

نوترو فیلست

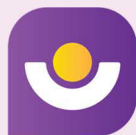
هندسه یازدهم - رشته ریاضی



یه گاز بزنی، یه فصل کنکور می پره!

 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com



کارخونه رتبه برتر سازی، نوترو فیل!



نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۲

محمدعلی موسی پور



دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۴۸

محمدحسین هاشمی



رتبه ۶۸

منیره زمانی



رتبه ۱۹۵

سید حسین تقوی



رتبه ۱۳۴

امیرمحمد ملکشاهی



رتبه ۱۱۲

امیرمحمد شریفی کلوری



سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۳۵۷

فاطمه مروت بلسی



رتبه ۴۲۸

مهدیه اسدی ارزنه ئی



رتبه ۵۰۹

علیرضا شهنساری



رتبه ۵۷۵

هانیه گنجعلی



رتبه ۶۲۷

فریما آقا پور



رتبه ۶۳۹

هلیا رضایی



رتبه ۶۶۸

فائزه حیدری دهکردی



رتبه ۷۹۳

سارینا تقی زاده



رتبه ۸۰۵

لعلیا زنگنه قاسم آبادی



رتبه ۸۸۱

حلما ناصری



رتبه ۹۹۵

جواد فلاحتی



رتبه ۱۰۲۰

سارا دهقان



رتبه ۱۰۲۰

مهسا پیری



رتبه ۱۰۴۹

محمد خرم آبادی



رتبه ۱۱۱۱

رضا نصیری مدیسه



رتبه ۱۱۲۵

سمیرا تباوار



رتبه ۱۲۲۵

مهدی فیض زاده



رتبه ۱۲۲۵

سید مهدی حیات غیبی



رتبه ۱۲۶۷

مهدی آزادبخت



رتبه ۱۳۰۶

مهتاب کامل



رتبه ۱۳۱۶

یسری ابوالمحمدی مله



رتبه ۱۴۰۹

غزل قبادی



رتبه ۱۴۳۹

ریحانه جعفری خیر خواه



رتبه ۱۵۸۷

مهدی تیموری



رتبه ۱۵۹۸

محمد رضا دادپور



رتبه ۱۶۶۹

مانده سادات حسینی



رتبه ۱۷۲۹

علیرضا انصاری



رتبه ۱۷۲۹

علی عزیززاده



رتبه ۱۷۴۲

الهه فکاری



رتبه ۱۷۷۶

علی عرب خانی



رتبه ۱۷۸۲

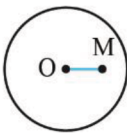
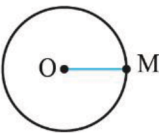
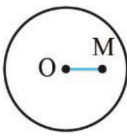
یاسین رئیسی زیدآبادی



فصل اول: دایره

* **دایره:** به مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه (مرکز دایره) به فاصله ثابتی (شعاع دایره) باشند، دایره می‌گیم. نام‌گذاری این دایره معمولاً به صورت C و مرکز دایره O و شعاعش R هست و می‌نویسیم

* **وضعیت نسبی نقطه و دایره:** تو این جور مسائل فاصله نقطه تا مرکز دایره به کممون میاد و باید مقایسه‌اش کنیم با R

اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره بیشتر از R باشد یعنی اون نقطه بیرون دایره هست $R < MO$ 	اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره دقیقاً برابر R باشد یعنی نقطه روی خود دایره افتاده $R = MO$ 	اگر فاصله نقطه تا مرکز دایره کمتر از R باشد یعنی نقطه افتاده داخل دایره $R > MO$ 
---	---	--

سؤال) فاصله نقطه A، خارج دایره تا مرکز دایره‌ای به شعاع برابر با می‌باشد. محدوده x کدام است؟

$$\frac{5}{7} < x \quad (4)$$

$$x > \frac{3}{4} \quad (3)$$

$$\frac{5}{7} < x < \frac{4}{3} \quad (2)$$

$$x > \frac{4}{3} \quad (1)$$

جواب: گزینه (۱)

زرنگ باشید! توی هر سؤالی وقتی گفت فاصله همونجا stop کن فاصله رو بزرگ‌تر از صفر بذار که طراح نتونه

گولت بزنه!

فاصله که نمی‌تونه منفی بشه

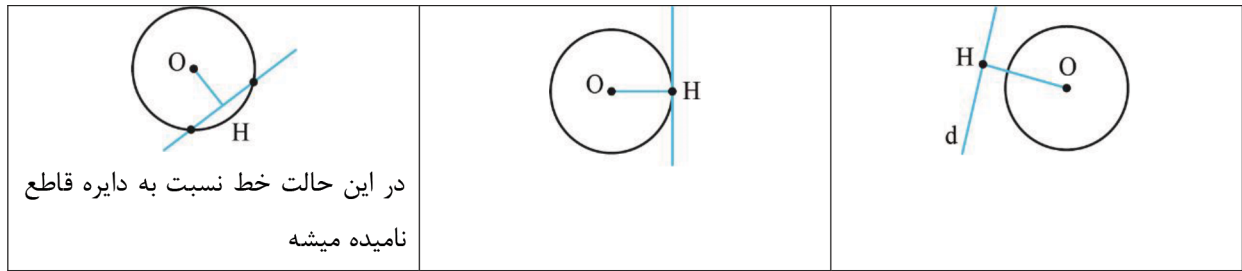
میگه نقطه A خارج دایره. خب قبل چی گفتیم؟ باید $R < OA$ باشه. پس:

$$R < OA \quad 4x - 1 < 7x - 5 \Rightarrow -1 + 5 < 7x - 4x \Rightarrow 4 < 3x \quad \frac{4}{3} < x$$

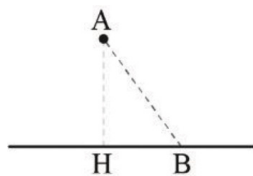
خب با دقت کردن به نامساوی‌ها می‌فهمیم فقط $x < \frac{4}{3}$ برامون مهمه پس گزینه ۱

وضعیت نسبی خط و دایره: این هم شبیه وضعیت نقطه و دایره هست

اگر فاصله نزدیک‌ترین نقطه روی خط یعنی H از مرکز دایره بیشتر از R باشد خط با دایره تقاطعی نداره و اصطلاحاً <u>متخارج</u> هست. $R < OH$ متخارج	اگر فاصله H از مرکز دایره برابر بشه با شعاع دایره این خط مماس با دایره هست دقیقاً توی همون نقطه H (یک نقطه برخورد) $R = OH$ مماس	اگر فاصله نزدیک‌ترین نقطه روی خط یا همون H از مرکز دایره کمتر از شعاع باشه یعنی خط دایره را قطع کرده و متقاطع شده (دو نقطه برخورد) $R > OH$ متقاطع
--	---	--



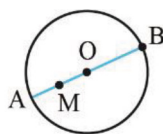
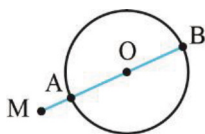
همون‌طور که قبلاً گفتیم فاصله یک خط از یک نقطه رو همیشه با اندازه‌گیری فاصله اون نقطه تا پای عمود بر خط که همون H هست به دست آورد. فاصله نقطه تا بقیه نقطه‌هایی که روی خط هستن بیشتر از فاصله‌ای که اندازه گرفتیم می‌شه.



سؤال (جاخالی) یک خط و یک دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر* این خط در نقطه تماس با دایره بر شعاع آن نقطه عمود باشد.*

نزدیک‌ترین و دورترین فاصله یک نقطه از دایره

توی این دو حالت که نقطه داخل و خارج دایره هست AM نزدیک‌ترین و BM دورترین فاصله نقطه از دایره هست.



نزدیک‌ترین $\rightarrow AM$

دورترین $\rightarrow BM$

(جاخالی) (تعریفی)

شعاع: پاره‌خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه‌ای روی دایره باشه

وتر: پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشه

قطر: پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشه و از مرکز دایره بگذره به عبارتی وترى که از مرکز دایره بگذره. (قطر بزرگ‌ترین وتر دایره است.)

کمان: شامل دو نقطه از دایره و تمامی نقاط بین این دو نقطه می‌شه (اگر بین دو نقطه A و B باشه نشونش میدن و اگر این کمان مشخص نبود که مقصودش کمان بزرگ تشکیل شده بین این دو نقطه هست یا کمان کوچک.

میان یه نقطه اضافه اون وسط مثل C می‌گذارن و می‌نویسن $\widehat{ACB}$)

زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن مرکز دایره است.

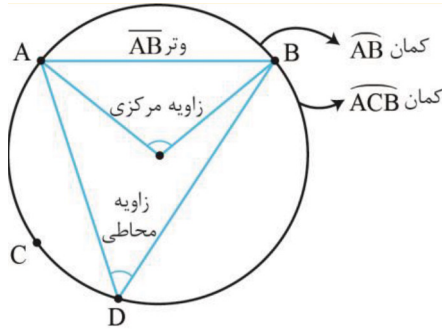
زاویه محاطی: زاویه‌ای که رأس آن روی دایره و دو ضلع آن وترى از دایره باشه.

اندازه کمان: به اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان گفته می‌شه (برحسب درجه)

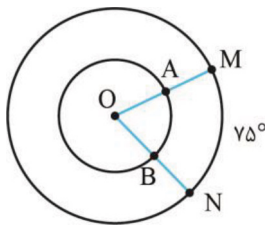
طول کمان: به اندازه خود کمان که همیشه با رابطه مقابل محاسبه کرد گفته می‌شه (برحسب متر، سانتی‌متر، ...)

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{360}$$

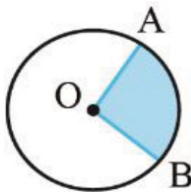
* دقت کن! اندازه کمان، طول کمان شبیه به هم‌اند، اشتباه‌نگیری!



ممکن هست کمان‌های چند دایره اندازه‌های برابر ولی طول‌های مختلفی داشته باشند.



قطاع: به ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع دایره و خود دایره محدود بشه می‌گویند.



طول کمان و مساحت قطاع: همونطور که قبلاً فرمول طول کمان رو گفتیم می‌تونیم تناسب بنویسیم اما راه

سریع‌تر:

$$L = \frac{\pi R \alpha}{180} \quad (\alpha \text{ بر حسب درجه})$$

همین‌طور برای مساحت قطاع داریم:

$$\frac{\text{طول کمان}}{360} = \frac{\text{قطاع}}{S_{\text{دایره}}} \rightarrow S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad (\alpha \text{ بر حسب درجه})$$

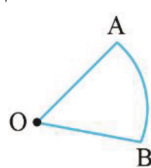
$$L = R\alpha \quad (\alpha \text{ بر حسب رادیان})$$

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha \quad (\alpha \text{ بر حسب رادیان})$$

سؤال) در شکل مقابل، کمانی از دایره به مرکز O با نام AB داریم. اگر طول این کمان، برابر و مساحت قطاع

باشد، زاویه O چند درجه است؟

جواب) با توجه به این‌که گفته طول کمان میشه یعنی از فرمول طول کمان بر حسب رادیان باید استفاده کنیم.

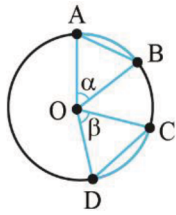


$$L = R\alpha \rightarrow \pi = R\alpha \quad \Rightarrow S = \frac{1}{2} R^2 \alpha \quad \Delta \pi = \frac{(R\alpha)^2}{2\alpha} \rightarrow \Delta \pi = \frac{\pi^2}{2\alpha}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{10} = \frac{180}{10} = 18$$

پس زاویه 18 درجه است.

اثبات) اگر اندازه کمان‌های $\overline{AD}$ و $\overline{CD}$ از دایره با هم برابر باشند وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ نیز با هم برابرند.



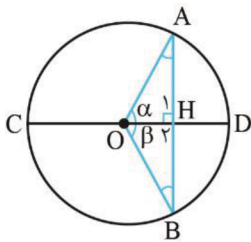
$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \alpha = \beta \\ \overline{AD} = \overline{OD} = R \\ \overline{OB} = \overline{OC} = R \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{با توجه به} \\ \text{ض ض ض} \end{array} \rightarrow \triangle AOB \cong \triangle OCD \rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

اثبات) اگر دو وتر $\overline{AB}$ ، $\overline{CD}$ دایره با هم برابر باشند، اندازه کمان‌ها، $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ نیز با هم برابرند. شکل اثبات بالا

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{CD} \\ \overline{AO} = \overline{OD} = R \\ \overline{OB} = \overline{OC} = R \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{با توجه به} \\ \text{ض ض ض} \end{array} \rightarrow \triangle AOB \cong \triangle OCD \rightarrow \alpha = \beta \xrightarrow[\text{این زاویه مرکزی نیز با هم برابرند}]{\text{اندازه کمان‌های نظیر}} \rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$$

اثبات) اگر $\overline{AB}$ وتر از دایره و $\overline{CD}$ قطری از دایره که بر وتر $\overline{AB}$ عمود است داشته باشیم. قطر $\overline{CD}$ وتر $\overline{AB}$ را نصف می‌کند

$$\left. \begin{array}{l} \triangle AOB \text{ در مثلث} \\ \overline{AB} = \overline{OB} \Rightarrow \triangle AOB \text{ مثلث متساوی الساقین} \\ A = B \\ H_1 = H_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha = \beta \xrightarrow[\text{در نتیجه}]{\text{اندازه کمان‌ها}} \rightarrow \overline{AD} = \overline{DB}$$



$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \overline{AD} = \overline{OH} = R \\ \text{ضلع مشترک OH} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \triangle AOH \cong \triangle OHB \\ \text{بر اساس ض ض ض} \end{array} \Rightarrow \overline{AH} = \overline{BH}$$

اثبات) اگر قطر $\overline{CD}$ در دایره‌ای وتر $\overline{AB}$ را نصف کند، $\overline{AB}$ بر $\overline{CD}$ عمود است. کمان $\overline{AB}$ را نصف می‌کند.

شکل اثبات بالا

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AH} = \overline{HB} \\ \text{ضلع مشترک OB} \\ \overline{OA} = \overline{OB} = R \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بر اساس} \\ \text{ض ض ض} \end{array} \rightarrow \triangle AOH \cong \triangle HOB \rightarrow \left. \begin{array}{l} H_1 = H_2 \\ H_1 + H_2 = 180^\circ \end{array} \right\} H_1 = H_2 = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ $\overline{AB}$ بر $\overline{CD}$ عمود است

$$\triangle AOH \cong \triangle HOB \rightarrow \alpha = \beta \rightarrow \text{اندازه کمان } \overline{AD} = \overline{DB}$$

اثبات) اگر قطر $\overline{CD}$ کمان $\overline{AB}$ را نصف کند، $\overline{AB}$ بر $\overline{CD}$ عمود است و آن را نصف می‌کند.

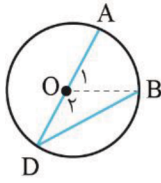
$$\left. \begin{array}{l} \overline{AD} = \overline{DB} \text{ اندازه کمان} \\ \text{شکل اثبات بالا} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{طبق} \\ \text{قضیه} \end{array} \rightarrow \alpha = \beta \left. \begin{array}{l} \overline{AO} = \overline{OB} = R \\ \text{ضلع مشترک OH} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{بر حسب} \\ \text{ض ض ض} \end{array} \rightarrow \triangle AOH \cong \triangle HOB \rightarrow \left. \begin{array}{l} H_1 = H_2 \\ H_1 + H_2 = 180^\circ \end{array} \right\} H_1 = H_2 = 90^\circ$$

پس $\overline{CD}$ بر $\overline{AB}$ عمود است.

$$\triangle AOH \cong \triangle HOB \rightarrow \overline{AH} = \overline{HB}$$

$\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ را نصف می‌کند.

اثبات) اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان مقابل به آن زاویه است (۳ حالت توی این اثبات داریم)
وقتی یک ضلع از زاویه محاطی از مرکز دایره بگذره



اول از B به C پاره خطی وصل می‌کنیم در این صورت O_1 میشه زاویه خارجی مثلث OBD

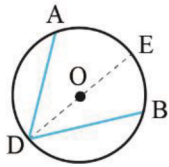
طبق چیزی که از قبل برای زاویه خارجی می‌دونیم $O_1 = B + D$ و از اونجایی که OD, OB برابر شعاع

دایره هستند پس مثلث OBD متساوی الساقین هست $B = D$ در نتیجه:

$$O_1 = 2D \xrightarrow{O_1 = AB} ADB = \frac{AB}{2}$$

وقتی دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف O واقع شده است

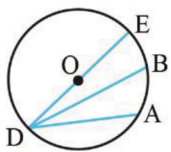
قطر DE را رسم می‌کنیم، زاویه محاطی تبدیل به دو زاویه محاطی می‌شود



$$\left. \begin{array}{l} ADE = \frac{AE}{2} \\ EDB = \frac{EB}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} ADB = \frac{AB}{2}$$

وقتی دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف O باشند

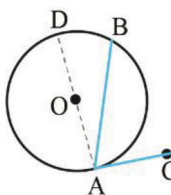
قطر DE را رسم می‌کنیم



$$\left. \begin{array}{l} ADE = \frac{EA}{2} \\ ADB = \frac{EB}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} BDA = \frac{BA}{2}$$

زاویه ظلّی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره قرار دارد و یکی از اضلاع آن مماس بر دایره و ضلع دیگر آن شامل وتری از دایره باشد.

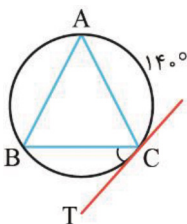
• اندازه هر زاویه ظلّی برابر با نصف کمان روبه‌رو به آن زاویه است.



$$\left. \begin{array}{l} AC \Rightarrow DAC = 90^\circ \Rightarrow DAC = \frac{DBA}{2} \\ DAB = \frac{DB}{2} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{array}{l} DAC - DAB = \frac{DBA - DB}{2} \\ BAC = \frac{BA}{2} \end{array}$$

سؤال) در شکل روبه‌رو، CT مماس بر دایره در نقطه C و $AC = 140$ است. اندازه زاویه BCT چه قدر است؟
(خیلی سبز)

جواب) خب می‌دونیم وقتی دو وتر برابر هستند کمان‌های نظیر آنها با هم برابرند



$$\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow AB = AC = 140^\circ$$

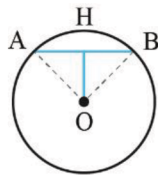
$$AB + BC + AC = 360^\circ \quad BD = 80^\circ$$

$$BCT = \frac{BC}{2} \Rightarrow \frac{80}{2} = 40^\circ$$

BCT زاویه ظلّی هست پس:

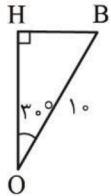
سؤال) در دایره $C(O, R)$ وتر AB برابر ۱۰ و $AB = ۶۰^\circ$ است. فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

جواب)



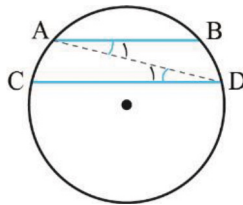
وقتی $\widehat{AB} = ۶۰^\circ$ یعنی طبق قضیه‌ای که داشتیم زاویه مرکزی روبه‌روی کمان همیشه برابر ۶۰° و از

اونجایی که $OA = OB$ پس مثلث OAB متساوی‌الاضلاع هست که اضلاع آن ۱۰ است.



$$OH = OB \cos O_1 = ۱۰ \times \frac{\sqrt{3}}{2} = ۵\sqrt{3}$$

• دو وتر که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند با هم موازی‌اند، اگر و تنها اگر کمان‌های محدود بین آن‌ها مساوی باشد.



اثبات) در شکل مقابل اگر AB و CD موازی باشند کمان‌های AB و AC با هم برابرند. ابتدا از A به D وصل می‌کنیم. با توجه به قضیه خطوط موازی و مورب و از آنجایی

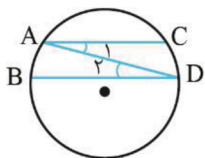
که در نتیجه $AB \parallel CD$ در نتیجه $A_1 = D_1$

$$A_1 = \frac{\widehat{BD}}{2}, D_1 = \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$A_1 = D_1 \Rightarrow \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

اثبات) اگر کمان‌های AB, CD هم‌اندازه باشند، وترهای AB, CD که یکدیگر را درون دایره قطع نمی‌کنند

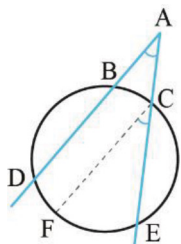
برابرند.



$$\left. \begin{aligned} \frac{\widehat{AB}}{2} = D_2 = \frac{\widehat{CD}}{2} = A_1 \\ AB = CD \end{aligned} \right\} A_1 = D_1$$

از A به D وصل می‌کنیم:

با توجه به اینکه $A_1 = D_1$ ، AD خط مورب هست براساس قضیه خطوط موازی و مورب می‌توان گفت: $AC \parallel BD$



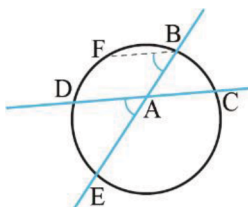
$$DAE = \frac{1}{2}(DE - BC)$$

اثبات) از نقطه C خطی موازی با AD رسم می‌کنیم. طبق قضیه خطوط موازی و مورب اگر AC را خط مورب بدانیم $DAE = FCE$ با توجه به اینکه FCE زاویه‌ای محاطی است داریم:

$$\widehat{FCE} = \frac{\widehat{FE}}{2} = \frac{\widehat{DE} + \widehat{FD}}{2}$$

حالا با توجه به قضیه‌ای که صفحات قبل گفتیم $DF = BC$ پس:

$$\widehat{FCE} = \frac{\widehat{DE} - \widehat{BC}}{2}$$

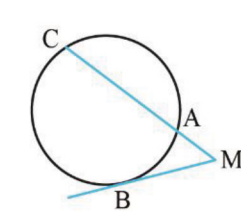


$$\widehat{DAE} = \widehat{BAC} = \frac{1}{2}(\widehat{BC} + \widehat{DE})$$

اثبات) از نقطه B موازی خط CD خطی رسم می‌کنیم. طبق خطوط موازی و مورب در نظر گرفتن BE به عنوان خط مورب: $FBE = DAE$

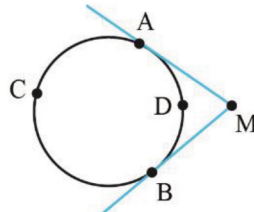
$$FBE = \frac{FE}{2} = \frac{1}{2}(FD + DE) \xrightarrow{\text{قضیه}} \frac{1}{2}(BC + DE)$$

با توجه به اینکه FBE زاویه محاطی است:



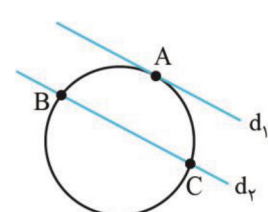
$$M = \frac{CB - AB}{2}$$

اثبات مهم



$$M = \frac{ACB - ADB}{2}$$

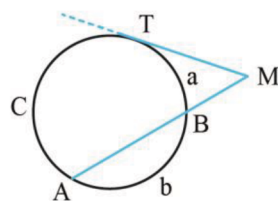
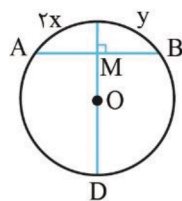
اثبات مهم



$$AB = AC, d_1 \parallel d_2 \text{ اگر}$$

اثبات مهم

(خیلی سبز)



$$\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} \quad M = ?$$

سؤال) مقدار مجهول را بیابید.

جواب)

$$M = \frac{2x + 3x + 10}{2} = 90$$

$$5x + 10 = 180$$

$$5x = 170$$

$$x = 34$$

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{4} = \frac{c}{7} = x$$

$$a = x$$

$$b = 4x$$

$$c = 7x$$

$$12x = 360$$

$$x = 30$$

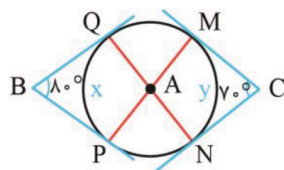
$$M = \frac{6x}{2} = 3x = 90$$

$$c + a + b = 360$$

$$3x + 10 + y = 180 \quad y = 68$$

سؤال) در شکل مقابل اضلاع زاویه‌های B و C بر دایره مماس‌اند. اندازه زاویه A چند درجه است؟ (پرتکرار)

جواب)



$$QBP = \frac{QMP - QP}{2}$$

$$160 = (360 - x) - x$$

$$x = 100$$

$$A = \frac{360 - (x + y)}{2} = 75$$

$$MCN = \frac{MQN - MN}{2}$$

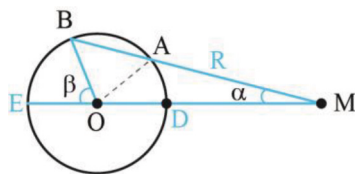
$$140 = (360 - y) - y$$

$$y = 110$$

سؤال) اگر از نقطه M در شکل روبه‌رو خطی چنان رسم کنیم که دایره را در دو نقطه A و B قطع کند.

$$MA = A$$

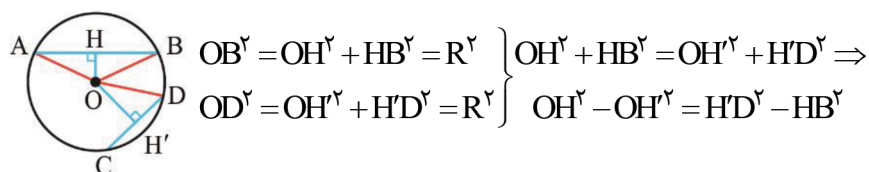
ثابت کنید $\beta = 3\alpha$



جواب) از A به O وصل می‌کنیم با توجه به این که $R = OA$ و $AM = R$ یعنی $\vec{APM}$ متساوی‌الساقین پس $\alpha = \angle O$. طبق زوایای مرکزی و کمان روبه‌روی آن‌ها $AD = \alpha$ و $EB = \beta$

$$M = \frac{EB - AD}{2} \quad \alpha = \frac{\beta - \alpha}{2} \quad 3\alpha = \beta$$

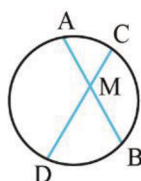
اثبات) از O به M وصل می‌کنیم طبق فیثاغورس داریم:



چون پاره خط عددی مثبت است پس توان ۲ تأثیری بر علامت نامساوی ندارد

$$AB > CD \Leftrightarrow \frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Leftrightarrow BH > DH'$$

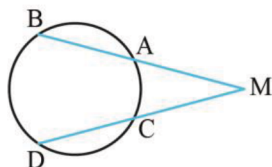
$$\Leftrightarrow BH^2 > DH^2 \Leftrightarrow BH^2 = DH^2 > 0 \xrightarrow{\text{توجه به علامت‌ها}} DH^2 = OH'^2 < 0 \quad OH^2 < OH'^2 \xrightarrow{\text{فصله مثبت است}} OH < OH'$$



$$AM \cdot MB = CM \cdot MD$$

اثبات مهم براساس تشابه دو مثلث

* دو وتر یکدیگر را داخل دایره قطع کنند

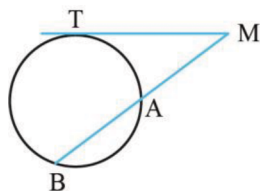


$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

اثبات مهم براساس تشابه

* دو وتر یکدیگر را خارج از دایره قطع کنند

* هرگاه M نقطه‌ای بیرون دایره باشد و از M مماس و قاطعی نسبت به دایره رسم کنیم، مربع اندازه مماس برابر است با حاصل ضرب اندازه‌های دو قطعه قاطع. یعنی طول مماس واسطه هندسی بین دو قطعه قاطع است.

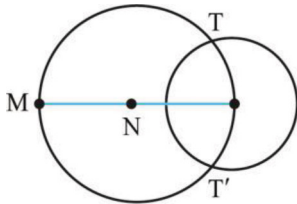


$$TM^2 = MA \cdot MB \Rightarrow TM = \sqrt{MA \cdot MB}$$

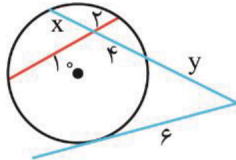
↑
واسطه هندسی

اثبات مهم

* **رسم مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره** از تون میخوان که این روش رو توی امتحان بنویسید خوب واسه همین اول می‌گیریم که از M به مرکز دایره وصل می‌کنیم و وسط پاره خط MO را مشخص می‌کنیم و N می‌نامیم. حالا به مرکز N و شعاع MN دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند. این دو نقطه را می‌نامیم. خط‌های بر دایره مماس‌اند (می‌توانیم براساس و ض اثبات کنیم)



سؤال) مقادیر مجهول را بیابید.



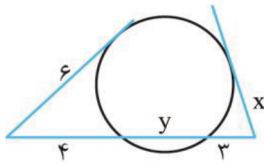
$x, y?$

جواب)

$$40x = 2 \times 10 \quad x = 5 \quad y \times (y + 9) = 6^2 \quad y^2 + 9y - 36 = 0$$

$$(y + 12)(y - 3) = 0 \Rightarrow y = 3$$

سؤال) در شکل مقابل مقدار x را به دست آورید.



جواب)

$$6^2 = 4 \times (4 + y) \quad 9 = 4 + y \quad y = 5 \quad x^2 = 3 \times (8) \quad x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

سؤال) در دایره روبه‌رو، وتر AB ، وتر CD به طول 9cm را به نسبت 1 به 2 تقسیم کرده است اگر باشد، آنگاه وتر CD و وتر AB را به چه نسبتی قطع کرده است؟

جواب)

$$CM = x \quad MD = 2x \quad x + 2x = 9\text{cm} \quad x = 3\text{cm} \quad AM = y \quad AM + 11 = y$$

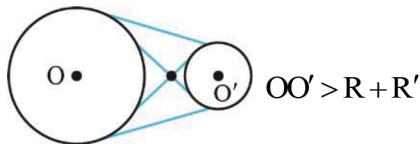
$$x + 2x = y(11 - y) \quad 11y - y^2 = 18 \quad (y - 9)(y - 2) = 0 \quad y = 2 \quad \text{یا} \quad y = 9$$

$$AM = 2 \quad CM = 3$$

$$BM = 9 \quad MD = 6$$

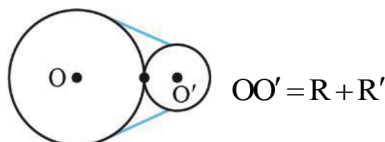
$$CD \text{ قطع } \Rightarrow \frac{AM}{BM} = \frac{2}{9}$$

وضعیت نسبی دو دایره



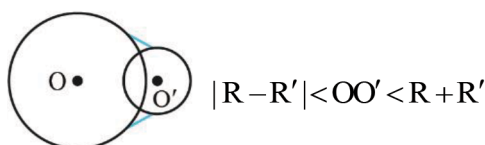
۲} مماس مشترک خارجی
۱} مماس مشترک داخلی

دو دایره برون هم (متخارج)



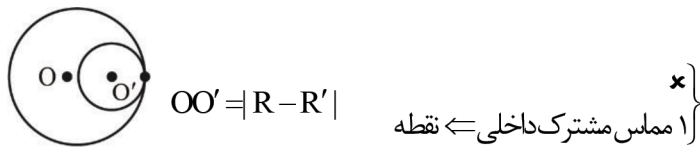
۲} مماس مشترک خارجی
۱} مماس مشترک داخلی $\Leftarrow$ نقطه

دو دایره مماس برون

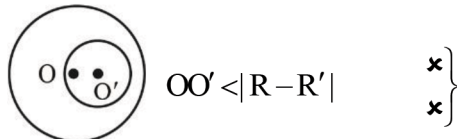


۲} مماس مشترک خارجی
x

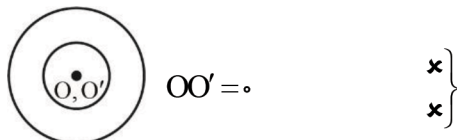
دو دایره متقاطع



دو دایره مماس درون



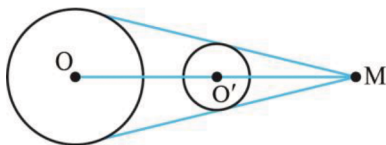
دو دایره متداخل



دو دایره هم مرکز

* **مماس مشترک:** هر خط و یا پاره خطی که بر هر دو دایره مماس باشد می‌گوییم

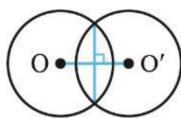
داخلی ← اگر دو دایره در دو طرف خط باشند **خارجی** ← اگر دو دایره در یک طرف خط باشند
اگر دو مماس مشترک خارجی را امتداد دهیم تا در نقطه M یکدیگر را قطع کنند این نقطه M روی خط OO' قرار دارد



دو دایره مماس ← دو دایره که فقط یک نقطه مشترک داشته باشند

دو دایره متقاطع ← دو دایره که دو نقطه مشترک داشته باشند، پاره‌خطی که دو سر آن این دو نقطه مشترک است. وتر مشترک دو دایره متقاطع می‌گوییم.

دو دایره متداخل ← دو دایره که تمام نقاط یکی درون دیگری باشد و هیچ مماس مشترکی ندارند.



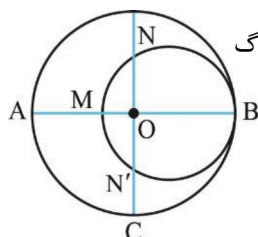
$$TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R - R')^2} \quad \text{مماس مشترک خارجی}$$

$$TT' = \sqrt{(OO')^2 - (R + R')^2} \quad \text{مماس مشترک داخلی}$$

$$TT' = 2\sqrt{RR'} \quad \text{مماس مشترک خارجی در دو دایره مماس بودن}$$

اثبات‌ها مهم

سؤال) در شکل مقابل دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و AC از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر AM = ۱۶ و ND = ۱۰ شعاع دو دایره چند است؟



R' شعاع دایره کوچک و R شعاع دایره بزرگ

$$OM = OB = ON = ON' \Rightarrow (R - 16), R = (R - 10)(R - 10)$$

$$R^2 - 16R = R^2 - 20R = 100$$

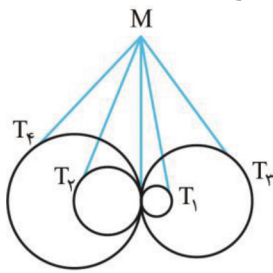
$$4R = 100 \quad \boxed{R = 25}$$

$$16 = 2R' = 2R = 16 = 2R' = 25 \times 2 \quad 8 + R' = 25 \quad R' = 17$$

جواب)

* مطابق شکل، تمام دایره‌ها در نقطه T بر هم مماس‌اند و از نقطه M روی مماس مشترک آنها بر دایره‌ها مماس رسم کردیم

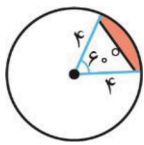
اثبات بر اساس اینکه «از هر نقطه خارج دایره دو مماس رسم می‌شود که طول یکسان دارند».



$$MT_1 = MT_2 = MT_3 = \dots$$

سؤال دایره‌ای به شعاع ۴ داریم. مساحت ناحیه سایه‌زده را محاسبه کنید. این ناحیه یک قطعه دایره نام دارد.

جواب

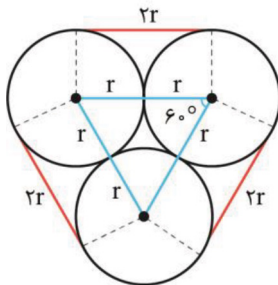


$$S_{\text{رنگی}} = S_{\text{مثلث}} - S_{\text{قطاع}} = \left(\frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 \right)$$

$$\frac{\pi \times 16 \times 6}{360} - \frac{\sqrt{3}}{4} (16) = \frac{8}{3} \pi - 4\sqrt{3}$$

سؤال سه دایره به شعاع‌های برابر r بر هم مماس‌اند. اگر این ۳ دایره به وسیله نخ بسته شده باشند طول نخ همچنین مساحت محدود به این ۲ را محاسبه کنید.

جواب ابتدا مرکز ۳ دایره را به هم وصل می‌کنیم. با توجه به این که نخ بر دایره‌ها مماس است پس در هر طرف مستطیل با طول ۲۷ ایجاد می‌شود. اگر بخش‌های منحنی که اندازه کمان‌ها $\frac{36}{3} = 120$ است کنار هم قرار دهیم در نهایت یک دایره



می‌شود پس:

$$\text{طول} \Rightarrow 3 = 2r + 2\pi r = 6r + 2\pi r$$

$$S \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} (2r)^2 - r^2 = r^2 \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{4} \right)$$

$\Rightarrow$ مساحت S یک نیم‌دایره ۳ تا بخش 60° مثلث $\Rightarrow$ مساحت

چند تا سؤال ترکیبی از مباحث داشته باشیم:

سؤال مساحت قطاعی از دایره که زاویه محاطی روبه‌رو به کمان آن قطاع برابر 72° درجه باشد را محاسبه کنید.

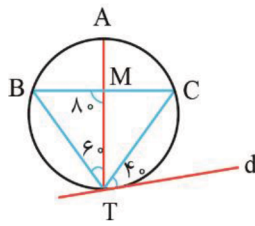
جواب

$$S = \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

از آن جایی که زاویه محاطی 72° درجه است پس کمان روبه‌رو به آن

144° درجه می‌باشد و این برابر با زاویه مرکزی مقابل با کمان است پس داریم:

$$S = \frac{\pi (10)^2 \times 144}{360} = 400$$



$$MAMB = MCMD \rightarrow 6 \times 10 = y(y+7)$$

$$\rightarrow y^2 + 7y = 60 \rightarrow (y+12)(y-5) = 0$$

$$y = 5$$

$$B = T = 40 \rightarrow y + 80 + 40 = 180 \rightarrow y = 60$$

سؤال اگر شعاع دو دایره ۳ و ۸ باشد و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها نیز ۱۲ باشد، خط‌المركزین و طول

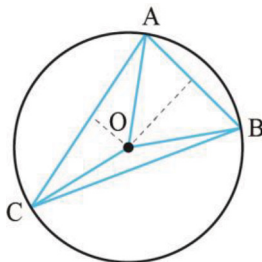
مماس مشترک داخلی آن‌ها را به دست آورید.

$$\pi' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow 12 = \sqrt{d^2 - (8 - 3)^2} \Rightarrow 144 = d^2 - 25$$

$$d^2 = 169 \quad \boxed{d = 13}$$

$$\text{داخلی} = \sqrt{d^2 - (R + R')^2} = \sqrt{169 - 121} = \sqrt{48} = \boxed{4\sqrt{3}}$$

سؤال در شکل زیر O مرکز دایره و می باشد. اندازه زاویه C را بیابید.



$$\text{محاطی } A = 65^\circ \rightarrow BT = 65 \times 2 = 130^\circ \rightarrow \text{کمان مکمل} = 180 - 130 = 50^\circ$$

$$\text{محاطی } B = 35^\circ \rightarrow AT = 2 \times 35 = 70^\circ$$

$$C = \frac{50 + 70}{2} = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

سؤال اگر فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط X از مرکز دایره C (با $\sqrt{5}$) باشد، وضعیت نسبی خط X در دایره

C چیست؟

جواب

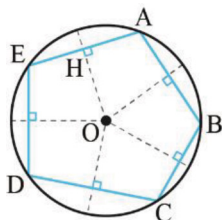
فاصله نزدیک‌ترین نقطه خط از مرکز دایره C طول خط عمودی است که از O بر خط d وارد می‌شود. اگر OH

عمود از نقطه O بر خط d باشد، $3\sqrt{2}$ ، OH خط d را در دو نقطه قطع می‌کند.

$$2\sqrt{2} < 2\sqrt{5} \rightarrow OH < 2 \rightarrow$$

* **چند ضلعی** محاطی است اگر و تنها اگر دایره‌ای باشد که از همه رئوس چند ضلعی بگذرد. در این صورت دایره

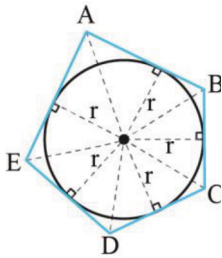
را دایره محیطی آن چند ضلعی می‌نامیم.



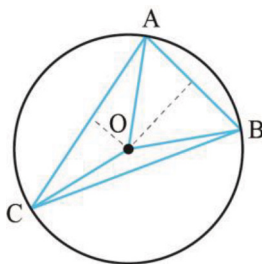
- * یک چند ضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمودمنصف‌های همه ضلع‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند.
- * چند ضلعی محیطی است اگر و تنها اگر دایره‌ای باشد که بر همه ضلع‌های آن مماس باشد. در این صورت دایره را دایره محاطی این چند ضلعی می‌نامیم
- * یک چند ضلعی محیطی است اگر و فقط اگر همه نیمسازهای زاویه‌های آن در یک نقطه هم‌رس باشند. این نقطه مرکز دایره محاطی چند ضلعی است.

چند ضلعی محیطی $r = \frac{S}{p}$ دایره محاطی

- * به طور کلی توی این شکل‌ها، شکلی که داخلی هست محاطی و شکلی که بیرونش هست محیطی می‌گویند.



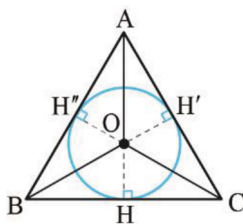
- * نقطه هم‌رسی سه عمودمنصف مثلث تنها نقطه‌ای است که از سه رأس آن به یک فاصله است. پس اگر دایره‌ای به مرکز همین نقطه (هم‌رسی سه عمودمنصف) و به شعاع فاصله این نقطه تا یکی از رأس‌ها رسم کنیم این دایره از هر ۳ رأس می‌گذرد.



نتیجه: مثلث همواره محاطی است. $AO = BO = CO = R$

دایره محیطی $\Rightarrow C(O, R)$

مثلث محیطی $\Rightarrow \Delta ABC$



- * نقطه هم‌رسی سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث نقطه‌ای است که فاصله آن تا هر ضلع مثلث برابر است. پس اگر دایره‌ای به مرکز همین نقطه و به شعاع فاصله این نقطه تا اضلاع مثلث رسم کنیم این دایره بر همه اضلاع مماس می‌شود.

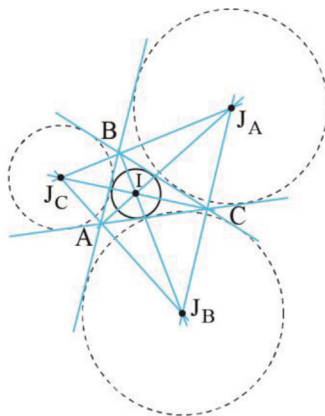
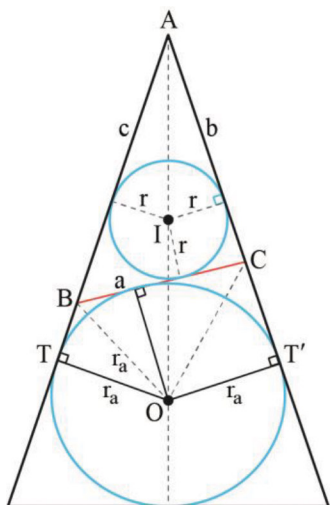
نتیجه: مثلث همواره محیطی است.

$$OH = OH' = OH'' = r$$

$$r = \frac{S}{p} \text{ دایره محاطی } C(O, r)$$

مثلث محیطی ΔABC

دایره‌ای که مرکز آن نقطه هم‌رسی نیمساز یک زاویه داخلی مثلث و نیمساز دو زاویه خارجی باشد و شعاع آن فاصله این نقطه تا ضلع روبه‌رو به زاویه داخلی باشد دایره محاطی خارجی نامیده می‌شود. ۳ تا دایره محاطی خارجی هر مثلث دارد.



$$r_a = \frac{s}{p-a}$$

$$r_b = \frac{s}{p-b}$$

$$r_c = \frac{r}{p-c}$$

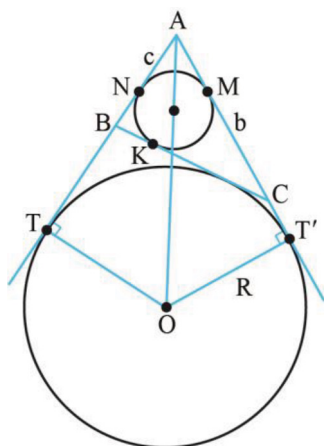
* مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده باشد: $S = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

اثبات رابطه مهم:

* عمود منصف یک ضلع هر مثلث نیمساز زاویه مقابل به آن ضلع یکدیگر را روی دایره محیطی مثلث قطع می‌کند. اثبات مهم

* رابطه بین شعاع دایره محاطی داخلی و سه شعاع دایره‌های محاطی خارجی: (اثبات مهم)

رابطه بین ارتفاع‌های مثلث: (اثبات مهم)



* اگر نقاط مشخص شده نقاط مماس بر دایره‌ها باشند:

$$AM = AN = P - a$$

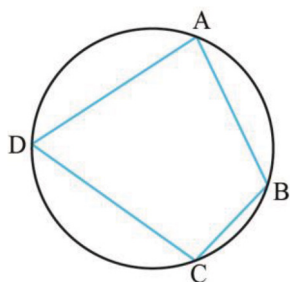
$$BN = BK = p - b$$

$$CM = CK = p - c$$

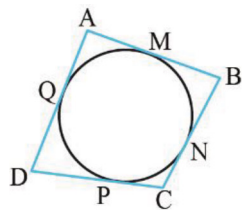
$$AT = AT' = p$$

۴ ضلعی‌ها:

* یک چهار ضلعی محاطی است، اگر و تنها اگر دو زاویه مقابل آن مکمل باشند. اثبات مهم



* یک چهارضلعی محیطی است، اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل، برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع دیگر باشد

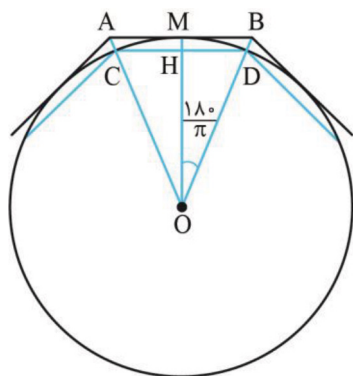


$$AB + CD = BC + AD \text{ اثبات مهم}$$

* اگر دوزنقه‌ای هم محاطی و هم محیطی باشد، مساحت آن برابر است با میانگین حسابی دو قاعده آن ضرب در میانگین هندسی آن‌ها

اگر قاعده کوچک a و قاعده بزرگ h باشد:

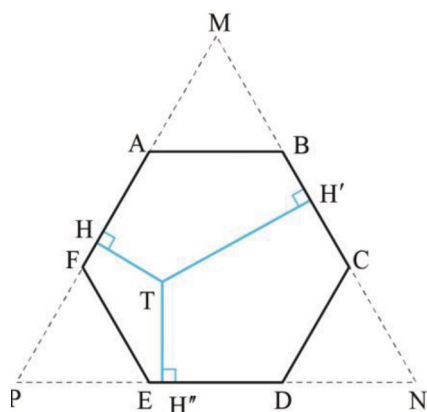
$$S = \frac{(a+b)}{2} \sqrt{a+b}$$



* اگر دایره‌ای به شعاع r و n ضلعی‌های منظم محاطی و محیطی داشته باشیم:

$$CD \text{ محاطی} = 2r \sin \frac{180^\circ}{n}$$

$$AB \text{ محیطی} = 2r \tan \frac{180^\circ}{n}$$



* اگر اضلاع شش ضلعی مقابل را امتداد دهیم:

MNP مثلث متساوی‌الاضلاع است.

مساحت شش ضلعی دو سوم مساحت MNP است.

اگر T را نقطه‌ای دلخواه در شش ضلعی بدانیم:

مجموع طول عمودهای رسم شده از T تا اضلاع FA و BC و ED برابر ارتفاع مثلث می‌شود.

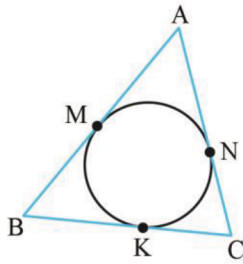
$$S_{TBC} + S_{TDE} + S_{TAF} = S_{TAB} + S_{TEF} + S_{TCD}$$

N ضلعی منتظم	کایت	مربع	لوزی	مستطیل	دوزنقه متساوی‌الساقین	دوزنقه	متوازی‌الاضلاع	مثلث	
✓	در نهایت 90°	✓	✗	✓	✓	✗	✗	✓	محاطی
✓	✓	✓	✓	✗	✗ اگر نیمسازهای داخلی هم‌رس ✓	✗ اگر نیمسازهای داخلی هم‌رس ✓	✗	✓	محیطی

یک چند ضلعی محدب را منتظم می‌نامند هرگاه تمام ضلع‌های آن هم اندازه و تمام زاویه‌های آن نیز برابر باشند.

سؤال) در شکل زیر، اگر $AB=6$ ، $AC=5$ ، $BC=4$ باشد، مقادیر AM ، BK ، CN را به دست آورید.

جواب)



$$2p = 4 + 5 + 6 = 15 \rightarrow p = 7.5$$

$$AM = p - a, BK = p - b, CN = p - c$$

$$AM = 7.5 - 4 = 3.5, BK = 7.5 - 5 = 2.5, CN = 7.5 - 6 = 1.5$$

(۱/۵ نمره)

سؤال) مساحت دوازده ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع ۴ چند است؟

جواب)

دوازده ضلعی منتظم از ۱۲ مثلث هم‌نهشت مانند تشکیل شده. اندازه زاویه مرکزی مقابل به کمان AB برابر است

$$\alpha = \frac{360}{12} = 30^\circ$$

$$S_{\text{دوازده ضلعی منتظم}} = 12 \sin = 12 \times \left(\frac{1}{2} \times OH \times O \sin 30^\circ \right) = 12 \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{2} \right) = 48$$

سؤال) در یک مثلث قائم‌الزاویه اندازه اضلاع قائم ۵ و ۱۲ واحد است فاصله دورترین رأس این مثلث از نقطه

تلاقی نیمسازهای داخلی آن چند است؟

جواب)

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$S = \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30, P = \frac{1}{3} \times (12 \times 12 \times 5) = 15 \rightarrow 2 = \frac{S}{P} = \frac{30}{15} = 2$$

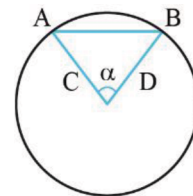
$$AH_r = P - a = 15 - 13 = 2, BH_r = P - b = 15 - 12 = 3$$

$$OH_r = P - c = 15 - 5 = 10$$

$$\Delta OAH = OA + \sqrt{AH_r^2 + OH_r^2} = \sqrt{2^2 + 10^2} = 2\sqrt{26}$$

$$\Delta OBH = OB = \sqrt{OH_r^2} = OH_r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\Delta OCH = OC = \sqrt{CH_r^2 + OH_r^2} = \sqrt{1^2 + 10^2} = \sqrt{101}$$



* انتقال بازتاب و دوران را تبدیل‌های هندسی می‌نامیم.

* تبدیل یافته یک شکل را تصویر آن می‌نامیم.

* تبدیل T در صفحه P تابعی است که به هر نقطه A از صفحه P دقیقاً یک نقطه مانند A' را از همان صفحه

نظیر می‌کند و برعکس؛ هر نقطه A' از صفحه P تصویر دقیقاً یک نقطه A از همان صفحه A' را از همان صفحه

* طولپایی: تبدیلی‌هایی که طول پاره خط را حفظ می‌کنند تبدیلات طولپا (ایزومتري) نامیده می‌شوند

$$T(A) = A' \quad T(B) = B' \quad AB = A'B' \quad \text{یعنی}$$

* هر تبدیل طولپا اندازه زاویه را حفظ می‌کند (اثبات مهم) در هر تبدیل طولپا تبدیل یافته هر زاویه، زاویه‌ای هم

اندازه آن است در هر تبدیل، نقطه‌ای را که تبدیل یافته آن بر خود آن نقطه منطبق می‌شود، نقطه ثابت تبدیل

می‌نامند.

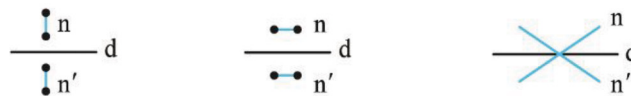
بازتاب

برای کشیدن بازتاب شکلی نسبت به خطی تصویر شکل را نسبت به آن خط رسم می‌کنیم. که اگر هر نقطه را به تصویرش رسم کنیم، عمود منصف این پاره‌خط همان خط بازتاب می‌شود (خط بازتاب یا محور بازتاب)

* اگر نقطه‌ای روی خط بازتاب باشد، تصویر آن بر خودش منطبق می‌شود (همان A' است) بنابراین بازتاب نسبت به خط بی‌شمار نقطه ثابت تبدیل دارد.

* در هر بازتاب اندازه هر پاره‌خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند بازتاب تبدیلی طولپایا است.

* اگر خط n با محور بازتاب d عمود و یا موازی باشد شیب آن خط می‌شود اما اگر موازی یا عمود نباشد حفظ نمی‌شود پس می‌گوییم بازتاب شیب خط را حفظ نمی‌کند.

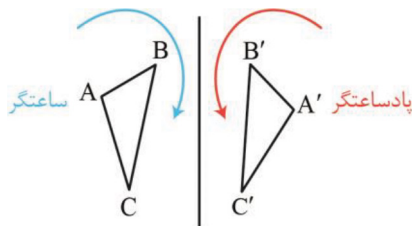


اگر A' بازتاب A نسبت به خط d باشد، بازتاب A' نسبت به خط d همان نقطه A است.

$$S(S(A)) = A \quad (A')' = A$$

قرینه قرینه هر نقطه خود آن نقطه است.

* **دیر نکات:** بازتاب موقعیت شکل را حفظ نمی‌کند (جای شکل رو تغییر میدهد). مساحت و محیط شکل را با توجه به اینکه طولپایا است، تغییر می‌دهد*



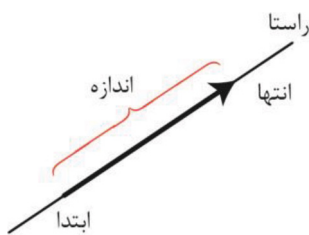
انتقال

* انتقال T تحت بردار $\vec{v}$ تبدیلی از صفحه است که در آن تصویر هر نقطه A از صفحه P نقطه‌ای مانند در

$$\overline{AA'} = \vec{v}$$

همان صفحه است که $\vec{v}$ بردار مانند A' شکل مقابل ابتدا انتها اندازه و راستا دارد.

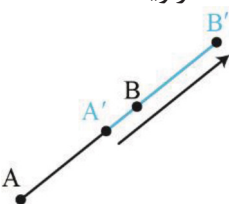
* دو بردار که هم اندازه هم راستا و هم جهت باشند دو بردار برابرند.



* در هر انتقال اندازه هر پاره‌خط و اندازه تصویر آن با هم برابرند، به عبارتی انتقال طولپایا است. زاویه‌ها حفظ می‌شوند.

مساحت و محیط شکل‌ها پس از هر انتقال ثابت می‌ماند.

* انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.



ممکن است در بعضی انتقال‌ها نقطه ثابت تبدیل داشته باشیم برای مثال **فاصله $A'B$ نقاط ثابت تبدیل هستند.**

دوران

* دوران R به مرکز نقطه ثابت O و زاویه α تبدیلی از صفحه است که در آن اگر A تصویر نقطه A باشد داریم

$$AOA' = \alpha \quad OA = OA'$$

* در هر دوران اندازه هر پاره خط و تصویر آن با هم برابرند (طولپا است)

* اگر هر نقطه دوران یافته را به تصویر آن وصل کنیم مثل AA' ، عمود منصف AA' از نقطه $\square$ (مرکز دوران) می‌گذرد.

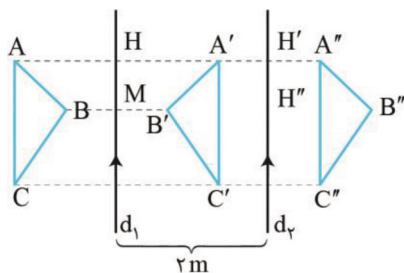
* دوران شیب خط را حفظ نمی‌کند. مگر آنکه α مضربی از 180° باشد.

* دوران جهت شکل را حفظ می‌کند.

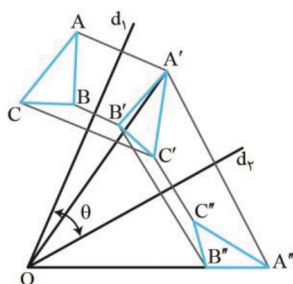
* مرکز دوران O همیشه ثابت تبدیل است.

ترکیب دو بازتاب با محورهای موازی هم می‌شود انتقال

$$AA'' = 2m$$



ترکیب دو بازتاب با محورهای متقاطع می‌شود دوران دوران از نقطه تقاطع دو محور بازتاب O



$$AOA'' = 2\theta$$

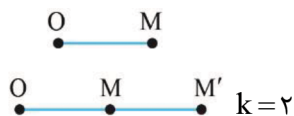
تجانس

ساده‌ترین تبدیل از نوع تبدیل‌هایی که در آن‌ها تشابه به کار می‌رود، تجانس است. در تجانس ابعاد شکل با

نسبت k آن را نسبت تجانس (مقیاس) می‌نامیم، بزرگ یا کوچک M' می‌شود.

اگر O نقطه‌ای ثابت در صفحه و k یک عدد حقیقی باشد نقطه را مجانس نقطه M در تجانس به مرکز O و

نسبت تجانس k گوییم:



(۱) نقاط O، M و M' روی یک خط راست باشند.

$$OM' = |k| \cdot OM$$

(۲) اگر $k > 0$ باشد M' روی نیم‌خط OM و نقاط M و M' در یک طرف نقطه O هستند.



اگر $k < 0$ باشد O نقطه بین نقاط M و M' قرار می‌گیرد.

* در تجانس به مرکز O و نسبت K، نقطه M' مجانس نقطه M به نسبت k و نقطه M مجانس M' ، نسبت $\frac{1}{k}$ است.

$$d' = k|d|$$

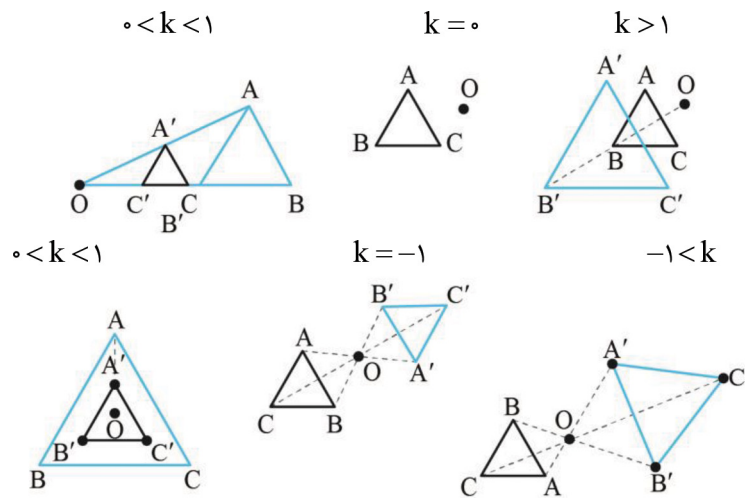
$$S' = k^2 S$$

* تجانس طولی نیست (زیرا اندازه‌ها در این تبدیل عوض می‌شوند)

طول هر پاره خط در مقایسه با تجانس یافته آن:

در مساحت نسبت k^2 می‌شود یعنی:

حفظ مساحت	حفظ محیط	حفظ جهت	حفظ شیب	حفظ زاویه	طولپایی	حفظ موقعیت		
×	×	✓	✓	✓	×	×	$k > 1$	
✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	$k = 1$	$k > 0$
×	×	✓	✓	✓	×	×	$0 < k < 1$	
×	×	✓	✓	✓	×	×	$-1 < k < 0$	
✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	$k = -1$	$k < 0$
×	×	✓	✓	✓	×	×	$k < -1$	



در تجانس به مرکز O و نسبت k

اگر $|k| < 1$ شکل کوچک می‌شود و می‌گوییم انقباض

اگر $k > 0$ تجانس مستقیم

اگر $|k| > 1$ شکل بزرگ می‌شود و می‌گوییم انبساط

اگر $k < 0$ تجانس معکوس

تبدیل همانی

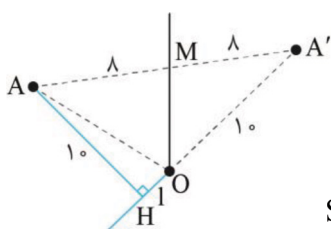
تبدیلی را همانی گوئیم هرگاه به ازای هر نقطه A از صفحه P داشته باشیم $T(A) = A$ معمولاً تبدیل‌های همانی

را با I نمایش می‌دهند پس $I(A) = A$

هرگاه بردار انتقال صفر باشد و در دوران زاویه دورانی 360° باشد و در تجانس $k=1$ باشد تبدیل همانی داریم.

سؤال نقطه A' تصویر نقطه A در بازتاب نسبت به خط l است. اگر $AA' = 16$ و O نقطه‌ای روی خط l و $OA = 10$ باشد، فاصله نقطه A از خط OA' چقدر است؟

جواب



$$AH = ?$$

$$OM' = 100 - 64 = 36$$

$$OM = 6$$

$$S_{\triangle OAA'} = \frac{16 \times 6}{x} = 48$$

$$48 = \frac{10 \times AH}{2}$$

$$AH = \frac{96}{10} = 9.6$$

سؤال) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

انتقال با بردار $\vec{V} (\vec{V} \neq 0)$ ، نقطه ثابت دارد نادرست

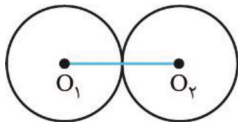
دوران مربع ABCD به مرکز محل تلاقی قطرهایش با زاویه 270° درجه (پادساعتگرد) یک تبدیل همانی است. نادرست

بازتاب هیچ‌گاه شیب خط را حفظ نمی‌کند نادرست

سؤال) دایره $C_1(O_1, 5)$ با برداری به طول ۱۰ به دایره $C_2(O_2, R_2)$ انتقال می‌دهیم. وضع دو دایره نسبت به یکدیگر را به دست آورید.

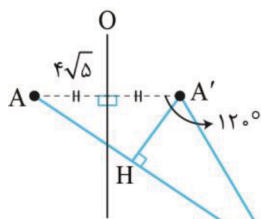
جواب) آنجا که انتقال یک تبدیل طولپاست، پس شعاع دایره دوم نیز، ۵ است.

؟؟؟ $R_1 = R_2 = 5$. از آنجا که طول بردار انتقال ۱۰ است، پس $O_1O_2 = 10$ ، پس $O_1O_2 = R_1 + R_2$. پس دو دایره مماس ؟؟؟؟ هستند. $1/5$ نمره



سؤال) نقطه A به فاصله $4\sqrt{5}$ خط d قرار دارد. تصویر نقطه A را تحت بازتاب نسبت به خط d، نقطه A' می‌نامیم. نقطه A را حول نقطه A' به اندازه 120° درجه دوران می‌دهیم تا نقطه A'' حاصل شود. طول پاره خط AA'' چقدر است؟

جواب)



$$AA'H : \sin 60^\circ = \frac{AH}{8\sqrt{5}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{8\sqrt{5}} \rightarrow AH = 4\sqrt{15}$$

$$\rightarrow AA'' = 2AH = 8\sqrt{15}$$

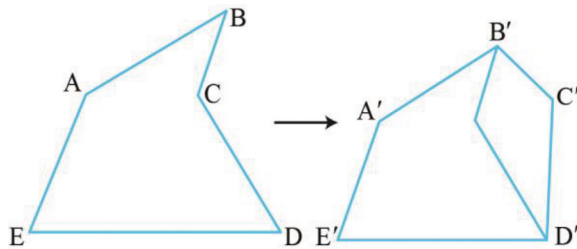


برای تقسیم اشکال نامتقارن به دو نیم مساوی از کاربرد بازتاب استفاده می‌کنیم. مثل تقسیم به دو نیم.

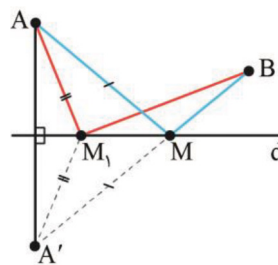
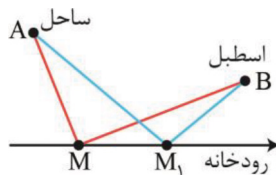
یکی از کاربرهای بازتاب، حل مسائل هم پیرامونی یا هم محیطی است. یعنی محیط یک چند ضلعی تغییر نکند و مساحت آن عوض بشه.

مثال: زمین ABCDE را داریم، می‌خواهیم با ثابت نگه داشتن محیط و تعداد اضلاع این چند ضلعی برای اینکه تغییر نکند مساحت زمین را افزایش بدهیم.

ابتدا BD را رسم می‌کنیم و سپس نسبت به خط مفروض نقطه C را انتخاب می‌کنیم با توجه به اینکه بازتاب طولیاست پس BC, BC', DC, DC'



مسئله هرون مردی می‌خواهد برای برداشتن آب از خانه به ساحل رودخانه‌ای که لبه مستقیمی دارد برود و بعد سطل آب را به اسطبل ببرد. برای رفتن کمتری مسافت باید چه مسیری را طی کند؟



جواب)

ابتدا بازتاب نقطه A را نسبت به d رسم می‌کنیم، A' می‌گوییم.

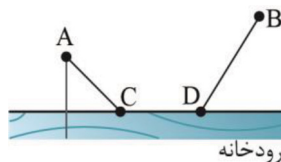
خط $A'B$ را رسم می‌کنیم که d را در نقطه M قطع می‌کند.

خط d عمود منصف AA' است پس هر نقطه‌ای روی عمود منصف از دو سر پاره خط AA' به یک فاصله است.

اثبات می‌کنیم $AM + MB$ کمترین فاصله است.

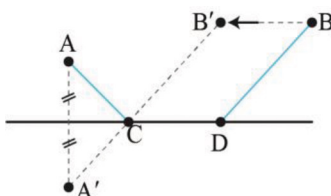
$$\left. \begin{array}{l} M_1A = M_1A' \\ \triangle A'M_1B \rightarrow \text{نامساوی مثلث} \\ A'M_1 + M_1B > A'B \\ A'B = A'M + MB \end{array} \right\} \rightarrow \text{ثابت می‌شود}$$

سؤال) دو شهر A و B مطابق شکل در یک طرف رودخانه‌ای واقع هستند می‌خواهیم جاده‌ای از A به B بسازیم به طوری که ۴km از این جاده در ساحل رودخانه ساخته شود. این جاده را در چه قسمتی بسازیم که ACDB کوتاه‌ترین مسیر باشد؟



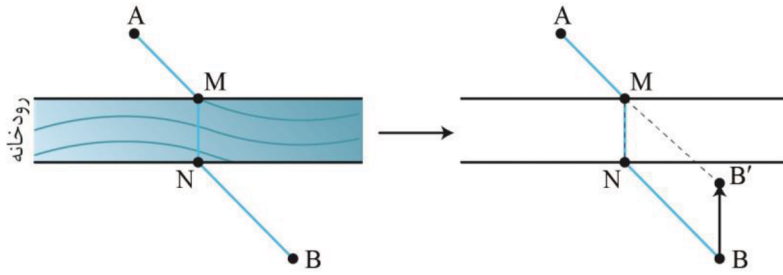
جواب)

ابتدا A را نسبت به d بازتاب می‌کنیم و می‌شود A' . B را موازی با d به اندازه جاده ۴km ای جلو می‌بریم و B' می‌نامیم. $A'B'$ را رسم می‌کنیم در نقطه تقاطع $A'B'$ با d مشخص می‌شود که حالا باید کجا باشد.



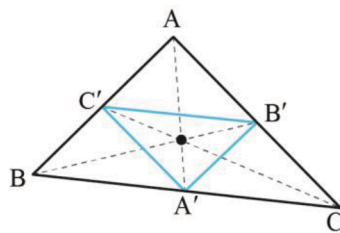
سؤال) مشابه مسئله قبل اگر بخواهیم پلی روی رودخانه بزنیم که فاصله AMNB کمترین مسافت باشد باید:

جواب)

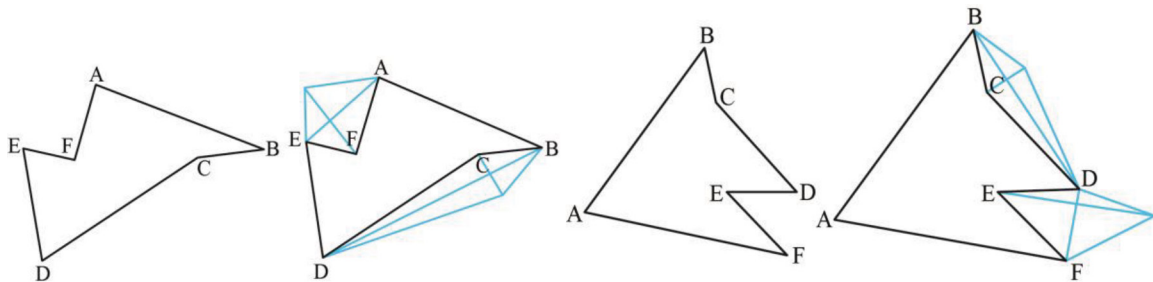


اگر مثلث ABC را داشته باشیم، محل برخورد میانه‌های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد اگر مثلث $A'B'C'$ مجانس ΔABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{3}$ باشد $\Leftarrow$ جایگاه رأس‌های A', B', C' در محل تقاطع میانه‌های مثلث

با اضلاع آن است. نسبت مساحت مثلث $A'B'C'$ به مثلث ABC می‌شود $\Leftarrow$

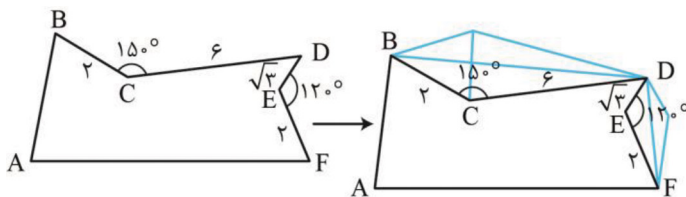


سؤال) مسائل هم پیرامونی زیر را حل کنید.



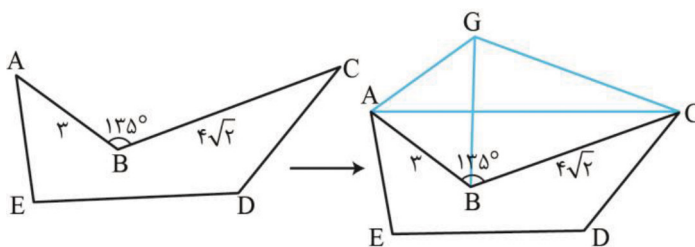
سؤال) زمینی به شکل زیر داریم می‌خواهیم بدون آن که محیط تغییر کند مساحت را افزایش دهیم. میزان افزایش S چقدر می‌شود.

جواب)



$$BCDE \Rightarrow 2S = 2\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 6 \times \sin 150^\circ\right) = 6$$

$$DEFP \Rightarrow 2S = 2\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sin 120^\circ\right) = 3$$



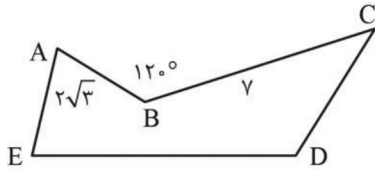
$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \cdot \sin \theta \quad \text{تا مثلث ایجاد می‌شود}$$

$$2S = 2\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \sin 135^\circ\right) = 12$$

$$S_1 + S_2 = 6 + 2 = 8$$

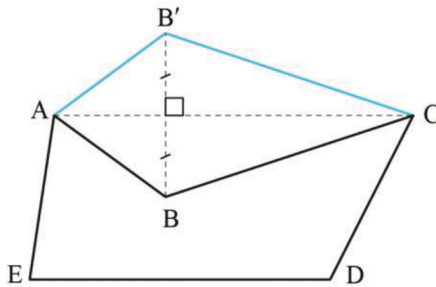
سؤال) در پنج ضلعی شکل مقابل می‌خواهیم بدون تغییر طول اضلاع و بدون تغییر زوایای E و D، مساحت را افزایش دهیم. مقدار افزایش مساحت را با کمک بازتاب و ویژگی‌های آن محاسبه کنید.

جواب) بازتاب نقطه B را نسبت به خط AC، نقطه B' می‌نامیم.



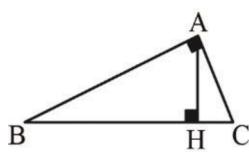
بازتاب ایزومتری است:

$$AB' = AB, CB' = CB, S_{ABC} = S_{AB'C}$$



$$\begin{aligned} \text{افزایش مساحت} &= S_{AB'C} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{3}) (7) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 21 \end{aligned}$$

روابط طولی ← رابطه‌هایی که در مورد اندازه‌های پاره‌خط‌ها و زاویه‌ها در شکل‌های مختلف هستند.



$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$AC^2 = CH^2 + AH^2$$

$$\frac{1}{ha^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

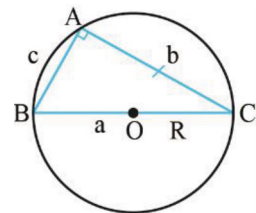
$$ha = AH$$

$$AH^2 = BH^2 + HC^2$$

$$AB + AC = BC + AH$$

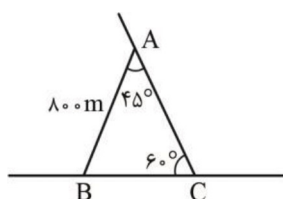
قضیه سینوس‌ها) در هر مثلث دلخواه نسبت اندازه هر ضلع به سینوس زاویه روبه‌روی آن برابر است با اندازه وتر این نسبت برابر است با اندازه قطر دایره محیطی مثلث

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



سؤال) از یک بلوار افقی یک خیابان فرعی باریک با زاویه ۶۰° جدا شده است. اگر بخواهیم یک خیابان فرعی دیگر به طول ۸۰۰ متر بنا کند تا با زاویه ۴۵° از خیابان فرعی اول جدا و به بلوار منتهی شود. این خیابان از چه فاصله‌ای از رأس زاویه ۶۰° شروع شود و چه زاویه‌ای با بلوار بسازد؟

جواب) مسئله را مدل‌سازی می‌کنیم.



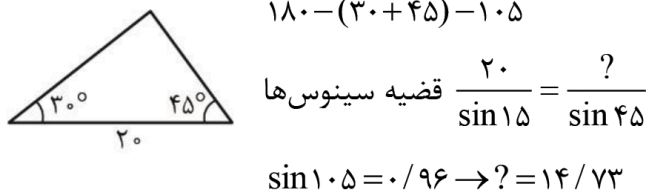
$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \rightarrow \frac{800}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$BC = \frac{800\sqrt{6}}{3}$$

با توجه به مجموع زوایای داخل مثلث ۷۵ = ۱۸۰ - (۴۵ + ۶۰)

سؤال) دو ایستگاه رادار که در فاصله ۲۰ km از هم واقع اند، هواپیمایی را با زاویه های ۳۰ و ۴۵ رصد کرده اند فاصله هواپیما از دو ایستگاه را به دست آورید.

جواب)



$$\frac{20}{\sin 105} = \frac{?}{\sin 30} \rightarrow ? = 14/14$$

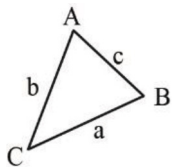
سؤال) در مثلث ABC ، $BC = 10$ ، $A = 120^\circ$ و $AC = \frac{10\sqrt{6}}{3}$ شعاع دایره محیطی مثلث و اندازه زاویه های B و C را بیابید.

جواب)

$$\frac{a}{\sin 120} = 2R \Rightarrow R = \frac{10}{\sqrt{3}} \quad (0/5)$$

$$\frac{10}{\sin 120} = \frac{10\sqrt{6}}{\sin B} \quad (0/25) \quad \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (0/25) \Rightarrow B = 45^\circ \quad (0/25)$$

قضیه کسینوس ها) در هر مثلث، مربع اندازه هر ضلع برابر است با مجموع مربع های اندازه های دو ضلع دیگر، منهای دو برابر حاصل ضرب اندازه آن دو ضلع در کسینوس زاویه بین آن ها:



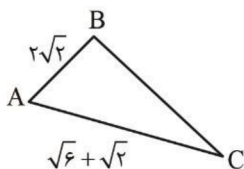
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

سؤال) در مثلث ABC ، $AB = 2\sqrt{2}$ و $AC = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ و $A = 60^\circ$ طول ضلع BC را محاسبه کنید:

جواب)

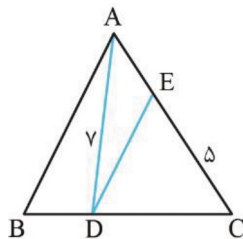


$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2(AB)(AC) \cos A$$

$$BC^2 = 8 + 6 + 2 + 4\sqrt{3} - 2(2\sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \times \frac{1}{2}$$

$$BC^2 = 16 + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 4 = 12$$

سؤال) در مثلث متساوی الاضلاع ABC به ضلع ۸ واحد نقطه D که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله ای دارد؟



نقطه E که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله ای است؟

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos B$$

$$49 = 64 + BD^2 - 2(8)(BD)\left(\frac{1}{2}\right) \quad BD^2 - 8BD - 15 = 0$$

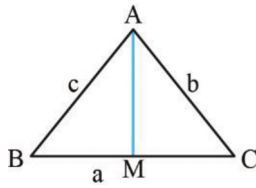
جواب)

$$(BD - 3)(BD - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} BD = 3 \checkmark \\ BD = 5 \times \end{cases} \quad CD > BD \quad CD = 5$$

از آنجایی که $CD = 5$ و $EC = 5$ و $C = 60^\circ$ در نتیجه EDC مثلث متساوی الاضلاع است پس $E = 60^\circ$

$$180 - 60 = 120 \leftarrow AED$$

قضیه میانه‌ها)



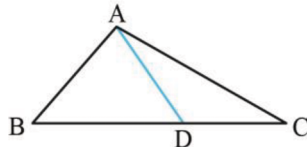
$$b^2 + c^2 = 2AM^2 + \frac{a^2}{2}$$

قضیه استوارت)

$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot BD = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC$$

اگر D نقطه‌های دلخواه روی BC باشد:

سؤال) در مثلث ABC شکل زیر مطلوبست طول BC را بیابید.



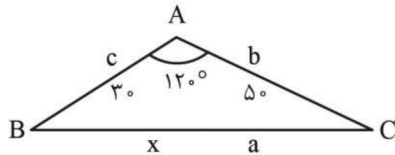
$$a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos 120^\circ$$

$$a^2 = 900 \times 2500 + 2 \times 1500 \cdot \cos 60^\circ$$

$$a^2 = 900 + 2500 + 3000 \times \frac{1}{2}$$

$$a^2 = 4900 \rightarrow a = 70$$

سؤال) در مثلث ABC شکل زیر، طول میانه وارد بر ضلع BC را به دست آورید.



$$2xa^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

$$2xa^2 + \frac{a^2}{2} = 6 + 4$$

$$2xa^2 + 32 = 10$$

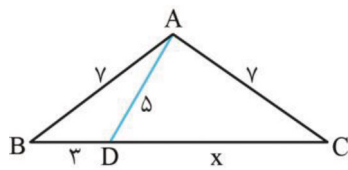
$$x_a = 10 \rightarrow x_a = \sqrt{10}$$

سؤال) اگر در مثلث ABC و و باشد، در این صورت اندازه میانه وارد بر ضلع BC را بیابید.

$$AB^2 + AC^2 = 2m_a^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow 16 + 36 = 2m_a^2 + 32 \Rightarrow 2m_a^2 = 20 \Rightarrow m_a = \sqrt{10}$$

سؤال) در شکل مقابل، اندازه X را به دست آورید.



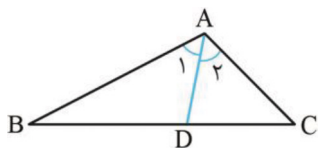
$$49(3+x)$$

$$25 = 3 \times 49 + x + 49 - 3x$$

$$3x = 24 \rightarrow x = 8$$

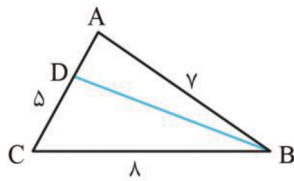
قضیه نیمسازهای زوایای داخلی) در هر مثلث نیمساز هر زاویه داخلی، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت

اندازه‌های ضلع‌های آن زاویه تقسیم می‌کند.



$$\text{فرض } A_1 = A_2 \rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

سؤال) در مثلث ABC ، $AB=7$ و $AC=5$ و $BC=8$. طول های دو قطعه ای را به دست آورید که نیمساز زاویه B روی ضلع مقابل ایجاد کند.

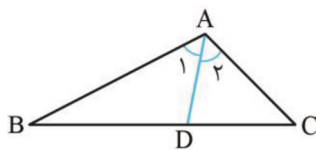


$$AC - CD = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \rightarrow \frac{7}{8} = \frac{AD}{DC} \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{15}{8} = \frac{AD+DC}{DC} \Rightarrow CD = \frac{8}{4}$$

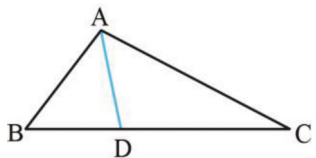
جواب)

طول نیمسازهای زوایای داخلی) در هر مثلث مربع اندازه هر نیمساز داخلی برابر است با حاصل ضرب اندازه دو ضلع زاویه، منهای حاصل ضرب اندازه دو قطعه ای که نیمساز روی ضلع مقابل ایجاد می کند.



$$AD^2 = AB \cdot AC = BD \cdot DC$$

سؤال) در مثلث ABC ، $AB=3$ ، AD ، $BC=7$ است. طول نیمساز زاویه A را بیابید.



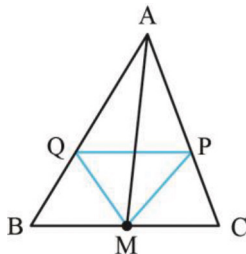
$$BD = \frac{21}{8} \quad CD = \frac{35}{8}$$

$$AD^2 = 3 \times 5 = \frac{35}{8} \times \frac{21}{8} = \frac{225}{64}$$

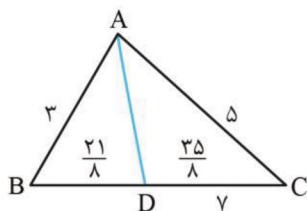
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BD}{CD} \rightarrow \frac{3}{8} = \frac{BD}{7} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}$$

جواب)

* در مثلث ABC ، M وسط و نیمسازهای زوایای AMB و AMC هستند.



سؤال) در شکل زیر، AD نیمساز زاویه داخلی A از مثلث ABC باشد مطلوب است:



الف) $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{BD}{CD}$

ب) طول نیمساز AD چقدر است؟

$$BD + 3CD \Rightarrow CD + BD = 7 \Rightarrow \frac{B}{D} = \frac{3}{5} CD$$

$$BD = 7 - \frac{35}{8} \Rightarrow BD = \frac{21}{8}$$

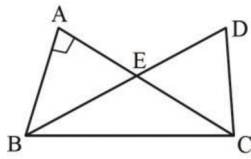
جواب)

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

$$AD^2 = 3 \times 5 - \frac{21}{8} \times \frac{35}{8}$$

$$AD^2 = 15 - \frac{\sqrt{35}}{64} \Rightarrow AD^2 = \frac{225}{64} - AD = \frac{15}{8}$$

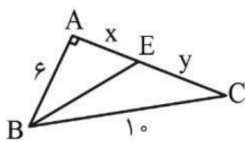
سؤال) در شکل مقابل BD نیمساز B است. اگر $BE = ED$ ، $AB = 6$ و $BC = 10$ و طول پاره خط CD چقدر است؟
($A = 90^\circ$)



جواب)

CE میانه خط BD $BE = ED \rightarrow$
 $BE^2 = 6^2 - 15 - 45 \Rightarrow BE = 3\sqrt{5} = ED$
 قضیه میانه‌ها: $CD^2 + BC^2 = 2CE^2 + \frac{(2ED)^2}{2}$

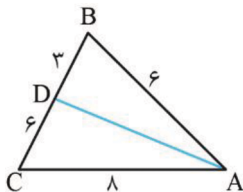
$$CD^2 + 100 = 2 \times 25 + \frac{45}{1} \times 2 = 140 \rightarrow CD^2 = 40 \rightarrow CD = 2\sqrt{10}$$



طبق فیثاغورث $AC = 8$
 $y = 5$
 $\frac{x}{6} - \frac{y}{10} \rightarrow x = \frac{2y}{10} \rightarrow x + y = 8 \quad x = 3$

سؤال) در مثلث ABC شکل مقابل، طول AD را به دست آورید.

جواب)



$$6^2 \cdot 6 + 8^2 \cdot 3 = AD^2 \cdot 9 + 3 \times 6 \times 9$$

$$216 + 192 = 9(AD^2 + 18) \Rightarrow AD \cong 5/2$$

سؤال) در مثلث ABC، $AB = 6$ ، $AC = 10$ ، $BC = 8$ است. طول نیمساز زاویه A را محاسبه کنید.

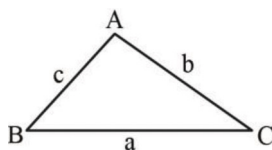
جواب)

$$AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{8-x} \Rightarrow 10x = 48 - 6x \Rightarrow 16x = 48 \Rightarrow x = 3$$

$$AD^2 = 6 \times 10 - 3 \times 5 = 60 - 15 = 45 \Rightarrow AD = 3\sqrt{5}$$

مساحت مثلث به دستور هرون



$$S = \sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)}$$

در این دستور $P = \frac{a+b+c}{2}$

سؤال) مساحت مثلث با اضلاع به طول‌های ۱۳، ۱۴ و ۱۵ به کمک دستور هرون برابر است:

جواب)

$$S = \sqrt{21 \times 6 \times 7 \times 8} = 84$$

$$2P = 13 + 14 + 15 = 42 \quad P = 21$$

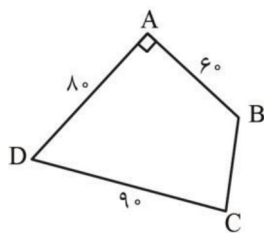
$$h_a = \frac{2s}{a} \quad h_b = \frac{2s}{b} \quad h_c = \frac{2s}{c}$$

* ارتفاع‌های مثلث را می‌توانیم با این رابطه محاسبه کنیم

سؤال) مساحت ۴ ضلعی زیر را محاسبه کنید.

جواب)

از B به D وصل می‌کنیم. مثلث بالایی مثلثی قائم‌الزاویه است. پس طبق فیثاغورس داریم:



$$AB^2 + AD^2 = BD^2$$

$$60^2 + 80^2 = 100^2$$

$$BD = 100$$

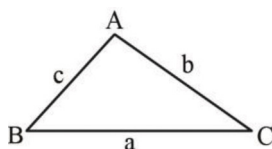
$$S_1 = \frac{AB \times AD}{2} \Rightarrow \frac{60 \times 80}{2} = 2400$$

$$S_2 \Rightarrow P = \frac{50 + 90 + 100}{2} = 120$$

$$S = \sqrt{120 \cdot (70) \cdot (30) \cdot (20)} = 600\sqrt{14}$$

$$S = S_1 + S_2 = 2400 + 600\sqrt{14}$$

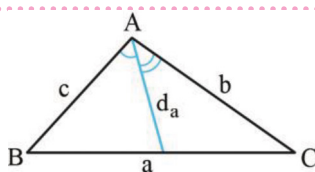
* مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب اندازه‌های هر دو ضلع در سینوس زاویه بین آن‌ها:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

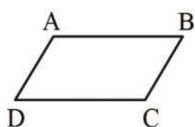
* مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a:



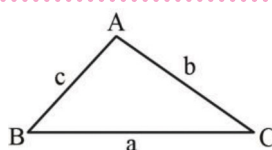
* روش دیگری برای محاسبه طول نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث

$$b_a = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c}$$

* مساحت هر متوازی‌الاضلاع برابر است با حاصل ضرب دو ضلع مجاور در سینوس زاویه بین آن دو ضلع:



با هر زاویه می‌توان نوشت $S = AB \cdot AD \cdot \sin A$ یا $S = AB \cdot BC \cdot \sin B$



$$A > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

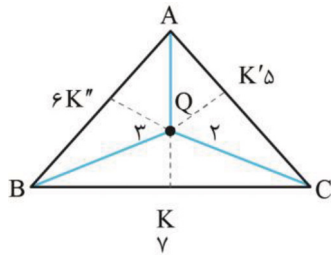
$$A = 90^\circ \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$A < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

* در مثلث ABC ←

سؤال) در مثلث ABC، به اضلاع ۵ و ۶ و ۷ سانتی‌متر، نقطه‌ای که از اضلاع به طول‌های ۵ و ۶ به فاصله ۳ و ۲ سانتی‌متر است، از ضلع بزرگ‌تر چه فاصله‌ای دارد؟

جواب)



$$P = 9 \quad (0/25)$$

$$S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{6} \quad (0/25)$$

$$S_{BQC} = \frac{1}{2} QK \cdot BC = \frac{7}{2} QK \quad (0/25)$$

$$S_{ABC} = S_{AQB} + S_{AQC} + S_{BQC} \quad (0/25)$$

$$6\sqrt{6} = 9 + 5 + \frac{7}{2} QK \quad (0/25)$$

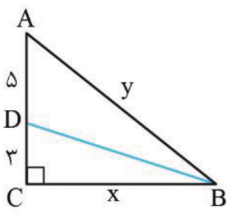
$$QK = \frac{12\sqrt{6} - 28}{7} \quad (0/25)$$

$$S_{\triangle AQB} = \frac{1}{2} QK' \cdot AB = 9 \quad (0/25)$$

$$S_{AQC} = \frac{1}{2} QK'' \cdot AC = 5 \quad (0/25)$$

سؤال) در مثلث قائم‌الزاویه ABC، نیمساز زاویه B روی ضلع متوسط مثلث قطعاتی با اندازه‌های ۳ و ۵ ایجاد می‌کند طول نیمساز B چقدر است؟

جواب)



$$\frac{5}{y} = \frac{3}{x} \rightarrow \frac{5}{3} x = y$$

$$\rightarrow 1^2 + x^2 = y^2 \rightarrow 1^2 = \frac{16}{9} x^2 \Rightarrow x = 6$$

$$y = 10$$

$$BD^2 = x \cdot y - 5 \times 3 \rightarrow BD^2 = 60 - 15 = 45 \rightarrow \boxed{BD = 3\sqrt{5}}$$

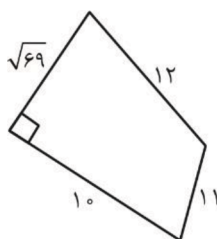
سؤال) در متوازی‌الاضلاع اندازه دو ضلع مجاور ۶ و ۱۱ و زاویه بین این دو ۱۳۵ درجه است. مساحت متوازی‌الاضلاع را بیابید.

جواب)

$$S = 6 \times 11 \times \sin 135^\circ = 66 \frac{\sqrt{2}}{2} = 33\sqrt{2}$$

سؤال) زمینی به شکل روبه‌رو داریم. مساحت زمین را به دست آورید.

جواب)



$$AC = \sqrt{10^2 + 69} = \sqrt{169} = 13 \Rightarrow S_{ADC} = \frac{10 \times \sqrt{69}}{2} = 5\sqrt{69} \cdot 2P_{ABC} = 12 + 13 + 11 = 36$$

$$S = \sqrt{P(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(7)(6)(5)} = 6\sqrt{105}$$

$$S_{\text{total}} = 5\sqrt{69} + 6\sqrt{105}$$