌شود؟

مسائل قرینه یابی و هم محیطی

$$(B\hat{C}D = 150^\circ, BC = 5, CD = 7)$$




۵۷ در شکل مقابل با استفاده از بازتاب مساحت، مساحت $ABCD$ را با ثابت نگه داشتن محیط افزایش داده‌ایم. مساحت جدید چهارضلعی را محاسبه کنید.



۵۸ جاهای خالی را با کلمات یا عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) اگر خط n با خط بازتاب d عمود و موازی نباشد، بازتاب، شیب خط را

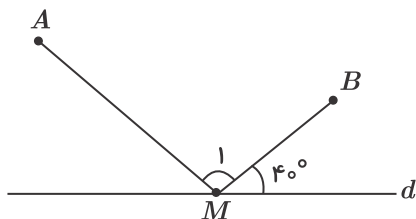
ب) شرط اینکه تجانس طولها باشد، این است که

ج) تبدیلی که هر نقطه صفحه را به خود آن نقطه نظیر می‌کند، می‌نامیم.

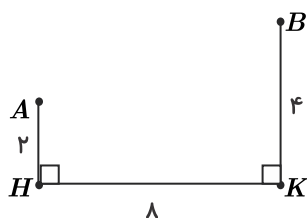
د) به مسائلی که در آنها بدون اینکه محیط چندضلعی تغییر کند، مساحت را تغییر می‌دهیم، مسائل می‌گویند.

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر

۵۹ مطابق شکل، نقطه M را روی خط d چنان در نظر می‌گیریم که $AM + MB$ کمترین مقدار ممکن شود. زاویه اندازه $\hat{M}_1$ را به دست آورید.



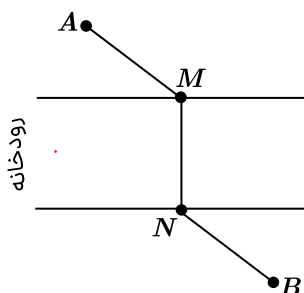
۶۰ با توجه به شکل، نقطه M روی پاره خط $HK = 8$ را به گونه‌ای بیابید که:



الف) مسیر کوتاه‌ترین مسیر AMB ممکن باشد.

ب) کمترین مقدار عددی $AM + MB$ را محاسبه کنید.

۶۱ اگر دو شهر A و B در دو طرف رودخانه باشند و بخواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که پل MN بر راستای رودخانه عمود باشد، محل احداث پل را کجا در نظر بگیریم که مسیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر ممکن باشد؟





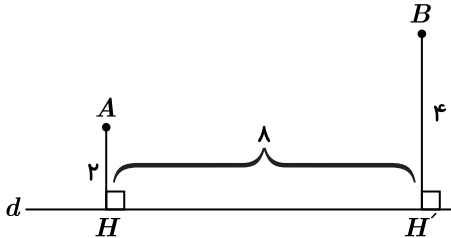
۶۲ در هر قسمت، گزینه صحیح را انتخاب کنید:

الف) در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $AB = 8$ ، $AC = 6$. طول ارتفاع وارد بر وتر BC کدام است؟

- ۴٫۲ (۱) ۴٫۴ (۲) ۴٫۶ (۳) ۴٫۸ (۴)

ب) در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه A به d و سپس به B برویم. طول کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۱۲ (۲) ۹ (۳) ۱۱ (۴)

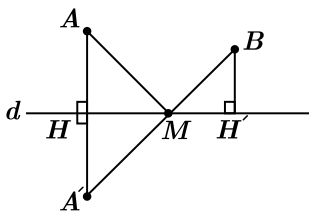


ج) مثلث ABC در دایرهٔ مثلثاتی محاط شده است. اگر $AC = 2$ باشد، زاویهٔ $\hat{B}$ کدام است؟

- ۳۰° (۱) ۴۵° (۲) ۶۰° (۳) ۹۰° (۴)

۶۳ در مسئلهٔ هرون برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از نقطهٔ A به d و سپس رفتن به نقطهٔ B ، اگر امکان رفتن به طرف دیگر رودخانهٔ d نباشد،

چگونه نقطهٔ M و اندازهٔ MH را می‌توان پیدا کرد؟



۶۴ در شکل زیر با استفاده از تبدیلات، نقطه‌ای مانند M روی خط d به گونه‌ای بیابید که $AM + MB$ کمترین مقدار باشد. (با ذکر دلیل)



d _____

۶۵ مردی می‌خواهد برای برداشتن آب، از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبهٔ مستقیمی دارد برود و سپس آب را به اصطبل که در همان سمت

رودخانه است، ببرد. او از کدام نقطهٔ ساحل آب بردارد تا مسافتی که طی می‌کند، کمترین مقدار ممکن باشد؟ توضیح دهید.

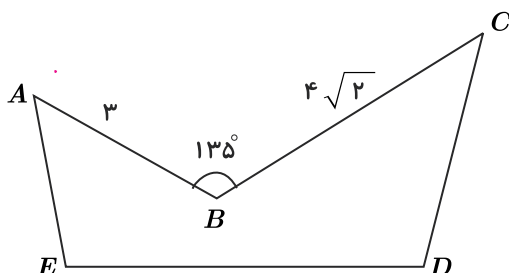
A
خانه

اصطبل
B

رودخانه

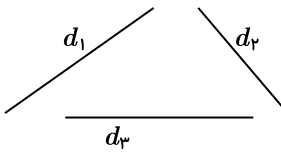
حل مسائل ترکیبی یا ویژگی‌های تبدیل‌ها

۶۶ در شکل زیر، می‌خواهیم بدون آنکه محیط تغییر کند، مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش مساحت را حساب کنید.

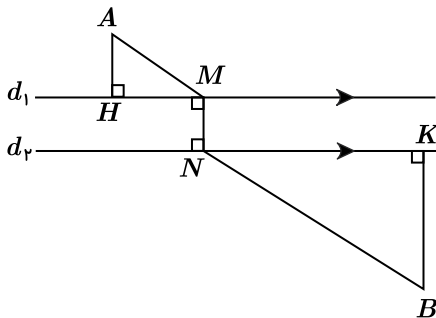




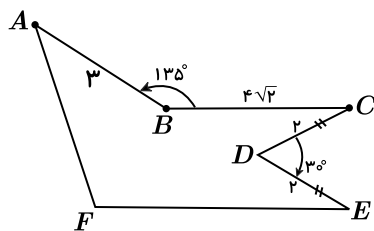
۶۷ سه خط دوه‌دو ناموازی d_1 و d_2 و d_3 در صفحه مفروض‌اند. پاره‌خطی به طول ۴ سانتی‌متر رسم کنید که دو سر آن روی d_1 و d_2 بوده و موازی d_3 باشد.



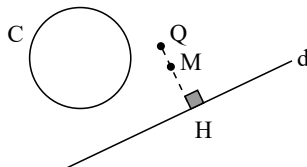
۶۸ در شکل زیر $AMNB$ کوتاه‌ترین مسیر از A به B است که MN بر دو خط موازی d_1 و d_2 عمود است. با استفاده از تبدیلات، ثابت کنید دو مثلث AHM و BKN متشابه هستند.



۶۹ زمینی به شکل زیر داریم، بدون آنکه محیط این زمین تغییر کند، مساحتش را فقط با یک‌بار بازتاب نسبت به AC و CE افزایش دهید. میزان افزایش مساحت را حساب کنید.



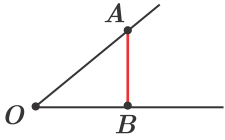
۷۰ خط d و دایره C داده شده‌اند. از نقطه M خطی بگذرانید که d را در نقطه N و دایره را در نقطه P قطع کند و $MN = 2MP$ باشد. (راهنمایی: از M بر d عمود کرده و به اندازه نصف آن از طرف M ادامه دهید)



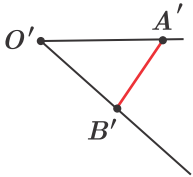


پاسخنامه تشریحی

۱ فرض کنیم T یک تبدیل طولی باشد، در این صورت با توجه به شکل تحت T داریم:

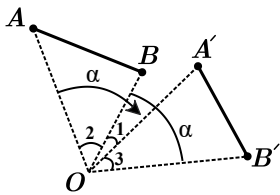


$$T(O) = O', \quad T(A) = A', \quad T(B) = B'$$



$$OA = OA', \quad OB = OB', \quad AB = A'B'$$

$$\Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}'$$



پ) همانی

ب) دوران

۲ الف بازتاب

۳

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= \hat{O}_1 + \hat{O}_3 \rightarrow \hat{O}_2 = \hat{O}_3 \\ \begin{cases} OA = OA' \\ \hat{O}_2 = \hat{O}_3 \\ OB = OB' \end{cases} &\rightarrow \triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \\ &\rightarrow AB = A'B' \end{aligned}$$

۴

الف نیمسازهای داخلی

ب) همانی

پ) انتقال

ت $A < 90^\circ$

۵ الف

درست

ب) نادرست

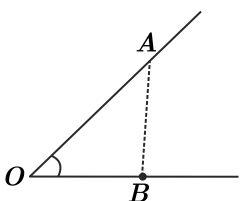
پ) نادرست

ت درست

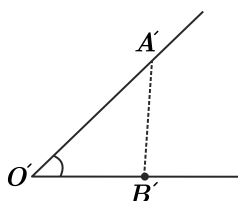
۶ الف درست؛ فرض کنیم تبدیل T طولی باشد؛

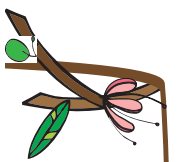
$$\triangle OAB \cong \triangle O'A'B' \Rightarrow \hat{O} = \hat{O}' \quad \text{آنگاه: (ض ض ض)}$$

(صفحه ۳۴ کتاب درسی)



$\xrightarrow{T}$





(ب) درست؛ در دوران، وقتی در شکل اولیه از A به B در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم، در شکل تبدیل‌یافته نیز حرکت از A' به B' در جهت عقربه‌های ساعت خواهد بود. (صفحه ۴۰ و ۴۱ کتاب درسی)

(ج) نادرست؛ نقطه M مجانس M' با نسبت $\frac{1}{K}$ خواهد بود، چون:

$$OM' = K \cdot OM \Rightarrow OM = \frac{1}{K} \cdot OM'$$

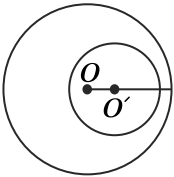
(صفحه ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی)

(د) نادرست؛ زیرا در حالتی که خط n بر محور بازتاب عمود باشد هم شیب حفظ می‌شود. (صفحه ۳۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست (۲۵/۰ نمره) (ب) درست (۲۵/۰ نمره) (ج) نادرست (۲۵/۰ نمره) (د) نادرست (۲۵/۰ نمره)

۷ الف) اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس یک چندضلعی عبور کند، دایره را محیطی و چندضلعی را محاطی می‌نامند. (صفحه ۲۴ کتاب درسی)
(ب) وضعیت نسبی دو دایره $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ در حالتی که $d = OO' < |R - R'|$ باشد، به صورت متداخل است. (صفحه ۲۰ کتاب درسی)



(ج) قضیه: یک چهارضلعی محاطی است اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. (صفحه ۲۷ کتاب درسی)

(د) تبدیل‌هایی که طول پاره‌خط را حفظ می‌کنند، تبدیلات طولی (ایزومتري) نامیده می‌شوند. (صفحه ۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

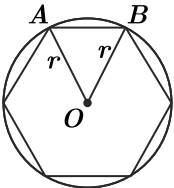
الف) دایره محیطی (۲۵/۰ نمره) (ب) متداخل (۲۵/۰ نمره) (ج) مکمل (۲۵/۰ نمره) (د) طولی یا ایزومتري (۲۵/۰ نمره)

۸ الف) در هر تبدیل، نقطه‌ای که تبدیل‌یافته آن بر خود نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت نام دارد. (صفحه ۳۶ کتاب درسی)

(ب) هرگاه دایره با شعاع r بر n ضلعی منتظم محیط شود داریم:

$$AB = 2r \sin \frac{180^\circ}{n} = 2 \times 6 \times \sin 30^\circ \Rightarrow AB = 6$$

(صفحه ۳۰ کتاب درسی)



(ج) اولاً بنا بر عکس قضیه فیثاغورس این مثلث قائم‌الزاویه است و مساحت آن $S = \frac{6 \times 8}{2} = 24$ و نصف محیط آن $p = \frac{6 + 8 + 10}{2} = 12$ ، بنابراین شعاع دایره محاطی آن

$$r = \frac{S}{p} = 2 \text{ است. (صفحه ۲۵ کتاب درسی)}$$

راهنمای تصحیح:

الف) نقطه ثابت یا گزینه ۳ (۵/۰ نمره) (ب) گزینه ۴ (۵/۰ نمره) (ج) گزینه ۱ (۵/۰ نمره)

۹ الف) تبدیلی که فاصله بین نقطه‌ها (طول پاره‌خط‌ها) را حفظ کند، ایزومتري نامیده می‌شود.

(ب) دو خط در فضا را که در یک صفحه قرار نمی‌گیرند، دو خط متنافر می‌نامیم.

(ج) صفحه‌ای را که در وسط یک پاره‌خط بر آن عمود باشد، صفحه عمودمنصف آن پاره‌خط می‌نامیم.

۱۰

الف درست

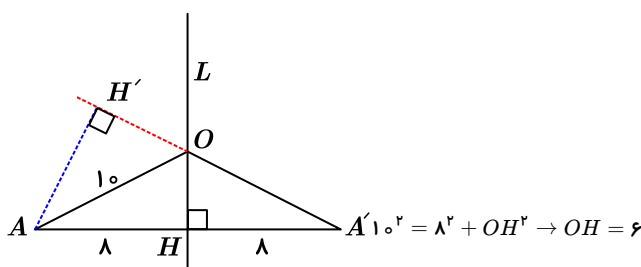
ب درست

۱۱

راه حل اول:

$$AH = A'H = 8 \text{ بازتاب } \Rightarrow$$

در مثلث قائم‌الزاویه OAH داریم:



$$\begin{cases} S_{O\hat{A}A'} = \frac{AA' \times OH}{2} \\ S_{O\hat{A}A'} = \frac{OA' \times AH'}{2} \end{cases} \rightarrow \frac{16 \times 6}{2} = \frac{10 \times AH'}{2} \rightarrow AH' = \frac{48}{5} = 9,6$$

راه حل دوم:

مطابق شکل و طبق ویژگی بازتاب $AH = A'H = 8$ و می‌دانیم محور بازتاب عمود منصف AA' است؛

پس $OA = OA' = 10$ و طبق قضیه فیثاغورس داریم: $OH = 6$

حال دو مثلث $AH'A'$ و OHA' متشابهند زیرا $\widehat{A'} = \widehat{A'} = 90^\circ$ و $\widehat{H} = \widehat{H'}$

پس:

$$\frac{AA'}{OA'} = \frac{AH'}{OH} \rightarrow \frac{16}{10} = \frac{AH'}{6} \rightarrow AH' = 9,6$$

۱۲

الف انتقال

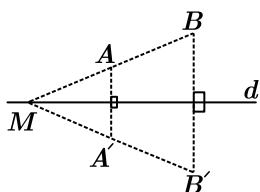
ب $|K| > 1$

۱۳

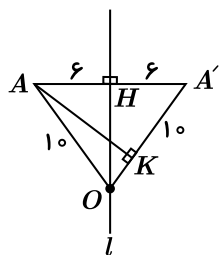
الف نادرست

۱۴ بنا بر فرض مسأله و مطابق شکل زیر امتداد پاره خط AB محور بازتاب را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند. اگر نقطه A' بازتاب نقطه A نسبت به محور بازتاب d باشد، $(S_d(A) = A')$ خط MA' را رسم می‌کنیم. ادعا می‌کنیم بازتاب نقطه B نسبت به d روی خط MA' است. از B بر خط d عمود می‌کشیم و امتداد می‌دهیم تا خط MA' را در B' قطع کند.

خط d شامل نیمساز M و ارتفاع وارد بر ضلع BB' از مثلث MBB' است. پس $MB = MB'$ و $MA = MA'$ در نتیجه $AB = MB - MA = MB' - MA' = A'B'$



۱۵



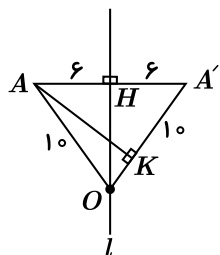
بنابر فیثاغورس $OH = 8$, $OA = OA' = 10$

$$S_{O\hat{A}A'} = \frac{OH \times AA'}{2} = \frac{AK \times OA'}{2} \Rightarrow \frac{8 \times 12}{2} = \frac{AK \times 10}{2} \Rightarrow AK = \frac{96}{10} = 9,6$$

(صفحه ۴۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

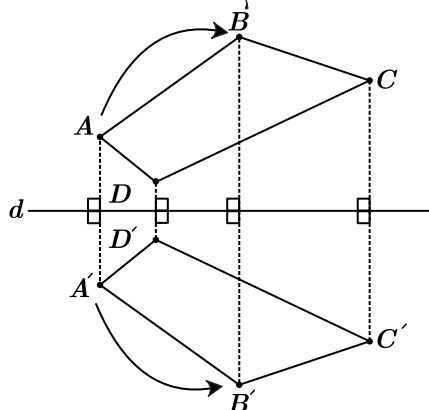
رسم شکل (۵، ۸، ۵)



(۵، ۸، ۵) $OH = 8$, $OA = OA' = 10$ بنابر فیثاغورس

$$S_{O\hat{A}A'} = \frac{8 \times 12}{2} = \frac{AK \times 10}{2} \Rightarrow AK = \frac{96}{10} = 9,6 \text{ (۵، ۸، ۵)}$$

۱۶ هریک از نقاط A و B و C و D را نسبت به d بازتاب می‌کنیم تا چهارضلعی $A'B'C'D'$ ایجاد شود. در شکل اولیه وقتی از A به B می‌رویم، جهت حرکت موافق حرکت عقربه‌های ساعت است؛ اما در شکل تصویر وقتی از A' به B' می‌رویم، جهت حرکت خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. بنابراین بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

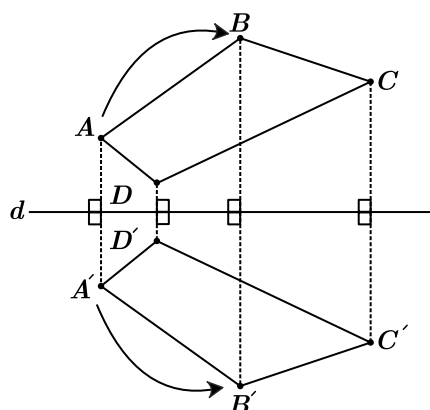


راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/۵) نمره

مشخص کردن جهت حرکت از A به B در شکل اصلی و در شکل تصویر از A' به B'. (۵/۵) نمره

بنابراین بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی‌کند. (۵/۵) نمره



۱۷ الف) گزینه ۱: همه نقاط روی محور بازتاب، نقاط ثابت بازتاب محوری هستند؛ بنابراین بی‌شمار نقطه ثابت دارد. (صفحه ۳۶ کتاب درسی)

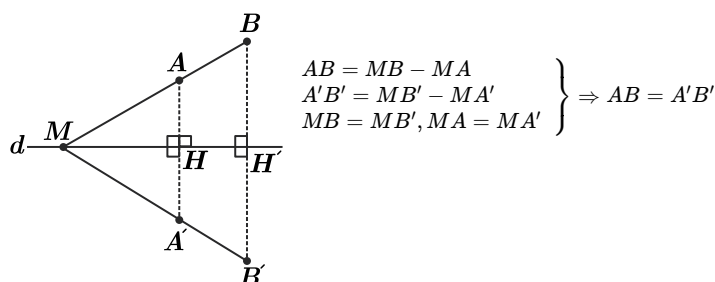
ب) گزینه ۴: در تبدیل بازتاب اگر $T(A) = A'$ ، آنگاه $T(A') = A$ (صفحه ۳۸ کتاب درسی)

ج) گزینه ۱: تبدیل بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند، اما ترکیب دو بازتاب محوری یا انتقال می‌شود یا دوران که در هر صورت جهت شکل را حفظ می‌کند. (صفحه ۳۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۱ (۵/۵) نمره ب) گزینه ۴ (۵/۵) نمره ج) گزینه ۱ (۵/۵) نمره

۱۸ بازتاب نقاط A و B را نسبت به خط d به ترتیب A' و B' می‌نامیم. با توجه به موازی بودن AA' و BB' و عمودمنصف بودن d برای این دو پاره‌خط، امتداد AB و A'B' همدیگر را در M قطع می‌کنند؛ بنابراین داریم:



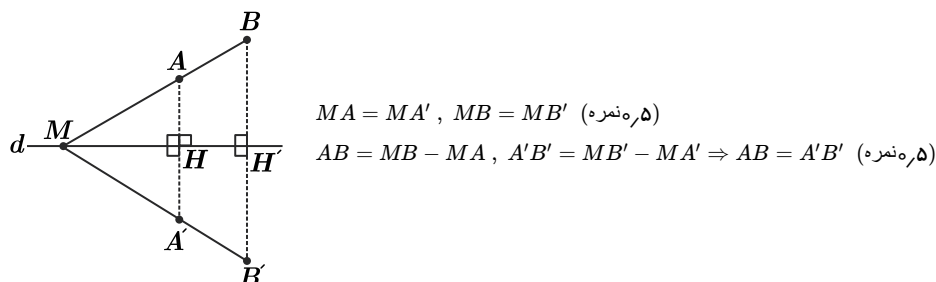
و چون طول پاره‌خط حفظ می‌شود، پس ایزومتري است.

(صفحه ۳۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

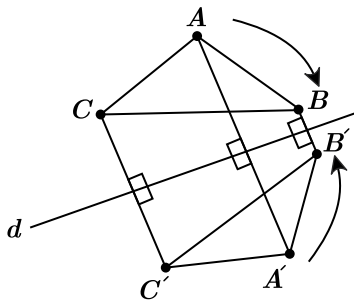
رسم شکل (۵/۵) نمره

M روی عمودمنصف AA' و BB' است؛ پس:



۱۹ از هریک از نقاط A و B و C عمودهایی بر خط d وارد می‌کنیم و به اندازه خودشان امتداد می‌دهیم تا به ترتیب تصاویر A' و B' و C' ایجاد شوند مثلث A'B'C' تصویر مثلث

ABC تحت بازتاب نسبت به خط d می‌باشد اما چون برای حرکت از A به B باید در جهت عقربه‌های ساعت حرکت کنیم ولی حرکت از A' به B' خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است؛ بنابراین بازتاب محوری جهت شکل را حفظ نمی‌کند.

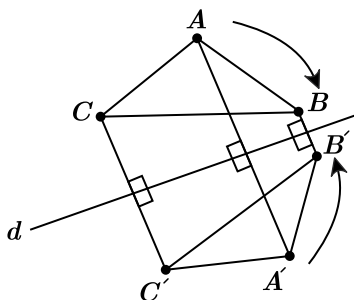


(صفحه ۴۲ کتاب درسی)

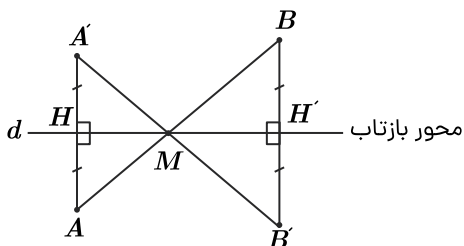
راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/۵) نمره)

از هر نقطه عمود رسم می‌کنیم و به اندازه خود امتداد می‌دهیم و شکل تصویر ایجاد می‌شود (۵/۵ نمره). با توجه به نمودار، بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند. (۵/۵ نمره)



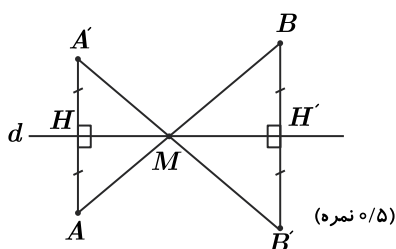
۲۰ فرض کنیم A' و B' به ترتیب بازتاب نقاط A و B نسبت به محور d باشند، کافی است ثابت کنیم طول AB با طول تصویر $A'B'$ برابر است. می‌دانیم نقطه‌ای که روی عمود منصف پاره‌خط باشد از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است.



$$\left. \begin{array}{l} \text{روى عمودمنصف } AA' \Rightarrow MA = MA' \text{ (نمره ۲۵/۵)} \\ \text{روى عمودمنصف } BB' \Rightarrow MB = MB' \text{ (نمره ۲۵/۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow MA + MB = MA' + MB' \Rightarrow AB = A'B' \text{ (نمره ۵/۵)}$$

(صفحه ۳۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$\left. \begin{array}{l} \text{روى عمودمنصف } AA' \Rightarrow MA = MA' \text{ (نمره ۲۵/۵)} \\ \text{روى عمودمنصف } BB' \Rightarrow MB = MB' \text{ (نمره ۲۵/۵)} \end{array} \right\} \Rightarrow MA + MB = MA' + MB' \Rightarrow AB = A'B' \text{ (نمره ۵/۵)}$$

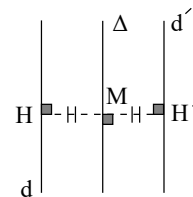
۲۱

در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) در این حالت، محور بازتاب (Δ) با خط d موازی است و در نتیجه، بازتاب خط d (خط d') با آن موازی می‌باشد:



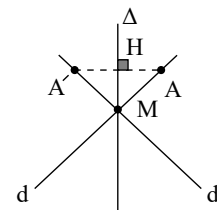
$$\widehat{M} = \widehat{H} = \widehat{H}' = 90^\circ, MH = MH' \Rightarrow d \parallel \Delta \parallel d'$$



در این حالت، شیب خط حفظ می‌شود (چون $d \parallel d'$ است).

ب) در این حالت، خط d و محور بازتاب (Δ) متقاطع‌اند. بازتاب خط d نسبت به محور Δ ، خط d' می‌باشد و d و d' در نقطه M متقاطع‌اند.

$$\Delta: \widehat{H} = 90^\circ, AH = A'H$$



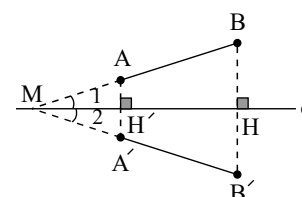
از آنجا که d و d' متقاطع هستند، پس موازی نبوده و در نتیجه، شیب خط d و d' یکسان نخواهد بود. بنابراین در این حالت، شیب خط حفظ نمی‌شود.

۲۲

الف

امتداد AB ، خط d را در نقطه M قطع می‌کند. نقطه B را نسبت به محور d بازتاب می‌کنیم تا به دست B' آید. MB' را رسم می‌کنیم. بازتاب نقطه A نسبت به خط d را پیدا می‌کنیم و ثابت می‌کنیم نقطه A' می‌باشد، به طوری که A' روی MB' قرار می‌گیرد. مثلث‌های MAA' و MBB' متساوی‌الساقین هستند، زیرا:

$$\begin{cases} \widehat{H} = 90^\circ, BH = B'H \Rightarrow d \text{ عمود منصف } BB' \Rightarrow MB = MB' & (1) \\ \widehat{H}' = 90^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow d \text{ عمود منصف } AA' \Rightarrow MA = MA' & (2) \end{cases}$$



از طرفی می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، عمود منصف d ، نیمساز زاویه M می‌باشد، پس $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ و در نتیجه، A' روی MB' قرار دارد.

از طرفی از موارد (۱) و (۲) داریم:

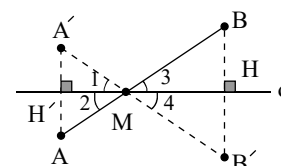
$$MB = MB', MA = MA' \Rightarrow MB - MA = MB' - MA' \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین در این حالت، بازتاب طولی می‌باشد.

ب

پاره‌خط AB محور بازتاب d را در نقطه M قطع می‌کند. بازتاب A نسبت به خط d ، نقطه A' می‌باشد. MA' را رسم کرده و امتداد می‌دهیم و ادعا می‌کنیم بازتاب نقطه B نسبت به خط d ، یعنی نقطه B' بر امتداد MA' واقع است. چون نقطه A' بازتاب A نسبت به خط d می‌باشد، داریم:

$$\widehat{H}' = 90^\circ, AH' = A'H' \Rightarrow d \text{ عمود منصف } AA' \Rightarrow MA = MA', \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$$



از طرفی داریم:

$$\begin{cases} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_2 = \widehat{M}_3 = \widehat{M}_4 \\ BH = B'H, \widehat{H} = 90^\circ \end{cases}$$

پس B' در امتداد MA' قرار دارد و همچنین مثلث MBB' متساوی‌الساقین خواهد بود. بنابراین:

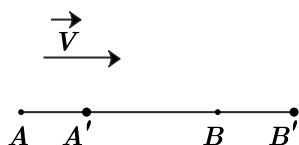
$$\begin{cases} AB = AM + MB \\ A'B' = A'M + MB' \\ AM = A'M, BM = B'M \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$

بنابراین، بازتاب پاره‌خط AB نسبت به خط d ، پاره‌خط $A'B'$ است و بازتاب طولی می‌باشد.

۲۳

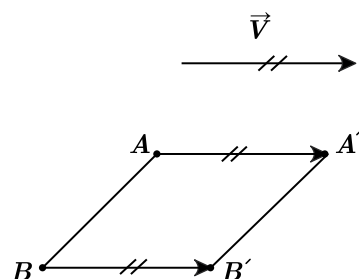
الف

انتقال



$$\begin{cases} AB = AA' + A'B \\ A'B' = BB' + A'B \end{cases} \xrightarrow{AA'=BB'} AB = A'B'$$

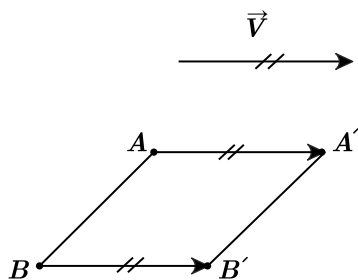
۲۵ تصویر نقطه A و B را تحت انتقال با بردار $\vec{V}$ ، A' و B' می‌نامیم، طبق تعریف انتقال، پاره‌خط‌های AA' و BB' هر دو موازی و هم‌اندازه با بردار $\vec{V}$ هستند. بنابر قضیه‌ای، چهارضلعی که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است. در نتیجه $AB = A'B'$ ، بنابراین انتقال طول را حفظ می‌کند، پس طولیاست.



(صفحة ۳۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

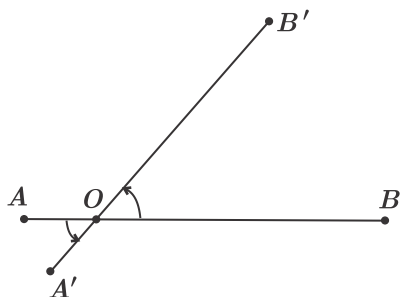
رسم شکل (۵، نمره)



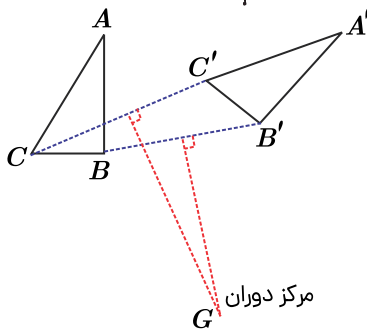
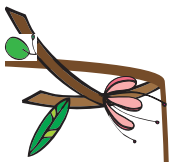
(۵، نمره) انتقال طولیاست $\Rightarrow AB = A'B' \Rightarrow AA'B'B$ متوازی‌الاضلاع است $\Rightarrow (۵، نمره) AA' \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel BB' \Rightarrow |\vec{V}| \parallel BB' \Rightarrow AA' \parallel |\vec{V}| \parallel BB'$

۲۶ اگر T یک دوران به مرکز O و زاویه α باشد، با توجه به شکل تحت T داریم:

$$\begin{aligned} T(A) = A', T(B) = B' &\Rightarrow OA = OA', OB = OB' \\ \Rightarrow AB = OA + OB = OA' + OB' &= A'B' \end{aligned}$$

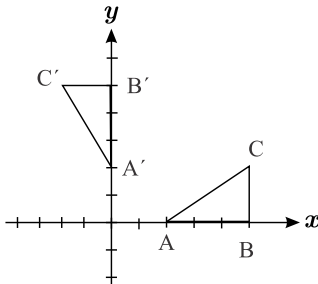


۲۷ محل هم‌رسمی عمودمنصف‌های پاره‌خط‌های واصل بین هر نقطه و تصویرش، مرکز دوران است.



۲۸ پاسخ: الف) با توجه به شکل در این دوران داریم:

$$\begin{cases} A(2, 0) \rightarrow A'(0, 2) \\ B(5, 0) \rightarrow B'(0, 5) \\ C(5, 2) \rightarrow C'(-2, 5) \end{cases}$$



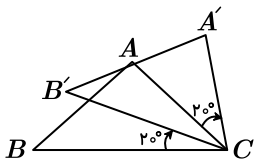
(ب)

$$\left. \begin{aligned} AC &= \sqrt{(5-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} \\ A'C' &= \sqrt{(-2-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC = A'C'$$

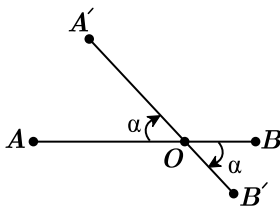
$$\left. \begin{aligned} m_{AC} &= \frac{2-0}{5-2} = \frac{2}{3} \\ m_{A'C'} &= \frac{5-2}{-2-0} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AC} \neq m_{A'C'}$$

۲۹

شکل مقابل مثلث $\triangle ABC$ را نشان می‌دهد که به مرکز نقطه C در جهت حرکت عقربه‌های ساعت به اندازه (20°) دوران یافته است. در اینجا اگرچه تبدیل همانی نیست اما نقطه C ، نقطه ثابت تبدیل است.



۳۰ فرض کنیم A' و B' تصویر نقاط A و B تحت دوران به مرکز O با زاویه α باشند، در این صورت داریم:



$$\left. \begin{aligned} AB &= OA + OB \\ A'B' &= OA' + OB' \end{aligned} \right\} \Rightarrow AB = A'B'$$

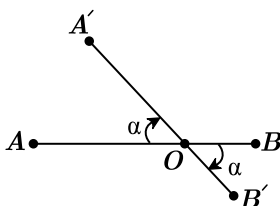
طبق تعریف دوران $OA = OA', OB = OB'$

بنابراین دوران طولی خواهد بود.

(صفحه ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/۵ نمره)



$$\left. \begin{aligned} AB &= OA + OB \\ A'B' &= OA' + OB' \end{aligned} \right\} \text{ (۵/۵ نمره)}$$

$OA = OA', OB = OB' \Rightarrow AB = A'B'$ (۵/۵ نمره)

۳۱ با توجه به تعریف دوران $OA = OA'$ ، یعنی نقطه O از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است. عمودمنصف مکان هندسی نقاطی است که از دو سر پاره خط به یک فاصله هستند:

بنابراین O روی عمودمنصف AA' قرار می‌گیرد.

برای یافتن مرکز دوران کافی است محل هم‌رسی عمودمنصف‌های AA' و BB' و CC' را مشخص کنیم؛ چون این نقطه از دو سر پاره خط‌ها به یک فاصله است، پس مرکز دوران خواهد بود.

(صفحه ۴۴ کتاب درسی)

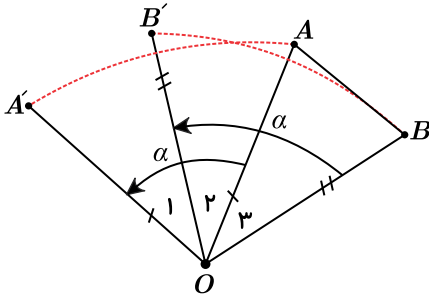
راهنمای تصحیح:

بیان مکان هندسی بودن عمودمنصف برای نقاطی که از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله هستند. (۵/نمره)

یافتن محل همرسی عمودمنصف‌های AA' و BB' و CC' . (۵/نمره)

توضیح اینکه این نقطه همرسی از نقاط و تصویر آنها به یک فاصله است. (۵/نمره)

۳۲ تصویر نقاط A و B را تحت دوران به مرکز O با زاویه α به ترتیب نقاط A' و B' می‌نامیم، چون زاویه دوران ثابت است؛ بنابراین:



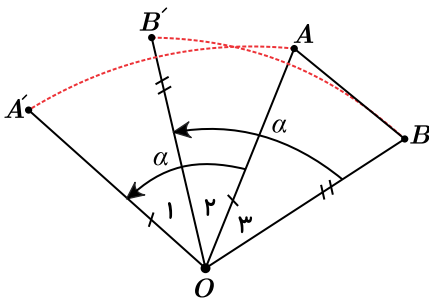
$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_r = \alpha \\ \hat{O}_r + \hat{O}_r = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_r$$

از طرفی $OA' = OA$ و $OB' = OB$ ؛ بنابراین دو مثلث $\triangle OAB$ و $\triangle OA'B'$ به حالت (ض ز ض) هم‌نهشت می‌شوند و $A'B' = AB$ پس دوران ایزومتري خواهد شد.

(صفحه ۴۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/نمره)



$$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 + \hat{O}_r = \alpha \\ \hat{O}_r + \hat{O}_r = \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_r \text{ (نمره ۵)}$$

$$\left. \begin{array}{l} OA = OA' \\ OB = OB' \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_r \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \Rightarrow AB = A'B' \text{ (نمره ۵)}$$

۳۳

دوران‌ها عبارتند از:

۱- مثلث $AB'A_1$ دوران یافته $\triangle ABC$ به مرکز A و زاویه 90° - (ساعتگرد).

۲- مثلث $AA''A_3$ دوران یافته $\triangle ABC$ به مرکز A و زاویه 180° .

۳- مثلث $AA'A_1$ دوران یافته $\triangle ABC$ به مرکز A و زاویه 90° (پادساعتگرد) یا 270° - (ساعتگرد).

۳۴

$$\triangle ABC \Rightarrow \hat{ACB} = 60^\circ, AC = CB$$

(الف) پس می‌توان گفت که نقطه B دوران یافته A به مرکز C و زاویه 60° - است. به همین ترتیب:

$$\triangle CDE \Rightarrow \hat{DCE} = 60^\circ, CD = CE$$

نتیجه می‌گیریم که نقطه E دوران یافته D به مرکز C و زاویه 60° - است.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، نتیجه می‌گیریم که AD تحت دوران به مرکز C و زاویه 60° - روی BE تصویر می‌شود. دوران طولیا است، پس $AD = BE$. همچنین می‌دانیم که زاویه

بین خط و دوران یافته آن به اندازه دوران است، پس: $\hat{AFB} = 60^\circ$.

$$\left\{ \begin{array}{l} T(A) = B \\ T(D) = E \end{array} \right. \rightarrow T(AD) = BE$$

۳۵ ابتدا ثابت می‌کنیم که دو مثلث $\triangle AOM$ و $\triangle DON$ هم‌نهشت هستند:

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OD \\ AM = DN \\ \hat{OAM} = \hat{ODN} = 45^\circ \end{array} \right. \Rightarrow \triangle AOM \cong \triangle DON \text{ (ض ز ض)} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} OM = ON \quad (1) \\ \hat{AOM} = \hat{DON} \quad (2) \end{array} \right.$$



از رابطه (۲) داریم:

$$A\hat{O}M = D\hat{O}N \Rightarrow A\hat{O}M + M\hat{O}D = D\hat{O}N + M\hat{O}D \Rightarrow A\hat{O}D = M\hat{O}N, A\hat{O}D = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} M\hat{O}N = 90^\circ \\ (1) : OM = ON \end{cases}$$

بنابراین نقطه M با دوران به مرکز O و زاویه 90° بر N تصویر می‌شود. از دوران به مرکز O و زاویه 90° بر A تصویر می‌شود و به همین ترتیب، B بر A تصویر می‌شود.

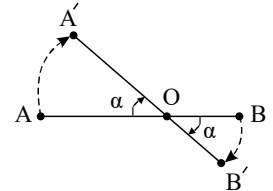
به این ترتیب، رأس‌های مثلث ABM بر رأس‌های مثلث ADN تصویر می‌شوند. پس دوران یافته ABM به مرکز O و زاویه 90° بر مثلث ADN منطبق می‌شود.

۳۶ مطابق شکل، مرکز دوران نقطه O روی AB است و زاویه دوران α می‌باشد. داریم:

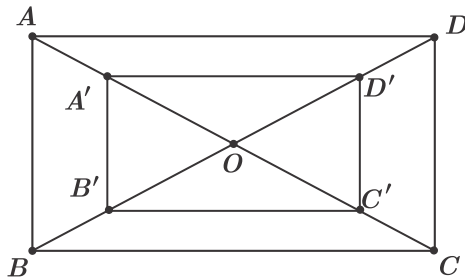
$$AB = AO + OB$$

$$A'B' = A'O + OB'$$

$$AO = A'O, OB = OB' \Rightarrow AB = A'B' \quad (1)$$



۳۷ روش اول: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد. داریم:



$$S - S' = 10 \Rightarrow S - \frac{4}{9}S = 10 \Rightarrow S = 18$$

روش دوم: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد. داریم:

$$S - S' = 10 \Rightarrow AB \times AD - A'B' \times A'D' = AB \times AD - \frac{4}{9}AB \times \frac{4}{9}AD = 10 \Rightarrow S = AB \times AD = 18$$

روش سوم: اگر S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشد. داریم:

$$\frac{S'}{S} = k^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \frac{16}{81} \Rightarrow \frac{S - S'}{S} = \frac{10}{S} = \frac{16}{81} \Rightarrow \frac{10}{S} = \frac{16}{81} \Rightarrow S = 18$$

روش چهارم: فرض کنیم S و S' به ترتیب مساحت مستطیل و تصویرش باشند و α یکی از زاویه‌های بین دو قطر مستطیل باشد. می‌دانیم در هر مثلث میانه، مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم می‌کند. بنابراین:

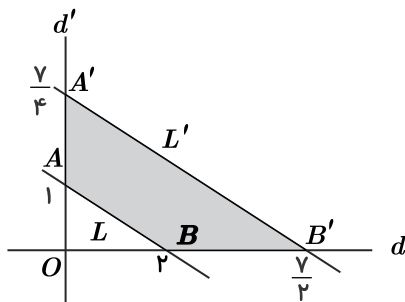
$$S - S' = 10 \Rightarrow 4S_{OAB} - 4S_{OA'B'} = 10$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{1}{2}OA \times OB \times \sin \alpha\right) - 4\left(\frac{1}{2}OA' \times OB' \times \sin \alpha\right) = 10$$

$$\Rightarrow OA \times OB \times \sin \alpha - \frac{4}{9}OA \times OB \times \sin \alpha = 5 \Rightarrow OA \times OB \times \sin \alpha = 9$$

$$\Rightarrow S = 4\left(\frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin \alpha\right) = 18$$

۳۸ روش اول:

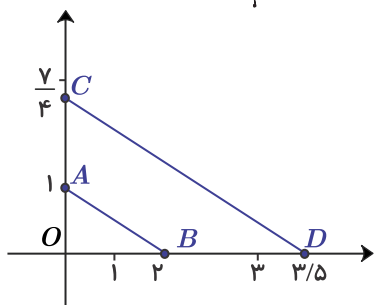


$$\frac{OA'}{OA} = \frac{4}{3} \Rightarrow OA' = \frac{4}{3}$$

$$\frac{OB'}{OB} = \frac{3}{4} \Rightarrow OB' = \frac{3}{4}$$

$$S = S_{\Delta OA'B'} - S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} \times \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{2}(1 \times 2) = \frac{33}{16}$$

روش دوم:

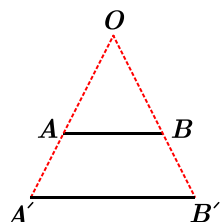


$$\frac{S_{CDO}}{S_{ABO}} = k^2 = \frac{49}{16}$$

$$\frac{S_{CDO} - S_{ABO}}{S_{ABO}} = \frac{49 - 16}{16} = \frac{33}{16}$$

$$S_{ABO} = \frac{1 \times 2}{2} = 1 \Rightarrow S_{ABDC} = \frac{33}{16}$$

۳۹ مرکز تجانس روی پاره خط AB نیست. در این حالت مطابق شکل A' و B' مجانس های A و B هستند:



$$\begin{cases} OA' = k \cdot OA \\ OB' = k \cdot OB \end{cases} \rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = k$$

بنا به عکس قضیه تالس $\rightarrow AB \parallel A'B' \rightarrow m_{AB} = m_{A'B'}$

۴۰

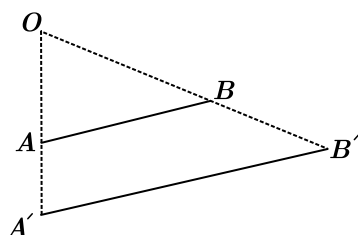
الف) چون در تجانس شیب خط حفظ می شود، پس: $AB \parallel A'B'$

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = k$$

در نتیجه به استناد قضیه تالس داریم:

$$\frac{A_1A_2}{A'_1A'_2} = \frac{A_2A_3}{A'_2A'_3} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{A'_{n-1}A'_n} = k$$

ب) بنا به حالت الف داریم:



پس تناسب بین اضلاع چندضلعی و اضلاع مجانس آن برقرار است.

از طرفی می دانیم که در تجانس، زاویه بین خطوط حفظ می شود. پس هر دو زاویه متناظر برابر می باشند. در نتیجه دو چندضلعی متشابه اند.

۴۱

می دانیم اگر شکلی با نسبت k متجانس شود، نسبت مساحت ها k^2 خواهد بود. فرض کنیم ضلع مربع اولیه a باشد؛ بنابراین:

$$\text{مساحت اولیه} - \text{مساحت تصویر} = \text{مساحت بین} \Rightarrow \frac{25}{16}a^2 - a^2 = 9 \Rightarrow a^2 \left(\frac{9}{16}\right) = 9 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$\text{محیط مربع اولیه} = 4a = 16$$

(صفحه ۵۱ کتاب درسی)

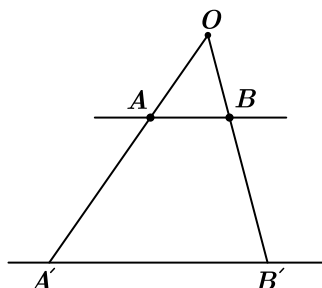
راهنمای تصحیح:

$$\text{مساحت بین} = \frac{25}{16}a^2 - a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \text{ (نمره ۵)}$$

$$\text{محیط اولیه} = 4a = 16 \text{ (نمره ۵)}$$

۴۲

فرض کنیم A' و B' به ترتیب مجانس های A و B به مرکز O با نسبت K باشند. در این صورت داریم:



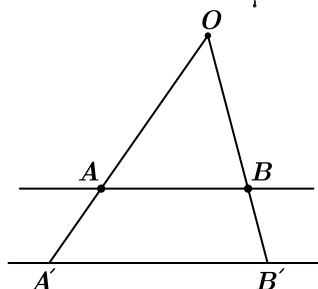
$$\left. \begin{matrix} OA' = K \times OA \\ OB' = K \times OB \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \xrightarrow{\text{بنابر عکس قضیه تالس}} AB \parallel A'B'$$

بنابراین خط و تصویر موازی می شوند و شیب آنها برابر خواهد بود.

(صفحه ۴۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (نمره ۵)



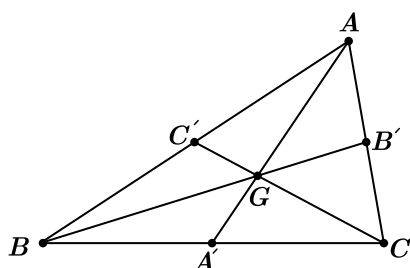
$$\left. \begin{array}{l} OA' = K \times OA \\ OB' = K \times OB \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = K \text{ (نمره ۵/۵)}$$

بنابر عکس قضیه تالس $AB \parallel A'B'$ ؛ بنابراین شیب خط و تصویر برابر است. (۵/۵ نمره)

۴۳ می‌دانیم میانه‌های هر مثلث هم‌سازند و همدیگر را با نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند؛ بنابراین محل هم‌رسمی میانه‌ها را به عنوان مرکز تجانس در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{GC'}{GC} = \frac{1}{2}$$

چون G بین A و A' است، نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ بوده و نسبت مساحت‌ها K^2 ، یعنی $\frac{1}{4}$ خواهد شد.



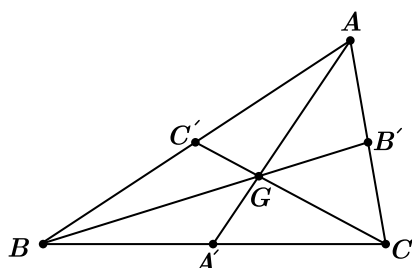
(صفحه ۵۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/۵ نمره)

میانه‌ها هم‌سازند و همدیگر را با نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند؛ بنابراین G مرکز تجانس است. (۵/۵ نمره)

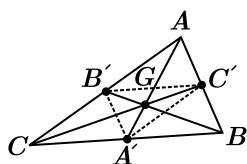
نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ و نسبت مساحت‌ها $\frac{1}{4}$ است. (۵/۵ نمره)



۴۴ می‌دانیم میانه‌های هر مثلث همدیگر را با نسبت ۱ به ۲ قطع می‌کنند؛

بنابراین جایگاه A' ، B' و C' وسط اضلاع BC و AC و AB خواهد بود. از طرفی بنابر ویژگی‌های تجانس به نسبت K مساحت را K^2 برابر می‌کند،

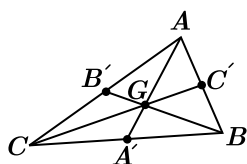
بنابراین نسبت مساحت $A'B'C'$ به مساحت ABC برابر $\frac{1}{4}$ می‌باشد.



(صفحه ۵۴ کتاب درسی)

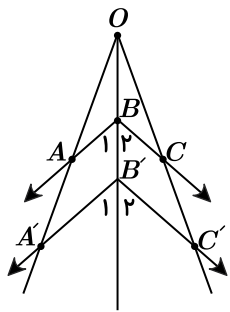
راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/۵ نمره)



A' ، B' ، C' وسط‌های اضلاع مثلث ABC هستند. نسبت مساحت $A'B'C'$ به ABC برابر $\frac{1}{4}$ است.

۴۵ $\widehat{ABC}$ را به مرکز O با نسبت K متجانس می‌کنیم تا $\widehat{A'B'C'}$ ایجاد شود، بنابر قضیه تجانس، شیب را حفظ می‌کند، بنابراین:



$$AB \parallel A'B' \\ BC \parallel B'C'$$

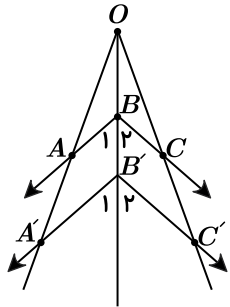
$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{B}'_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$$

بنابر قضیه موازی و مورب:

(صفحه ۴۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/۵) نمره

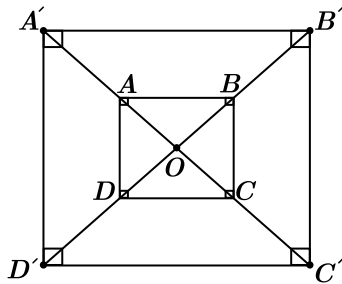


$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB \parallel A'B' \\ BC \parallel B'C' \end{array} \right. \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$\xrightarrow{\text{بنابر قضیه موازی و مورب}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_1 = \hat{B}'_1 \\ \hat{B}_2 = \hat{B}'_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

۴۶ طبق ویژگی تجانس با نسبت K می‌دانیم که طول ضلع $|K|$ برابر می‌شود و مساحت K^2 برابر خواهد شد.

بنابراین:



$$A'B' = \frac{5}{3}AB$$

$$\Rightarrow S_{A'B'C'D'} = \frac{25}{9}S_{ABCD}$$

$$\text{مساحت بین مربع‌ها} = \frac{25}{9}AB^2 - AB^2 = \frac{16}{9}AB^2 = 16$$

$$\Rightarrow AB^2 = 9 \Rightarrow AB = 3 \text{ ضلع مربع اولیه}$$

$$\text{محیط مربع اولیه} = 4 \times AB = 4 \times 3 = 12$$

(صفحه ۴۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

فرض کنیم اندازه ضلع مربع اولیه a باشد، بنابر ویژگی تجانس $a' = \frac{5}{3}a$ ، $S' = \frac{25}{9}S$ (۵/۵ نمره)

$$\text{مساحت بین مربع‌ها} = \frac{25}{9}a^2 - a^2 = \frac{16}{9}a^2 = 16 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

$$\text{محیط مربع اولیه} = 4a = 4 \times 3 = 12 \quad (۵/۵ \text{ نمره})$$

۴۷ الف) داریم:

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ} = \frac{1}{2}$$

بنابراین در تجانس به مرکز A و نسبت $k = 2$ ، مثلث AMN بر مثلث APQ تصویر می‌شود.

(ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} AM = MP = 2PB \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{4}{5} \\ AN = NQ = 2QC \Rightarrow \frac{AQ}{AC} = \frac{4}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{4}{5}$$

بنابراین در تجانس به مرکز A و نسبت $k = \frac{5}{4}$ ، مثلث APQ بر مثلث ABC تصویر می‌شود.

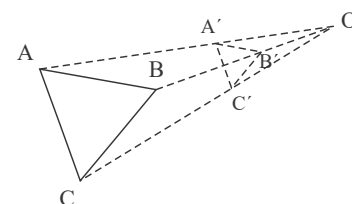
۴۸ گزینه ۲: دو خط متقاطع شیب‌های نابرابر دارند، بنابراین نمی‌توانند انتقال یافته یکدیگر باشند (انتقال، شیب خط را حفظ می‌کند). به همین ترتیب، چون تجانس هم شیب خط را حفظ می‌کند، پس دو خط متقاطع نمی‌توانند مجانس یکدیگر باشند.

۴۹ مطابق شکل، مثلث $A'B'C'$ مجانس مستقیم انقباضی مثلث ABC به مرکز تجانس O و ضریب k است. داریم:

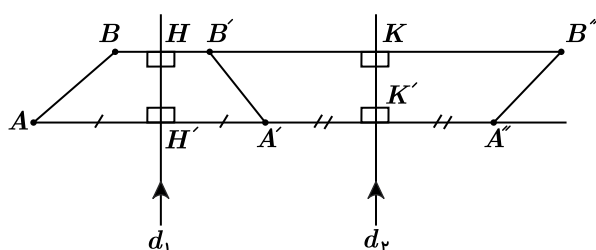
$$k = \frac{OA'}{AA'} = 3 \Rightarrow \frac{OA'}{OA' + AA'} = \frac{OA'}{OA} = \frac{3}{4}$$



$$\frac{S(\triangle A'B'C')}{S(\triangle ABC)} = \left(\frac{OA'}{OA}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow S(\triangle ABC) = \frac{16}{9} S(\triangle A'B'C')$$



۵۰



۵۰ را عمود بر d_1 رسم می‌کنیم و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا B' ایجاد شود، سپس $B'K$ را بر d_2 عمود می‌کنیم و به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا B'' به دست آید. به همین ترتیب تصاویر A' و A'' نیز ایجاد می‌شوند.

$$AA'' = AH' + H'A' + A'K' + K'A'' \Rightarrow$$

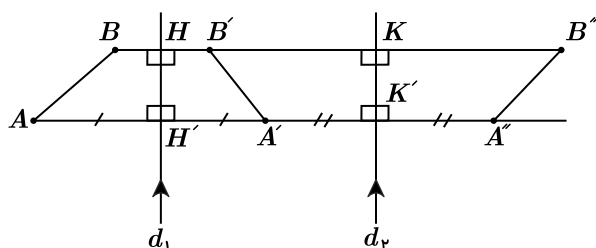
$$AA'' = 2A'H' + 2A'K' = 2m$$

از طرفی چون چهارضلعی $ABB''A''$ متوازی‌الاضلاع است، با تبدیل انتقال با بردار $\overrightarrow{AA''}$ می‌توان پاره خط AB را مستقیم بر $A''B''$ تصویر کرد.

(صفحه ۴۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵، نمره)



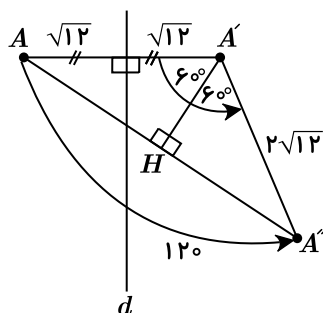
$$AA'' = 2A'H' + 2A'K' = 2m \quad (۵، نمره)$$

تبدیل انتقال با بردار $\overrightarrow{AA''}$ را مستقیم به $A''B''$ تصویر می‌کند. (۵، نمره)

۵۱

با توجه به شکل مثلث $AA'A''$ متساوی‌الساقین است؛ بنابراین ارتفاع $A'H$ نیمساز زاویه A' هم می‌باشد.

در نتیجه:



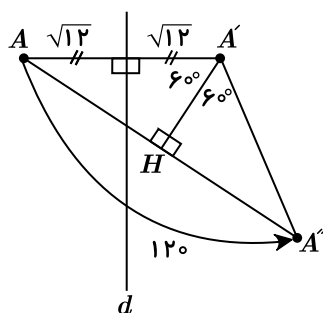
$$\frac{AH}{AA'} = \sin 60^\circ \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{12} = 6$$

$$AA'' = 2AH \Rightarrow AA'' = 2 \times 6 = 12$$

(صفحه ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵، نمره)

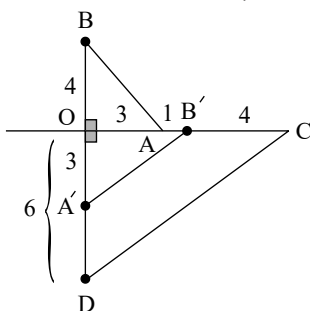


$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{AA'} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{12} = 6 \quad (۵، نمره)$$

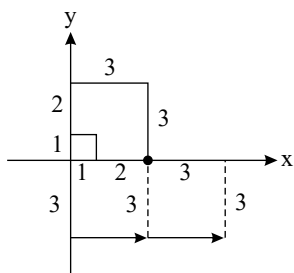
$$AA'' = 2AH = 2 \times 6 = 12 \quad (۵، نمره)$$

۵۲ ابتدا به مرکز O و زاویه 90° ، مثلث OAB را دوران می‌دهیم تا مثلث $OA'B'$ به دست آید. حال مجانس $\triangle OA'B'$ به مرکز O و نسبت تجانس 2 را $k = \frac{OC}{OB'} = \frac{OD}{OA'}$

به دست می‌آوریم تا مثلث OCD به دست آید.

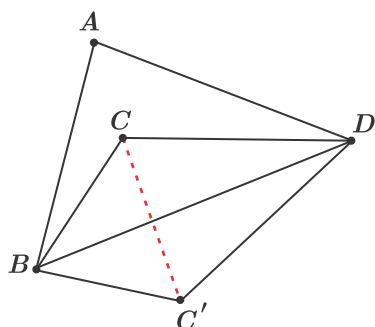


۵۳ از آنجا که مطابق شکل، ابعاد مربع کوچک در تصویر آن، ۳ برابر شده است، پس حتماً تجانس جزو تبدیل‌ها خواهد بود. ابتدا تجانس به مرکز مبدأ مختصات و با ضریب $k=3$ و سپس بازتاب نسبت به محور x و سپس انتقال با برداری به طول ۳ موازی محور x ‌ها خواهیم داشت.



۵۴ روش اول:

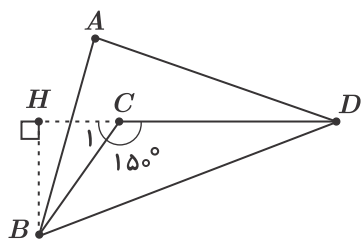
ابتدا بازتاب نقطه C را تحت BD به دست می‌آوریم و آن را C' می‌نامیم. بنابراین میزان افزایش مساحت برابر است با:



$$S_{BC'DC} = 2S_{BDC} = 2\left(\frac{1}{2}CB \times CD \sin C\right) = 5 \times 8 \times \frac{1}{2} = 20.$$

روش دوم:

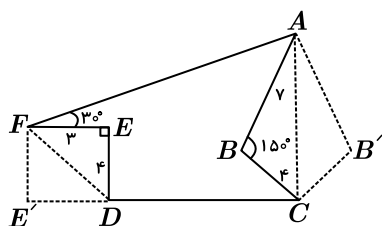
ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. لذا $\hat{C}_1 = 30^\circ$ و $BH = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$. بنابراین میزان افزایش مساحت برابر است با:



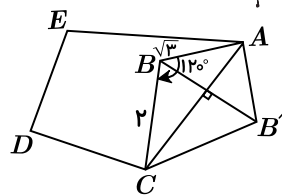
$$2S_{BDC} = 2\left(\frac{1}{2}BH \times CD\right) = 2\left(\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 8\right) = 20.$$

۵۵ با توجه به شکل رسم‌شده برای تعیین افزایش مساحت داریم:

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC'B'} + S_{FEDE'} = 2S_{\triangle ABC} + 2S_{\triangle FED} = \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 7 \times 4 \times \sin 150^\circ + 2 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 14 + 2 = 26 \end{aligned}$$



۵۶ نقطه B را نسبت به AC بازتاب می‌کنیم.



$$افزایش مساحت = 2 \times S_{ABC} = 2 \times \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

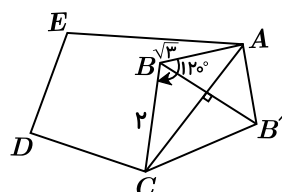
$$\Rightarrow افزایش مساحت = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 120^\circ$$

$$افزایش مساحت = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

(صفحه ۵۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

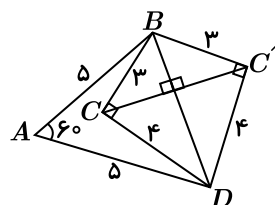
رسم شکل (۵/نمره)



$$افزایش مساحت (۵/نمره) = 2 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 120^\circ = \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$



۵۷ مثلث متساوی الساقینی که زاویه بین دو ساق آن 60° باشد، متساوی الاضلاع می شود؛ بنابراین مثلث ABC متساوی الاضلاع به ضلع ۵ است. بنابر مثلث طلایی فیثاغورس با اضلاع ۵ و ۴ و ۳، مثلث BCD قائم الزاویه است؛ بنابراین:



$$S_{ABC'D} = S_{ABD} + S_{BC'D} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2 + \frac{3 \times 4}{2}$$

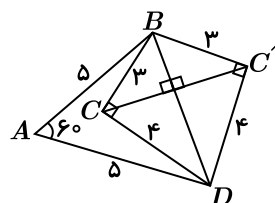
$$\Rightarrow S_{ABC'D} = \frac{25}{4} \sqrt{3} + 6$$

(صفحه ۵۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

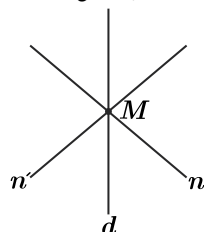
رسم شکل (۵/نمره)

تشخیص متساوی الاضلاع بودن ABD و قائم الزاویه بودن $BC'D$ (۵/نمره)



$$S_{ABC'D} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2 + \frac{3 \times 4}{2} = \frac{25}{4} \sqrt{3} + 6 \text{ (۵/نمره)}$$

۵۸ الف) اگر خط n با خط d عمود یا موازی نباشد، n و n' همدیگر را در نقطه ای مانند M قطع می کنند؛ بنابراین موازی نیستند و شیب حفظ نمی شود. (صفحه ۴۲ کتاب درسی)



ب) چون تجانس، طول را $|K|$ برابر می کند؛ اگر $|K| = 1$ باشد، تجانس طولی است. (صفحه ۴۴ کتاب درسی)

ج) تبدیلی که هر نقطه از صفحه را به خود آن نقطه نظیر می کند، تبدیل همانی می نامیم. (صفحه ۴۷ کتاب درسی)

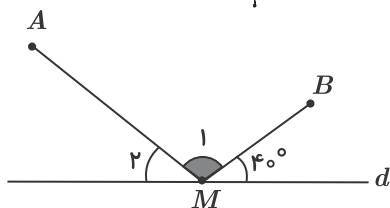
د) یکی از کاربردهای بازتاب، حل مسائلی است که در آنها بدون اینکه محیط چندضلعی تغییر کند؛ مساحت آن را تغییر می دهیم. به این گونه مسائل، هم پیرامونی یا هم محیطی می گویند.

(صفحه ۵۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) حفظ نمی کند. (۲۵/نمره) ب) $|K| = 1$ یا $|K| = -1$ (۲۵/نمره)

ج) تبدیل همانی (۲۵/نمره) د) هم پیرامونی یا هم محیطی (۲۵/نمره)

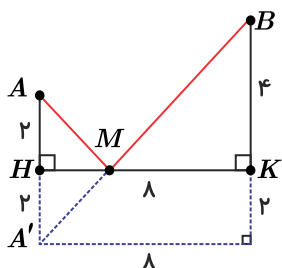


$$\hat{M}_r = 40^\circ \Rightarrow \hat{M}_1 = 100^\circ$$

۶۰

الف

بازتاب نقطه A را نسبت به محور HK نقطه A' می‌نامیم.
محل تلاقی با HK را M می‌نامیم. مسیر AMB پاسخ مسئله است.

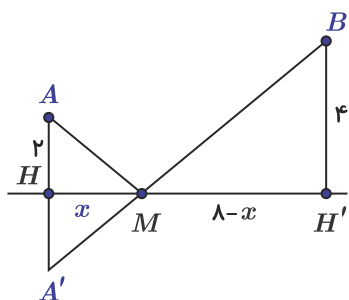


ب

روش اول:

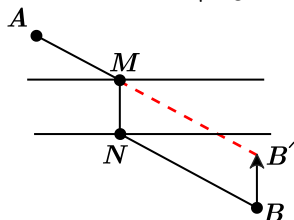
$$AM + MB = A'B \rightarrow A'B = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

روش دوم:



$$\begin{aligned} AHM &\approx BH'M \Rightarrow \frac{AH}{BH'} = \frac{HM}{MH'} \\ \Rightarrow \frac{2}{4} &= \frac{x}{8-x} \Rightarrow x = \frac{8}{3} \Rightarrow MH = \frac{8}{3}, MH' = \frac{16}{3} \\ AM &= \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \frac{10}{3}, BM = \frac{20}{3} \\ \Rightarrow AM + BM &= \frac{10}{3} + \frac{20}{3} = 10 \end{aligned}$$

۶۱ نقطه B را تحت برداری مساوی عرض رودخانه و عمود بر راستای رودخانه در جهت شهر A به نقطه B' انتقال می‌دهیم. سپس از A به B' وصل می‌کنیم، تا نقطه M به دست آید.
از نقطه M بر رودخانه عمود می‌کنیم تا نقطه N به دست آید.

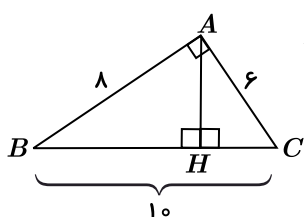


محل احداث پل MN به دست می‌آید.

مسیر کوتاه‌ترین مسیر است.

$$\text{مسیر } AMB'B = AM + MB' + BB' \xrightarrow{MB'=NB} AM + NB + MN = \text{مسیر } AMNB$$

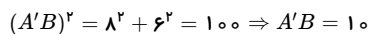
۶۲ الف) گزینه ۴:



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$S_{ABC} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{AH \times 10}{2} \Rightarrow AH = 4.8$$

ب) گزینه ۱؛ بنابر مسئله هرون کوتاه‌ترین مسیر A'B است.



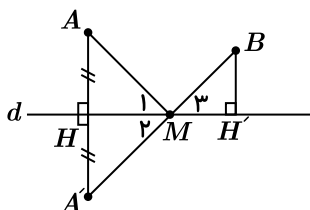
$$\frac{b}{\sin \hat{B}} = rR \Rightarrow \sin \hat{B} = 1 \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ$$

الف) گزینہ ۴ (۵/۰ نمبر) ب) گزینہ ۱ (۵/۰ نمبر) ج) گزینہ ۴ (۵/۰ نمبر)

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M}_1 = \widehat{M}_\nu \\ \widehat{M}_\nu = \widehat{M}_\mu \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{M}_\mu$$

$$\frac{AH}{BH'} = \frac{MH}{MH'} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AH}{AH + BH'} = \frac{MH}{HH'} \Rightarrow MH = \frac{AH \times HH'}{AH + BH'}$$

راهنمای تصحیح:

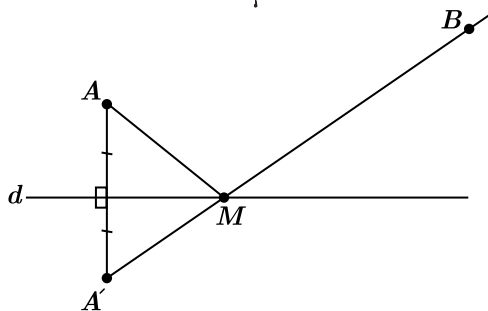


$$\left. \begin{array}{l} \widehat{M_1} = \widehat{M_r} \\ \widehat{M_y} = \widehat{M_{y'}} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_r} \Rightarrow \overset{\Delta}{A}MH \sim \overset{\Delta}{B}MH' \text{ (نمره ۵)}$$

$$\frac{AH}{BH'} = \frac{MH}{MH'} \Rightarrow \frac{AH}{AH + BH'} = \frac{MH}{HH'} \quad (\text{نمره ۵})$$

چون AH و BH' و HH' معلوم هستند؛ پس $MH = \frac{AH \times HH'}{AH + BH'}$ نیز معلوم است. (۵، ۷۰، نمره)

۲۸



A' را به B وصل می‌کنیم. محل برخورد $A'B$ با d را نقطه M می‌نامیم، روی عمود منصف AA' است؛ بنابراین:
 $MA = MA'$
 $A'B = A'M + MB \Rightarrow$ کوتاهترین مسیر تا B
 $AM + MB$ کمترین مقدار خواهد شد

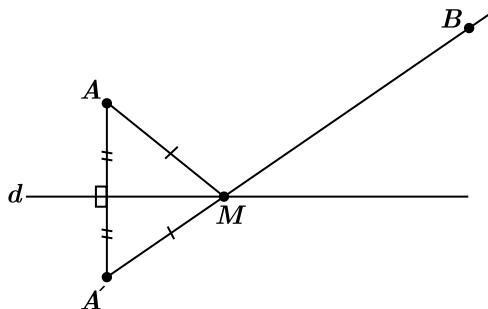
(صفحه ۵۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵، نمره)

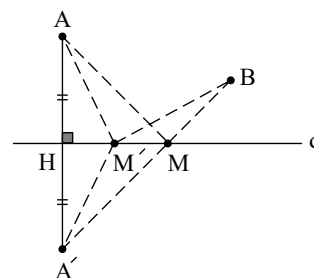
A را نسبت به خط d بازتاب می‌کنیم تا A' به دست آید و محل برخورد $A'B$ با خط d را نقطه M در نظر می‌گیریم. (۵، نمره)

(۵، نمره) کمترین مقدار $= A'B = A'M + MB = AM + MB =$ کوتاهترین فاصله



۶۵ ابتدا قرینه نقطه A نسبت به رودخانه (خط d) را به دست می‌آوریم (A'). پاره خط $A'B$ ، خط d را در نقطه M قطع می‌کند. ادعا می‌کنیم که کوتاهترین مسیر AMB می‌باشد. برای اثبات این ادعا، نقطه دلخواه دیگری مثل M' را روی خط d در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases} AA' \text{ عمود منصف } d \Rightarrow AM = A'M \\ AA' \text{ عمود منصف } d \Rightarrow AM' = A'M' \\ AM + BM = A'M + BM \Rightarrow AMB = A'B \\ AM' + BM' = A'M' + BM' \Rightarrow AM'B = A'M' + BM' \end{cases}$$

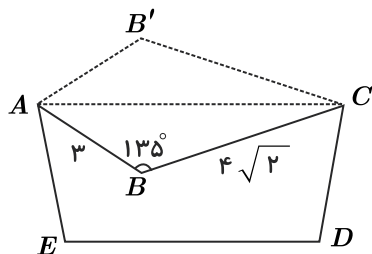


در مثلث $A'M'B$ ، طبق قضیه وجود مثلث، $A'B$ از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر است، پس:

$$A'B < A'M' + M'B \Rightarrow A'MB < A'M'B$$

این یعنی کوتاهترین مسیر همان $A'B$ یا AMB می‌باشد.

۶۶



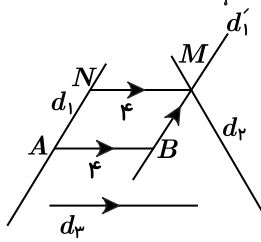
$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \sin 135^\circ = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$$

$$S_{ABCB'} = 2S_{ABC} = 12$$

بازتاب نقطه B را نسبت به خط AC پیدا می‌کنیم،

۶۷ ابتدا خط d_1 را با بردار انتقال $\vec{AB}$ موازی d_2 و با طول ۴ انتقال می‌دهیم تا خط d'_1 ایجاد شود. محل برخورد d'_1 با d_2 را نقطه M می‌نامیم. از M پاره خطی موازی d_3 رسم می‌کنیم تا d_1 را در N قطع کند.

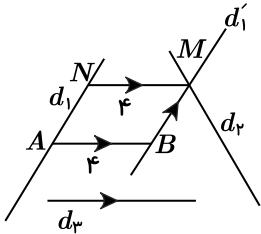
چون چهارضلعی $ABMN$ متوازی‌الاضلاع است؛ بنابراین $MN = 4$ جواب مسئله است.



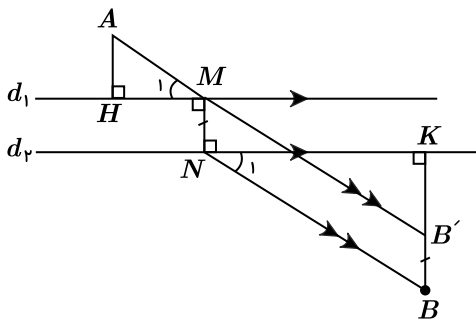
(صفحة ۵۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/نمره)

انتقال d_1 با بردار $\overrightarrow{AB}$ موازی d_3 با طول ۴ (۵/نمره)رسم MN موازی d_3 و تشخیص متوازی الاضلاع بودن $ABMN$ و $MN = 4$ (۵/نمره)

۶۸ بنابر مسئله هرون برای یافتن نقطه M به کمک تبدیلات، ابتدا نقطه B را با بردار انتقال $\overrightarrow{MN}$ به نقطه B' انتقال می‌دهیم، محل برخورد AB' با خط d_1 همان نقطه M خواهد بود؛ بنابراین چهارضلعی $MNBB'$ متوازی الاضلاع است. با توجه به موازی بودن d_1 و d_2 بنابر قضیه موازی و مورب $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$ ، از طرفی $\hat{K} = \hat{H} = 90^\circ$ ، بنابراین دو مثلث به حالت دو زاویه برابر، متشابه می‌شوند.

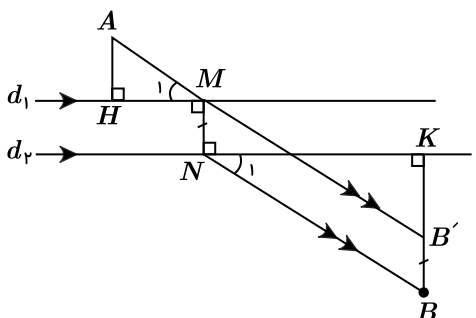


(صفحة ۵۳ کتاب درسی)

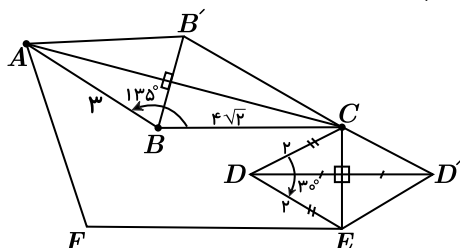
راهنمای تصحیح:

کامل کردن شکل (۵/نمره)

B را با بردار $\overrightarrow{MN}$ انتقال می‌دهیم تا B' ایجاد شود، چهارضلعی $MNBB'$ متوازی الاضلاع است (۵/نمره). بنابر قضیه موازی و مورب $\hat{M}_1 = \hat{N}_1$ و دو مثلث به حالت دو زاویه برابر، متشابه می‌شوند. (۵/نمره)



۶۹ نقطه B را نسبت به AC بازتاب می‌کنیم تا B' ایجاد شود. به همین ترتیب نقطه D را هم نسبت به EC بازتاب می‌کنیم تا D' ایجاد شود.



$$= 2S_{ABC} + 2S_{EDC} =$$

$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \sin 135^\circ \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 30^\circ \right) \Rightarrow$$

$$= 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 \times \frac{1}{2} = 12 + 2 = 14$$

(صفحة ۵۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل هندسه فصل ۳
یازدهم

سال یازدهم
ریاضی

فهرست

درس اول : قضیه سینوس ها

قضیه سینوس ها در مثلث و کاربرد آن ۱

درس دوم : قضیه کسینوس ها

قضیه کسینوس ها در مثلث و کاربرد آن ۵

قضیه میانه ها ۶

قضیه استوارت ۶

درس سوم : قضیه نیمساز های زوایای داخلی و محاسبه طول نیمساز ها

قضیه نیمساز های زوایای داخلی ۶

محاسبه طول نیمساز داخلی مثلث ۷

درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث)

قضیه هرون ۸

قضیه سینوس ها در مساحت ۹

مسائل محاسبه طول ارتفاع و میانه در مثلث ۹

مسائل ترکیبی فصل ۳ ۹



درس اول : قضیه سینوس ها



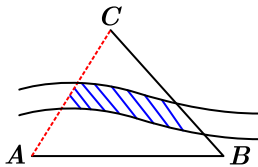
قضیه سینوس ها در مثلث و کاربرد آن

۱ در مثلث $\triangle ABC$ با شعاع دایره محیطی R می دانیم؛ $BC = 10$ ، $\hat{B} = 135^\circ$ و $R = 10$. اندازه زاویه $\hat{A}$ و طول ضلع AC را حساب کنید.

۲ در مثلث ABC ، $BC = 10\text{ cm}$ ، $\hat{A} = 30^\circ$ ، مقدار شعاع دایره محیطی کدام است؟
الف) ۱۰ (ب) ۱۵ (پ) ۲۰ (ت) ۲۵

۳ با فرض حاده بودن زوایای مثلث $\triangle ABC$ ، ثابت کنید:
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

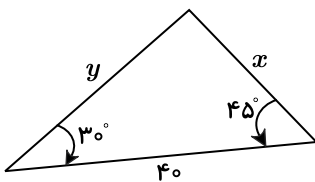
۴ با توجه به شکل مقابل، اندازه گیری مستقیم طول AC (به علت وجود رودخانه) امکان پذیر نیست.
با فرض معلوم بودن طول AB و معلوم بودن اندازه زاویه های A و B ، فرمول محاسبه طول AC را به دست آورید. (یعنی: روش یافتن طول AC را با معلومات داده شده نوشته و دستور محاسبه آن را بنویسید.)



۵ جاهای خالی را با کلمات یا عبارت های مناسب کامل کنید.

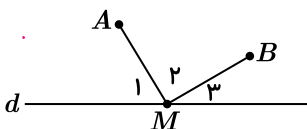
- الف) دو دایره با شعاع های متفاوت R و R' و طول خط المرکزین d ، در حالت $d = 0$ می شوند.
ب) تعداد دایره های محاطی داخلی و خارجی هر مثلث جمعاً برابر است.
ج) در تجانس با نسبت اندازه k زمانی که $k < 0$ باشد، تجانس را می نامیم.
د) در هر مثلث دلخواه نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن، برابر است.

۶ در شکل زیر مقادیر x ، y را بنویسید.



۷ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

- الف) به کمک بازتاب در مسائل هم محیطی بدون اینکه مساحت تغییر کند، محیط را تغییر می دهیم.
ب) در شکل مقابل برای اینکه $MA + MB$ کوتاه ترین مسیر شود، باید $\widehat{M_3} = \widehat{M_1}$ باشد.

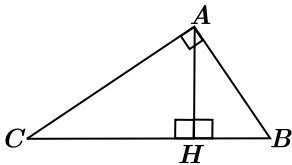


- ج) در هر مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر واسطه هندسی بین دو ضلع زاویه قائمه است.
د) در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $\sqrt{3}$ شعاع دایره محیطی برابر یک است.





۸ جاهای خالی را با کلمات یا عبارات مناسب کامل کنید:



الف) در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ که $\hat{A} = 90^\circ$ و ارتفاع AH وارد بر وتر رسم شده: $AC^2 = BC \times \dots\dots\dots$

ب) در هر مثلث نسبت اندازه هر ضلع به زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.

ج) در مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ شعاع دایره محیطی برابر است.

د) در هر مثلث قائم‌الزاویه مرکز دایره محیطی همیشه قرار می‌گیرد.

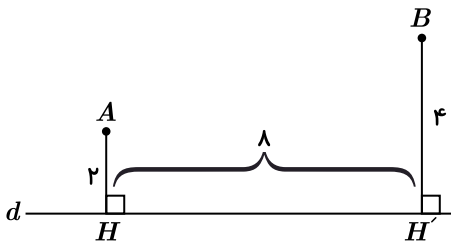
۹ در هر قسمت، گزینه صحیح را انتخاب کنید:

الف) در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB = 8$, $AC = 6$. طول ارتفاع وارد بر وتر BC کدام است؟

- (۱) $4\frac{2}{3}$ (۲) $4\frac{4}{3}$ (۳) $4\frac{6}{3}$ (۴) $4\frac{8}{3}$

ب) در شکل روبه‌رو می‌خواهیم از نقطه A به d و سپس به B برویم. طول کوتاه‌ترین مسیر کدام است؟

- (۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۹ (۴) ۱۱



ج) مثلث ABC در دایره مثلثاتی محاط شده است. اگر $AC = 2$ باشد، زاویه $\hat{B}$ کدام است؟

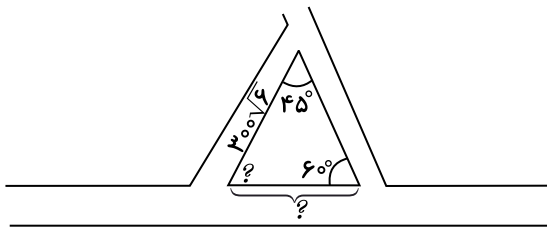
- (۱) 30° (۲) 45° (۳) 60° (۴) 90°

۱۰ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌رو به آن ضلع برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث.

۱۱ در مثلث ABC ، با فرض $\hat{B} = 45^\circ$ و $\hat{A} = 15^\circ$ و $AB = 2\sqrt{6}$ ، اندازه ضلع AC را به دست آورید.

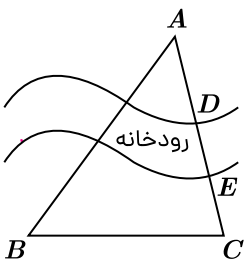
۱۲ از یک بلوار افقی یک خیابان فرعی با زاویه 60° جدا شده است. می‌خواهیم یک فرعی دیگر به طول $300\sqrt{6}$ متر، که با زاویه 45° از

فرعی اول جدا شده باشد، ایجاد کنیم. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس 60° باید شروع شود و با بلوار چه زاویه‌ای می‌سازد؟



۱۳ در شکل روبه‌رو، به علت عمیق بودن رودخانه در مسیر AB ، امکان اندازه‌گیری مستقیم طول AB وجود ندارد؛ اما با عبور از مسیر کم‌عمق

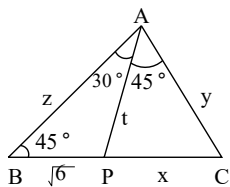
DE امکان اندازه‌گیری زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{B}$ و طول BC وجود دارد. ثابت کنید فاصله AB قابل محاسبه است.



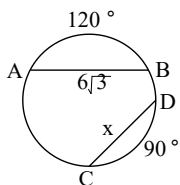
۱۴ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$) با ارتفاع $BH = h_b$ داریم: $\frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$



۲۴ در شکل مقابل، طول x و y و z و t را حساب کنید.



۲۵ در شکل مقابل، طول وتر CD چقدر است؟



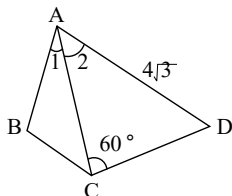
۲۶ در مثلث ABC ، $b = \sqrt{2}a$ و $\hat{A} = 30^\circ$. اندازه زاویه $\hat{C}$ چقدر است؟

۲۷ در مثلث ABC ، $a = \sqrt{3}b$ و $\hat{A} = 2\hat{B}$. زوایای مثلث را محاسبه کنید.

۲۸ در مثلث ABC ثابت کنید: $\frac{P}{R} = \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}$ (نصف محیط مثلث ABC است)

۲۹ در مثلث ABC ، $b = \sqrt{3}a$ و $\hat{A} = 30^\circ$. اگر $c = 4$ باشد، بیشترین مقدار b چقدر است؟

۳۰ در شکل مقابل، $CD = 2BC$ و $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ است. شعاع دایره محیطی مثلث ABC چقدر است؟



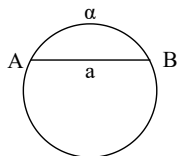
۳۱ در مثلث ABC ثابت کنید:

$$S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

۳۲ در مثلث ABC داریم: $\frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \cos \hat{C}} = 2R$. زاویه C چند درجه است؟

۳۳ مطابق شکل در دایره، وتری به طول $AB = a$ ، کمانی به اندازه زاویه α ایجاد کرده است. ثابت کنید: $R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$

(R شعاع دایره است.)

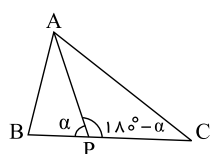


۳۴ در مثلث ABC ، $\hat{A} = 60^\circ$ و $BC = 10\sqrt{3}$ است. اگر I محل هم‌رسی نیم‌سازهای داخلی باشد، شعاع دایره محیطی مثلث BIC چقدر است؟

۳۵ در مثلث ABC ، $\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ$ است. ثابت کنید: $b = 2R \cos \hat{C}$

۳۶ در شکل مقابل برای نقطه دلخواه P روی ضلع BC ، ثابت کنید: $\frac{R_{\triangle APB}}{R_{\triangle APC}} = \frac{AB}{AC}$

(R شعاع دایره محیطی است.)





درس دوم : قضیه کسینوس ها



قضیه کسینوس ها در مثلث و کاربرد آن

۳۷ در مثلث $\triangle ABC$ با فرض $AC = b$, $AB = c$, و $BC = a$, ثابت کنید؛ اگر $\hat{A} > 90^\circ$ و تنها اگر $a^2 > b^2 + c^2$.

۳۸ مثلی به طول اضلاع ۶، ۱۰ و ۱۴ را در نظر بگیرید.

الف با استفاده از قضیه کسینوس ها، اندازه زاویه مقابل به بزرگ ترین ضلع مثلث را محاسبه کنید.

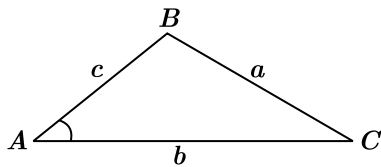
ب به کمک دستور هرون، طول ارتفاع وارد بر کوچک ترین ضلع مثلث را به دست آورید.

۳۹ در مثلث ABC که $(\hat{A} < 90^\circ)$ ، ثابت کنید:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

۴۰ اضلاع مثلی ۳، ۵ و ۷ می باشند؛ اندازه زاویه مقابل به بزرگ ترین ضلع این مثلث را به دست آورید.

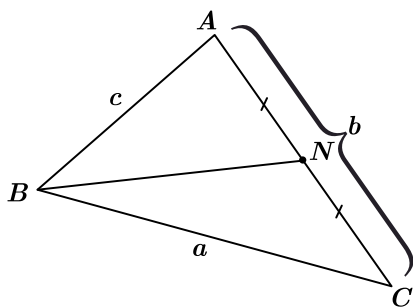
۴۱ در شکل زیر با فرض $\hat{A} < 90^\circ$ ثابت کنید:



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

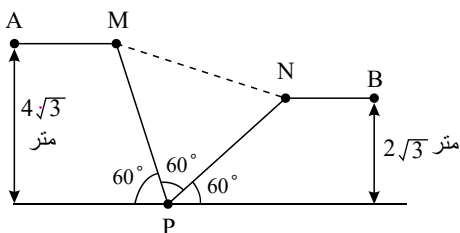
۴۲ دو قایق از یک نقطه دریاچه ای با سرعت های $30 \frac{km}{h}$ و $50 \frac{km}{h}$ با زاویه 120° از هم دور می شوند. یک ساعت بعد دو قایق در چه فاصله ای از یکدیگر قرار دارند؟

۴۳ در مثلث ABC میانه BN را رسم کرده ایم. به کمک قضیه کسینوس ها ثابت کنید:



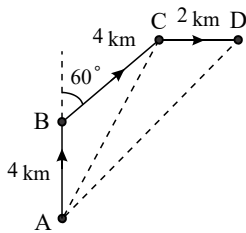
$$2BN^2 + \frac{b^2}{2} = a^2 + c^2$$

۴۴ مطابق شکل، دنده ای از نقطه A به سمت نقطه B شروع به دویدن می کند. مسافتی را که این دنده روی پل MN طی می کند، حساب کنید.

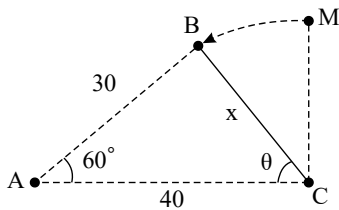


۴۵ یک پیک موتوری در مسیر رساندن مرسولات به مقصد، ابتدا ۴ کیلومتر به سمت شمال حرکت می‌کند و سپس مسیرش را 60° به سمت شرق منحرف نموده و ۴ کیلومتر دیگر حرکت می‌کند و در انتها ۲ کیلومتر مستقیم به سمت شرق حرکت می‌کند تا به مقصد می‌رسد. فاصله مبدأ تا مقصد (AD) چقدر است؟

(راهنمایی: ابتدا در مثلث ABC ، طول AC را حساب کنید، سپس در مثلث ACD ، زاویه $\hat{ACD}$ را یافته و طول AD را محاسبه کنید)



۴۶ مطابق شکل در اثر وزش طوفان، تیر چراغ‌برقی منحرف شده و در وضعیت روبه‌رو قرار می‌گیرد. نوک تیر چراغ‌برق از نقطه A به زاویه 60° دیده می‌شود و فاصله نقطه A از نوک تیر، ۳۰ متر می‌باشد. اگر فاصله نقطه A تا پای تیر ۴۰ متر باشد، طول تیر چراغ‌برق و سینوس زاویه انحراف آن از راستای افقی را محاسبه کنید.



قضیه میانه‌ها

۴۷ طول میانه وارد بر وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه با اضلاع زاویه قائمه ۱ سانتی‌متر و ۲ سانتی‌متر کدام است؟

$$\frac{5}{2} (1) \quad \frac{\sqrt{5}}{2} (2) \quad \frac{5}{4} (3) \quad \frac{\sqrt{5}}{4} (4)$$

قضیه استوارت

۴۸ در مثلث $\triangle ABC$ ، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز زاویه داخلی C را به دست آورید.



درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای

قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها

۴۹ در مثلث $\triangle ABC$ داریم؛ $AB = 5$ ، $BC = 12$ و $AC = 150$ طول نیمساز زاویه داخلی A را محاسبه کنید.

۵۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) در صفحه، از هر نقطه روی دایره یک و تنها یک خط مماس بر دایره می‌توان رسم کرد.

(ب) یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند.

(ج) تبدیل دوران در حالت کلی جهت شکل را حفظ می‌کند.

(د) در هر مثلث نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل را به نسبت دو ضلع مجاور قطع می‌کند.



۵۱ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را بررسی کنید.

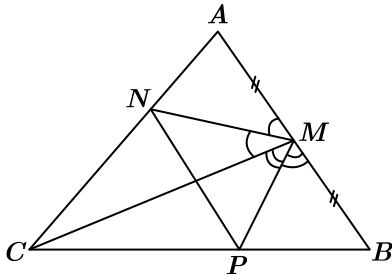
الف) در تبدیل انتقال یک خط، خط و تصویر آن با هم موازی یا منطبق می‌شوند.

ب) هر دو شکل متشابه در حالت کلی متجانس یکدیگرند.

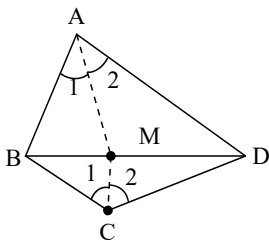
ج) در هر مثلث با داشتن طول‌های اضلاع مثلث می‌توان طول‌های قطعاتی را که هر نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می‌کند را محاسبه کرد.

د) در مثلثی با طول اضلاع a ، b و c که زاویه $\hat{A}$ روبرو به ضلع a است، اگر $a^2 < b^2 + c^2$ باشد، آنگاه حتماً زاویه $\hat{A}$ حاده است.

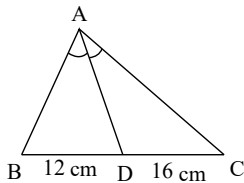
۵۲ در مثلث ABC ، M وسط ضلع AB و MN و MP نیمسازهای زوایای $\widehat{AMC}$ و $\widehat{BMC}$ هستند. ثابت کنید $NP \parallel AB$.



۵۳ در شکل مقابل، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$. ثابت کنید: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$



۵۴ اگر محیط مثلث مقابل 70 cm و AD نیمساز زاویه $\hat{A}$ باشد، طول اضلاع AB و AC را بدست آورید.



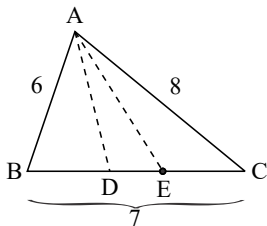
محاسبه طول نیمساز داخلی مثلث

۵۵ در مثلث ABC ، $AB = 7$ ، $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{C}$ را محاسبه کنید.

۵۶ در مثلث ABC ، $AB = 9$ و $AC = 6$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ را به دست آورید.

۵۷ در مثلث ABC ، $AB = 5$ و $AC = 7$ و $BC = 9$ است. طول نیمساز زاویه $\hat{A}$ را بیابید.

۵۸ در مثلث ABC ، اضلاع $AB = 6$ و $AC = 8$ و $BC = 7$ هستند. نیمساز AD را رسم می‌کنیم.

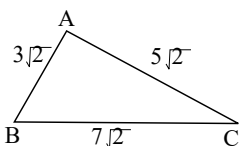


الف) طول BD و CD را حساب کنید.

ب) طول نیمساز AD را حساب کنید.

پ) اگر AE نیمساز زاویه $\hat{DAC}$ باشد، طول AE را حساب کنید.

۵۹ در شکل مقابل، طول نیمساز داخلی زاویه $\hat{A}$ را حساب کنید.





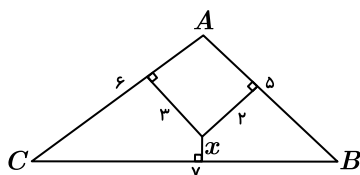
درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه

ارتفاع ها و مساحت مثلث)

قضیه هرون

۶۰ ✱ مساحت مثلث متساوی اضلاع به ضلع a را به کمک دستور هرون بیابید.

۶۱ ✱ با توجه به شکل مقابل، مقدار x را بیابید.



۶۲ ✱ در هر قسمت گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس خارج با شعاع های ۲ و ۸ کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۸ (۴)

ب) در دوران به مرکز O با زاویه 60° در صفحه خط L' تبدیل یافته L است، زاویه بین L و L' کدام است؟

- ۳۰ (۱) ۴۵ (۲) ۶۰ (۳) ۹۰ (۴)

ج) مساحت مثلثی به اضلاع ۷، ۶، ۵ کدام است؟

- ۶ (۱) ۱۵ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

۶۳ ✱ در هر قسمت گزینه صحیح را انتخاب کنید.

الف) اگر نقطه A' دوران یافته A به مرکز O با زاویه 120° و شعاع ۴ باشد، فاصله O تا AA' کدام است؟

- ۴ (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴)

ب) اگر دو نقطه $M(-1, 4)$ و $N(5, -2)$ مجانس یکدیگر با نسبت تجانس ۱- باشند، مرکز تجانس کدام است؟

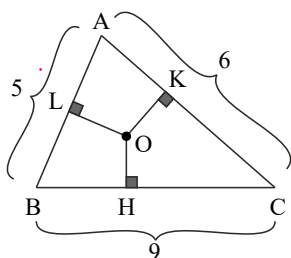
- ۵ (۱) (-2, -1) (۲) (5, -1) (۳) (2, 1) (۴)

ج) مساحت مثلثی با اضلاع ۵، ۹ و ۶ کدام است؟

- ۱۰ (۱) ۲۰ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴)

۶۴ ✱ در مثلث ABC با اضلاع ۱۵ و ۱۸ و ۲۱ نقطه ای که از اضلاع به طول های ۱۵ و ۱۸، به فاصله ۶ و ۹ است، از ضلع بزرگ تر چه فاصله ای دارد؟

۶۵ ✱ براساس دستور محاسبه مساحت هرون، مساحت مثلثی با اضلاع a ، b و c از رابطه محاسبه می شود.



۶۶ ✱ در شکل مقابل داریم: $OK = \sqrt{2}$ ، $OH = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ طول OL چقدر است؟



قضیه سینوس ها در مساحت

۶۷ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را معلوم کنید.

الف

مساحت هر متوازی الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع.

۶۸

جاهای خالی را با عبارات یا کلمات مناسب کامل کنید.

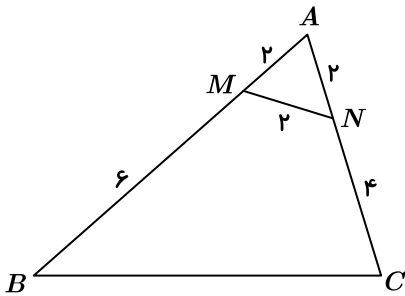
الف) در تبدیل انتقال $T(M) = M'$ و $T(N) = N'$ همواره نوع چهارضلعی $MNM'N'$ است.

ب) اگر نقطه A را به مرکز O چهار بار با زاویه 30° دوران دهیم، نقطه آخر دوران یافته A به مرکز O با زاویه است.

ج) اگر در مثلثی با طول اضلاع a, b و c ، داشته باشیم $a^2 = b^2 + c^2 + bc$ ، آنگاه بزرگ‌ترین زاویه مثلث برابر درجه است.

د) مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های دو ضلع در زاویه بین آنها.

۶۹ در شکل زیر مساحت چهارضلعی $MNCB$ را بیابید.

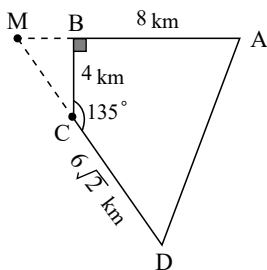


۷۰ اگر در مثلثی اضلاع AB و AC و زاویه A معلوم باشند، مساحت مثلث از رابطه به دست می‌آید.

۷۱ یک کشتی گشت‌زنی دریایی، از نقطه A (مرکز گشت دریایی) 8 km به سمت غرب حرکت کرده و سپس 4 km به سمت جنوب حرکت

می‌کند و در ادامه با زاویه 135° منحرف شده و مسیر $6\sqrt{2}\text{ km}$ را طی کرده و در انتها به مرکز گشت دریایی بازمی‌گردد. این کشتی گشت‌زنی چه مساحتی را پیمایش کرده است؟

(راهنمایی: اضلاع و مساحت مثلث MBC را محاسبه کرده و با استفاده از رابطه سینوسی مساحت، مساحت مثلث AMD را محاسبه نمایید)



مسائل محاسبه طول ارتفاع و میانه در مثلث

۷۲ طول سه ارتفاع مثلثی با اضلاع ۱۳، ۱۴ و ۱۵ را محاسبه کنید.

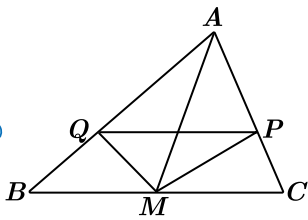
۷۳ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{B} = 90^\circ$) با ارتفاع $BH = h_b$ داریم: $\frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$

مسائل ترکیبی فصل ۳

۷۴ در مثلث ABC که $AB = 4$ ، $AC = 6$ و $BC = 8$ ، نقطه M وسط ضلع BC است. محیط مثلث AMC را به دست آورید.

۷۵ در مثلث ABC ، نقطه M وسط BC است. MP و MQ به ترتیب نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند.

ثابت کنید: $PQ \parallel BC$.



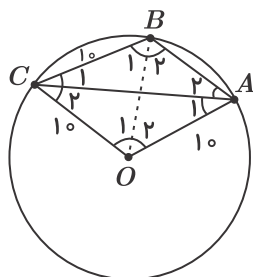


پاسخنامه تشریحی

۱ روش اول:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{AC}{\sin 135^\circ} = 2 \times 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 150^\circ \vee A = 30^\circ \\ AC = 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \end{cases}$$



$$OA = OC = OB = CB = 10$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \triangle COB : O_1 = B_1 = 60^\circ \quad (1) \\ B_1 + B_r = 135^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow B_r = 75^\circ$$

$$\triangle AOB : A_1 + A_r = B_r = 75^\circ \Rightarrow O_r = 30^\circ \quad (2)$$

$$\xRightarrow{(1),(2)} \triangle AOC \Rightarrow 90^\circ \Rightarrow CA^2 = 10^2 + 10^2 \Rightarrow CA = 10\sqrt{2}$$

$$\triangle AOC = 90^\circ \Rightarrow \triangle COA : C_r = A_1 = 45^\circ \Rightarrow A_r = 30^\circ$$

روش سوم:

در مثلث ABC، اگر $AB = c$ ، $AC = b$ ، $BC = a = 10$ و با فرض اینکه S مساحت مثلث باشد، داریم:

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 10 \times c \times \sin 135^\circ = \frac{5\sqrt{2}}{2}c \quad (1)$$

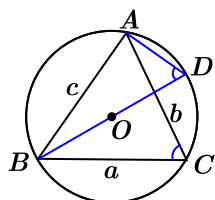
$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ab \left(\frac{c}{2R} \right) = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow 10 = \frac{10bc}{4 \times \frac{5\sqrt{2}}{2}c} \Rightarrow AC = b = 10\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{5\sqrt{2}}{2}c \Rightarrow \sin A = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 150^\circ \vee \hat{A} = 30^\circ$$

۲ گزینه درست: ۱۰ یا الف

۳

قطر BD را رسم می‌کنیم.



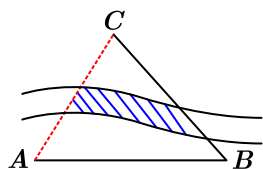
$$\widehat{C} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \rightarrow \sin \widehat{C} = \sin \widehat{D} \quad (1)$$

$$\triangle ABD (\hat{A} = 90^\circ) : \sin \widehat{D} = \frac{c}{2R} \xrightarrow{(1)} \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

به‌طور مشابه (با وصل کردن هر یک از دو رأس دیگر به مرکز دایره و رسم قطرهای گذرنده از آن نقاط) خواهیم داشت:

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = 2R, \frac{b}{\sin \hat{B}} = 2R$$

۴



$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin(180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}))}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin(\hat{A} + \hat{B})} \Rightarrow AC = \frac{AB \times \sin \hat{B}}{\sin(\hat{A} + \hat{B})}$$

۵ الف) دو دایره با شعاع‌های متفاوت R و R' در حالت $d = 0$ هم‌مرکز می‌شوند. (صفحه ۲۰ کتاب درسی)

ب) هر مثلث یک دایره محاطی داخلی و سه دایره محاطی خارجی دارد که جمعاً برابر چهار تا می‌شود. (صفحه ۲۶ کتاب درسی)

ج) در تجانس با نسبت k اگر $0 < k$ باشد، تجانس را معکوس می‌نامیم. (صفحه ۴۶ کتاب درسی)

د) بنابر قضیه سینوس‌ها در هر مثلث دلخواه، نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه مقابل آن برابر قطر دایره محاطی مثلث است. (صفحه ۶۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

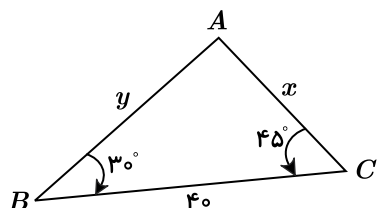
الف) هم‌مرکز ب) چهار تا ج) معکوس د) قطر دایره محاطی مثلث

(هر مورد ۲٫۵ نمره)



۶

بنابر قضیه سینوس ها می دانیم:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

$$\frac{40}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\frac{1}{2} \times 40}{\sin 105^\circ} = \frac{20}{\sin 105^\circ}, \quad y = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \times 40}{\sin 105^\circ} = \frac{20\sqrt{2}}{\sin 105^\circ}$$

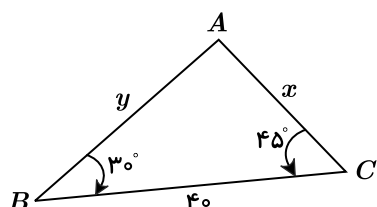
جهت محاسبه $\sin 105^\circ$ داریم:

$$\sin 105^\circ = \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(صفحه ۶۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



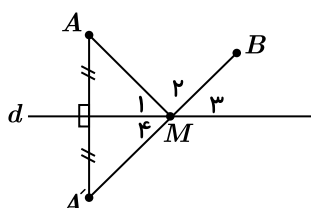
$$\frac{40}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} \quad (\text{نمره } ۰.۵)$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{40}{\sin 105^\circ} \quad (\text{نمره } ۰.۵)$$

$$\Rightarrow x = \frac{20}{\sin 105^\circ}, \quad y = \frac{20\sqrt{2}}{\sin 105^\circ} \quad (\text{نمره } ۰.۵)$$

۷ الف) نادرست؛ یکی از کاربردهای بازتاب حل مسائل «هم محیطی» است که در آنها بدون اینکه محیط تغییر کند، مساحت را تغییر می دهیم.

ب) درست؛ با استفاده از روش هرون و به کمک بازتاب داریم:



$$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}, \widehat{M_3} = \widehat{M_4} \Rightarrow \widehat{M_1} = \widehat{M_4}$$

ج) نادرست؛ در هر مثلث قائم الزاویه ارتفاع وارد بر وتر، واسطه هندسی بین دو قطعه ایجاد شده روی وتر است.

د) درست؛ بنابر قضیه سینوس ها:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \Rightarrow R = 1$$

(صفحه ۵۲ و ۶۰ تا ۶۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) نادرست ب) درست ج) نادرست د) درست

(هر مورد ۰.۲۵ نمره)

۸

الف) بنابر روابط طولی در مثلث قائم الزاویه، هر ضلع قائمه، واسطه هندسی بین وتر و تصویر آن ضلع روی وتر است.

ب) بنابر قضیه سینوس ها، در هر مثلث نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه رو به آن ضلع برابر است با قطر دایره محیطی مثلث.

ج) بنابر قضیه سینوس ها وتر مثلث قائم الزاویه همان قطر دایره محیطی می شود؛ بنابراین شعاع نصف وتر، یعنی $\frac{5}{2}$ یا 2.5 است.

د) مرکز دایره محیطی محل هم رسی عمودمنصف ها است؛ بنابراین در مثلث قائم الزاویه مرکز دایره محیطی وسط وتر قرار می گیرد.

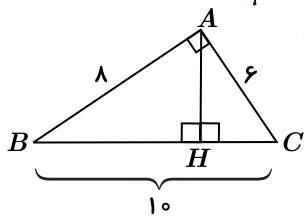
(صفحه ۶۰ تا ۶۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) CH ب) سینوس ج) 2.5 یا $\frac{5}{2}$ د) وسط وتر

(هر مورد ۰.۲۵ نمره)

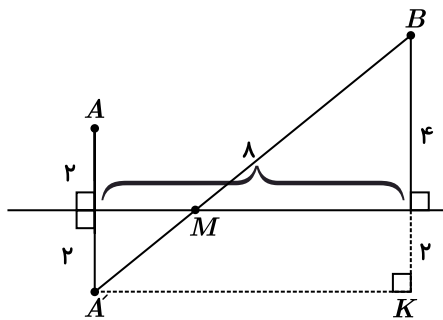
۹ الف) گزینه ۴:



$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

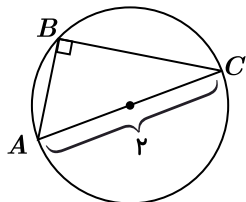
$$S_{ABC} = \frac{6 \times 8}{2} = \frac{AH \times 10}{2} \Rightarrow AH = 4.8$$

(ب) گزینه ۱؛ بنابر مسئله هرون کوتاه‌ترین مسیر $A'B$ است.



$$(A'B)^2 = 8^2 + 6^2 = 100 \Rightarrow A'B = 10.$$

(ج) گزینه ۴؛ چون شعاع دایرهٔ مثلثاتی ۱ است؛ پس AC قطر بوده و $\widehat{B} = 90^\circ$ محاطی است یا:



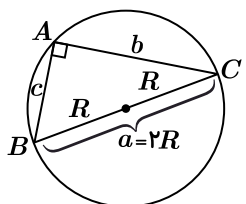
$$\frac{b}{\sin \widehat{B}} = 2R \Rightarrow \sin \widehat{B} = 1 \Rightarrow \widehat{B} = 90^\circ$$

(صفحه ۵۲ و ۶۰ تا ۶۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(الف) گزینه ۴ (۵٫۵ نمره) (ب) گزینه ۱ (۵٫۵ نمره) (ج) گزینه ۴ (۵٫۵ نمره)

۱۰ با توجه به اینکه مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث محل هم‌رسی عمودمنصف‌های مثلث است و عمودمنصف‌های مثلث قائم‌الزاویه وسط وتر هم‌رس می‌شوند؛ بنابراین وتر مثلث قائم‌الزاویه قطر دایرهٔ محیطی مثلث است؛ پس طبق تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم:



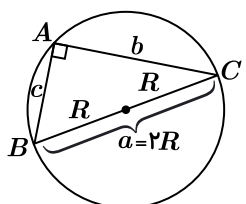
$$\sin \widehat{B} = \frac{b}{BC} = \frac{b}{2R} \Rightarrow \frac{b}{\sin \widehat{B}} = 2R, \sin \widehat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R, \sin \widehat{A} = \sin 90^\circ = 1 = \frac{2R}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

(صفحه ۶۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

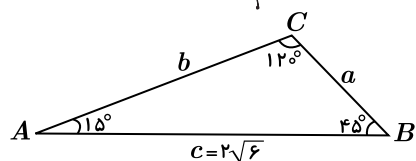
تشخیص اینکه قطر دایرهٔ محیطی همان وتر مثلث قائم‌الزاویه است. (۵٫۵ نمره)

نوشتن تعاریف نسبت‌های مثلثاتی (۵٫۵ نمره)



$$\sin \widehat{B} = \frac{b}{2R}, \sin \widehat{C} = \frac{c}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R \text{ (۵٫۵ نمره)}$$

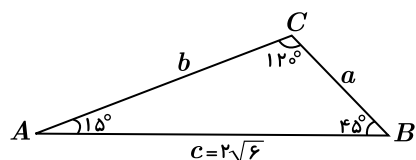
۱۱ بنابر قضیه سینوس‌ها داریم:



$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \\ \sin C &= \sin(120^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{4} = 4$$

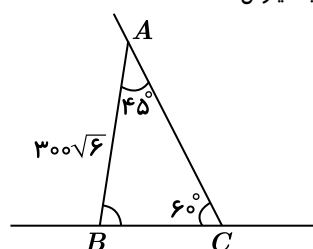
(صفحه ۶۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل و محاسبه زاویه $\widehat{C} = 120^\circ$ (۵، ۵ نمره)

$$\text{قضیه سینوس ها: } \frac{2\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ} \quad (5, 5 \text{ نمره})$$

$$\frac{2\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AC = \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 4 \quad (5, 5 \text{ نمره})$$

۱۲ ابتدا با یک شکل مناسب مسئله را مدل سازی می کنیم. چون مجموع زاویه های داخلی هر مثلث 180° است؛ بنابراین $\widehat{B} = 75^\circ$. بنابر قضیه سینوس ها:

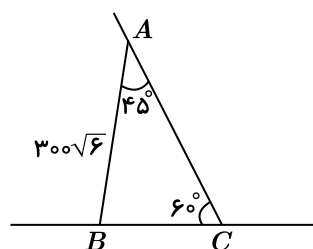
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{300\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$$

$$BC = \frac{300\sqrt{6} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 300\sqrt{4} = 600m$$

(صفحه ۶۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

مدل سازی مسئله با شکل مناسب (۵، ۵ نمره)

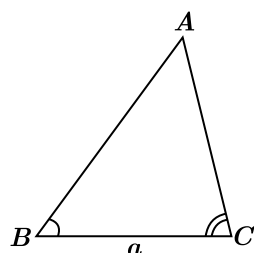


$$\widehat{B} + 60^\circ + 45^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 75^\circ \quad (25, 5 \text{ نمره})$$

$$\frac{BC}{\sin 45^\circ} = \frac{300\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{300\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow BC = 600m \quad (75, 5 \text{ نمره})$$

۱۳ ابتدا به کمک زاویه یاب زاویه های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ را به دست می آوریم؛ بنابراین: $\widehat{A} = 180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C})$

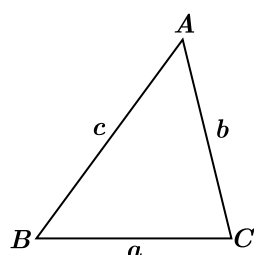
بنابر قضیه سینوس ها:



$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}))} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(\widehat{B} + \widehat{C})}$$

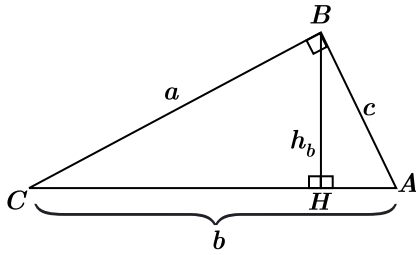
(صفحه ۶۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

با توجه به شکل با معلوم بودن $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ می توان زاویه $\widehat{A}$ را محاسبه کرد. (۵، ۵ نمره)

$$\text{قضیه سینوس ها: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{BC}{\sin(180^\circ - (\widehat{B} + \widehat{C}))} = \frac{AB}{\sin C} \quad (5, 5 \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin C}{\sin(\widehat{B} + \widehat{C})} \quad (5, 5 \text{ نمره})$$



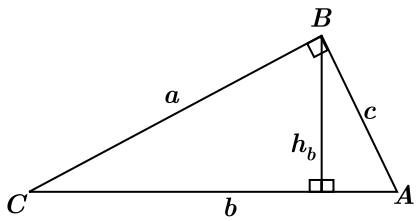
$$S_{ABC} = \frac{h_b \times b}{2} = \frac{a \times c}{2} \Rightarrow h_b \times b = a \times c \Rightarrow h_b = \frac{a \times c}{b} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{h_b^2} = \frac{b^2}{a^2 \times c^2} \xrightarrow{\text{فیتاگورس}} \frac{1}{h_b^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 \times c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}$$

(صفحة ۶۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

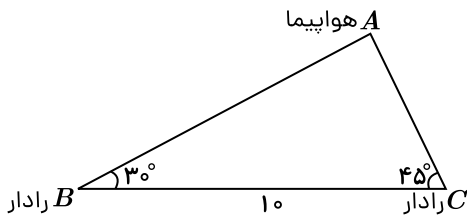
رسم شکل مناسب (۲۵، نمره)



$$S_{ABC} = \frac{a \times c}{2} = \frac{h_b \times b}{2} \Rightarrow h_b = \frac{a \times c}{b} \quad (\text{نمره ۵، ۵})$$

$$\frac{1}{h_b^2} = \frac{b^2}{a^2 \times c^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 \times c^2} = \frac{a^2}{a^2 \times c^2} + \frac{c^2}{a^2 \times c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \quad (\text{نمره ۷۵، ۵})$$

۱۵ ابتدا مسئله را با شکل مدل سازی می کنیم. بنابر قضیه سینوس ها داریم:



$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin \hat{A}}$$

$$\sin \hat{A} = \sin(180^\circ - (30^\circ + 45^\circ)) = \sin(105^\circ) = \sin(30^\circ + 75^\circ) = \sin 30^\circ \times \cos 75^\circ + \sin 75^\circ \times \cos 30^\circ$$

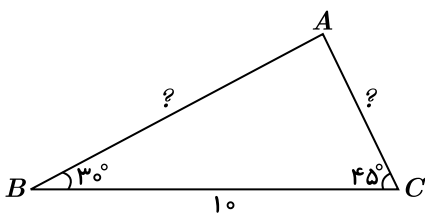
$$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$\Rightarrow AB = \frac{BC \times \sin 45^\circ}{\sin \hat{A}} = \frac{10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}, \quad AC = \frac{BC \times \sin 30^\circ}{\sin \hat{A}} = \frac{10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}}$$

(صفحة ۶۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

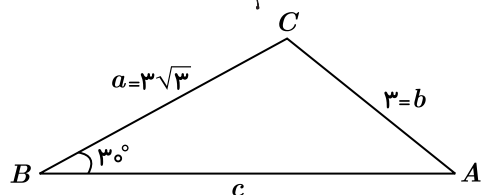
مدل سازی مسئله با شکل (۵، نمره)



$$\sin \hat{A} = \sin(180^\circ - (\hat{B} + \hat{C})) = \sin(105^\circ) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \quad (\text{نمره ۲۵، ۵})$$

$$\text{بنابر قضیه سینوس ها: } \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \begin{cases} AB = \frac{10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \\ AC = \frac{10 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{5\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} \end{cases} \quad (\text{نمره ۷۵، ۵})$$

۱۶ بنابر قضیه سینوس ها:



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin \hat{A}} = \frac{3}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 60^\circ \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ \\ \text{یا} \\ \hat{A} = 120^\circ \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ \end{cases}$$

(صفحة ۶۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{بنابر قضیه سینوس ها} : \frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \Rightarrow \frac{3\sqrt{3}}{\sin \hat{A}} = \frac{3}{\sin 30^\circ} \quad (\text{نمره ۵})$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \hat{A} = 60^\circ \\ \text{یا} \\ \hat{A} = 120^\circ \end{cases} \quad (\text{نمره ۵}) \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 90^\circ \\ \text{یا} \\ \hat{C} = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \end{cases} \quad (\text{نمره ۵})$$

۱۷

 $\frac{1}{h_a^2} (h_a \text{ ارتفاع وارد بر وتر})$

$$\begin{cases} \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} \\ S_{\triangle ABC} = \frac{a \times h_a}{2} = \frac{b \times c}{2} \Rightarrow bc = a \times h_a \Rightarrow b^2 c^2 = a^2 \times h_a^2 \end{cases}$$

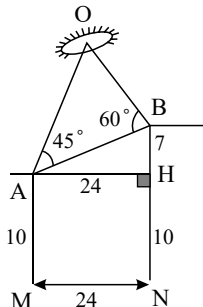
$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{a^2}{a^2 \times h_a^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

۱۸ (قطر دایره محیطی مثلث) $2R$

$$\frac{a + b + c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = \frac{2R \sin \hat{A} + 2R \sin \hat{B} + 2R \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$$

۱۹

از رأس A، عمود AH بر ضلع BN وارد می کنیم.



در مثلث ABH داریم:

$$\hat{H} = 90^\circ \Rightarrow AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB^2 = 24^2 + 7^2 = 625 \Rightarrow AB = 25$$

$$\hat{AOB} = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$$

با نوشتن قضیه سینوس ها در مثلث AOB داریم:

$$\frac{OA}{\sin 60^\circ} = \frac{OB}{\sin 45^\circ} = \frac{AB}{\sin 75^\circ} \Rightarrow \frac{OA}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{OB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{25}{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}} \Rightarrow OA = \frac{125\sqrt{3}}{9}, OB = \frac{125\sqrt{2}}{9}$$

۲۰ الف. در مثلث ABH داریم:

$$\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}, AC = 2R \times \sin \hat{B} \Rightarrow AC = 2R \times \frac{AH}{AB} \Rightarrow AB \times AC = AH \times 2R \Rightarrow bc = h_a \times 2R \quad (1)$$

ب. به همین شکل با رسم ارتفاع های رأس های B و C و با استفاده از نتیجه قسمت (الف) داریم:

$$AB \times BC = h_b \times 2R \Rightarrow ac = h_b \times 2R \quad (2)$$

$$AC \times BC = h_c \times 2R \Rightarrow ab = h_c \times 2R \quad (3)$$

با جمع کردن روابط (۱)، (۲) و (۳) داریم:

$$ab + ac + bc = 2R(h_a + h_b + h_c)$$

۲۱

$$\hat{A} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ, \quad \hat{C} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

قانون سینوس‌ها: $\frac{x+1}{\sin 30^\circ} = \frac{2x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{x+1}{\frac{1}{2}} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2}(x+1) = 2x$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 2x \Rightarrow 2x - \sqrt{2}x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} + 1$$

قانون سینوس‌ها: $\begin{cases} \triangle ABC : AC = 2R_{\triangle ABC} \times \sin 30^\circ = R_{\triangle ABC} \\ \triangle ACD : AC = 2R_{\triangle ACD} \times \sin 60^\circ = \sqrt{3}R_{\triangle ACD} \end{cases}$

$$\Rightarrow R_{\triangle ABC} = \sqrt{3}R_{\triangle ACD} \Rightarrow \frac{R_{\triangle ABC}}{R_{\triangle ACD}} = \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \triangle ABC : BC = 2R_{\triangle ABC} \times \sin \hat{A}_1 \\ \triangle ACD : CD = 2R_{\triangle ACD} \times \sin \hat{A}_r \end{cases} \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{R_{\triangle ABC}}{R_{\triangle ACD}} = \sqrt{3}$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_r \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \sin \hat{A}_r$$

$$\Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow x = 4$$

قانون سینوس‌ها در $\triangle APB$: $\frac{\sqrt{6}}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{\sqrt{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{AP}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow AP = t = 2\sqrt{3}$

$$\hat{C} = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$$

قانون سینوس‌ها در $\triangle APC$: $\frac{AP}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

$$\triangle APC \sim \triangle ABC \Rightarrow y^r = x \times BC$$

$$\Rightarrow y^r = 2\sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{6}) = 8 + 4\sqrt{3} \Rightarrow y = 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

$$\triangle ABC : \frac{z}{\sin 60^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{z}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow z = \sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$$

۲۵ از نقطه دلخواه M روی محیط دایره به A و B وصل می‌کنیم. داریم:

$$\hat{AMB} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ \Rightarrow 2R = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12$$

$$\Rightarrow R = 6 \quad (\text{شعاع دایره محیطی } MAB \text{ و شعاع دایره})$$

حال اگر از نقطه دلخواه N روی محیط دایره به C و D وصل کنیم، داریم:

$$\hat{CND} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \Rightarrow 2R = \frac{x}{\sin 45^\circ}$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow x = 6\sqrt{2}$$

قانون سینوس‌ها: $b = \sqrt{2}a \Rightarrow 2R \times \sin \hat{B} = \sqrt{2} \times 2R \times \sin \hat{A}$

$$\sin \hat{B} = \sqrt{2} \times \sin 30^\circ = \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ \Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 135^\circ) = 15^\circ \end{cases}$$



۲۷

قانون سینوسها: $a = \sqrt{3}b \Rightarrow 2R \sin \hat{A} = \sqrt{3} \times 2R \sin \hat{B}$

$\sin \hat{A} = \sqrt{3} \sin \hat{B}, \hat{A} = 2\hat{B} \Rightarrow \sin 2\hat{B} = \sqrt{3} \sin \hat{B}$

$2 \sin \hat{B} \cdot \cos \hat{B} = \sqrt{3} \sin \hat{B} \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 30^\circ$

$\sin \hat{A} = \sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = 90^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ \end{cases}$

۲۸

قانون سینوسها: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R \Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R$

$\Rightarrow \sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C} = \frac{2P}{2R} = \frac{P}{R}$

۲۹

$b = \sqrt{3}a \Rightarrow$ قانون سینوسها: $2R \sin \hat{B} = \sqrt{3} \times 2R \times \sin \hat{A}$

$\sin \hat{B} = \sqrt{3} \times \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ \text{ یا } 120^\circ$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C} = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ \\ \hat{C} = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ \end{cases}$

$c = 2R \times \sin \hat{C} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2R \times \sin 90^\circ \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2 \\ 4 = 2R \times \sin 30^\circ \Rightarrow R = 4 \end{cases}$

$b = 2R \sin \hat{B} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \sin 60^\circ = 2\sqrt{3} \\ b = 8 \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \end{cases}$

بیشترین مقدار $b = 4\sqrt{3}$ است.

۳۰ طبق قانون سینوسها داریم:

$2R_{\triangle ACD} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 8 \Rightarrow R_{\triangle ACD} = 4$

$\begin{cases} 2R_{\triangle ABC} = \frac{BC}{\sin \hat{A}_1} \\ 2R_{\triangle ACD} = \frac{CD}{\sin \hat{A}_r} = \frac{2BC}{\sin \hat{A}_r} \end{cases}, \hat{A}_1 = \hat{A}_r \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \sin \hat{A}_r$

$\Rightarrow 2R_{\triangle ACD} = 2 \times 2R_{\triangle ABC} \Rightarrow R_{\triangle ACD} = 2R_{\triangle ABC} = 4 \Rightarrow R_{\triangle ABC} = 2$

۳۱ می‌دانیم که:

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}$

$\begin{cases} b = 2R \times \sin \hat{B} \\ c = 2R \times \sin \hat{C} \end{cases} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2R \times \sin \hat{B} \times 2R \times \sin \hat{C} \times \sin \hat{A}$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = 2R^2 \sin \hat{A} \sin \hat{B} \sin \hat{C}$

۳۲

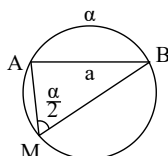
قانون سینوسها: $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

$\Rightarrow \frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \sin \hat{C}} = 2R, \frac{a+b+c}{\sin \hat{A} + \sin \hat{B} + \cos \hat{C}} = 2R$

$\Rightarrow \sin \hat{C} = \cos \hat{C} \Rightarrow \tan \hat{C} = 1 \Rightarrow \hat{C} = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$

۳۳

مطابق شکل داریم:



$$\hat{M} = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \text{قضیه سینوس ها در } \triangle MAB: 2R = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

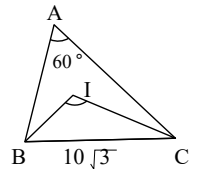
(شعاع دایره محیطی $\triangle MAB$)

این شعاع، شعاع دایره نیز می باشد.

۳۴ در شکل مقابل، I محل هم‌رسی نیمسازهاست. داریم:

$$\hat{I} = 90^\circ + \frac{60^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$2R_{\triangle BIC} = \frac{10\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} \Rightarrow 2R_{\triangle BIC} = \frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow R_{\triangle BIC} = 10$$



$$\hat{B} - \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} = 90^\circ + \hat{C} \Rightarrow \sin \hat{B} = \sin(90^\circ + \hat{C}) = \cos \hat{C}$$

$$\text{طبق قضیه سینوس ها: } b = 2R \times \sin \hat{B} = 2R \times \cos \hat{C}$$

$$\text{می دانیم: } \sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$\text{طبق قضیه سینوس ها: } \frac{R_{\triangle APB}}{R_{\triangle APC}} = \frac{\frac{AB}{2 \sin \alpha}}{\frac{AC}{2 \sin \alpha}} = \frac{AB}{AC}$$

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - 2bc \cos A > b^2 + c^2 \Leftrightarrow -2bc \cos A > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow A > 90^\circ$$

۳۷ روش اول:

روش دوم:

فرض کنیم R شعاع دایره محیطی مثلث باشد. در نتیجه:

$$a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow 4R^2 \sin^2 A > 4R^2 \sin^2 B + 4R^2 \sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A > \sin^2 B + \sin^2 C \Leftrightarrow \sin^2(B+C) > \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B \cos^2 C + \cos^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C > \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 B (\cos^2 C - 1) + \sin^2 C (\cos^2 B - 1) + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C > 0$$

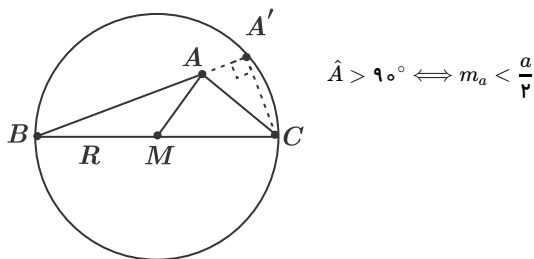
$$\Leftrightarrow \sin^2 B (-\sin^2 C) + \sin^2 C (-\sin^2 B) + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos B \cos C > \sin B \sin C \Leftrightarrow \cos B \cos C - \sin B \sin C > 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(B+C) > 0 \Leftrightarrow B+C < 90^\circ \Leftrightarrow A > 90^\circ$$

روش سوم:

با توجه به شکل اگر $BC = a$, $AM = m_a$ ابتدا ثابت می کنیم:



$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow m_a < \frac{a}{2}$$

دایره‌ای به قطر BC و به مرکز M وسط ضلع BC می‌زنیم. با توجه به شکل و ویژگی‌های زاویه خارجی داریم:

$$2m_a < a \Leftrightarrow m_a < R \Leftrightarrow (A \text{ نقطه درون دایره باشد}) \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

بنابراین:

$$\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow m_a < \frac{a}{2} \Leftrightarrow m_a^2 < \frac{a^2}{4} \Leftrightarrow 2m_a^2 < \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} < a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 < a^2$$

۳۸

الف

فرض کنیم $a = 6$, $b = 10$, $c = 14$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \Rightarrow 14^2 = 6^2 + 10^2 - 2(6)(10) \cos C \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^\circ$$



ب

$$P = \frac{6 + 10 + 14}{2} = 15$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = \sqrt{15 \times 9 \times 5 \times 1} = 15\sqrt{3}, \quad S = \frac{1}{2} \times 6 \times h_a = 15\sqrt{3} \Rightarrow h_a = 5\sqrt{3}$$

۳۹

$$\cos A = \frac{AH}{c} \rightarrow AH = c \cos A$$

$$\sin A = \frac{BH}{c} \rightarrow BH = c \sin A$$

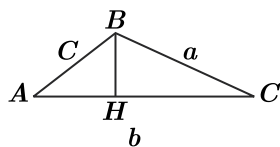
$$CH = b - AH = b - c \cos A$$

$$\Delta HBC : a^2 = BH^2 + CH^2 = (c \sin A)^2 + (b - c \cos A)^2$$

$$a^2 = c^2 \sin^2 A + b^2 + c^2 \cos^2 A - 2bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 (\sin^2 A + \cos^2 A) - 2bc \cos A \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

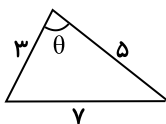
روش دوم:



$$\Delta HBC : a^2 = BH^2 + CH^2 = (c^2 - AH^2) + (b - AH)^2$$

$$\rightarrow a^2 = c^2 - AH^2 + b^2 + AH^2 - 2bAH$$

$$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bAH \xrightarrow{AH=c \cos A} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$



روش اول - (به کمک کسینوس ها) داریم:

$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 5 \cos \theta \rightarrow 49 = 25 + 9 - 30 \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{-1}{2} \rightarrow \theta = 120^\circ$$

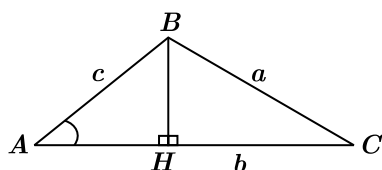
روش دوم - (به کمک دستور هرون) داریم:

$$2P = 15 \rightarrow P = \frac{15}{2} : S = \sqrt{d \frac{15}{2} \times \frac{9}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{1}{2}} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} (3)(5) \sin \theta = \frac{15 \sin \theta}{2} \rightarrow \frac{15 \sin \theta}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta = 120^\circ$$

چون $7^2 < 5^2 + 3^2$ پس $180^\circ > \theta > 90^\circ$ لذا: $\theta = 120^\circ$.

۴۱ ارتفاع BH را رسم می‌کنیم.



$$\cos \hat{A} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = c \times \cos \hat{A}$$

$$CH = b - AH = b - c \times \cos \hat{A}$$

$$\sin \hat{A} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = c \times \sin \hat{A}$$

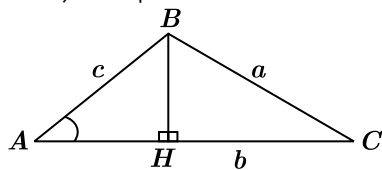
$$\text{بنابر فیثاغورس: } BC^2 = BH^2 + CH^2 \Rightarrow a^2 = c^2 \sin^2 \hat{A} + (b - c \times \cos \hat{A})^2$$

$$\Rightarrow a^2 = c^2 (\sin^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{A}) + b^2 - 2bc \cos \hat{A} = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

(صفحه ۶۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

رسم شکل (۵/نمره)



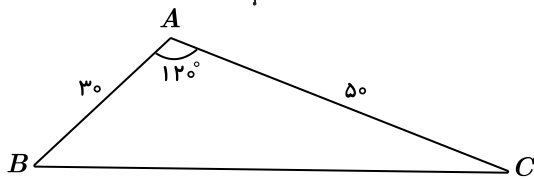
$$AH = c \times \cos \hat{A}, \quad CH = b - c \cos \hat{A} \quad (۵/نمره)$$

$$BH = c \times \sin \hat{A}, \quad BH^2 + CH^2 = BC^2 \quad (۵/نمره)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \quad (۵/نمره) \quad \text{جاگذاری و ساده کردن}$$

۴۲ فرض کنید دو قایق از نقطه A شروع به حرکت کنند. با توجه به سرعت دو قایق و زاویه بین آنها بعد از یک ساعت، داریم:

[سرعت × زمان = جابه‌جایی قایق]



$$AB = 30 \times 1 = 30 \text{ km}$$

$$AC = 50 \times 1 = 50 \text{ km}$$

بنابر قضیه کسینوس‌ها:

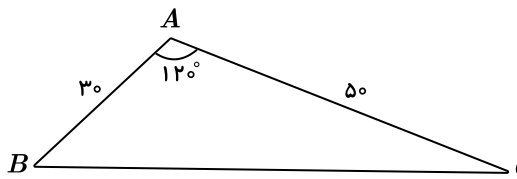
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos 12^\circ$$

$$\Rightarrow BC^2 = 900 + 2500 - 2 \times 30 \times 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4900 \Rightarrow BC = 70 \text{ km}$$

(صفحه ۶۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

مدلسازی با شکل (نمره ۵)



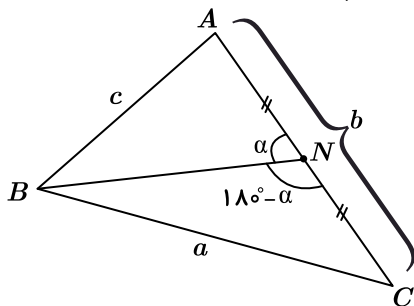
$$AB = 30 \text{ km}$$

$$AC = 50 \text{ km} \quad (\text{نمره ۵})$$

$$\text{قضیه کسینوس‌ها: } BC^2 = 30^2 + 50^2 - 2 \times 30 \times 50 \times \cos 12^\circ$$

$$\Rightarrow BC = 70 \text{ km} \quad (\text{نمره ۵})$$

۴۳ روش اول در دو مثلث $\triangle ABN$ و $\triangle BNC$ قضیه کسینوس‌ها را می‌نویسیم و از رابطه $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ کمک می‌گیریم:

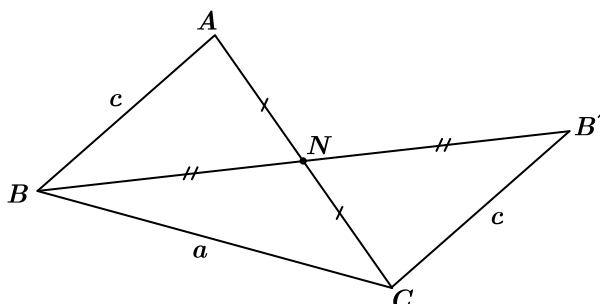


$$c^2 = AN^2 + BN^2 - 2AN \times BN \times \cos \alpha$$

$$a^2 = CN^2 + BN^2 - 2BN \times CN \times \underbrace{\cos(180^\circ - \alpha)}_{-\cos \alpha}$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 = 2BN^2 + 2AN^2 \xrightarrow{AN = \frac{b}{2}} a^2 + c^2 = 2BN^2 + 2 \times \frac{b^2}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 + c^2 = 2BN^2 + \frac{b^2}{2}$$



روش دوم BN را به اندازه خود امتداد می‌دهیم تا به نقطه B' برسیم. از نقطه حاصل به C وصل می‌کنیم. به سادگی می‌توان مشاهده کرد که مثلث‌های ABN و $CB'N$ (با حالت دو ضلع و زاویه بین) هم‌نهشت‌اند؛ بنابراین $AB = B'C = c$. ضمناً $AB'CB$ نیز متوازی‌الاضلاع بوده و اگر $\widehat{ABC} = \beta$ آنگاه $\widehat{BCB'} = 180^\circ - \beta$ داریم:

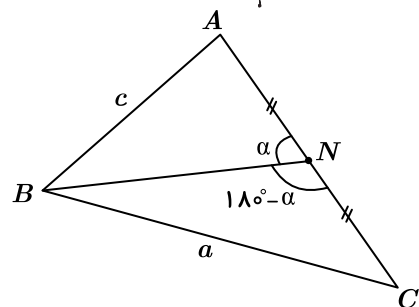
$$\begin{cases} a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2 \\ a^2 + c^2 - 2ac \cos(180^\circ - \beta) = (2BN)^2 \end{cases} \xrightarrow{\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta} \begin{cases} a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2 \\ a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta = 4BN^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(a^2 + c^2) = b^2 + 4BN^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2BN^2$$

(صفحه ۶۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

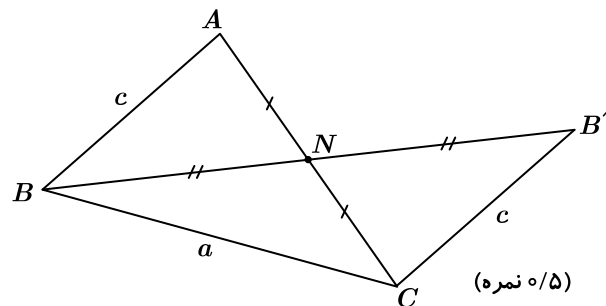
روش اول



$$\text{قضیه کسینوسها: } \begin{cases} c^2 = AN^2 + BN^2 - 2AN \times BN \times \cos \alpha \text{ (نمره ۵)} \\ a^2 = CN^2 + BN^2 - 2CN \times BN \times \cos(180^\circ - \alpha) \end{cases}$$

(نمره ۵) $AN = CN$ و $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ و جمع طرفین دو معادله

$$a^2 + c^2 = 2BN^2 + 2AN^2 = 2BN^2 + \frac{b^2}{2} \text{ (نمره ۵)}$$



روش دوم) BN را به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به نقطه B' برسیم. از نقطه حاصل به C وصل

می کنیم. به سادگی می توان مشاهده کرد که مثلث های ABN و $CB'N$ (با حالت دو ضلع و زاویه بین)

هم نهشت اند؛ بنابراین $AB = B'C = c$ ضمناً $AB'CB$ نیز متوازی الاضلاع بوده و اگر $\widehat{ABC} = \beta$

آنگاه $\widehat{BCB'} = 180^\circ - \beta$ (نمره ۵). با نوشتن قضیه کسینوس ها برای مثلث های ABC و BCB'

داریم:

$$\begin{cases} a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2 \\ a^2 + c^2 - 2ac \cos(180^\circ - \beta) = (2BN)^2 \end{cases} \xrightarrow{\cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta} \begin{cases} a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta = b^2 \\ a^2 + c^2 + 2ac \cos \beta = 4BN^2 \end{cases} \text{ (نمره ۲۵)}$$

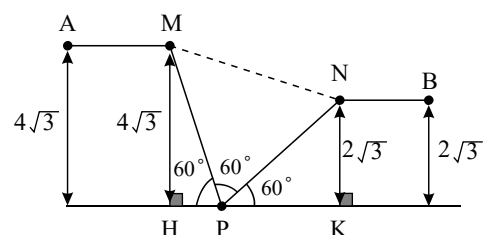
$$\Rightarrow 2(a^2 + c^2) = b^2 + 4BN^2 \Rightarrow a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2BN^2 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\begin{cases} \triangle PNK : \hat{P} = 60^\circ \\ \triangle PMH : \hat{P} = 60^\circ \end{cases}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{KN}{PN} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{PN} \Rightarrow PN = 4$$

$$\sin 60^\circ = \frac{MH}{PM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{PM} \Rightarrow PM = 8$$

۴۴ مطابق شکل در مثلث های PMH و PNK داریم:



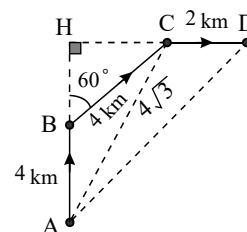
با نوشتن قضیه کسینوس ها در مثلث PMN داریم:

$$MN^2 = PM^2 + PN^2 - 2PM \times PN \times \cos 60^\circ \Rightarrow MN^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 48 \Rightarrow MN = 4\sqrt{3}$$

$$\hat{ABC} = 120^\circ$$

$$AB = BC = 4 \text{ km} \Rightarrow \hat{BAC} = \hat{BCA} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

۴۵ در مثلث ABC داریم:



در این مثلث با نوشتن قضیه کسینوس ها، طول AC را حساب می کنیم:

$$AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos 120^\circ \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

زاویه $\hat{ACD}$ زاویه خارجی برای مثلث قائم الزاویه AHC است، پس:

$$\hat{ACD} = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

با نوشتن قضیه کسینوس ها در مثلث ACD داریم:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \times CD \times \cos 120^\circ$$

$$AD^2 = (4\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AD^2 = 52 + 8\sqrt{3} \Rightarrow AD = \sqrt{52 + 8\sqrt{3}} \sim 8.1 \text{ km}$$

۴۶ با نوشتن قضیه کسینوس‌ها داریم:

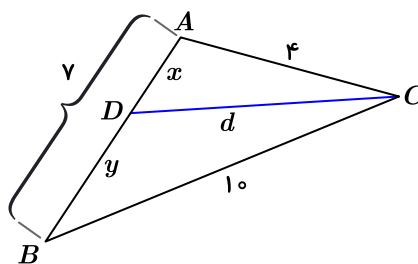
$$\triangle ABC : x^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos 60^\circ \Rightarrow x^2 = 30^2 + 40^2 - 2 \times 30 \times 40 \times \cos 60^\circ \Rightarrow x^2 = 2500 - 1200 = 1300 \Rightarrow x = 10\sqrt{13}$$

با نوشتن قضیه سینوس‌ها داریم:

$$\frac{30}{\sin \theta} = \frac{x}{\sin 60^\circ} = \frac{10\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{30 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{10\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

۴۷ گزینه ۲ درست است. (یعنی $\frac{\sqrt{5}}{2}$)

۴۸ روش اول:



$$x = \frac{4 \times 7}{4 + 10} = 2, y = \frac{10 \times 7}{4 + 10} = 5$$

$$4^2 \times 5 + 10^2 \times 2 = d^2 \times 7 + 2 \times 5 \times 7$$

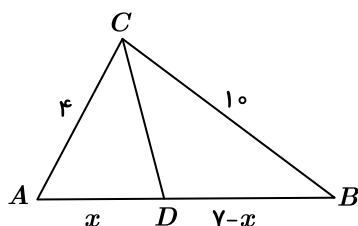
$$80 + 200 = 7d^2 + 70 \Rightarrow d^2 = 30 \Rightarrow d = \sqrt{30}$$

و طبق رابطه استوارت داریم:

روش دوم:

$$CD \text{ نیمساز است؛ پس: } \frac{x}{4} = \frac{y}{10} \text{ در نتیجه: } x = 2$$

یعنی: $AD = 2, BD = 5$

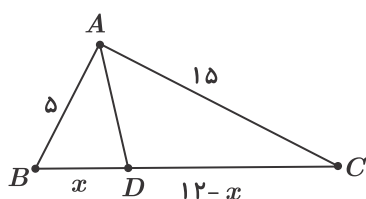


$$CD^2 = AC \times BC - AD \times BD \Rightarrow CD^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow CD = \sqrt{30}$$

۴۹ روش اول:

$$DC = 12 - x \text{ داریم } BD = x \text{ با فرض}$$

در نتیجه:



$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{5}{x} = \frac{15}{12-x} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow BD = 3, DC = 9$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 5 \times 15 - 3 \times 9 = 48 \Rightarrow AD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

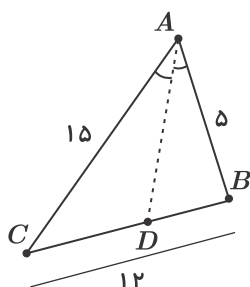
توجه: برای به دست آوردن BD, DC روش‌های زیر قابل قبول است.

$$BD = \frac{12 \times 5}{15 + 5} = 3 \Rightarrow CD = 9$$

یا

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC+AB} = \frac{BD}{DC+BD} \Rightarrow \frac{5}{20} = \frac{BD}{12} \Rightarrow BD = 3, DC = 9$$

روش دوم:



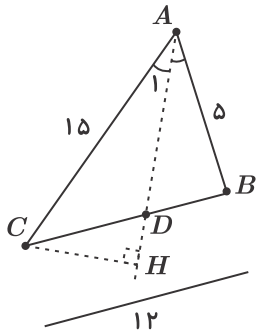
$$12^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \times 15 \times 5 \times \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{53}{75}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1 + \cos A}{2} = \frac{1 + \frac{53}{75}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{8}{5\sqrt{3}}$$

$$AD = d_a = \frac{2bc \cos\left(\frac{A}{2}\right)}{b+c} = \frac{2 \times 5 \times 15 \times \frac{8}{5\sqrt{3}}}{15+5} = 4\sqrt{3} \quad (1)$$



روش سوم:



$$12^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \times 15 \times 5 \times \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{53}{75}$$

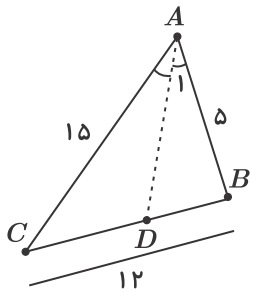
$$\sin^2 \hat{A}_1 = \frac{1 - \cos \hat{A}}{2} = \frac{11}{75} \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \frac{\sqrt{33}}{15} \Rightarrow CH = \sqrt{33}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = 8\sqrt{11}$$

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{5}{15} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADC}} = \frac{20}{15} \Rightarrow S_{ADC} = 6\sqrt{11}$$

$$S_{ADC} = 6\sqrt{11} = \frac{1}{2}AD \times CH \Rightarrow AD = 4\sqrt{3}$$

روش چهارم:



$$12^2 = 15^2 + 5^2 - 2 \times 15 \times 5 \times \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{53}{75}$$

$$\sin^2 \hat{A}_1 = \frac{1 - \cos \hat{A}}{2} = \frac{11}{75} \Rightarrow \sin \hat{A}_1 = \frac{\sqrt{33}}{15}$$

$$\cos B = \frac{20 + 144 - 225}{120} = -\frac{7}{15} \Rightarrow \sin B = \frac{4\sqrt{11}}{15}$$

$$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \hat{A}_1} \Rightarrow \frac{AD}{\frac{4\sqrt{11}}{15}} = \frac{AD}{\frac{\sqrt{33}}{15}} \Rightarrow AD = 4\sqrt{3}$$

روش پنجم:

در مثلث ABC، اگر $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ و با فرض اینکه S مساحت و $\hat{P}$ محیط مثلث باشد، داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = bc - \frac{ac}{b+c} \times \frac{ab}{b+c} = \frac{bc((b+c)^2 - a^2)}{(b+c)^2}$$

$$= \frac{bc(2P - 2a)(2P)}{(b+c)^2} = \frac{4bcP(P-a)}{(b+c)^2} \Rightarrow AD = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcP(P-a)}$$

$$AD = \frac{2}{b+c} \sqrt{bcP(P-a)} = \frac{2}{20} \sqrt{16 \times 5 \times 15 \times 4} = 4\sqrt{3}$$

۵۰ الف) درست؛ چون در هر دایره شعاع در نقطه تماس بر خط مماس عمود است و از هر نقطه یک و تنها یک خط عمود بر آن می‌توان رسم کرد؛ بنابراین خط مماس منحصربه‌فرد است. (صفحه ۱۱ کتاب درسی)

ب) نادرست؛ چهارضلعی محاطی است اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. (صفحه ۲۴ و ۲۵ کتاب درسی)

ج) درست؛ اگر در شکل اصلی حرکت از A به B در جهت عقربه‌های ساعت باشد، در شکل تصویر حرکت از A' به B' نیز در همین جهت است. (صفحه ۴۳ و ۴۰ کتاب درسی)

د) درست؛ بنابر قضیه نیمسازها در هر مثلث نیمساز هر زاویه، ضلع مقابل را به نسبت اندازه‌های دو ضلع مجاور تقسیم می‌کند. (صفحه ۶۸ کتاب درسی)

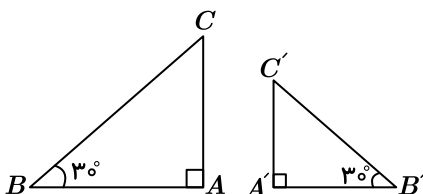
راهنمای تصحیح:

الف) درست ب) نادرست ج) درست د) درست

(هر مورد ۲/۵ نمره)

۵۱ الف) درست؛ تبدیل انتقال شیب را حفظ می‌کند؛ بنابراین خط و تصویر آن تحت انتقال با هم موازی‌اند.

ب) نادرست؛ لزومی ندارد دو شکل متشابه متجانس هم باشند؛ مانند شکل زیر که مرکز تجانس ندارد.



ج) درست؛ بنابر قضیه نیمسازها چون نیمساز ضلع مقابل را با نسبت دو ضلع مجاور قطع می‌کند، به کمک ویژگی ترکیب در صورت یا مخرج، قطعات ایجادشده قابل محاسبه هستند.

د) درست؛ بنابر قضیه کسینوس‌ها وقتی $a^2 < b^2 + c^2$ باشد، یعنی $\cos \hat{A}$ مثبت بوده و $\hat{A}$ حتماً حاده است:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

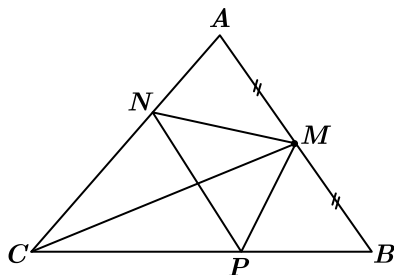
(صفحه ۴۰ تا ۷۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست ب) نادرست ج) درست د) درست

(هر مورد ۲۵، ۲۰ نمره)

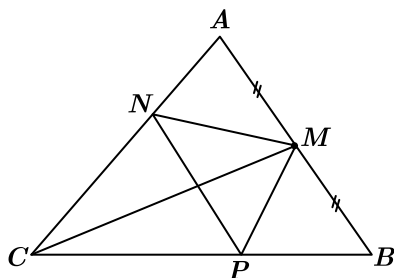
۵۲ بنابر قضیه نیمسازها:



$$\left. \begin{array}{l} MN \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{CN}{AN} = \frac{CM}{AM} \\ MP \text{ نیمساز} \Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{BM} \end{array} \right\} \xrightarrow{AM=BM} \frac{CN}{AN} = \frac{CP}{PB} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} NP \parallel AB$$

(صفحه ۷۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$\begin{aligned} MN \text{ نیمساز} &\xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{CN}{AN} = \frac{CM}{AM} \quad (\text{نمره ۵، ۵}) \\ MP \text{ نیمساز} &\Rightarrow \frac{CP}{PB} = \frac{CM}{BM} \quad (\text{نمره ۵، ۵}) \\ \xrightarrow{AM=BM} \frac{CN}{AN} = \frac{CP}{PB} &\xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} NP \parallel AB \quad (\text{نمره ۵، ۵}) \end{aligned}$$

۵۳

$$\triangle ABD : \hat{A}_1 = \hat{A}_r \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{AB}{AD} = \frac{BM}{DM}$$

$$\triangle BCD : \hat{C}_1 = \hat{C}_r \xrightarrow{\text{قضیه نیمسازها}} \frac{BC}{CD} = \frac{BM}{DM}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

$$AD \text{ نیمساز} \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AC+AB} = \frac{12}{12+16} = \frac{3}{7}$$

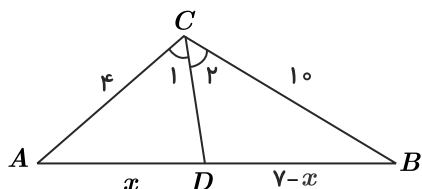
$$7AB = 3AC + 3AB \Rightarrow 4AB = 3AC \Rightarrow AB = \frac{3}{4}AC$$

$$\triangle ABC \text{ محیط} = AB + AC + BC = \frac{3}{4}AC + AC + 28 = 70 \Rightarrow \frac{7}{4}AC = 70 - 28 = 42 \Rightarrow AC = 24 \text{ cm} \Rightarrow AB = \frac{3}{4} \times 24 = 18 \text{ cm}$$

طبق قضیه نیمسازها داریم:

۵۴

روش اول: ۵۵



$$\begin{aligned} \frac{4}{10} &= \frac{x}{7-x} \rightarrow 28 - 4x = 10x \rightarrow x = 2 = AD \rightarrow BD = 5 \\ DC^2 &= 4 \times 10 - 5 \times 2 = 30 \rightarrow DC = \sqrt{30} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$AD = \frac{4 \times 7}{4 + 10} = 2 \quad BD = \frac{10 \times 7}{4 + 10} = 5$$

$$DC^2 = 4 \times 10 - 5 \times 2 = 30 \Rightarrow DC = \sqrt{30}$$

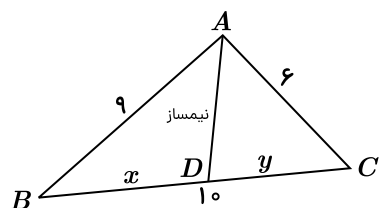
روش سوم:

$$\frac{BC}{AC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{BC}{AC+BC} = \frac{BD}{AD+BD} \Rightarrow \frac{10}{14} = \frac{BD}{7} \Rightarrow BD = 5, AD = 2$$

$$DC^2 = 4 \times 10 - 5 \times 2 = 30 \Rightarrow DC = \sqrt{30}$$



۵۶ فرض کنیم نیمساز زاویه $\hat{A}$ ، ضلع BC را در D قطع کند، بنابر قضیه نیمسازها داریم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

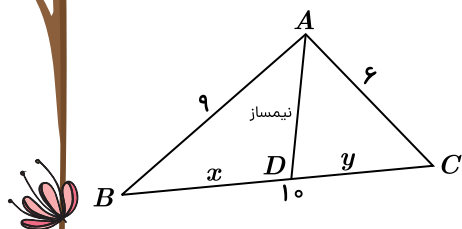
$$\frac{x}{y} = \frac{9}{6} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{9}{15} \Rightarrow x = 6, y = 4$$

$$AD^2 = 9 \times 6 - 4 \times 6 = 54 - 24 = 30 \Rightarrow AD = \sqrt{30}$$

(صفحه ۷۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

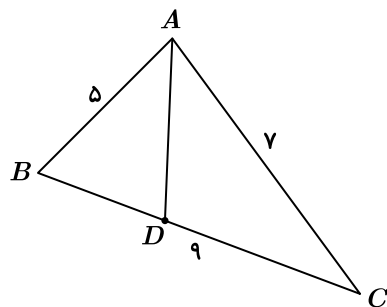
رسم شکل (نمره ۵)



$$\frac{x}{y} = \frac{9}{6} \Rightarrow x = 6, y = 4 \text{ (نمره ۵)}$$

$$AD^2 = 9 \times 6 - 6 \times 4 = 30 \Rightarrow AD = \sqrt{30} \text{ (نمره ۵)}$$

۵۷ بنابر قضیه نیمسازها داریم:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \text{ ترکیب در مخرج}$$

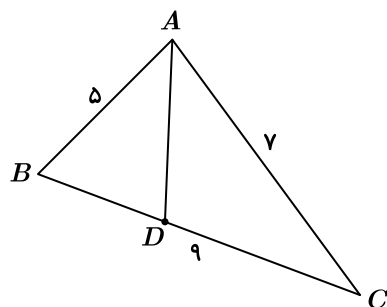
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BD}{BD+DC} = \frac{5}{12} \Rightarrow BD = \frac{5 \times 9}{12} = \frac{15}{4} \\ \frac{BD+DC}{DC} = \frac{12}{7} \Rightarrow DC = \frac{9 \times 7}{12} = \frac{21}{4} \end{array} \right.$$

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC = 35 - \frac{315}{16} = \frac{245}{16}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{\sqrt{245}}{4}$$

راهنمای تصحیح:

دو فرمول قضیه نیمسازها (نمره ۵)



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{7} \Rightarrow BD = \frac{15}{4}, DC = \frac{21}{4} \text{ (نمره ۵)} \\ AD^2 = AB \times AC - BD \times DC \end{array} \right.$$

$$AD^2 = 35 - \frac{315}{16} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{245}}{4} \text{ (نمره ۵)}$$

۵۸

الف

با نوشتن قضیه نیمسازها داریم:

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = \frac{3}{4}CD \quad (1)$$

$$BC = 7 = BD + CD \quad (2)$$

$$7 = \frac{3}{4}CD + CD \Rightarrow \frac{7}{4}CD = 7 \Rightarrow CD = 4 \Rightarrow BD = 3$$

از روابط (۱) و (۲) داریم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD \Rightarrow AD^2 = 6 \times 8 - 3 \times 4 \Rightarrow AD = 6$$

برای محاسبه طول نیمساز AD داریم:

ب

با نوشتن قضیه نیمسازها در مثلث ADC داریم:

پ

$$\begin{cases} \frac{DE}{CE} = \frac{AD}{AC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \Rightarrow DE = \frac{3}{4}CE \\ CD = 4 = DE + CE \end{cases}$$

$$4 = \frac{3}{4}CE + CE = \frac{7}{4}CE \Rightarrow CE = \frac{16}{7}$$

$$DE = \frac{3}{4} \times \frac{16}{7} = \frac{12}{7}$$

$$AE^2 = AD \times AC - DE \times CE = 6 \times 8 - \frac{12}{7} \times \frac{16}{7} = 48 - \frac{192}{49} = \frac{2160}{49}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{\sqrt{2160}}{7}$$

۵۹ پاسخ: اگر D پای نیمساز داخلی زاویه A باشد، داریم:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{BD}{\underbrace{BC}_{7\sqrt{2}}} = \frac{3}{8} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}\sqrt{2}$$

$$CD = 7\sqrt{2} - \frac{21}{8}\sqrt{2} = \frac{35}{8}\sqrt{2}$$

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot CD = 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} - \frac{21}{8}\sqrt{2} \times \frac{35}{8}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AD^2 = 30 - \frac{735}{32} = \frac{225}{32} \Rightarrow AD = \frac{15}{4\sqrt{2}} = \frac{15\sqrt{2}}{8}$$

$$a + a + a = 2P \rightarrow P = \frac{3}{2}a$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{2}a(\frac{3}{2}a - a)(\frac{3}{2}a - a)(\frac{3}{2}a - a)} = \sqrt{\frac{3}{2}a(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}a)(\frac{1}{2}a)} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$2P_{\triangle ABC} = 18 \Rightarrow P_{\triangle ABC} = 9$$

$$\frac{1}{2}(\frac{5}{2}) + \frac{1}{2}(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2}(x) = S_{\triangle ABC} \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(x) = \sqrt{9 \times 4 \times 3 \times 2}$$

$$14 + \frac{1}{2}(x) = 6\sqrt{6} \Rightarrow 28 + x = 12\sqrt{6} \Rightarrow x = \frac{12\sqrt{6} - 28}{1}$$

۶۲ الف) گزینه ۴: درحالتی که دو دایره مماس خارج باشند، طول مماس مشترک خارجی برابر است با:

$$TT' = 2\sqrt{RR'} = 2\sqrt{16} = 8$$

(صفحه ۲۲ کتاب درسی)

ب) گزینه ۳: چون در دوران زاویه ثابت است؛ بنابراین در دوران 60° خط و تصویر هم همان زاویه دوران یعنی 60° است. (صفحه ۴۱ کتاب درسی)

ج) گزینه ۱: بنابر قضیه هرون اگر p نصف محیط باشد، آنگاه:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(4)(3)(2)} = 6\sqrt{6}$$

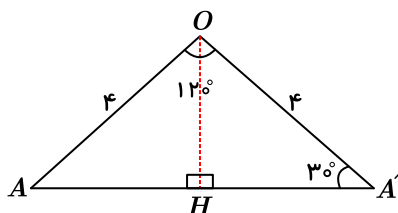
(صفحه ۷۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۴ ب) گزینه ۳ ج) گزینه ۱

(هر کدام ۵ نمره)

۶۳ الف) گزینه ۳: می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه 30° نصف وتر است؛ بنابراین مطابق شکل $OH = 2$.



ب) گزینه ۴: با توجه به تعریف تجانس، وقتی نسبت تجانس ۱- باشد، مرکز تجانس وسط نقطه و تصویر قرار می‌گیرد؛ بنابراین:

$$O = \frac{M+N}{2} = (2, 1)$$



ج) گزینه ۱: نصف محیط برابر $p = 10$ است؛ پس بنابر قضیه هرون داریم:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{10(5)(4)(1)} = 10\sqrt{2}$$

(صفحه ۴۰ تا ۷۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۳، ب) گزینه ۴، ج) گزینه ۱،

هر مورد ۵ نمره)

۶۴

$$\text{نصف محیط } p = \frac{15 + 21 + 18}{2} = 27$$

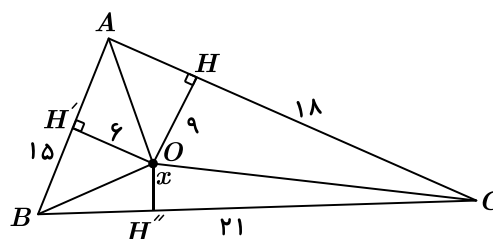
بنابر قضیه هرون:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{27 \times 12 \times 9 \times 6} = 54\sqrt{6}$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC}$$

$$\Rightarrow 54\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times 6 \times 15 + \frac{1}{2} \times 9 \times 18 + \frac{1}{2} x \times 21$$

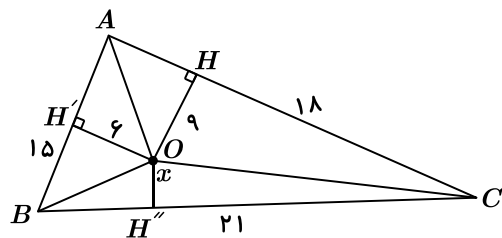
$$\Rightarrow \frac{21}{2} x = 54\sqrt{6} - 45 - 81 \Rightarrow x = \frac{2}{21} (54\sqrt{6} - 126)$$



(صفحه ۷۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

مدلسازی مسئله با شکل (۵ نمره)



$$\text{نصف محیط } p = 27 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \sqrt{27 \times 12 \times 9 \times 6} = 54\sqrt{6} \quad (\text{نمره ۵})$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OBC} \Rightarrow x = \frac{2}{21} (54\sqrt{6} - 126) \quad (\text{نمره ۵})$$

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}, \quad P = \frac{a+b+c}{2}$$

$$S_{\triangle AOB} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{1}{2} \times OL \times 5 + \frac{1}{2} \times OK \times 6 + \frac{1}{2} \times OH \times 9 = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{5}{2} OL + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 6 + \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times 9 = S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{5}{2} OL + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = S_{\triangle ABC} \quad (1)$$

$$\text{دستور هرون: } P = \frac{5+6+9}{2} = 10 \Rightarrow S = \sqrt{10 \times 5 \times 1 \times 4} = 10\sqrt{2}$$

$$(1): \frac{5}{2} OL + 6\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow \frac{5}{2} OL = 4\sqrt{2} \Rightarrow OL = \frac{8\sqrt{2}}{5}$$

برای محاسبه مساحت مثلث ABC داریم:

الف) چون تبدیل انتقال هم ایزومتري است و هم شیب را حفظ می‌کند؛ بنابراین $MN \parallel M'N'$ بوده و چهارضلعی‌ای که دو ضلع مساوی و موازی داشته باشد، متوازی‌الاضلاع است.

ب) در هر مرحله زاویه دوران به صورت ثابت 30° است؛ بنابراین بعد از چهار مرحله نقطه آخر دوران یافته نقطه A به مرکز O با زاویه $120^\circ = 3 \times 30^\circ$ است.

(ج) بنابر قضیه کسینوسها $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$ ؛ بنابراین باید $\cos \hat{A} = \frac{-1}{3}$ باشد، یعنی $\hat{A} = 120^\circ$ بزرگترین زاویه خواهد بود.

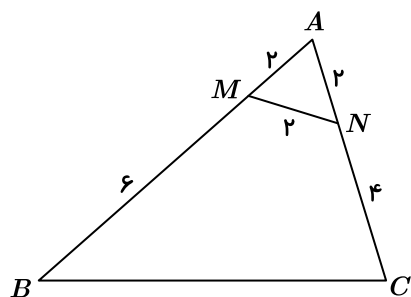
(د) بنابر قضیه‌ای مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها.

(صفحه ۴۰ تا ۷۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) متوازی‌الاضلاع (ب) 120° (ج) 120° (د) سینوس
(هر مورد ۲٫۵ نمره)

۶۹ اولاً مثلث $\triangle AMN$ متساوی‌الاضلاع است؛ بنابراین:



$$S_{AMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2)^2 = \sqrt{3}, \hat{A} = 60^\circ$$

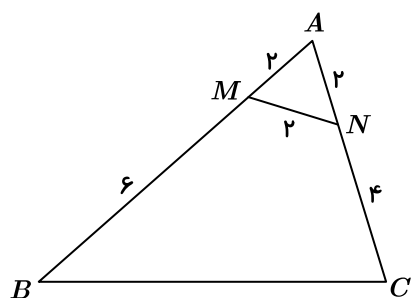
ثانیاً: در مثلث $\triangle ABC$ داریم:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$S_{MNCB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = 6\sqrt{3} - \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

(صفحه ۷۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$S_{\triangle AMN} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times AM^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3} \text{ (نمره ۵)}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} = 6\sqrt{3} \text{ (نمره ۵)}$$

$$S_{MNCB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AMN} = 5\sqrt{3} \text{ (نمره ۵)}$$

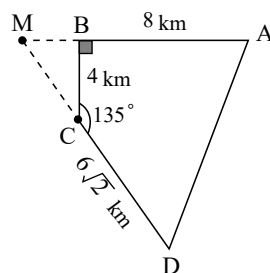
$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$\hat{B} = 90^\circ, \hat{C} = \hat{M} = 45^\circ \Rightarrow BM = BC = 4 \Rightarrow CM = 4\sqrt{2}$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle AMD} - S_{\triangle BMC}$$

$$S_{\triangle AMD} = \frac{1}{2} \times AM \times MD \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 12 \times 10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 60$$

۷۱ در مثلث MBC داریم:



برای محاسبه مساحت $ABCD$ ، از تفاضل مساحت مثلث‌های AMD و BMC استفاده می‌کنیم:

مساحت مثلث AMD را با استفاده از رابطه سینوسی محاسبه مساحت مثلث به دست می‌آوریم:



$$S_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8 \Rightarrow S_{ABCD} = 60 - 8 = 52 \text{ km}^2$$

$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \rightarrow P = 21$$

$$s = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = 84$$

$$h_a = \frac{2s}{a} = \frac{2 \times 84}{13} \approx 12.9$$

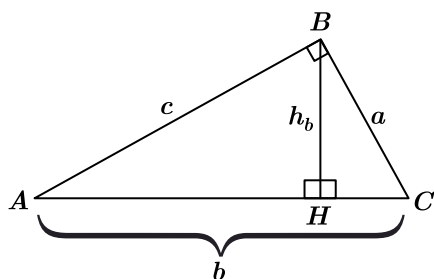
$$h_b = \frac{2s}{b} = \frac{2 \times 84}{14} = 12$$

$$h_c = \frac{2s}{c} = \frac{2 \times 84}{15} = 11.2$$

۷۲

اکنون بنابر دستور محاسبه مساحت مثلث داریم:

۷۳



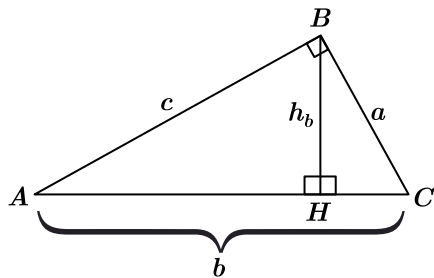
$$S_{ABC} = \frac{h_b \times b}{2} = \frac{a \times c}{2} \Rightarrow$$

$$h_b = \frac{a \times c}{b} \Rightarrow h_b^2 = \frac{a^2 c^2}{b^2} \xrightarrow{\text{فیتاغورس}} h_b^2 = \frac{a^2 \times c^2}{a^2 + c^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{h_b^2} = \frac{a^2 + c^2}{a^2 \times c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}$$

راهنمای تصحیح:

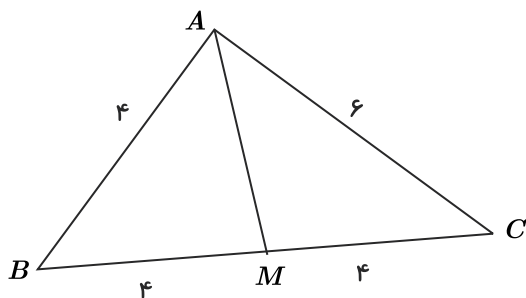
رسم شکل (نمره ۵)



$$S = \frac{h_b \times b}{2} = \frac{a \times c}{2} \Rightarrow h_b = \frac{a \times c}{b} \text{ (نمره ۵)}$$

$$h_b^2 = \frac{a^2 c^2}{a^2 + c^2} \Rightarrow \frac{1}{h_b^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} \text{ (نمره ۵)}$$

۷۴ روش اول:

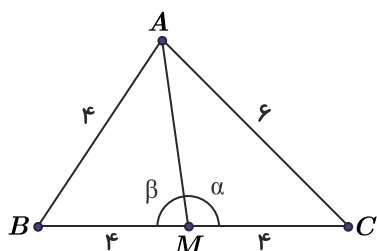


$$6^2 + 4^2 = 2AM^2 + \frac{4^2}{2} \rightarrow 36 + 16 = 2AM^2 + 8$$

$$\rightarrow AM^2 = 10 \rightarrow AM = \sqrt{10}$$

$$\rightarrow 2P_{AMC} = 6 + 4 + \sqrt{10} = 10 + \sqrt{10}$$

روش دوم:



$$\beta = 180^\circ - \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\cos \beta$$

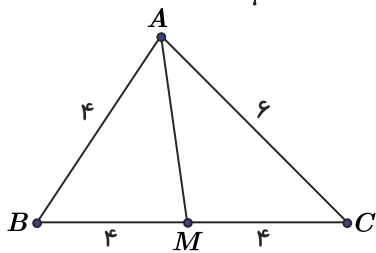
$$4^2 = 4^2 + AM^2 - 2AM \cos \beta$$

$$6^2 = 4^2 + AM^2 - 2AM \cos \alpha$$

$$\Rightarrow 6^2 = 4^2 + AM^2 + 2AM \cos \beta$$

$$\Rightarrow 2AM^2 = 20 \Rightarrow AM = \sqrt{10} \Rightarrow 2P = 6 + 4 + \sqrt{10} = 10 + \sqrt{10}$$

روش سوم:

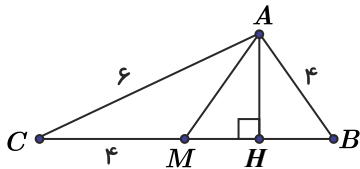


$$AB^2 \times MC + AC^2 \times BM = AM^2 \times BC + BM \times MC \times BC$$

$$\Rightarrow 5^2 \times 4 + 5^2 \times 4 = AM^2 \times 8 + 4 \times 4 \times 8$$

$$\Rightarrow AM^2 = 10 \Rightarrow AM = \sqrt{10} \Rightarrow 2P = 6 + 4 + \sqrt{10} = 10 + \sqrt{10}$$

روش چهارم:



$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)} = 3\sqrt{15}$$

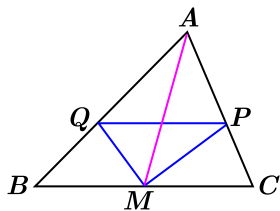
$$S = \frac{AH \times C}{2} \Rightarrow h = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

$$AB^2 = BH^2 + h^2 \Rightarrow 5^2 = BH^2 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)^2 \Rightarrow BH = \frac{11}{4}$$

$$MH = MB - BH \Rightarrow MH = 4 - \frac{11}{4} = \frac{5}{4}$$

$$AM^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{15}}{4}\right)^2 \Rightarrow AM = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow 2P = 10 + \sqrt{10}$$



۷۵

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AP}{PC} : \text{نیمساز } MP \text{ از } \triangle AMC$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AQ}{QB} : \text{نیمساز } MQ \text{ از } \triangle AMB$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QB} : \text{اما } MB = MC \text{ پس}$$

لذا طبق عکس قضیه تالس: $PQ \parallel BC$