

بچه‌ی نوتروفیلی من ، سلام 🍷

به رسم همیشه که توی این مسیر کنارت بودیم ، این بار هم یک مجموعه سوال برای شب امتحانات آماده کردیم که با کار کردنشون تسلط رو افزایش بدی و به امید خدا بری واسه نمره‌ی ۲۰ 🍷
جان دلم نترسی از سختی امتحانات اگه به کتاب درسی کاملاً مسلط باشی و این مجموعه سوال رو هم به عنوان مکمل حل کنی مطمئن باش نمره‌ت بهتر از چیزی که فکرش رو کنی میشه 🍷
یادت باشه امتحانات نهایی رو جدی رو بگیری چون با نمره‌ی خوب این امتحانات کار کنکور رو خیلی آسون میکنی
یه حرف دلی هم دارم با بچه‌هایی که کمی دیرتر شروع کردن ...
مبادا خودت رو ببازی بچه‌ی من امید دارم بهت و میدونم اگه خوب بخونی قطعاً میتونی نمره‌ی عالی بگیری پس پرقدرت بریم واسه ترکوندن اولین امتحان 🍷
یادت نره این فایل رو برای اون دوستت که بهش احتیاج داره بفرستی و جزئی از این زنجیره‌ی عشق و مهربونی باشی 🍷
پ ن: مرسی که با وجود درگیری‌های ذهنی و عدم تمرکزی که ماجرای کارت ورود به جلسه براتون به همراه داشت ، همچنان قوی موندی و ادامه میدی 🍷
به امید روزی که اینجا به عنوان همکار کنار خانواده‌ی بزرگ نوتروفیل باشی



دوست همیشگی تو ، نوتروفیل



روش مطالعه :

قبل از هر چیزی یادت باشه از ریاضی نترسی !
ریاضی نهایی نسبت به کنکور خیلی ساده تره و اگه خوب بخونی میتونی ازش نمره ی خوب بگیری .
بهترین روش برای خوندن درس ریاضی اینه اول بری سراغ یه درسنامه ی خلاصه و در عین حال کامل . بعد تمام تمارین کتاب درسی رو مسلط بشی . حالا وقتشه بری سراغ یه مجموعه نمونه سوال خفن که همه ی تیپ سوالات رو پوشش بده و با حل کردن نمونه سوال کاملا به مطلب مسلط بشی . مرور فرمول ها و نکات مهم هم یادت نره

سوالات مربوط به هر فصل از این شماره ها شروع میشه

فصل ۱: ۱

فصل ۲: ۳۳

فصل ۳: ۵۴

فصل ۴: ۸۳

فصل ۵: ۱۱۲

فصل ۶: ۱۴۲

فصل ۷: ۱۷۲



بارم بندی ریاضی یازدهم تجربی

فصل	نوبت اول	نوبت دوم
۱	۶	۲
۲	۶	۲/۵
۳	۶	۲/۵
۴	۲ / تا صفحه ۷۶	۳
۵		۳/۵
۶		۳/۵
۷		۳



ریاضی یازدهم تجربی

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱ مجموع ریشههای معادله درجه دوم $3x^2 = 6x + 1$ برابر -2 است.

جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

۲ معادله درجه دومی که ریشههایش -4 و 3 باشد، به صورت قابل نمایش است.

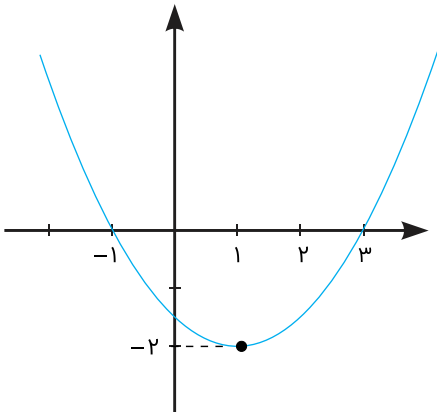
۳ خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

۴ به ازای چه مقدار از a جواب معادله داده شده $x = 2$ است؟

$$\frac{2ax}{x+1} + \frac{1}{3} = ax - 2$$

۵ معادله $\sqrt{x+2} = 4 - x$ را حل کنید.

۶ ضابطه سهمی زیر را مشخص کنید.



۷ خط L به معادله $2y - 3x = 1$ و خط T با عرض از مبدأ 5 به معادله $y = mx + 5$ را در نظر بگیرید.

الف m را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

ب به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمودند؟

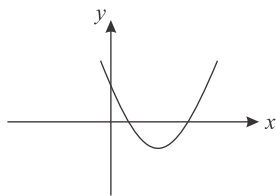
۸ به روش جبری معادله $|x| = \sqrt{2-x}$ را حل کنید.

۹ اگر $x = 2$ یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + 4$ باشد، سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.



۱۰

در شکل زیر، سهمی به معادله $f(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. علامت ضرایب a و b و c و تعداد ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را تعیین کنید.



۱۱

معادله درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1 - \sqrt{5}$ و $1 + \sqrt{5}$ باشد.

۱۲

معادله $\sqrt{x+2} - x = -4$ را حل کنید.

۱۳

معادله گویای زیر را حل کنید:

$$\frac{x-1}{x+3} = \frac{x+2}{x+4}$$

۱۴

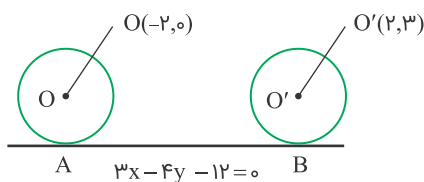
مساحت مربعی که یک رأس آن $A(0, 2)$ و معادله یک ضلع آن $3x - 4y + 1 = 0$ است، بیابید.

۱۵

هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، سؤالات امتحانی دبیرستان علوی را در ۶ ساعت چاپ می‌کنند. چاپگر قدیمی ۵ ساعت دیرتر اوراق امتحانی را چاپ می‌کند. در این صورت چاپگر جدید در چند ساعت سؤالات امتحانی را چاپ می‌کند؟

۱۶

دایره C به مرکز $(-2, 0)$ چرخش از نقطه A روی خط $3x - 4y - 12 = 0$ روی دایره C' به مرکز $(2, 3)$ قرار می‌گیرد، مساحت $AOO'B$ کدام است؟



جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید:

۱۷

قرینه نقطه $A(-2, 6)$ نسبت به نقطه $B(1, 2)$ برابر است.

۱۸

معادله عمودمنصف AB را بیابید.

$$A(2, -1) \quad B(4, 3)$$

۱۹

در معادله $-4x^2 + x + 8 = 0$ ، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را بیابید.

۲۰

حدود m را طوری تعیین کنید تا معادله $x^2 - (m+1)x + m = 0$ دو ریشه متمایز مثبت داشته باشد.

۲۱

اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 5x - 1 = 0$ باشد، حاصل $A = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3$ را به دست آورید.

۲۲

فاصله مبدأ مختصات از خط گذرنده از نقطه $(1, 7)$ برابر $\sqrt{5}$ است. شیب خط را به دست آورید.

۲۳

نقاط $A(m, 2m+1)$ و $B(2m, -m+3)$ را در نظر بگیرید. مقدار m را طوری تعیین کنید که وسط پاره خط AB روی نیمساز ناحیه دوم و چهارم باشد.

۲۴ نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.

۲۵ دو کارگر کاری را در ۱۶ روز با یکدیگر انجام می دهند. اگر هریک به تنهایی کار کنند، کارگر اول ۶۰ روز زودتر کار را تمام می کند. هرکدام از کارگرها به تنهایی کار را در چند روز انجام می دهند؟

۲۶ عدد صحیحی را بیابید که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.

۲۷ $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ دو رأس مجاور مربع $ABCD$ هستند که این مربع در ناحیه اول صفحه مختصات واقع است. مختصات رئوس C و D را به دست آورید.

۲۸ فاصله دو خط $\frac{4}{9}x + \frac{y}{3} - 1 = 0$ و $3y = -4x - 3$ را به دست آورید و معادله خطی که با این دو خط موازی می باشد و از دو خط به یک فاصله است را بیابید.

۲۹ اگر $x = 1$ یکی از ریشه های معادله $(2k + 1)x^2 + x - 4 = 0$ باشد، حاصل ضرب ریشه ها چقدر است؟

۳۰ اگر α یکی از ریشه های معادله $x^3 - 7x + 4 = 0$ باشد، حاصل $\alpha^2 - \frac{4}{\alpha}$ را به دست آورید.

۳۱ فاصله بین دو شهر ساحلی ۱۸۰ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می رود و برمی گردد. اگر سرعت کشتی ۱۵ کیلومتر بر ساعت و اختلاف زمان رفت و برگشت، ۵ ساعت باشد، سرعت حرکت آب را به دست آورید.

۳۲ کمترین فاصله نقطه $A(4, 0)$ از نقاط نمودار $y = \sqrt{x + 1}$ چقدر است؟

۳۳ ثابت کنید که اگر x یک عدد صحیح و مضرب ۳ باشد، آنگاه $x(x + 3)$ مضرب ۱۸ است.

۳۴ عکس قضیه زیر را نوشته سپس آن را به صورت قضیه دو شرطی بنویسید.
قضیه: در هر مثلث اگر سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز باهم برابرند.
عکس قضیه:
قضیه دو شرطی:

جاهای خالی زیر را تکمیل کنید.

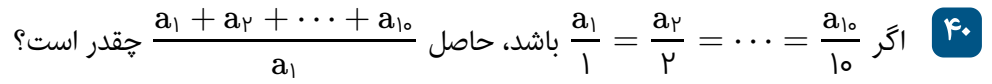
۳۵ از یک نقطه خط می گذرد.

۳۶ هر نقطه که از دو ضلع زاویه به یک فاصله باشد روی آن زاویه قرار دارد.

۳۷ فاصله نقطه A از خط d برابر ۴ می باشد. نقطه روی خط d وجود دارد که فاصله آن از نقطه A برابر ۷ باشد.

۳۸ در مثلث قائم الزاویه ABC ($A = 90^\circ$)، ارتفاع AH را رسم کرده ایم و داریم: $BH = 4$ و $CH = 8$. اندازه ضلع AC را به دست آورید.

۳۹ در شکل زیر مقدار x را بیابید.

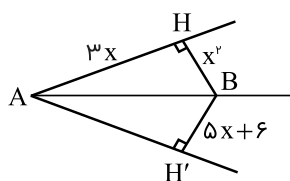


The diagram shows a triangle ABC with a line segment DE passing through it. Point C is on the side AB , and point E is on the side AC . The diagram is labeled with various mathematical expressions: angle A is labeled $x-1$, angle B is labeled $x+1$, angle C is labeled $m+\gamma$, angle D is labeled γ , and angle E is labeled γ . The side AC is labeled γ , and the side BC is labeled $\gamma m + \gamma$.

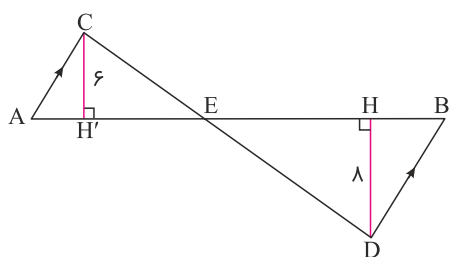
A diagram of a triangle with vertices labeled A, B, and C. Vertex A is at the top, B is at the bottom left, and C is at the bottom right. A line segment connects point E on side AB to point D on side AC. The line segment ED is drawn parallel to the base BC.



۴۶

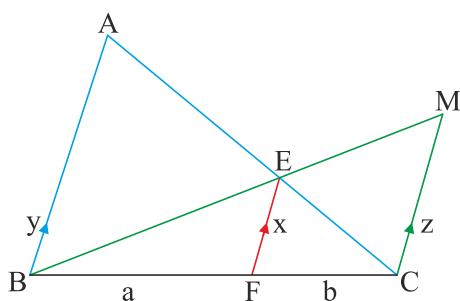


fy



法人

۱۴۹

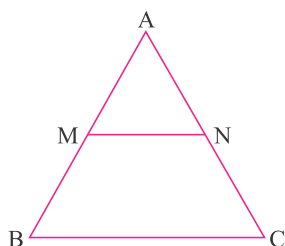


۵۱

A ●

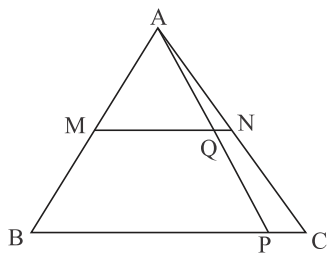
d _____

52



۵۳

در مثلث ABC خط MN موازی BC است و $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{3}$ ، همچنین $\frac{PC}{PB} = \frac{1}{4}$ است. $S(AQN)$ چه کسری از مساحت ABC است؟



۵۴

باتوجه به تعریف تابع جزء صحیح، مقادیر زیر را محاسبه کنید.

الف

$$f(x) = [-x] \Rightarrow \begin{cases} x = 1/7 \\ x = 2/3 \end{cases}$$

ب

$$f(x) = [x] + [-x] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1/3 \end{cases}$$

۵۵

اگر $f = \{(7, 1), (6, 2), (3, 0)\}$ ، $g = \{(7, 4), (3, 3), (1, 2)\}$ دو تابع باشند توابع $f \times g$ ، $f - g$ را به صورت زوج مرتب بنویسید.

۵۶

نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[0, 1]$ رسم کنید.

۵۷

در تابع خطی $f(x) = 2ax + b$ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که نمودار تابع f از نقطه $A(1, -1)$ بگذرد و محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع کند.

۵۸

اگر $f = \{(1, -1), (3, 2), (2, -2), (-3, 0)\}$ ، $g = \{(0, 3), (2, -2), (3, 1), (1, 0)\}$ دو تابع باشند:

الف

دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید.

ب

تابع $\frac{f}{g}$ را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید.

۵۹

دو تابع $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = \frac{1}{x}$ مفروض‌اند.

الف

حاصل $(f + g)(1)$ را به دست آورید.

۶۰

اگر $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ باشد $f\left(\frac{-4}{x}\right)$ را به دست آورید و درستی تساوی $f(x) \times f\left(\frac{-4}{x}\right) = -1$ را بررسی نمایید.
($x \neq \pm 2, 0$)

۶۱

دو تابع $f(x) = \sqrt{x} + 2$ و $g(x) = \frac{1}{x-4}$ را در نظر بگیرید.

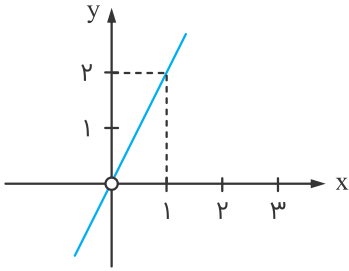
الف

دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

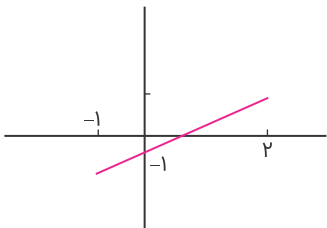
جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

۶۲ اگر $f(x) = [x + 3]$ باشد، در این صورت حاصل $f(2 - \sqrt{2})$ برابر است.

۶۳ اگر $f(x) = x^2$ ، و تابع $\frac{f}{g}(x)$ به صورت نمودار زیر باشد، ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید.



۶۴ در شکل مقابل، تابع با ضابطه $f(x) = \frac{2x-1}{3}$ در بازه $[-1, 2]$ رسم شده است. نمودار وارون این تابع را رسم کرده و ضابطه آن را بنویسید.



۶۵ نمودار تابع $f(x) = 2 + \sqrt{x+1}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

۶۶ حاصل عبارت $[-\pi] + [\frac{7}{p}] + [-0/1]$ برابر است.

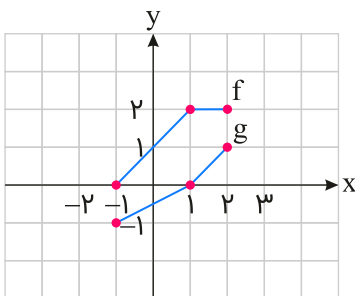
۶۷ تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ مفروض است.

الف نشان دهید تابع g ، یک به یک نیست.

ب با محدود کردن دامنه تابع g ، تابعی وارون پذیر به نام f بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۶۸ اگر $g(2x-1) = \begin{cases} 3x-2 & ; x < -1 \\ -2x+4 & ; x \geq -1 \end{cases}$ مقدار $g(-5) + g(0)$ را بیابید.

۶۹ با استفاده از نمودار توابع f و g که در شکل زیر رسم شده است، نمودار $f+g$ را رسم کنید.



۷۰ اگر $f(x) = 3x - 1$ و $g = \{(1, 0), (-1, 3), (3, 7)\}$ باشد، آنگاه حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$(2f)(-3g)(1)$$

دامنه تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ را طوری محدود کنید که تابعی وارون پذیر شود. ۷۱

آیا دو تابع زیر با هم مساوی اند؟ چرا؟ ۷۲

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5} & ; x \neq 5 \\ 6 & ; x = 5 \end{cases}, \quad g(x) = x + 5$$

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

حاصل $\left[\frac{x}{x+1}\right]$ به ازای $x = \frac{1}{3}$ برابر است. ۷۳

درستی یا نادرستی گزاره های زیر را مشخص کنید.

دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = \sqrt{x^2}$ با هم مساوی اند. ۷۴

اگر دامنه تابع f برابر با $[-1, 3]$ باشد، دامنه تابع $g(x) = -3f(2x)$ بازه $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ است. ۷۵

برد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3}$ را تعیین کنید. ۷۶

اگر $f(x) = -|x - 1|$ و $g(x) = [2x - 3]$ ، آنگاه حاصل $\left(\frac{g}{f}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ کدام است؟ ۷۷

دو تابع $f(x) = \frac{y}{x - 3}$ و $g(x) = \frac{ax + b}{x^2 + cx + d}$ با هم برابر هستند. مقادیر a, b, c, d را به دست آورید. ۷۸

در تابع خطی $f(x)$ ، اگر $f(2x - 2) + 2f(1 - x) = 9$ و $f(4) = 5$ باشند، $f(10)$ را به دست آورید. ۷۹

حاصل عبارت $[\sqrt{122}] + [\sqrt{123}] + \dots + [\sqrt{127}]$ را به دست آورید. ۸۰

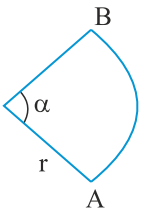
اگر $f = \{(1, 4), (2, 3), (3, 5)\}$ و $g(x) = x - 2$ باشد، تابع $f + \frac{1}{g}$ را بیابید. ۸۱

اگر f یک تابع خطی با شیب بیشتر از ۱ باشد و داشته باشیم: $f(x) + f^{-1}(x) = \frac{5}{3}x + 8$ ، حاصل $f(2)$ را به دست آورید. ۸۲

دور پیست دایره ای به شعاع ۱ کیلومتر، دوچرخه سوار 72° می چرخد، چه مسافتی طی می شود؟ ۸۳

مجموع دو زاویه $\frac{14\pi}{45}$ و نسبت آن ها $\frac{9}{5}$ است. اندازه هریک را بر حسب درجه حساب کنید. ۸۴

در قطاع زیر اگر $\alpha = 45^\circ$ و شعاع $r = 20$ باشد، طول کمان $\widehat{AB}$ را به دست آورید. ۸۵



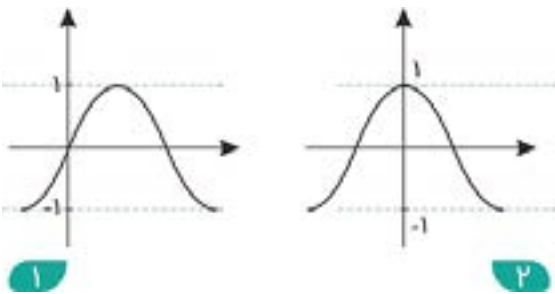
۸۶ اندازه زاویه $\frac{\pi}{36}$ رادیان را به درجه و ۱۳۵° را به رادیان تبدیل کنید.

به سوالات زیر پاسخ دهید:

۸۷ انتهای زاویه ۵ رادیان در کدام ناحیه مثلثاتی قرار دارد؟

۸۸ $\tan ۱\text{Rad}$ بزرگتر است یا $\tan ۲\text{Rad}$ ؟ چرا؟

۸۹ کدامیک از نمودارهای زیر قسمتی از نمودار $y = \cos x$ است؟ (با ذکر دلیل)



۹۰ انتهای کمانهای ۳ رادیان، ۲۰ رادیان و $۱۱/۵$ رادیان در کدام ناحیه قرار دارد؟

کمترین و بیشترین مقدار توابع زیر را به دست آورید.

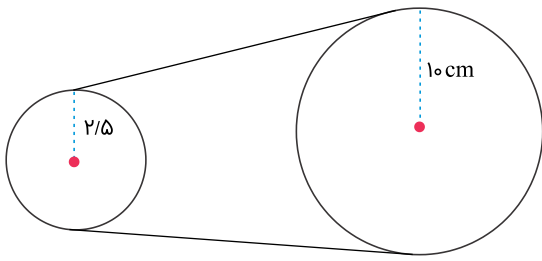
۹۱ $y = -۲ \cos x + ۳$

۹۲ $y = -۳ \sin x + ۴$

۹۳ طول برف پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴ سانتی‌متر است. فرض کنید برف پاک‌کن، کمانی به اندازه ۱۲° طی می‌کند. طول کمان طی‌شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟ ($\pi = ۳/۱۴$)

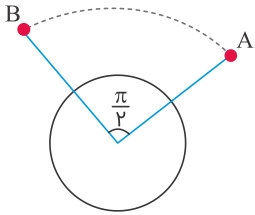
به سوالات زیر پاسخ دهید.

۹۴ در شکل زیر یک سمت دو قرقه به شعاع‌های ۱۰ cm و $۲/۵$ cm را به هم متصل کرده است. اگر قرقه بزرگتر $\frac{\pi}{۴}$ رادیان دوران کند، قرقه کوچک‌تر چند رادیان دوران می‌کند؟



۹۵

اگر ماهواره‌ای در ارتفاع ۱۶۰۰ کیلومتری سطح زمین باشد و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان در فضا جابه‌جا شود آنگاه مسافت پیموده شده توسط ماهواره چقدر است؟
($R_{\text{زمین}} = ۶۴۰۰ \text{ km}$)

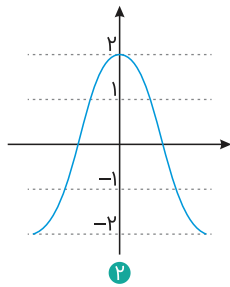
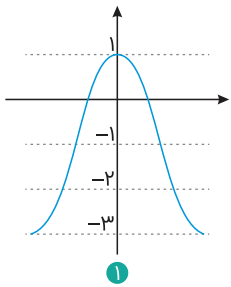


۹۶

اگر مجموع دو زاویه ۷۲ و تفاضل دو زاویه $\frac{\pi}{۹}$ رادیان باشد. هر زاویه را برحسب رادیان به دست آورید.

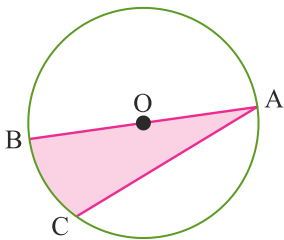
۹۷

کدام یک از نمودارهای زیر قسمتی از نمودار $y = ۲ \cos x - ۱$ است؟ (با ذکر دلیل)



۹۸

در شکل زیر، O مرکز دایره‌ای به شعاع ۶ است. اگر کمان BC، ۶۰° باشد، مساحت قسمت رنگی را بیابید.



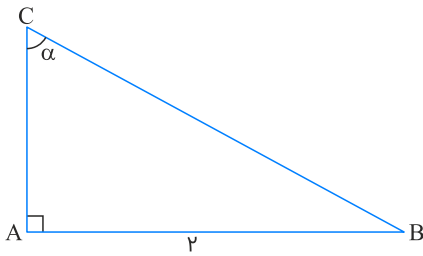
۹۹

مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به دست آورید.

الف) $\tan\left(\frac{9\pi}{۴}\right)$ ب) $\cos ۱۳۵^\circ$

۱۰۰

در شکل زیر، نسبت مساحت به محیط مثلث را حساب کنید.



۱۰۱ هریک از نمودارهای زیر را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

الف

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$$

ب

$$y = 1 - \cos x$$

۱۰۲ نمودار تابع $f(x) = \frac{3}{\rho} \sin x - 2$ بر کدام یک از نمودارهای زیر منطبق است؟

$$g(x) = \frac{3}{\rho} \sin(2\pi - x) - 2 \quad \text{الف}$$

$$h(x) = -\frac{3}{\rho} \cos\left(\frac{\pi}{\rho} + x\right) - 2 \quad \text{ب}$$

۱۰۳ بیشترین و کمترین مقدار تابع $f(x) = \cos^2 x + 1$ را به دست آورید.

۱۰۴ دو زاویه مثلثی $\frac{\pi}{\rho}$ و $\frac{\pi}{\lambda}$ است. زاویه سوم چند درجه است؟

۱۰۵ اگر $\cos \alpha + \sqrt{\tan \alpha} = 0$ باشد، با ذکر دلیل بگویید انتهای کمان مربوط به زاویه α در کدام ناحیه مثلثاتی قرار می‌گیرد.

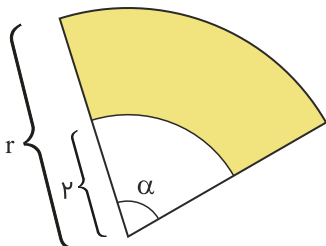
۱۰۶ نمودار تابع $y = -\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ را رسم کنید. (با در نظر گرفتن مراحل رسم)

۱۰۷ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \cos x + 1 & ; 0 \leq x < \pi \\ 2 \sin x + 1 & ; \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$ را رسم کنید.

۱۰۸ یک پیتزا به قطر ۲۵ سانتی‌متر را به ۸ قسمت مساوی برش می‌دهیم. اندازه کمان روبه‌رو به زاویه مرکزی در هر قطاع چند سانتی‌متر است؟ (پیتزا دایره‌ای فرض شود)

۱۰۹ برد تابع $y = \sin^2 x + 4 \sin x + 6$ را محاسبه کنید.

۱۱۰ اگر محیط قسمت رنگی ۱۳ سانتی‌متر و مساحت آن $10/5$ سانتی‌متر مربع باشد، α و r را حساب کنید.



۱۱۱ اعداد زیر را به ترتیب از کوچک به بزرگ بنویسید (کمان ۱ برحسب رادیان است).

$$\tan 1, \cot 1, \tan 1^{\tan 1}, \cot 1^{\cot 1}, \tan 1^{\cot 1}, \cot 1^{\tan 1}$$

۱۱۲ نیمه‌عمر یک ماده هسته‌ای ۲۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۶۴ میلی‌گرم جرم دارد، جرمی که بعد از ۱۸۰ سال باقی می‌ماند را محاسبه کنید.

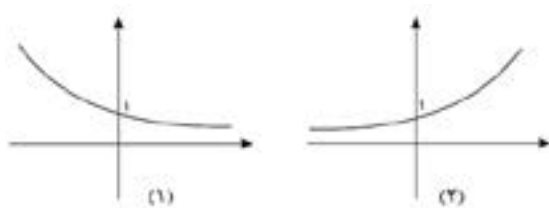
در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱۱۳ حاصل عبارت $\sqrt[3]{25} \log_5$ برابر است.

۱۱۴ معادله $9^x = 3^{x-1}$ را حل کنید.

۱۱۵ نامعادله توانی $\frac{1}{1024} > 4^{2x-1}$ را حل کنید.

۱۱۶ کدامیک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = 2^x$ است؟



۱۱۷ دو تابع $f(x) = 2^{-x} - 1$ و $g(x) = 3^{-x} - 1$ را داریم:

الف نمودار توابع f و g را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

ب دامنه و برد توابع f و g را تعیین کنید.

۱۱۸ اگر $f(x) = \log_b x$ از نقطه $(4, 2)$ بگذرد، حاصل $\log(b^5 + 68)$ را بیابید.

۱۱۹ نوعی باکتری در بدن انسان به‌صورت نمایی تکثیر می‌شود. این باکتری با تعداد ۱۰۰ عدد شروع می‌شود. پس از گذشت نیم ساعت هر باکتری به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازه هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p(t) = 100 \times 10^{2t} \quad ; 0 \leq t \leq 16$$

الف پس از ۳ ساعت اندازه توده چقدر است؟

ب پس از چند ساعت مقدار توده ۱۰۲۴۰۰ می‌شود؟

۱۲۰ اگر $\log 2 = 0/3010$ و $\log 7 = 0/8450$ باشد، مطلوب است حاصل عبارات زیر:

الف $\log 14 = ?$

ب $\log 56 = ?$

۱۲۱ اگر به عدد A ، ۱۵ واحد اضافه کنیم و از عدد حاصل لگاریتم در مبنای ۴ بگیریم جواب برابر است با لگاریتم A در مبنای ۴ به‌علاوه ۱ مقدار A را بیابید.

۱۲۲ اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ باشند، مقدار $\log \frac{2\sqrt{3}}{5}$ کدام است؟

۱۲۳ فرض کنیم $f(x) = 3^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x$ و $h(x) = 10^x$ ، مقادیر زیر را به دست آورید.

الف) $f(3)$

ب) $g(-1)$

پ) $h(-2)$

۱۲۴ نمودارهای $f(x) = 3^{-x}$ و $g(x) = 7^{-x}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

۱۲۵ نمودار تابع با ضابطه $y = 4^x - 1$ را در بازه $[-2, 2]$ رسم کنید.

۱۲۶ نمودارهای $f(x) = 2^x$ و $g(x) = 5^x$ را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید. دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

۱۲۷ معادله $\log(x+2) + \log(2x-1) = \log(4x+1)$ را حل کنید.

۱۲۸ جواب نامعادله $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x+3}{12}\right) > 1$ را به دست آورید.

۱۲۹ نمودار تابع $f(x) = -2^{x+1}$ را به کمک انتقال رسم کنید. (تمام مراحل به صورت جداگانه رسم شوند.)

۱۳۰ معادله $x2^x = 1$ چند جواب دارد؟

۱۳۱ ضابطه وارون تابع $y = 4^x + 2^{(x+1)}$ را به دست آورید.

۱۳۲ اگر $\log_2^y = a$ باشد، مقدار $\log_{49}^{14}$ را برحسب a به دست آورید.

۱۳۳ اگر لگاریتم $\sqrt{2}$ در مبنای ۸، برابر A باشد، حاصل لگاریتم $\left(\frac{1}{A} + 1\right)$ در مبنای ۴۹ را بیابید.

۱۳۴ x را در معادله $3^{x+1} + 3^x = 36$ به دست آورید.

۱۳۵ مجموع ریشه‌های معادله زیر را به دست آورید.

$$9^x + 6^x - 2 \times 4^x = 0$$

۱۳۶ اگر $\log_{\frac{5}{3}} = a$ ، حاصل $\log_{\frac{15}{8}}$ را برحسب a بیابید.

۱۳۷ اعداد زیر را مرتب کنید.

$$\sqrt{0/7}^{\sqrt{2}}, \sqrt{0/7}^{\sqrt[3]{3}}, \sqrt{0/7}^{\sqrt[5]{5}}$$

۱۳۸ اگر $\log 4 = 0/6$ باشد، حاصل $\log_{\frac{1}{8}}^{\sqrt[5]{5}}$ چقدر است؟

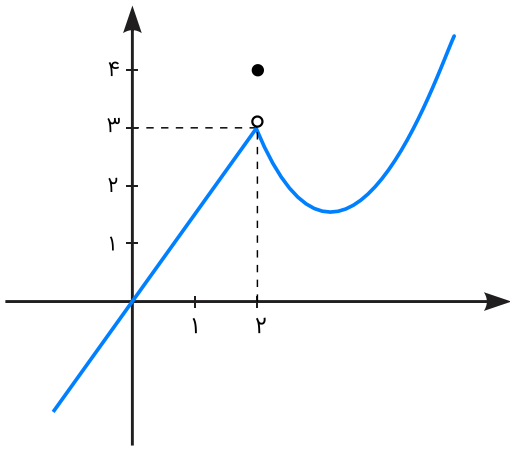
۱۳۹ اگر $\log 2 = 0/3$ و $\log 3 = 0/48$ باشد، مقدار عددی $\log \sqrt{0/75}$ را به دست آورید.

۱۴۰ معادله زیر را حل کنید.

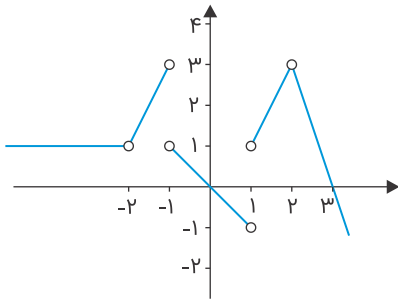
$$\log_3^{(3^{x-1}-1)} \times \log_3^{(3^x-3)} = 6$$

۱۴۱ معادله $9^x = 2 \times 3^{x+2} - 45$ را حل کنید.

۱۴۲ با استفاده از نمودار زیر حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} (xf(x))$ را بیابید.



۱۴۳ نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. باتوجه به نمودار، حاصل حدهای خواسته شده را به دست آورید.



$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

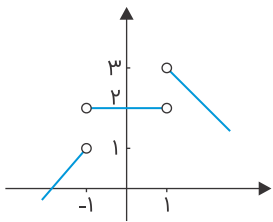
الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

ب

۱۴۴ باتوجه به شکل حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$$



۱۴۵ حاصل حد زیر را به دست آورید.

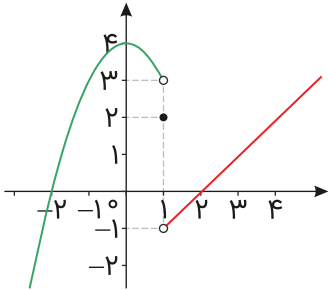
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

۱۴۶ آیا تابع $f(x) = \sqrt{2-x}$ در نقطه $x = 2$ حد دارد؟ چرا؟ (با رسم شکل)

۱۴۷
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & ; x > 2 \\ -1 & ; x = 2 \\ 3 - x^2 & ; x < 2 \end{cases}$$
 پیوستگی تابع $f(x)$ را در نقطه‌ای به طول $x = 2$ بررسی کنید.

۱۴۸ باتوجه به شکل، حاصل عبارت زیر را در صورت وجود به دست آورید.

$$2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 3f(1) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

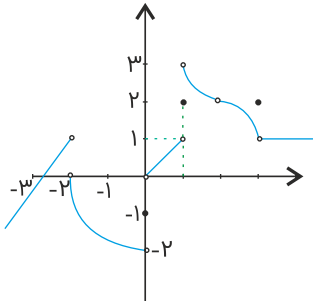


۱۴۹ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در $x = 2$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{[x] + a}{x - 1} & ; x > 2 \\ b - 1 & ; x = 2 \\ 2bx + 4 & ; x < 2 \end{cases}$$

۱۵۰ تابع $f(x) = \sqrt{2x - a} + 3$ در $x = b$ حد ندارد و $f(b) = a + 1$ ، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۵۱ شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.



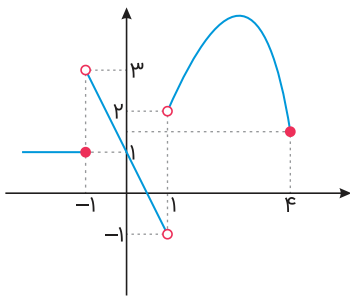
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |f(x)| + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x - 2)$$

الف

۱۵۲ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ 4 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$ در بازه $(-3, 3)$ در چند نقطه فاقد حد است؟

۱۵۳ باتوجه به نمودار حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3f(-1) =$$



۱۵۴ مقدار α را طوری بیابید که تابع $g(x) = ([x] - \alpha)[x]$ در نقطه $x = -2$ پیوسته باشد.

۱۵۵ پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 9 & ; x > 2 \\ -5 & ; x = 2 \\ -2x^2 + 3 & ; x < 2 \end{cases}$$

۱۵۶ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & ; x > 1 \\ x^2 - 2 & ; x < 1 \end{cases}$ را رسم نموده و سپس با استفاده از نمودار حد تابع در نقطه $x = 1$ را بررسی کنید.

۱۵۷ مشخص کنید تابع $f(x) = [x^2](2x - 1)$ در فاصله $(-1, +2)$ چند نقطه انفصال دارد؟

۱۵۸ مقدار a را چنان بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x + \sqrt{2x + 3}}{x^2 - 1} & ; x \neq -1 \\ x^2 + a & ; x = -1 \end{cases}$ در $x = -1$ پیوسته باشد.

۱۵۹ حاصل حدود زیر را بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos 2x}{1 + \cos^2 x}$$

۱۶۰ نمودار تابع $f(x) = \frac{|x|}{x} - 2$ را رسم کنید و وجود حد را در نقطه صفر بررسی کنید.

۱۶۱ در تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x + 3}$ اگر $f(1) = 3$ باشد، $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۶۲ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ را رسم کرده و مقادیر خواسته شده را به دست آورید.

الف) $f(2)$

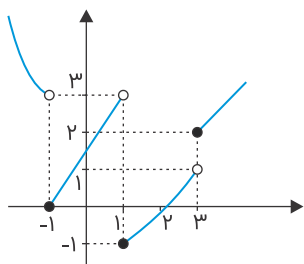
ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

۱۶۳ اگر $f(x) = \begin{cases} [-x] & ; x > 0 \\ 0 & ; x = 0 \\ [-x^2] & ; x < 0 \end{cases}$ باشد، حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x^3 - x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (f[x^3])$ را به دست آورید.

۱۶۴ دو تابع f و g را به گونه ای مثال بزنید که در $x = 1$ ناپیوسته باشند ولی $f + g$ در $x = 1$ پیوسته باشد.

۱۶۵ وجود حد برای تابع $f(x) = 3x + \frac{|x-1|}{x-1}$ در نقطه $x = 1$ را بررسی کنید.

۱۶۶ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. مقدار عبارت $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) + f(f(1))$ را بیابید.



۱۶۷ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ را به دست آورید.

۱۶۸ تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & ; x^2 + 5x - 6 = 0 \\ 2x^2 + 3 & ; x^2 + 5x - 6 \neq 0 \end{cases}$ مفروض است. حاصل $f(0) + f(1) + \frac{\lim_{x \rightarrow -6} f(x)}{5}$ را به دست آورید.

۱۶۹ اگر $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax + b}{x^2 + x - 6} = \frac{16}{5}$ باشد، a و b را بیابید.

۱۷۰ تابع $F(x) = (x-2) \left[\frac{6}{x} \right]$ در بازه $[1, 6]$ چند نقطه ناپیوستگی دارد؟

۱۷۱ تابع $f(x) = \left(\left[\frac{x}{2} \right] - a \right) 2a [-2x]$ به ازای چه مقداری از a در $x_0 = 4$ پیوسته است؟ ($a \neq 0$)

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱۷۲ در یک خانواده سه فرزندی اگر فرزند اول دختر باشد، به احتمال 0.25 این خانواده دو فرزند پسر دارد.

۱۷۳ اگر دو پیشامد A و B از فضای S مستقل از هم باشند: $P(A|B) = P(B)$

جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

۱۷۴ هر چه واریانس کمتر باشد، پراکندگی است و داده‌ها به هم نزدیک‌ترند.

۱۷۵ اگر میانگین داده‌های ۳، ۷، ۶، x ، ۵ برابر $5/8$ باشد، میانگین داده‌های $x+2$ ، $x+1$ ، x ، چقدر است؟

درستی یا نادرستی هریک از عبارات زیر را تعیین کنید.

۱۷۶ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ اگر و تنها اگر A و B با هم ناسازگار باشند.

۱۷۷ موارد خواسته‌شده داده‌های آماری زیر را به دست آورید.

۸, ۸, ۹, ۶, ۵, ۱۰, ۱۱, ۷

الف میانگین

ب واریانس

پ انحراف معیار

۱۷۸ نمرات درس ریاضی دانش‌آموزی در طول سال به صورت زیر است:

۱۶, ۱۶, ۲۰, ۷, ۱۸, ۱۹

میان و میانگین را برای نمرات این دانش‌آموز محاسبه کنید.

۱۷۹ فردی در آزمون استخدامی دانشگاه ثبت‌نام کرده است. احتمال اینکه این فرد سر جلسه آزمون حاضر شود $0/9$ و احتمال اینکه در آزمون شرکت کند و قبول شود $0/7$ است. اگر بدانیم این فرد در آزمون شرکت کرده است، چقدر احتمال دارد که قبول شود؟

۱۸۰ میانگین داده‌های ۱, ۲, ۵, ۷, ۷, ۳, ۱, ۲, ۳, ۷, ۲, ۵, ۱, ۳, ۴, ۲ را حساب کنید.

۱۸۱ برای داده‌های ۱۵, ۱۳, ۱۱, ۱۰, ۶, میانگین و انحراف معیار را محاسبه کنید.

دو تیرانداز A و B هر کدام یک تیر به هدفی می‌اندازند. احتمال اینکه تیرانداز A به هدف بزند $\frac{8}{10}$ و همین احتمال برای تیرانداز B برابر $\frac{6}{10}$ است. احتمالات زیر را حساب کنید.

۱۸۲ فقط تیرانداز A به هدف بزند.

۱۸۳ هیچ‌کدام به هدف نزنند.

۱۸۴ میانگین داده‌های A, B, C, D برابر ۱۰ و واریانس این داده‌ها برابر ۴ است. انحراف معیار داده‌های $3A + 5$, $3B + 5$, $3C + 5$ و $3D + 5$ چند است؟

۱۸۵ سارا و مینا هر کدام با احتمال‌های $0/4$ و $0/3$ برای دیدن یک تئاتر می‌روند. اگر مینا به تئاتر رفته باشد، سارا با احتمال $0/8$ به تئاتر رفته است. اگر مینا به تئاتر نرود، با چه احتمالی سارا نیز نرفته است؟

۱۸۶ اگر میانگین و واریانس داده‌های آماری $x_1, x_2, \dots, x_n$ به ترتیب برابر ۴ و ۳ باشد، میانگین و واریانس داده‌های $3x_1 + 1, 3x_2 + 1, \dots, 3x_n + 1$ را به دست آورید.

۱۸۷ تاسی را سه بار پرتاب کرده‌ایم. اگر مجموع سه عدد رو شده برابر ۱۵ باشد، چقدر احتمال دارد که هر سه عدد یکسان باشند؟

۱۸۸ اگر $P(A|B) = 0/3$, $P(B|A) = 0/2$ و $P(A) + P(B) = 0/6$ باشند، $P(B|A')$ را بیابید.

۱۸۹ انحراف معیار ۷ داده با میانگین ۵ برابر ۳ و انحراف معیار ۳ داده با میانگین ۵ برابر $\sqrt{3}$ است. واریانس کل داده‌ها با هم چقدر است؟

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۹۰ میانه داده‌های آماری ۱۸, ۱۰, ۹, ۱۶, ۱۲, ۷, ۱۶ برابر است.

۱۹۱ از مجموعه $A = \{12, 13, \dots, 23, 24\}$ دو عدد به تصادف انتخاب می‌کنیم. اگر مجموع این دو عدد زوج باشد با چه احتمالی حاصل ضربشان نیز زوج خواهد بود؟

۱۹۲ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(A) = ۰/۲$ ، $P(B) = ۰/۲۲$ و $P(B|A) = ۰/۷$ ، آنگاه $P(B'|A')$ کدام است؟

۱۹۳ اگر $P(B) = \frac{1}{4}$ و $P(A|B) = \frac{1}{6}$ و دو پیشامد A و B مستقل باشند، $P(A \cup B)$ را به دست آورید.

۱۹۴ اگر مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات آن ۳۴۰ باشد، مطلوب است:

الف) واریانس

ب) ضریب تغییرات

۱۹۵ در ۱۸ داده آماری، مجموع اختلاف داده‌ها از عدد ۲۵ برابر صفر است و مجموع مجزورات اختلاف داده‌ها از عدد ۲۵ برابر ۴۵۰ می‌باشد. ضریب تغییرات را بیابید.

۱۹۶ سه فرد A ، B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال به هدف نخوردن تیر آن‌ها به ترتیب $\frac{5}{6}$ ، $\frac{3}{4}$ و $\frac{2}{3}$ است. اگر بدانیم فقط دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد، چقدر است؟

۱۹۷ اگر احتمال قبولی کیومرث در آزمون رانندگی سه برابر احتمال قبولی خسرو در این آزمون باشد و احتمال قبولی لاقل یکی از این دو برابر $\frac{17}{25}$ باشد، احتمال قبولی خسرو در این آزمون چقدر است؟

۱۹۸ میانگین تعدادی عدد را ۱۶ حدس زده‌ایم. تفاضل این میانگین حدسی از هرکدام از داده‌ها به ترتیب -1 ، 4 ، -2 ، 3 ، 5 است. میانگین واقعی داده‌ها کدام است؟

۱۹۹ یک تاس را چهار بار پرتاب می‌کنیم. احتمال اینکه هیچ‌کدام از پرتاب‌ها مضرب ۳ نباشد چقدر است؟

۲۰۰ مریم و سارا هرکدام یک عدد به تصادف از مجموعه $A = \{1, 2, 3, 4, \dots, 15\}$ انتخاب می‌کنند. اگر بدانیم عدد انتخابی سارا از عدد انتخابی مریم کوچک‌تر است، با چه احتمالی عدد انتخابی مریم ۱۵ است؟



پاسخنامه

پاسخ سؤال ۱

نادرست

۱

$$3x^2 = 6x + 1 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow S = \alpha + \beta = 2$$

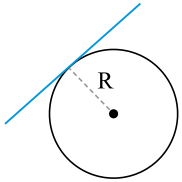
پاسخ سؤال ۲

۲

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$S = -4 + 3 = -1, \quad P = -4 \times 3 = -12$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 12 = 0$$



۳

$$R = \frac{|-4 + 6 - 5|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{3}{5}$$

۴

$$x = 2 \Rightarrow \frac{4a}{3} + \frac{1}{3} = 2a - 2 \Rightarrow \frac{4a + 1}{3} = 2a - 2$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین} \times 3} 4a + 1 = 6a - 6 \Rightarrow -2a = -7 \Rightarrow a = \frac{7}{2}$$



$$\sqrt{x+2}=4-x \quad (1)$$

$$x+2=(4-x)^2 \Rightarrow x+2=x^2-8x+16$$

$$\Rightarrow x^2-9x+14=0 \Rightarrow (x-2)(x-7)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=7 \end{cases}$$

$x=7$ جواب معادله نیست زیرا در معادله صادق نیست. (غ.ق. $\sqrt{9}=-3$)

باتوجه به نمودار ۳، $x=-1$ ، صفرهای تابع می‌باشند و نقطه $(1, -2)$ رأس سهمی است.

$$y=a(x+1)(x-3)$$

$$(1, -2) \Rightarrow -2=a(2)(-2) \Rightarrow -4a=-2 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{1}{2}(x+1)(x-3)$$

$$L: y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow m_T=\frac{3}{2}$$

$$m_T=-\frac{2}{3}$$

$$(|x|)^2=(\sqrt{2-x})^2 \Rightarrow x^2=2-x \Rightarrow x^2+x-2=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول است.

$x = 2$ یک ریشه معادله $f(x) = 0$ است، پس در آن صادق است:

$$x = 2 \Rightarrow 2^3 + a(2)^2 + c = 0 \Rightarrow a = -3$$

برای یافتن عامل‌های دیگر باید سه‌جمله‌ای $f(x)$ را بر $x - 2$ تقسیم کرد:

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + c \mid \frac{x-2}{x^2 - x - 2} \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline -x^2 + c \\ -x^2 + 2x \\ \hline -2x + c \\ -2x + 4 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x^2 + c = (x-2)(x^2 - x - 2) = (x-2)^2(x+1)$$

پس $x = -1$ صفر دیگر تابع است.

تذکر: به جای تقسیم می‌توان سه‌جمله‌ای را تجزیه کرد:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + c &= x^3 - 3x^2 + 3 + 1 = x^3 + 1 - 3x^2 + 3 \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1) - 3(x^2 - 1) \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1 - 3x + 3) = (x+1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

$$a > 0, \quad b < 0, \quad c > 0$$

۱۰

معادله دو ریشه دارد.

$$(x - (1 + \sqrt{5}))(x - (1 - \sqrt{5})) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 = 0$$

۱۱

$$\sqrt{x+2} - x = -4 \Rightarrow \sqrt{x+2} = x-4$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x+2 = x^2 - 8x + 16$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 & \text{غ.ق.ق} \\ x = 7 & \checkmark \end{cases}$$

۱۲

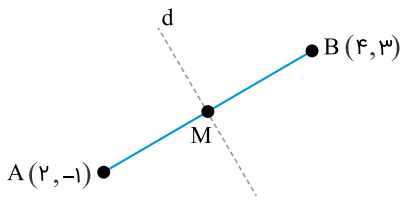
$$(x-1)(x+4) = (x+3)(x+2)$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = x^2 + 5x + 6$$

$$\Rightarrow x = -5 \quad (\text{ق ق})$$

۱۳





$$M(3, 1)$$

$$m_{AB} = \frac{3 + 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{2}$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$$

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow (m + 1)^2 - 4m > 0 \Rightarrow (m - 1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq 1$$

$$\frac{c}{a} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad \xrightarrow{\text{اشتراک}} m > 0, m \neq 1$$

$$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow m + 1 > 0 \Rightarrow m > -1$$

$$x^2 - \omega x - 1 = 0 \Rightarrow S = \alpha + \beta = +\omega$$

$$P = \alpha \cdot \beta = -1$$

$$A = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha\beta((\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta)$$

$$A = P \cdot (S^2 - 2P) \Rightarrow A = (-1)(\omega^2 - 2(-1)) = (-1)(\omega^2 + 2) = -\omega^2 - 2$$

خط گذرنده از (۱, ۷) با شیب m:

$$y - 7 = m(x - 1) \Rightarrow y - mx + m - 7 = 0$$

$$\sqrt{\omega} = \frac{|m - 7|}{\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow \omega = \frac{(m - 7)^2}{1 + m^2} \Rightarrow \omega + \omega m^2 = m^2 - 14m + 49$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 14m - 49 = 0 \Rightarrow 2m^2 + 7m - 24.5 = 0$$

$$\Rightarrow (2m + 11)(m - 2) = 0 \Rightarrow m = 2 \text{ یا } m = -5.5$$

$$(AB \text{ وسط}) M = \left(\frac{m + 2m}{2}, \frac{m + 4}{2} \right)$$

نیمساز ناحیه دوم و چهارم : $y = -x$

$$\Rightarrow \frac{m + 4}{2} = -\frac{3m}{2} \Rightarrow 4m + 4 = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$AH = \frac{|-3 + 0 - 5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{64}{2} = 32$$

دو کارگر در یک روز $\frac{1}{16}$ کار را انجام می‌دهند. فرض کنیم کارگر اول در x روز کار را تمام کند، پس کارگر دوم در $x + 60$ روز کار را تمام می‌کند. پس کارگر اول در یک روز $\frac{1}{x}$ کار و دومی در یک روز $\frac{1}{x + 60}$ کار را انجام می‌دهند. پس داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x + 60} &= \frac{1}{16} \Rightarrow 16x(x + 60) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 60} \right) = 16x(x + 60) \left(\frac{1}{16} \right) \\ \Rightarrow 16(x + 60) + 16x &= x(x + 60) \Rightarrow x^2 + 28x - 960 = 0 \\ \Rightarrow (x + 48)(x - 20) &= 0 \Rightarrow x = -48, x = 20 \end{aligned}$$

جواب منفی قابل قبول نیست. پس یک کارگر به‌تنهایی ۲۰ روز و دیگری ۸۰ روزه کار را انجام می‌دهند.

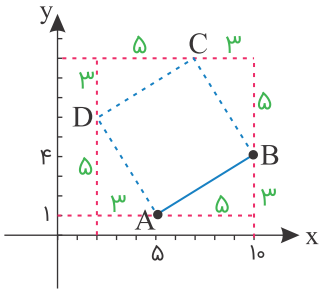
X: عدد صحیح

$$x + \sqrt{x} = 6$$

$$(\sqrt{x})^2 = (6 - x)^2 \Rightarrow x = 36 - 12x + x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{قابل قبول} \\ x = 9 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$



چهار مثلثی که در کنار اضلاع مربع تشکیل شده‌اند، همنهشت هستند.

$$\begin{cases} y_D = y_A + 5 = 6 \\ x_D = x_A - 3 = 2 \end{cases} \Rightarrow D(2, 6)$$

$$\begin{cases} y_C = y_B + 5 = 9 \\ x_C = x_B - 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow C(7, 9)$$

$$\begin{cases} \frac{4}{9}x + \frac{y}{3} - 1 = 0 \xrightarrow{\times 9} 4x + 3y - 9 = 0 \\ 3y = -4x - 3 \Rightarrow 4x + 3y + 3 = 0 \end{cases}$$

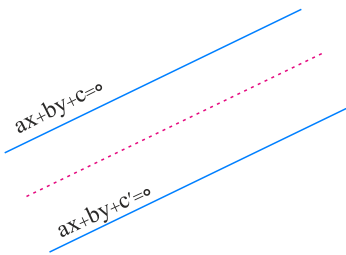
فاصله دو خط به معادلات $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d = \frac{|3 - (-9)|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{12}{5} = 2.4$$

معادله خطی موازی و هم‌فاصله با دو خط $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ برابر است با:

$$ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$



$$4x + 3y + \frac{3 + (-9)}{2} = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 3 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow 2k + 1 + 1 - 4 = 0 \Rightarrow 2k = 2 \Rightarrow k = 1$$

$$3x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} = -\frac{4}{3}$$

چون α یکی از ریشه‌های معادله داده شده است، پس در معادله صدق می‌کند.

$$\alpha^3 - 7\alpha + 4 = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 7\alpha = -4$$

$$-\frac{4}{\alpha} - \alpha^2 = \frac{\alpha^3 - 7\alpha}{\alpha} - \alpha^2 = \alpha^2 - 7 - \alpha^2 = -7$$

سرعت حرکت آب را k کیلومتر بر ساعت در جهت مسیر رفت می‌گیریم.

مدت زمان رفت و برگشت را از رابطه $t = \frac{x}{V}$ که x مسافت طی شده و V سرعت حرکت است، حساب می‌کنیم:

$$t_{\text{رفت}} = \frac{180}{15+k}, \quad t_{\text{برگشت}} = \frac{180}{15-k}$$

دقت کنید زمان برگشت بیشتر از زمان رفت است، پس:

$$\begin{aligned} t_{\text{برگشت}} - t_{\text{رفت}} &= 5 \Rightarrow \frac{180}{15-k} - \frac{180}{15+k} = 5 \xrightarrow{\div 5} \frac{36}{15-k} - \frac{36}{15+k} = 1 \\ \Rightarrow \frac{540 + 36k - 540 + 36k}{225 - k^2} &= 1 \Rightarrow k^2 + 72k - 225 = 0 \\ \Rightarrow (k + 75)(k - 3) &= 0 \xrightarrow{k > 0} k = 3 \end{aligned}$$

نقطه‌ای از نمودار $y = \sqrt{x+1}$ که کمترین فاصله را از A دارد، $B(\alpha, \sqrt{\alpha+1})$ در نظر می‌گیریم. حال فاصله دو نقطه A و B را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(\alpha-4)^2 + (\sqrt{\alpha+1})^2} = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 16 + \alpha + 1} \\ &= \sqrt{\alpha^2 - 7\alpha + 17} = \sqrt{\left(\alpha - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}} \quad (*) \end{aligned}$$

برای اینکه AB کمترین مقدار شود، باید $\alpha = \frac{7}{2}$ باشد. بنابراین کمترین فاصله برابر است با:

$$AB = \sqrt{\frac{19}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

فرض: $x = 3q$

حکم: $x(x+3) = 18t$

$$x(x+3) = 3q(3q+3) = 9q(q+1) = 9(2t) = 18t$$

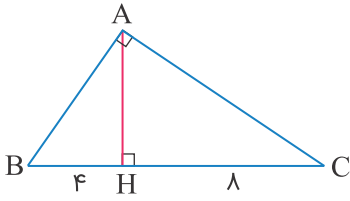
ضرب دو عدد متوالی همیشه زوج است.

عکس قضیه: در هر مثلث اگر سه زاویه برابر باشند، آنگاه سه ضلع نیز باهم برابرند.
قضیه دو شرطی: در هر مثلث سه ضلع برابرند اگر و تنها اگر سه زاویه نیز باهم برابر باشند.

پاسخ سؤالات ۳۵ تا ۳۷

بی‌شمار

نیمساز



$$AC^2 = CH \cdot BC \Rightarrow AC^2 = 8 \times 12 \Rightarrow AC = 4\sqrt{6}$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \hat{B}_1 \Rightarrow \hat{P}_1 = \hat{B}$$

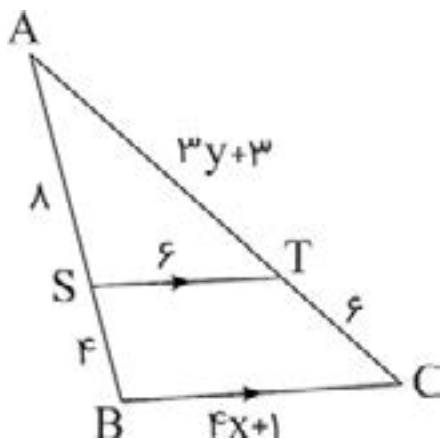
$$\left. \begin{array}{l} \hat{P}_1 = \hat{B} \\ \frac{PC}{BC} = \frac{PB}{AB} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{دو ضلع متناسب و زاویه بین برابر}} \triangle BPC \sim \triangle ABC$$

$$\frac{PC}{BC} = \frac{PB}{AB} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{8}{x} = \frac{x}{18} \Rightarrow x^2 = 8 \times 18 \Rightarrow x = 12$$

$$a_2 = 2a_1, a_3 = 3a_1, \dots, a_{10} = 10a_1$$

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{10}}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1 + 3a_1 + \dots + 10a_1}{a_1}$$

$$= 1 + 2 + \dots + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$



$$ST \parallel BC \Rightarrow \text{طبق قضیه تالس} : \frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC}$$

$$\frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{6}{3y+3} \Rightarrow 24y + 72 = 36y + 36$$

$$\Rightarrow 36y - 24y = 72 - 36 \Rightarrow y = \frac{36}{12} \Rightarrow y = 3$$

$$\frac{AS}{AB} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{4}{8} = \frac{6}{6x+1} \Rightarrow 32x + 8 = 72$$

$$\Rightarrow 32x = 72 - 8 \Rightarrow 32x = 64 \Rightarrow x = \frac{64}{32} \Rightarrow x = 2$$

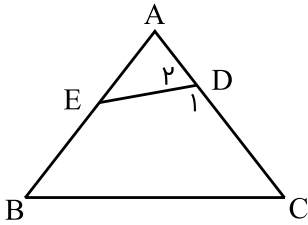
$$\left. \begin{array}{l} \triangle OA'B' : AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} \\ \triangle OB'C' : BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{OC}{OC'} = \frac{OB}{OB'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{OA}{OA'} = \frac{OC}{OC'}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} AC \parallel A'C'$$

دو مثلث CAB و CDE متشابه هستند. (ض ز ض)

در دو مثلث ABC و ECD $\left\{ \begin{array}{l} \widehat{C}_1 = \widehat{C}_2 \text{ متقابل به رأس} \\ \frac{CA}{CD} = 3, \frac{CB}{CE} = \frac{3m+6}{m+2} = \frac{3(m+2)}{m+2} = 3 \end{array} \right.$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{AB}{ED} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{4x-1}{x+1} \Rightarrow 4x-2 = 6x+6 \Rightarrow x = 4$$



$$\triangle ADE, \triangle ABC \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{D}_1 + \widehat{D}_2 = 180^\circ \\ \widehat{D}_1 + \widehat{B} = 180^\circ \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \widehat{D}_2 = \widehat{B} \\ \widehat{A} = \widehat{A} \end{array} \right. \Rightarrow \text{دو مثلث متشابه اند}$$

$$\frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{12}{10}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ADE} = \frac{9}{25} S_{\triangle ABC}$$

$$\frac{2P}{2P'} = \frac{15}{\lambda} k$$

$$\frac{S}{S'} = k^2 \Rightarrow \frac{25}{S'} = \left(\frac{15}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow S' = \frac{64}{9}$$

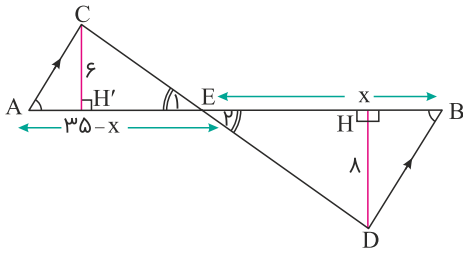
$$x^2 = 5x + 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ ق ق} \\ x = 6 & \text{ق ق ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BH = 36 \\ AH = 18 \end{cases} \Rightarrow AB^2 = BH^2 + AH^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = (36)^2 + (18)^2 \Rightarrow AB = 18\sqrt{5}$$

فرض کنیم $BE = x$ ، پس $AE = 35 - x$ حال داریم:



$$\begin{cases} (AC \parallel BD), (AB \text{ مورب}) \Rightarrow \hat{A} = \hat{B} \\ \hat{E}_1 = \hat{E}_2 \end{cases} \Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle BED$$

$$\Rightarrow (\text{نسبت ارتفاع ها}) = (\text{نسبت تشابه}) \Rightarrow \frac{CH'}{DH} = \frac{AE}{BE}$$

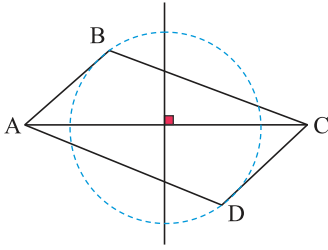
$$\Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{35 - x}{x} \Rightarrow \frac{35 - x}{x} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 140 - 4x = 3x \Rightarrow 7x = 140 \Rightarrow x = 20 \quad (*)$$

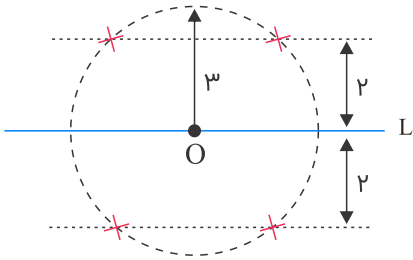
$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} (BE) (DH) \xrightarrow{(*)} S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} (20) (4) = 40$$

الف) پاره خط $AC = ۸$ را رسم می‌کنیم.

ب) عمود منصف پاره خط AC را رسم می‌کنیم و محل تلاقی آن با AC را O می‌نامیم. داریم: $OA = OC = ۴$
 پ) به مرکز O و شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم. یک قطر دلخواه از این دایره مانند DB که بر AC منطبق نیست را رسم می‌کنیم.
 چهار ضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع مطلوب می‌باشد.
 بی‌شمار متوازی الاضلاع با این شرایط وجود دارد.

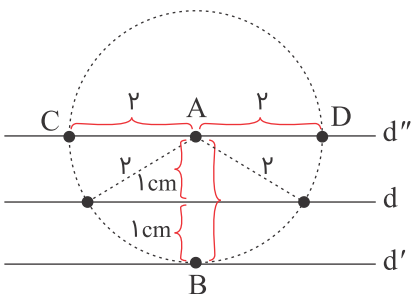


نقاطی که فاصله آن از نقطه O به فاصله ۳ باشند، روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۳ قرار دارند. نقاطی که فاصله آن از خط L به فاصله ۲ باشند، روی دو خط موازی با خط L و به فاصله ۲ در طرفین خط L قرار دارند. بنابراین طبق شکل زیر، چهار نقطه وجود دارد.



$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABC : x \parallel y \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{b}{a+b} = \frac{x}{y} \Rightarrow x(a+b) = by \\ \triangle MBC : x \parallel z \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{a}{a+b} = \frac{x}{z} \Rightarrow x(a+b) = az \end{array} \right\} \Rightarrow az = by$$

دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۲ رسم می‌کنیم. فاصله هر نقطه روی این دایره از نقطه A برابر ۲ است. دو خط به موازات d و به فاصله ۱ cm از آن رسم می‌کنیم. محل تلاقی دایره و این دو خط نقاط مطلوب هستند.



طبق شکل نقاط B, C و D جواب می‌باشد.

$$BC \parallel MN \Rightarrow AMN \sim ABC \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^2$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{MNCB} + S_{AMN}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{15S_{(AMN)} + S_{(AMN)}} = \left(\frac{MA}{AB}\right)^2$$

$$\left(\frac{MA}{AB}\right)^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow \frac{MA}{AB} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\text{تفصیل در مخرج}} \frac{MA}{AB - MA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{MB}{MA} = 3$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{PC}{PB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{PC}{BC} = \frac{1}{5}$$

$$QN \parallel PC \Rightarrow AQN \sim APC$$

$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} = \left(\frac{AN}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

در دو مثلث ABC و APC قاعده‌های BC و PC از آن‌ها بر یک امتداد است، پس از رأس مشترک A ارتفاعشان یکی است.

$$\frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{PC}{BC} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{S(AQN)}{S(APC)} \times \frac{S(APC)}{S(ABC)} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{80}$$

$$f(x) = [-x] \Rightarrow \begin{cases} x = 1/7 \Rightarrow f(x) = -2 \\ x = 2/3 \Rightarrow f(x) = -3 \end{cases}$$

$$f(x) = [x] + [-x] \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(x) = 0 \\ x = 1/3 \Rightarrow f(x) = -1 \end{cases}$$

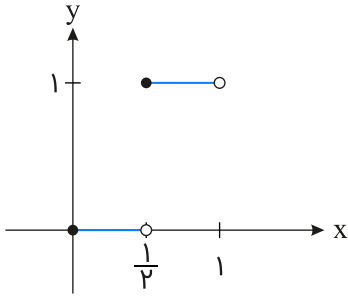
$$f - g = \{(7), (-3), (3), (-3)\}$$

$$f \times g = \{(7, 4), (3, 0)\}$$

$$0 \leq x < 1 \Rightarrow 0 \leq 2x < 2$$

$$0 \leq 2x < 1 \Rightarrow y = [2x] = 0, \quad 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$1 \leq 2x < 2 \Rightarrow y = [2x] = 1, \quad \frac{1}{2} \leq x < 1$$



$$-1 = 2a(1) + b \Rightarrow a = -3$$

$$0 = 2a(0) + b \Rightarrow b = 0$$

$$D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = \{3, 2\}$$

$$\frac{f}{g} = \{(3, 2), (2, 1)\}$$

$$(f + g)(1) = f(1) + g(1) = -8 + 1 = -7$$

$$f\left(\frac{-f}{x}\right) = \frac{\frac{-f}{x} - 2}{\frac{-f}{x} + 2} = \frac{-f - 2x}{-f + 2x} = \frac{2 + x}{2 - x} \Rightarrow f(x) \times f\left(\frac{-f}{x}\right) = \frac{x - 2}{x + 2} \times \frac{2 + x}{2 - x} = -1$$

$$D_f = [0, +\infty), \quad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [0, +\infty) - \{4\} = [0, 4) \cup (4, +\infty)$$

پاسخ سؤال ۶۲

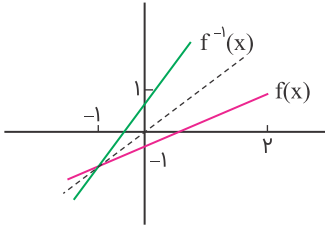
برابر با ۳ است.

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{g(x)} = 2x \Rightarrow x^2 = 2xg(x)$$

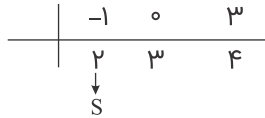
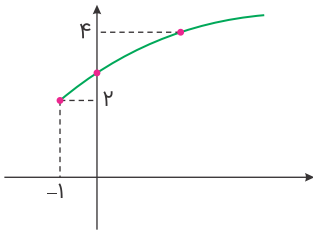
$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^2}{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{x}{2}$$

با رسم نیمساز شکل را نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه می‌کنیم.

$$y = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow 2x = 3y+1 \Rightarrow x = \frac{3y+1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2}$$



نقطه شروع رسم $S(-1, 2)$



روش انتقال:

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ را رسم می‌کنیم، منحنی را روی محور xها یک گام به چپ و سپس ۲ گام به بالا می‌بریم

$$D_f = [-1, +\infty), \quad R_f = [-2, +\infty)$$

پاسخ سؤال ۶۶

$$[-\pi] + \left[\frac{\gamma}{\gamma}\right] + [-0/1] = -4 + 3 - 1 = -2$$

الف

$$g(x) = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow g(0) = g(2) = 3$$

ب

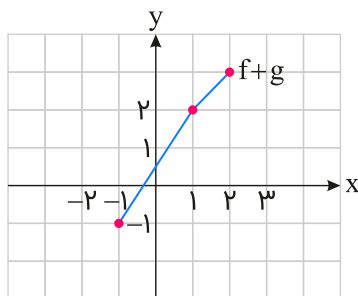
$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x-1)^2 + 2 \end{cases}$$

$$x-1 = \pm \sqrt{y-2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

۶۸

$$\left. \begin{aligned} g(-5) &= 3(-2) - 2 = -8 \\ g(0) &= -2\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow g(-5) + g(0) = -8 + 3 = -5$$

۶۹



الف ۷۰

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} \cap \{1, -1, 3\} = \{1, -1, 3\}$$

ب

$$(2f)(-3g)(1) = 2f(1) \times -3g(1) = 2(2) \times (-3)(0) = 0$$

۷۱

$$f(x) = (x-2)^2 + 1$$

در بازه‌های $[2, \infty)$ یا $(-\infty, 2]$ یا هر زیرمجموعه این دو بازه تابع یک‌به‌یک است.

۷۲

دو تابع مساوی نیستند.

$$\begin{cases} f(5) = 6 \\ g(5) = 10 \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۷۳

۷۳

حاصل $\left[\frac{x}{x+1}\right]$ به ازای $x = \frac{1}{3}$ ، برابر صفر است.

پاسخ سؤالات ۷۴ تا ۷۵

۷۴

نادرست

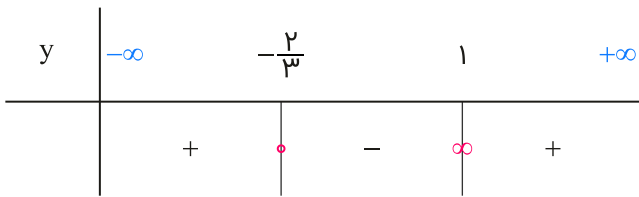


$$y = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3} \Rightarrow \sqrt{x} + 2 = y\sqrt{x} - 3y \Rightarrow \sqrt{x} - y\sqrt{x} = -3y - 2$$

$$\sqrt{x}(1 - y) = -3y - 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{-3y - 2}{1 - y} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3y + 2}{y - 1}$$

سمت چپ عبارت فوق همواره مثبت است، پس عبارت سمت راست نیز باید چنین باشد، یعنی:

$$\frac{3y + 2}{y - 1} \geq 0$$



پس محدوده برد تابع عبارت است از:

$$R_f = (-\infty, -\frac{2}{3}] \cup (1, +\infty)$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = -\left|\frac{1}{y} - 1\right| = -\left|-\frac{1}{y}\right| = -\frac{1}{y}$$

$$g\left(\frac{1}{y}\right) = \left[2\left(\frac{1}{y}\right) - 3\right] = [1 - 3] = [-2] = -2$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{g\left(\frac{1}{y}\right)}{f\left(\frac{1}{y}\right)} = \frac{-2}{-\frac{1}{y}} = 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

D_g باید با D_f برابر باشد.

$$x^2 + cx + d = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$\Rightarrow c = -6, d = 9$$

حال دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم:

$$\frac{ax + b}{(x - 3)^2} = \frac{y}{x - 3} \Rightarrow ax + b = yx - 21$$

$$\Rightarrow a = y, b = -21$$

$$f(x) = ax + b$$

$$f(2x - 2) = a(2x - 2) + b = 2ax - 2a + b$$

$$f(1 - x) = a(1 - x) + b = -ax + a + b$$

$$f(2x - 2) + 2f(1 - x) = \cancel{2ax} - \cancel{2a} + b - \cancel{2ax} + \cancel{2a} + 2b = 9$$

$$\Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$f(4) = 5 \Rightarrow 4a + b = 5 \Rightarrow 4a + 3 = 5 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow f(10) = 8$$

باتوجه به ویژگی تابع جزء صحیح، می‌دانیم: $n \leq [x] < n + 1, (n \in \mathbb{Z})$ ، حال:

$$\underbrace{[\sqrt{82}] + [\sqrt{83}] + \dots + [\sqrt{99}]}_{\text{جمله ۱۸}} + \underbrace{[\sqrt{100}] + [\sqrt{101}] + \dots + [\sqrt{120}]}_{\text{جمله ۲۱}} + \underbrace{[\sqrt{121}] + [\sqrt{122}]}_{\text{جمله ۲}}$$

$$[\sqrt{82}] = [\sqrt{83}] = \dots = [\sqrt{99}] = 9 \Rightarrow \underbrace{18}_{\text{جمله}} \times \underbrace{9}_{\text{حاصل}} = 162$$

$$[\sqrt{100}] = [\sqrt{101}] = \dots = [\sqrt{120}] = 10 \Rightarrow 21 \times 10 = 210$$

$$[\sqrt{121}] = [\sqrt{122}] = 11 \Rightarrow 2 \times 11 = 22$$

$$\text{حاصل کل} = 162 + 210 + 22 = 394$$

برای به دست آوردن تابع $f + \frac{1}{g}$ لازم است دامنه تابع f و g یکسان باشد؛ یعنی زوج‌های مرتبی از f و g در نظر گرفته شوند که مؤلفه اولشان یکی باشد، پس:

$$\begin{cases} f \Rightarrow (1, 4) \\ g \Rightarrow (1, -1) \end{cases} \Rightarrow f + \frac{1}{g} = (1, 4 + \frac{1}{-1}) = (1, 3)$$

$$\begin{cases} f \Rightarrow (2, 3) \\ g \Rightarrow (2, 0) \end{cases} \Rightarrow f + \frac{1}{g} = (2, 3 + \frac{1}{0}) \text{ غ ق ق}$$

$$\begin{cases} f \Rightarrow (3, 5) \\ g \Rightarrow (3, 1) \end{cases} \Rightarrow f + \frac{1}{g} = (3, 5 + \frac{1}{1}) = (3, 6)$$

بنابراین زوج‌های مرتب تابع $f + \frac{1}{g}$ عبارت‌اند از: $\{(1, 3), (3, 6)\}$

$$f(x) = ax + b \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$$

$$f(x) + f^{-1}(x) = ax + b + \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} = \frac{5}{2}x + 8$$

$$\Rightarrow (a + \frac{1}{a})x + b - \frac{b}{a} = \frac{5}{2}x + 8$$

$$a + \frac{1}{a} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 2 \text{ یا } \frac{1}{2} \Rightarrow \text{در این مسئله } a = 2 \text{ قابل قبول است}$$

$$\Rightarrow b - \frac{b}{2} = 8 \Rightarrow b = 16 \Rightarrow f(x) = 2x + 16 \Rightarrow f(2) = 20$$

$$L = r\theta \Rightarrow L = \frac{\theta \times \pi \times r}{180} = \frac{72 \times 3/14}{180} = 1/256$$

برای تبدیل زاویه $\frac{14\pi}{45}$ به درجه از فرمول $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ استفاده می‌کنیم که در آن D ، اندازه زاویه برحسب درجه و R اندازه زاویه برحسب رادیان است:

$$\frac{D}{180} = \frac{\frac{14\pi}{45}}{\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{14}{45} \Rightarrow D = 56^\circ$$

برای انجام آسان‌تر این کار می‌توان نوشت:

$$\pi \text{ Rad} = 180^\circ \Rightarrow \frac{14\pi}{45} = \frac{14 \times 180^\circ}{45} = 56^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 56^\circ \\ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 56^\circ \\ 5\alpha - 9\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 36^\circ, \beta = 20^\circ$$



$$\alpha = 45^\circ \Rightarrow \frac{45}{180} = \frac{\alpha}{\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ رادیان}$$

$$l = \widehat{AB} \Rightarrow l = r \cdot \alpha \Rightarrow l = 20 \times \frac{\pi}{4} = 5\pi$$

$$\frac{\pi}{36} \Rightarrow \frac{180}{36} = 5^\circ$$

$$135^\circ \Rightarrow 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4} \text{ رادیان}$$

پاسخ سؤالات ۸۷ تا ۸۸

$$57^\circ \times 5 \simeq 285^\circ \text{ در ربع چهارم}$$

انتهای کمان نظیر ۱ رادیان در ربع اول است: $\tan 1 > 0$
 انتهای کمان نظیر ۲ رادیان در ربع دوم است: $\tan 2 < 0$
 پس $\tan 1 \text{Rad} > \tan 2 \text{Rad}$ می‌باشد.

از آنجا که $\cos 0 = 1$ ، در نتیجه نمودار ۲، نمودار موردنظر است.

از فرمول $\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$ به سادگی دیده می‌شود که $1 \text{Rad} \simeq 57^\circ$

$$3 \text{Rad} \simeq 3 \times 57^\circ = 171^\circ < 180^\circ$$

انتهای کمان ۳ رادیان در ناحیه دوم قرار دارد.

$$20 \text{Rad} \simeq 20 \times 57^\circ = 1140^\circ = 3 \times 360^\circ + 60^\circ$$

انتهای کمان ۲۰ رادیان در ناحیه اول قرار دارد.

$$-11/5 \text{Rad} \simeq -11/5 \times 57^\circ \simeq -655^\circ = -2 \times 360^\circ + 65^\circ$$

انتهای کمان $-11/5$ رادیان در ناحیه اول قرار دارد.

پاسخ سؤالات ۹۱ تا ۹۲

$$y = -2 \cos x + 3$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq -2 \cos x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq -2 \cos x + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq y \leq 5$$

$$y = -3 \sin x + 4$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq -3 \sin x \leq 3 \Rightarrow 1 \leq -3 \sin x + 4 \leq 7 \Rightarrow 1 \leq y \leq 7$$

$$\frac{D}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \frac{120}{180} = \frac{\theta}{\pi} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$L = \theta \cdot R = \frac{2\pi}{3} \times 24 = 16\pi = 16 \times 3/14 = 50/24$$

پاسخ سؤال ۹۴

$$L_1 = L_2 \Rightarrow r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2$$

$$\theta_1 \times 2/5 = \frac{\pi}{2} \times 10$$

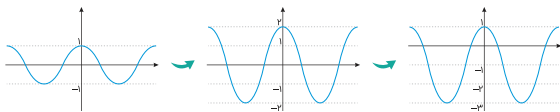
$$\theta_1 \times \frac{5}{2} = \frac{\pi}{2} \times 10 \Rightarrow \theta_1 = 2\pi$$

$$\widehat{AB} = \ell = r \cdot \alpha \Rightarrow \ell = (6400 + 1600) \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ell = 4000\pi$$

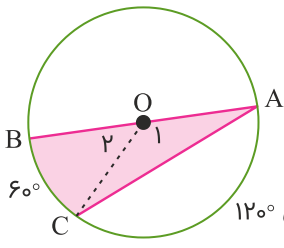
$$72^\circ : \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow \frac{72}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{5} \text{ رادیان}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2\pi}{5} \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{9} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{23\pi}{90}, \beta = \frac{13\pi}{90}$$

ابتدا نمودار $\cos x$ را رسم می‌کنیم، سپس مقادیر $\cos x$ را روی نمودار دو برابر کرده و در آخر یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم.



گزینه ۱ قسمتی از نمودار است.



واضح است که $\widehat{O_1} = 120^\circ$ و $\widehat{O_2} = 60^\circ$.

نکته: مساحت قطاعی با زاویه α (برحسب رادیان) در دایره با شعاع r از رابطه $S = \frac{1}{2} \alpha r^2$ به دست می‌آید.

مساحت قسمت رنگی شامل مساحت مثلث OAC و قطاع OBC است:

$$S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \times OA \times OC \times \sin O_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 120^\circ = 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

$$S_{\text{قطاع OBC}} = \frac{1}{2} \times OC^2 \times \alpha = \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{3} = 6\pi$$

$$\Rightarrow \text{رنگی } S = 6\pi + 9\sqrt{3}$$

$$\text{الف) } \tan\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\text{ب) } \cos 135^\circ = \cos(90^\circ + 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

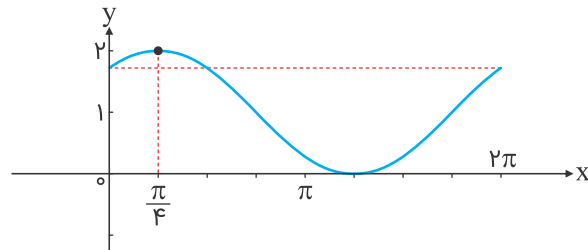
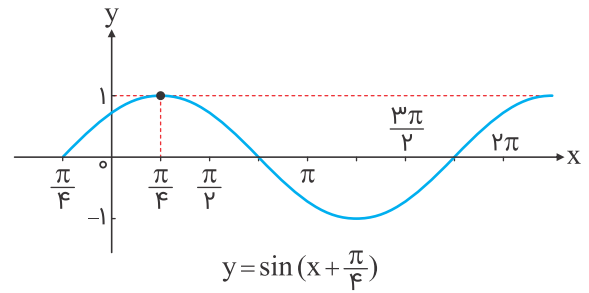
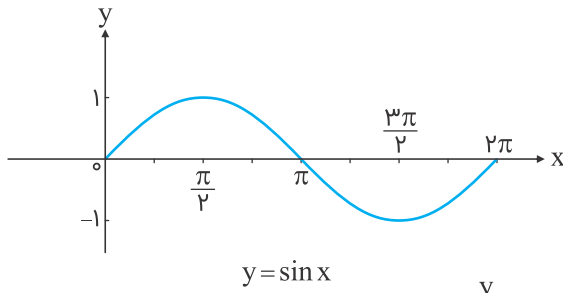
$$\Delta_{ABC} \text{ محیط} = AB + BC + CA = 2 + BC + BC \cos \alpha$$

$$\Delta_{ABC} \text{ مساحت} = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \times 2 \times BC \cos \alpha = BC \cos \alpha$$

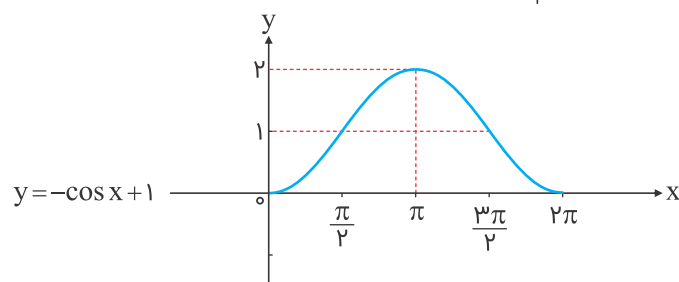
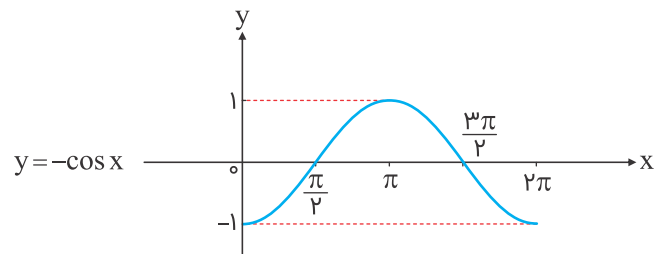
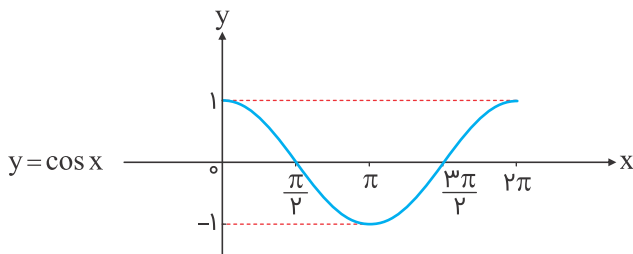
$$\Rightarrow \text{محیط} = 2 + BC(1 + \cos \alpha), \text{ مساحت} = BC \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta_{ABC} \text{ مساحت}}{\Delta_{ABC} \text{ محیط}} = \frac{BC \cos \alpha}{2 + BC(1 + \cos \alpha)}$$

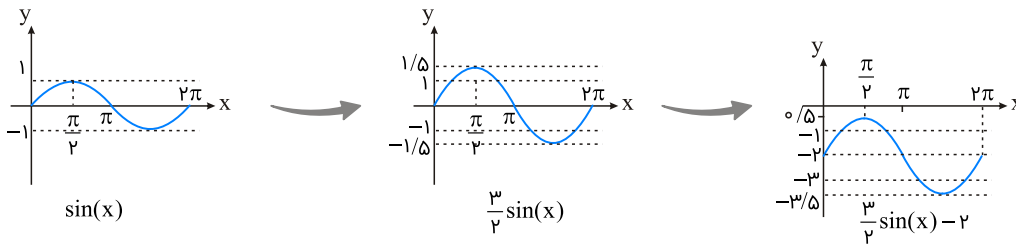
ابتدا نمودار $\sin x$ را به اندازه $\frac{\pi}{4}$ روی محور x به سمت چپ، سپس به اندازه یک واحد روی محور y به سمت بالا می‌بریم.



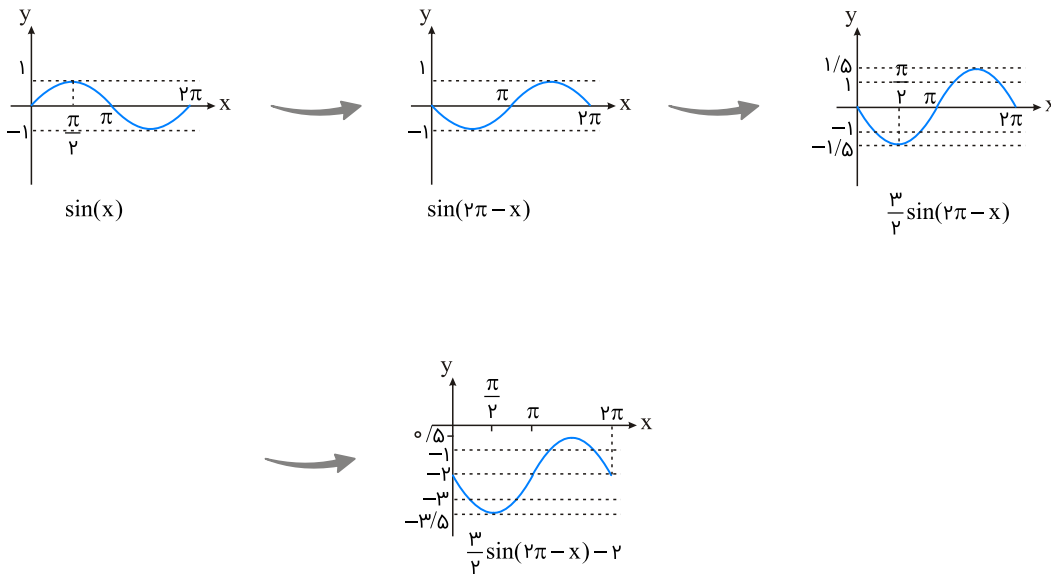
ابتدا نمودار $\cos x$ را نسبت به محور x قرینه کرده سپس یک واحد روی محور y بالا می‌بریم.



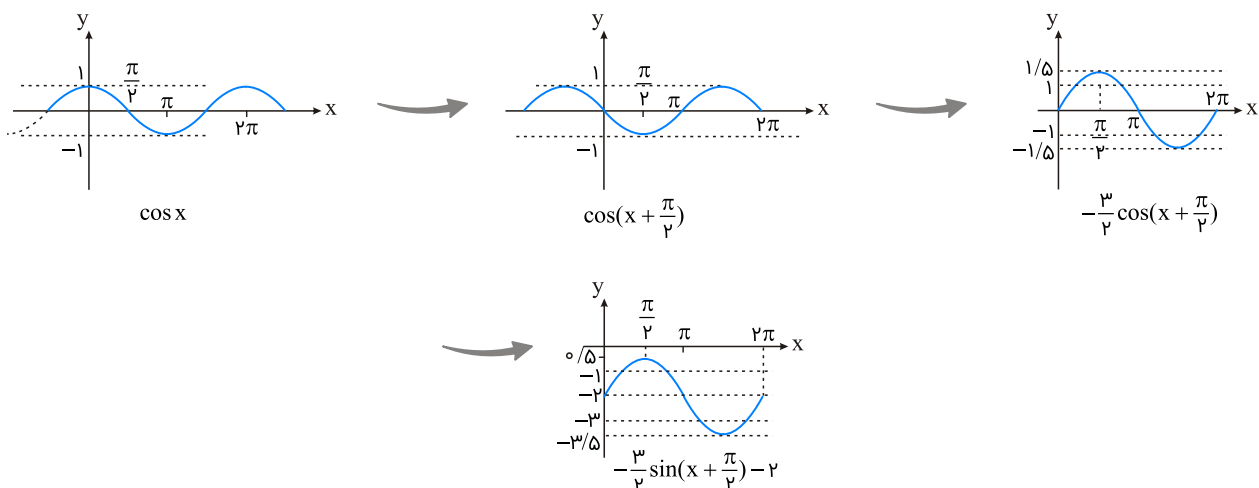
نمودار تابع $f(x) = \frac{3}{5} \sin x - 2$ به صورت زیر است:



از طرفی نمودار تابع $g(x)$ به صورت زیر است:



و نمودار $h(x)$ به صورت زیر است:



همانطور که از نمودارها مشخص است، نمودار $f(x)$ بر $h(x)$ منطبق است.

۱۰۳

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

$$\xrightarrow{+1} 1 \leq \cos^2 x + 1 \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} \text{کمترین مقدار} = 1 \\ \text{بیشترین مقدار} = 2 \end{cases}$$

۱۰۴

$$\theta = \pi - \left(\frac{\pi}{\lambda} + \frac{\pi}{\nu} \right) = \frac{\pi}{\nu} - \frac{\pi}{\lambda} = \frac{3\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{3\pi}{\lambda} = \frac{D}{1\lambda^\circ}$$

$$\Rightarrow D = \frac{3 \times 1\lambda^\circ}{\lambda} = \frac{3 \times 45}{2} = \frac{135}{2} = 67.5^\circ$$

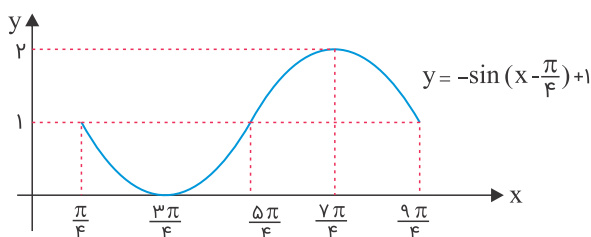
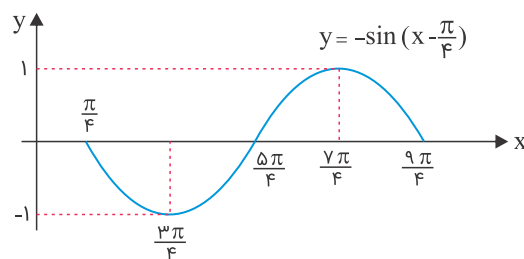
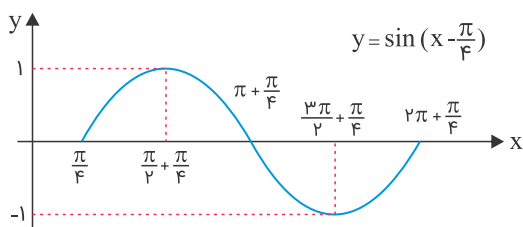
۱۰۵

$$\cos \alpha + \sqrt{\underbrace{\tan \alpha}_{\tan \alpha > 0}} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\tan \alpha} \Rightarrow \cos \alpha < 0$$

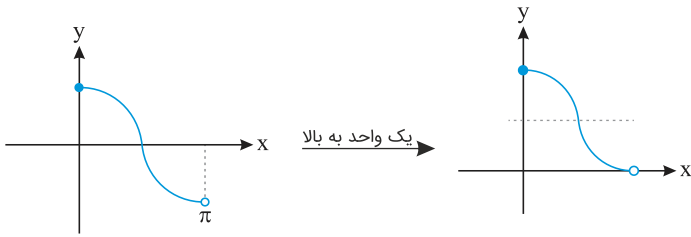
$\tan \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0 \Rightarrow$ ربع سوم

توجه: دقت کنید که $\tan \alpha$ نمی‌تواند برابر با صفر باشد، زیرا در این صورت طبق صورت سؤال مقدار $\cos \alpha$ نیز صفر می‌شود و این حالت ممکن نیست.

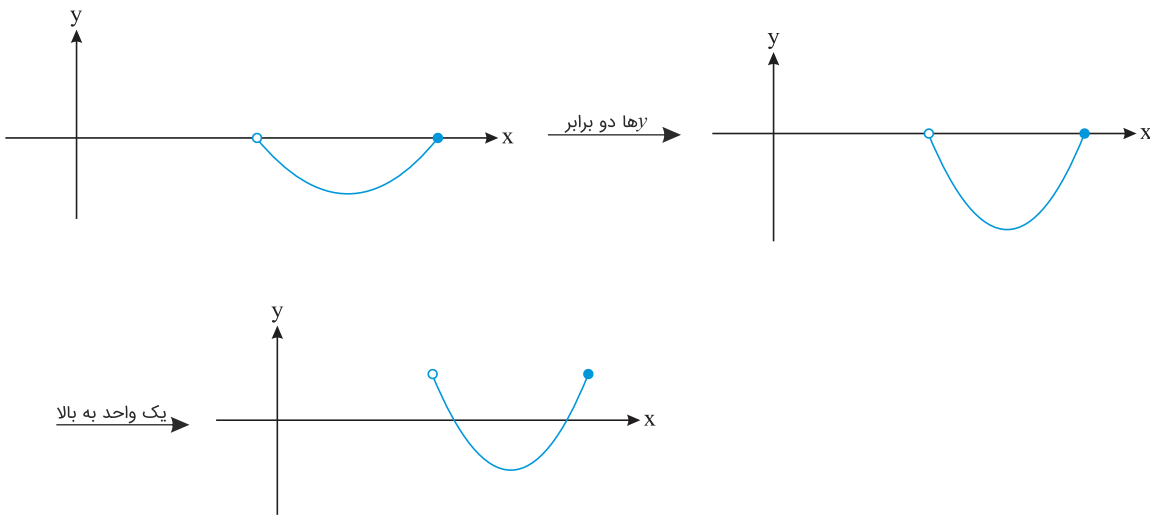
۱۰۶



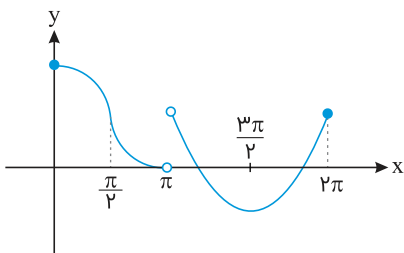
$$g(x) = \cos x + 1 \quad 0 \leq x < \pi$$



$$h(x) = 2 \sin x + 1 \quad \pi < x \leq 2\pi$$



$$f(x) = \begin{cases} \cos x + 1 & ; 0 \leq x < \pi \\ 2 \sin x + 1 & ; \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



$$\hat{\theta} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{r}$$

$$r = \frac{d}{\pi} = 12/5 \text{ cm}$$

$$\ell = r \cdot \theta \Rightarrow \ell = 12/5 \times \frac{\pi}{r} = 3/125\pi$$

$$y = (\sin x + 2)^2 + 2$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow y_{\min} = 3$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow y_{\max} = 11$$

$$R = [3, 11]$$

قسمت رنگی، ناحیه‌ای بین دو قطاع است. ابتدا طول کمان‌ها را به دست می‌آوریم. فرض کنیم طول کمان کوچک‌تر L و کمان بزرگ‌تر L' باشد.

$$L = r \cdot \alpha \Rightarrow L = 2\alpha, L' = r\alpha$$

$$\text{رنگی محیط} = 2\alpha + r\alpha + 2(r - 2)$$

$$\Rightarrow \alpha(r + 2) + 2(r - 2) = 13 \quad (1)$$

$$S_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} r^2 \alpha \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times 2^2 \alpha = 2\alpha, \quad S'_{\text{قطاع}} = \frac{1}{2} \times r^2 \alpha = \frac{1}{2} r^2 \alpha$$

$$\text{رنگی } S = \frac{1}{2} r^2 \alpha - 2\alpha = 10/5 \xrightarrow{\times 2} r^2 \alpha - 4\alpha = 21$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{21}{r^2 - 4} \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{21(r + 2)}{(r - 2)(r + 2)} + 2(r - 2) = 13$$

$$\Rightarrow 2(r - 2)^2 - 13(r - 2) + 21 = 0$$

$$r - 2 = \frac{7}{2} \Rightarrow r = 5/5 \xrightarrow{(2)} \alpha = \frac{21}{26/25} = 5/8$$

$$r - 2 = 3 \Rightarrow r = 5 \xrightarrow{(2)} \alpha = 1$$

$$\tan 1, \cot 1, \tan 1^{\tan 1}, \cot 1^{\cot 1}, \tan 1^{\cot 1}, \cot 1^{\tan 1}$$

می‌دانیم کمان ۱ رادیان حدود ۵۷ درجه است، پس داریم:

$$1 \text{ rad} > \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\tan 1}{\cot 1} > 1$$

در نتیجه اعداد $\tan 1^{\tan 1}$ و $\tan 1^{\cot 1}$ بزرگتر از یک هستند و اعداد $\cot 1^{\tan 1}$ و $\cot 1^{\cot 1}$ کوچکتر از یک هستند.

$$\tan^{\tan 1} 1 > \tan 1 > \tan^{\cot 1} 1 > \cot^{\cot 1} 1 > \cot 1 > \cot^{\tan 1} 1$$

برای درک بهتر، ترتیب بالا را با معادل‌های عددی زیر نمایش می‌دهیم (مقدار $\tan 1 > 1$ را با 1^+ و همین‌طور اعداد کوچکتر از یک را با 1^- نشان می‌دهیم).

$$(1^+)^{(1^+)} > 1^{+(1)} > (1^+)^{(1^-)} > (1^-)^{(1^-)} > 1^- > (1^-)^{(1^+)}$$

نکته: اعداد بین صفر و یک هرچه به توان بیشتری برسند، کوچکتر می‌شوند.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^1 > \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$f(t) = 64\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}}$$

$$f(180) = 64\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{64}{2^9} = \frac{2^6}{2^9} = \frac{1}{8}$$

پاسخ سؤال ۱۱۳

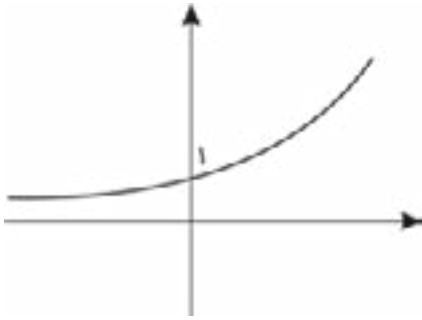
$$\frac{2}{3}$$

$$9^x = 3^{x-1} \Rightarrow 3^{2x} = 3^{x-1} \Rightarrow 2x = x-1 \Rightarrow x = -1$$

$$4^{2x-1} > \frac{1}{1024} \Rightarrow 2^{4x-2} > 2^{-10} \Rightarrow 4x-2 > -10 \Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow x > -2$$

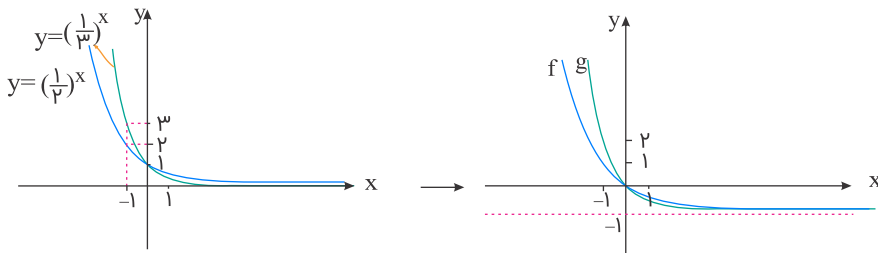


نکته: در تابع $y = a^x$ اگر $a > 1$ باشد، آنگاه با افزایش مقدار x مقدار y نیز افزایش می‌یابد. باتوجه به نکته بالا نمودار تابع $f(x) = 2^x$ به صورت زیر است:



از طریق نقطه‌یابی می‌توان $y = (\frac{1}{2})^x$ را رسم کرد، سپس آن را یک واحد به سمت پایین انتقال داد. به همین ترتیب تابع g را رسم می‌کنیم.

$$\begin{cases} f(x) = (\frac{1}{2})^x - 1 \\ g(x) = (\frac{1}{3})^x - 1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} D_f = D_g = \mathbb{R} \\ R_f = R_g = (-1, +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \log_b x \\ (4, 2) \end{cases} \Rightarrow 2 = \log_b 4 \Rightarrow b^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} b = 2 & \text{ق.ق} \\ b = -2 & \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log(b^5 + 64) = \log(32 + 64) = \log 100 = 2$$

$$p(3) = 100 \times 2^{p(3)} = 100 \times 64 = 6400$$

$$p(t) = 100 \times 2^{pt} = 102400 \Rightarrow 2^{pt} = 1024 = 2^{10} \Rightarrow pt = 10 \Rightarrow t = 5$$

$$\log 14 = \log 2 + \log 7 = 0/3010 + 0/8450 = 1/146$$

$$\log 56 = 3 \log 2 + \log 7 = 3(\circ/3\circ 1\circ) + (\circ/845\circ) = 1/748$$

$$\log_r(A + 15) = \log_r A + 1$$

$$\Rightarrow \log_r A + 15 - \log_r A = 1 \Rightarrow \log_r \frac{A + 15}{A} = 1$$

$$\frac{A + 15}{A} = r \Rightarrow A + 15 = rA \Rightarrow 3A = 15 \Rightarrow A = 5$$

$$\log \frac{2\sqrt{3}}{5} = \log 2\sqrt{3} - \log 5 = \log 2 + \log \sqrt{3} - (\log \frac{10}{2})$$

$$= \log 2 + \log \sqrt{3} - (1 - \log 2)$$

$$= \log 2 + \log 3^{\frac{1}{2}} - 1 + \log 2 = 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 - 1$$

$$= 2(\circ/3) + \frac{1}{2}(\circ/48) - 1 = \circ/84 - 1 = -\circ/16$$

$$\text{الف) } f(x) = 3^x \Rightarrow f(3) = 3^3 = 27$$

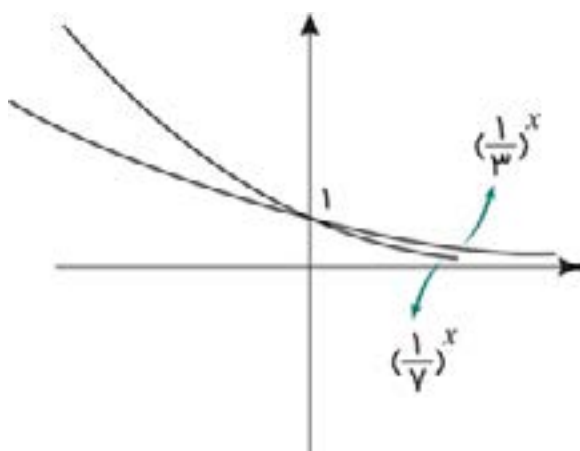
$$\text{ب) } g(x) = \left(\frac{1}{16}\right)^x \Rightarrow g(-1) = \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} = 16$$

$$\text{پ) } h(x) = 10^x \Rightarrow h(-2) = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = \circ/01$$

نکته ۱) در تابع $y = a^x$ اگر $a > 1$ آنگاه با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.

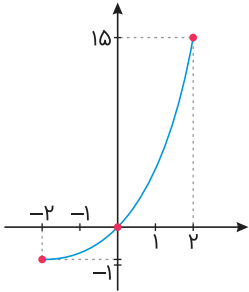
نکته ۲) در تابع $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ آنگاه با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد.

می‌دانیم $3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $7^{-x} = \left(\frac{1}{7}\right)^x$ ، در نتیجه به ازای مقادیر مثبت x ، 3^{-x} بالای نمودار 7^{-x} قرار می‌گیرد و به ازای مقادیر منفی x ، 7^{-x} بالای نمودار 3^{-x} قرار می‌گیرد.



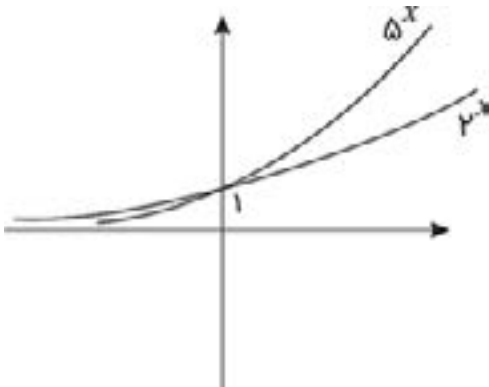
دامنه هر دو تابع: مجموعه اعداد حقیقی
برد هر دو تابع: مجموعه اعداد حقیقی مثبت

x	-۲	۰	۲
y	$-\frac{۱۵}{۱۶}$	۰	۱۵



نکته: این نمودار از انتقال $y = 4^x$ ، یک واحد به سمت پایین به وجود آمده است.

نکته ۱) در تابع $y = a^x$ اگر $a > 1$ ، آنگاه با افزایش مقدار x ، مقدار y نیز افزایش می‌یابد.
 نکته ۲) در تابع $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ ، آنگاه با افزایش مقدار x ، مقدار y کاهش می‌یابد.
 به ازای مقادیر مثبت x ، 5^x بالای 2^x قرار می‌گیرد و به ازای مقادیر منفی x ، 2^x بالای 5^x قرار می‌گیرد.



دامنه هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی است و برد هر دو تابع مجموعه اعداد حقیقی مثبت است.

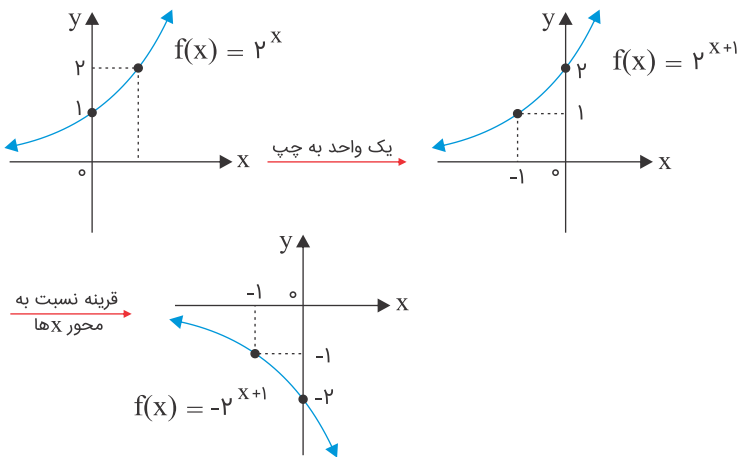
$$\log((x+2)(2x-1)) = \log(4x+1) \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 4x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ ق ق} \\ x = \frac{3}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x+3}{12}\right) > 1 \xrightarrow[\substack{\text{نمایی} \\ 0 < \frac{1}{2} < 1}]{\text{}} \frac{2x+3}{12} < \left(\frac{1}{2}\right)^1 \Rightarrow 2x+3 < 6 \\ \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2} \quad (\text{I})$$

$$\frac{2x+3}{12} > 0 \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > \frac{-3}{2} \quad (\text{II})$$

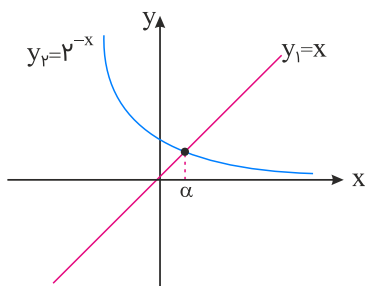
$$\text{مجموعه جواب نامعادله : } (\text{I}) \cap (\text{II}) \Rightarrow \frac{-3}{2} < x < \frac{3}{2}$$



معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$x2^x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2^x} \Rightarrow x = 2^{-x}$$

نمودار دو تابع $y_1 = x$ و $y_2 = 2^{-x}$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



دو نمودار در نقطه‌ای به طول α یکدیگر را قطع کردند، پس معادله یک جواب دارد.

$$y = 2^x + 2^{(x+1)} \Rightarrow y = (2^x)^2 + 2(2^x) \xrightarrow{\text{عدد ۱ را اضافه و کم می کنیم}} y = (2^x)^2 + 2(2^x) + 1 - 1 \Rightarrow y = (2^x + 1)^2 - 1$$

باید x را بر حسب y بنویسیم:

$$y + 1 = (2^x + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+1} = 2^x + 1 \Rightarrow 2^x = \sqrt{y+1} - 1$$

از دو طرف، لگاریتم در مبنای ۲ می گیریم:

$$x = \log_2(\sqrt{y+1} - 1)$$

جای x و y را عوض می کنیم:

$$y = \log_2(\sqrt{x+1} - 1) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_2(\sqrt{x+1} - 1)$$

$$\log_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} = \log_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} \log_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\frac{1}{a}} (\log_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} + \log_{\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}}) = \frac{1}{\frac{1}{a}} (\frac{1}{a} + 1) = \frac{1}{\frac{1}{a}} \times (\frac{1+a}{a}) = \frac{1+a}{\frac{1}{a}}$$

$$\log_B^A = \frac{1}{\log_A^B} \text{ نکته:}$$

$$\log_{b^n}^{a^m} = \frac{m}{n} \log_b^a \text{ نکته: می دانیم}$$

پس:

$$\log_{\frac{1}{\epsilon}}^{\sqrt{\epsilon}} = A \Rightarrow \log_{\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} = A \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \log_{\frac{1}{\epsilon}}^{\frac{1}{\epsilon}} = A \Rightarrow A = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\frac{1}{A} + 1 = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} + 1 = \epsilon + 1 = \epsilon$$

$$\log_{\frac{1}{\epsilon}}^{\epsilon} = \log_{\frac{1}{\epsilon}}^{\epsilon} = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} \log_{\frac{1}{\epsilon}}^{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$3^{x+1} + 3^x = 36 \Rightarrow 3^x \times 3^1 + 3^x = 36 \Rightarrow 3^x(3 + 1) = 36$$

$$3^x \times 4 = 36 \Rightarrow 3^x = \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow 3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$$



$$\frac{9^x}{6^x} + \frac{6^x}{6^x} - 2 \times \frac{3^x}{6^x} = 0 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x + 1 - 2\left(\frac{3}{2}\right)^x = 0$$

$$\xrightarrow{\left(\frac{3}{2}\right)^x = t} t - 2\frac{1}{t} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = +1 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Rightarrow x = 0 \\ t = -2 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = -2 \text{ غ.ق.ق} \end{cases}$$

بنابراین مجموع ریشه‌ها برابر با صفر است.

۱۳۶ نکته: $\log_b^a = \frac{1}{\log_a^b}$

$$\log_{3^0}^{\Delta} = a \Rightarrow \log_{\Delta}^{3^0} = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_{\Delta}^{(6 \times \Delta)} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \log_{\Delta}^6 + 1 = \frac{1}{a} \Rightarrow \log_{\Delta}^6 = \frac{1}{a} - 1 = \frac{1-a}{a}$$

$$\log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \Rightarrow \log_{18^0}^{15^0} = \frac{\log_{\Delta}^{15^0}}{\log_{\Delta}^{18^0}} = \frac{\log_{\Delta}^{(\Delta^2 \times 6)}}{\log_{\Delta}^{(6^2 \times \Delta)}} = \frac{2 + \log_{\Delta}^6}{2 \log_{\Delta}^6 + 1} \Rightarrow \log_{18^0}^{15^0} = \frac{2 + \frac{1-a}{a}}{\frac{2(1-a)}{a} + 1} = \frac{a+1}{2-a}$$

۱۳۷ $0 < \sqrt{5/7} < 1$ است، پس هرچه توان بیشتر باشد مقدار کمتر می‌شود.

$$\sqrt{2} \bigcirc \sqrt[3]{3} \xrightarrow{\text{توان } 6} 8 < 9$$

پس: $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$

$$\sqrt{2} \bigcirc \sqrt[5]{5} \xrightarrow{\text{توان } 10} 32 > 25$$

پس: $\sqrt[5]{5} < \sqrt{2}$

$$\sqrt[5]{5} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$$

بنابراین:

$$\sqrt{5/7}^{\sqrt[5]{5}} > \sqrt{5/7}^{\sqrt{2}} > \sqrt{5/7}^{\sqrt[3]{3}}$$

$$\log 8 = 0.6 \Rightarrow \log 2^3 = 0.6 \Rightarrow 3 \log 2 = 0.6 \Rightarrow \log 2 = 0.2$$

$$\text{نکته: } \log 2 + \log 5 = 1$$

به کمک نکته بالا داریم:

$$0.2 + \log 5 = 1 \Rightarrow \log 5 = 0.8$$

از قاعده تغییر مبنا استفاده می‌کنیم:

$$\log_B^A = \frac{\log_C^A}{\log_C^B} \Rightarrow \log_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{8}} = \frac{\log_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{8}}}{\log_{\sqrt[3]{5}}^{\sqrt[3]{5}}} = \frac{\frac{1}{3} \log 8}{\frac{1}{3} \log 5} = \frac{\frac{1}{3} \times 0.6}{\frac{1}{3} \times 0.8} = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{0.4/5} &= \log (0.4/5)^{1/2} = \frac{1}{2} \log \frac{4}{10} = \frac{1}{2} (\log 4 - \log 10) \\ &= \frac{1}{2} (\log (2 \times 2) - \log 10) = \frac{1}{2} (\log 2 + \log 2 - 1) \end{aligned}$$

$$\text{نکته: } \log 2 + \log 5 = 1$$

باتوجه به نکته فوق، مقدار عددی $\log 5$ را حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log 5 &= 1 - \log 2 = 1 - 0.2 = 0.8 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} (\log 2 + \log 2 - 1) &= \frac{1}{2} (0.2 + 0.2 - 1) = \frac{1}{2} (-0.6) = -0.3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{\mu}^{(\mu^{x-1}-1)} \times \log_{\mu}^{(\mu^x-\mu)} &= 6 \Rightarrow \log_{\mu}^{\mu^{x-1}-1} \times \log_{\mu}^{\mu \times (\mu^{x-1}-1)} = 6 \\ \Rightarrow \log_{\mu}^{\mu^{x-1}-1} \times (1 + \log_{\mu}^{\mu^{x-1}-1}) &= 6 \end{aligned}$$

$$\log_{\mu}^{\mu^{x-1}-1} = a \Rightarrow a(a+1) = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\log_{\mu}^{\mu^{x-1}-1} = 2 \Rightarrow \mu^{x-1} - 1 = 9 \Rightarrow \mu^{x-1} = 10 \Rightarrow x - 1 = \log_{\mu}^{10} \Rightarrow x = 1 + \log_{\mu}^{10}$$

$$\begin{aligned} \log_{\mu}^{\mu^{x-1}-1} = -3 &\Rightarrow \mu^{x-1} - 1 = \frac{1}{\mu^3} \Rightarrow \mu^{x-1} = \frac{\mu^3 + 1}{\mu^3} \\ \Rightarrow x - 1 &= \log_{\mu}^{\frac{\mu^3 + 1}{\mu^3}} \Rightarrow x = 1 + \log_{\mu}^{\frac{\mu^3 + 1}{\mu^3}} \end{aligned}$$

$$\mu^x = t \Rightarrow t^2 = 2 \times 9t - 45 \Rightarrow t^2 - 18t + 45 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 3)(t - 15) = 0 \Rightarrow t = 3 \text{ یا } 15$$

$$\begin{cases} \mu^x = 3 \Rightarrow x = 1 \\ \mu^x = 15 \Rightarrow x = \log_{\mu}^{15} \end{cases}$$

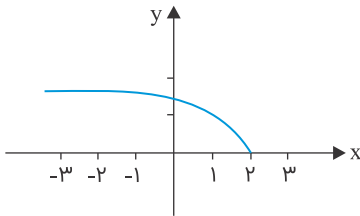
$$\lim_{x \rightarrow 2} xf(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2 \times 3 = 6$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = 3 - 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x)}{\cos^2 x} = 1 + 1 = 2$$



$$2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_f = (-\infty, 2]$$

تابع f در همسایگی راست 2 ($x > 2$) تعریف نشده است؛ پس تابع f در $x = 2$ حد ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3 - x^2 = 3 - 4 = -1$$

$$f(2) = -1$$

تابع f در $x = 2$ ناپیوسته است. (پیوستگی چپ دارد)

$$2 \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) + 3f(1) - \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2(-1) + 3(2) - 4 = 0$$

برای این که تابع در $x = 2$ پیوسته باشد باید: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{2+a}{1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4b+4, \quad f(2) = b-1$$

$$4b+4 = b-1 \Rightarrow b = \frac{-5}{3}, \quad 2+a = b-1 \Rightarrow a = \frac{-14}{3}$$

نکته: تابع $f(x) = \sqrt{x-k}$ در $x = k$ حد ندارد، چون حد چپ ندارد ولی مقدار دارد. پس در اینجا، $x = b$ ریشه زیر رادیکال است:

$$2x - a + 3 = 0 \xrightarrow{x=b} 2b - a + 3 = 0 \quad I$$

$$f(b) = \sqrt{2b - a + 3} = a + 1 \xrightarrow{\text{به توان } 2} 2b - a + 3 = (a+1)^2 \xrightarrow{I} (a+1)^2 = 0$$

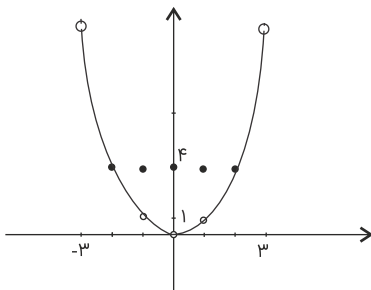
$$\Rightarrow a = -1 \xrightarrow{I} 2b + 1 + 3 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |f(x)| + \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x-2) = |-2| + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 + 0 = 2$$

در اینجا وقتی $x \rightarrow 2^+$ ، $x-2 \rightarrow 0^+$ ، پس $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x-2) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

حد تابع داده شده از ضابطه $x \notin \mathbb{Z}$ حساب می شود، چون در $a \in \mathbb{R}$ وقتی $x \rightarrow a$ یعنی x به عدد a نزدیک می شود و دقیقاً برابر خود a نمی شود. پس $x \rightarrow a$ از ضابطه $x \notin \mathbb{Z}$ حساب می شود. پس تابع روی $\mathbb{R}$ حد دارد و روی بازه $(-3, 3)$ نیز همه جا حد دارد.

شکل تابع نشان می دهد که تابع در تمامی بازه فوق دارای حد است.



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3f(-1) = 3 - 3(-1) + 3(1) = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} ([x] - \alpha)[x] = \lim_{x \rightarrow -2^-} ([-2^-] - \alpha)[-2^-] = (-3 - \alpha)(-3) = 9 + 3\alpha$$

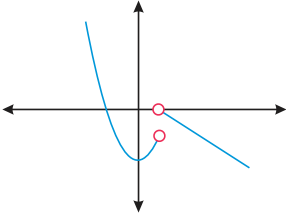
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} ([x] - \alpha)[x] = \lim_{x \rightarrow -2^+} ([-2^+] - \alpha)[-2^+] = (-2 - \alpha)(-2) = 4 + 2\alpha$$

$$f(-2) = ([-2] - \alpha)[-2] = (-2 - \alpha)(-2) = 4 + 2\alpha \Rightarrow 9 + 3\alpha = 4 + 2\alpha \Rightarrow \alpha = -5$$

برای بررسی پیوستگی باید در نقطه $x = -2$ حد چپ و راست و مقدار تابع برابر باشند.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 9) = -5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x^2 + 3) = -5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5 = f(2) \end{cases}$$

در نتیجه تابع f در $x = 2$ پیوسته است.



$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود ندارد}$$

باید نقاط صحیح داخل براکت را پیدا کنیم، پس:

$$x^k = k \Rightarrow x = \pm \sqrt[k]{k}$$

مقادیری از k را مشخص می‌کنیم که به ازای آن‌ها x در بازه $(-1, 2)$ قرار گیرد، یعنی:

نقطه انفصال نیست، چون $\min$ تابع داخل براکت است $k = 0 \Rightarrow x = 0$

$$k = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$x = -1$ جزء نقاط باز می‌باشد ولی $x = 1$ قابل قبول است.

$$k = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt[2]{2}, \quad -\sqrt[2]{2} \notin (-1, 2) \Rightarrow x = \sqrt[2]{2}$$

$$k = 3 \Rightarrow -\sqrt[3]{3} \notin (-1, 2) \Rightarrow x = \sqrt[3]{3}$$

$$k = 4 \Rightarrow x = \sqrt[4]{4}, k = 5 \Rightarrow x = \sqrt[5]{5}, k = 6 \Rightarrow x = \sqrt[6]{6}, \dots$$

این روند تا $k = 16$ که $x = \sqrt[16]{16} = 2$ ادامه می‌یابد که این مقدار نیز قابل قبول نیست؛ بنابراین ۱۵ نقطه انفصال وجود دارد.

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2x+3}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + \sqrt{2x+3}}{(x+1)(-2)} \times \frac{x - \sqrt{2x+3}}{x - \sqrt{2x+3}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{(-2)(x+1)(-2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{4(x+1)} = \frac{-4}{4} = -1$$

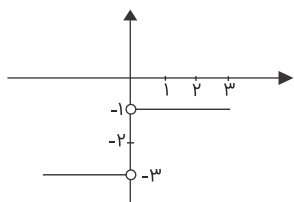
$$f(-1) = 1 + a \Rightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \frac{\pi}{2} \times \cos \pi}{1 + \cos^2 \frac{\pi}{2}} = \frac{(1)(-1)}{1+0} = -1$$

۱۶۰

$$f(x) = \begin{cases} -1 & ; x > 0 \\ -3 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -3$$

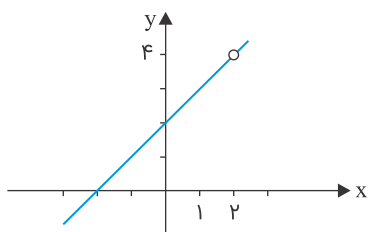
پس حد ندارد.

۱۶۱

$$f(x) = \frac{x^2 + ax + 6}{x + 3} \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow \frac{1 + a}{4} = 3 \Rightarrow a = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x+2)}{x+3} = -1$$

۱۶۲



x	-2	0
y	0	2

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x + 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

تعریف نشده $f(2)$ الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

$$\begin{cases} x > x^{\sqrt{2}} > x^{\sqrt[3]{2}} > x^{\sqrt[4]{2}} > \dots \\ x < \sqrt{x} < \sqrt[3]{x} < \sqrt[4]{x} < \dots \end{cases}$$

$$x \rightarrow \circ^+ : x > x^{\sqrt{2}} \Rightarrow x^{\sqrt{2}} - x < \circ$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x^{\sqrt{2}} - x) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \circ^-} [-x^{\sqrt{2}}] = [\circ^-] = -1$$

$$x \rightarrow \circ^+ : x^{\sqrt{2}} \rightarrow \circ^+ \Rightarrow [x^{\sqrt{2}}] = \circ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \circ^+} f([x^{\sqrt{2}}]) = f(\circ) = \circ$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \circ^+} f(x^{\sqrt{2}} - x) + \lim_{x \rightarrow \circ^+} f([x^{\sqrt{2}}]) = -1 + \circ = -1$$

۱۶۴

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 1 \\ -1 & ; x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -1 & ; x \geq 1 \\ 1 & ; x < 1 \end{cases}$$

$f(x) + g(x)$ برابر با تابع ثابت صفر است، بنابراین در $x = 1$ پیوسته می‌باشد.

۱۶۵

$$\text{حد راست : } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\sqrt[3]{x} + \frac{x-1}{x-1} \right) = 2$$

$$\text{حد چپ : } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sqrt[3]{x} - \frac{x-1}{x-1} \right) = 0$$

چون حد راست و چپ برابر نیست، پس حد ندارد.

۱۶۶

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow (-1)^+} f(t) = \circ \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow \sqrt[3]{-1}} f(t) = 1 \\ f(f(1)) &= f(-1) = \circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \circ - 1 + \circ = -1$$

۱۶۷

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \cot x}{\sin^{\sqrt{2}} x + \cos^{\sqrt{2}} x} = \frac{\circ}{\circ}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}}{(\sin x + \cos x)(\sin^{\sqrt{2}} x + \cos^{\sqrt{2}} x - \sin x \cos x)} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

$$x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 6) = 0 \Rightarrow x = 1, x = -6$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x+2} & ; x = 1, x = -6 \\ 2x^2 + 3 & ; x \neq 1, x \neq -6 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} f(0) + f(1) + \frac{\lim_{x \rightarrow -6} f(x)}{5} &= 2(0) + 3 + \frac{2}{3} + \frac{\lim_{x \rightarrow -6} 2x^2 + 3}{5} \\ &= 3 + \frac{2}{3} + \frac{75}{5} = 3 + \frac{2}{3} + 15 = 18 + \frac{2}{3} = \frac{56}{3} \end{aligned}$$

ابتدا به جای تمام x ها عدد ۲ را قرار می‌دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax + b}{x^2 + x - 6} = \frac{8 + 2a + b}{0} = \frac{16}{5}$$

پس لازم است $8 + 2a + b = 0$ باشد، یعنی: $b = -8 - 2a$
با جایگذاری داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax + b}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax - 2a - 8}{x^2 + x - 6}$$

صورت کسر را به $x - 2$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} \cancel{x^3} + ax - 2a - 8 \left| \frac{x - 2}{x^2 + 2x + a + 4} \right. \\ \underline{-(\cancel{x^3} - 2x^2)} \\ \cancel{2x^2} + ax - 2a - 8 \\ \underline{-(\cancel{2x^2} - 4x)} \\ (a + 4)x - 2a - 8 \\ \underline{-((a + 4)x - 2a - 8)} \\ 0 \end{array}$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax - 2a - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x^2 + 2x + a + 4)}{\cancel{(x - 2)}(x + 3)} = \frac{16}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{4 + 4 + a + 4}{5} = \frac{16}{5} \Rightarrow 12 + a = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$b = -8 - 2a \xrightarrow{a=4} b = -8 - 8 \Rightarrow b = -16$$

$$\frac{6}{x} = k \Rightarrow x = \frac{6}{k}$$

مقادیر صحیح k که باعث می شود x در فاصله ۱ تا ۶ باشد عبارت اند از:

$$k = 6 \Rightarrow x = 1$$

نقطه $x = 1$ نقطه مرزی ابتدایی است و لازم است در این نقطه تابع دارای فقط پیوستگی راست باشد. مقدار تابع در این نقطه $F(1) = -6$ و حد راست تابع $F(1^+) = -5$ است، پس پیوستگی راست ندارد و $x = 1$ نقطه انفصال است.

$$k = 5 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \Rightarrow \text{نقطه انفصال}$$

$$k = 4 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{نقطه انفصال}$$

$$k = 3 \Rightarrow x = 2$$

این نقطه به دلیل اینکه ضریب صفر پشت براکت محسوب می شود انفصال نیست و جزء نقطه پیوستگی تابع محسوب می گردد.

$$k = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow \text{نقطه انفصال}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = 6$$

نقطه $x = 6$ نقطه مرزی انتهایی است، پس در این نقطه فقط پیوستگی چپ لازم است. در این نقطه مقدار تابع $F(6) = 4$ و حد چپ تابع $F(6^-) = 4$ ، پس تابع پیوستگی چپ دارد و جزء نقاط انفصال شمرده نمی شود. بنابراین تابع در این فاصله ۴ نقطه انفصال دارد.

حد چپ و راست تابع را در نقطه $x_0 = 4$ به دست می آوریم:

$$\text{حد راست تابع} = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = (2-a)(2a)(-9) = -18a(2-a)$$

$$\text{حد چپ تابع} = \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = (1-a)(2a)(-8) = -16a(1-a)$$

برای پیوستگی لازم است حد راست و چپ برابر باشند، پس:

$$-18a(2-a) = -16a(1-a) \Rightarrow 18 - 9a = 8 - 8a \Rightarrow a = 10$$

اما دقت شود که به ازای $a = 10$ مقدار تابع یعنی $f(4) = 1280$ می شود و با حدود چپ و راست برابر نیست، پس هیچ مقدار a باعث پیوستگی این تابع در $x_0 = 4$ نمی شود.

پاسخ سؤالات ۱۷۲ تا ۱۷۳

۱۷۲ درست

۱۷۳ نادرست

۱۷۴ کمتر

۱۷۵

$$5/8 = \frac{21+x}{5} \Rightarrow 29 = 21+x \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8, x+1 = 9, x+2 = 10 \Rightarrow \bar{x} = \frac{8+9+10}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

۱۷۶ درست

۱۷۷ الف

میانگین برابر است با:

$$\text{میانگین} = \frac{5+6+7+8+8+9+10+11}{8} = \frac{64}{8} = 8$$

واریانس برابر است با:

ب

$$\sigma^2 = \frac{(5-8)^2 + (6-8)^2 + (7-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (10-8)^2 + (11-8)^2}{8}$$

$$\sigma^2 = \frac{9+4+1+0+0+1+4+9}{8} = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$\text{انحراف معیار} = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \sqrt{3.5}$$

پ

۷, ۱۶, ۱۶, ۱۸, ۱۹, ۲۰

$$\text{میانہ} = \frac{16+18}{2} = 17$$

$$\bar{x} = \frac{7+16+16+18+19+20}{6} = \frac{96}{6} = 16$$

۱۷۸



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0/7}{0/9} = \frac{7}{9}$$

۱۸۰ برای تعیین میانگین کافی است مجموع داده‌ها را بر تعداد داده‌ها تقسیم کنیم، یعنی:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2+4+0+3+2+0+1+5+7+2+3+1+1+2+3+7+7+5+2+1}{20}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{58}{20} = 2/9$$

$$\bar{x} = \frac{55}{5} = 11$$

x	۶	۱۰	۱۱	۱۳	۱۵
$x - \bar{x}$	-۵	-۱	۰	۲	۴
$(x - \bar{x})^2$	۲۵	۱	۰	۴	۱۶

$$\sigma = \sqrt{\frac{25+1+0+4+16}{5}} = \sqrt{\frac{46}{5}} \approx 3/03$$

پاسخ سؤالات ۱۸۲ تا ۱۸۳

۱۸۲ این دو پیشامد یعنی به هدف زدن اولی و دومی را به ترتیب A و B می‌نامیم. بدیهی است این دو پیشامد مستقل هستند. پس متمم هر کدام با دیگری نیز مستقل هستند. پس:

$$P(A \cap B') = P(A)P(B') = \frac{1}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{32}{100} = 0/32$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = \frac{2}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{8}{100} = 0/08$$

توجه:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{10} = \frac{2}{10}, \quad P(B') = 1 - P(B) = 1 - \frac{6}{10} = \frac{4}{10}$$

۱۸۴ انحراف معیار داده‌ها در $|3|$ ضرب می‌شود.

$$\sigma = 2 \Rightarrow \sigma_{\text{جدید}} = |3|\sigma \xrightarrow{\sigma=2} \sigma_{\text{جدید}} = 3 \times 2 = 6$$

$$P(S) = ۵/۴ \quad P(M) = ۵/۳$$

$$P(S|M) = ۵/۸ \Rightarrow P(S \cap M) = ۵/۲۴$$

$$P(S'|M') = \frac{1 - P(S \cup M)}{1 - P(M)} = \frac{1 - (۵/۷ - ۵/۲۴)}{۵/۷} = \frac{۵/۵۴}{۵/۷} = \frac{۲۷}{۳۵}$$

$$\text{جدید } \overline{X} = ۳\overline{X} + ۱ = ۳(۴) + ۱ = ۱۳$$

$$\text{جدید } \sigma^۲ = (۳)^۲ \sigma^۲ = ۹ \times ۳ = ۲۷$$

B: مجموع سه عدد روشده برابر با ۱۵ باشد.
A: هر سه عدد روشده یکسان باشند.

$$\text{مجموع ۱۵: } \begin{cases} (\omega, \omega, \omega) \Rightarrow ۱ \\ (\epsilon, \omega, \epsilon) \Rightarrow ۳! = ۶ \\ (\epsilon, \epsilon, \epsilon) \Rightarrow ۳ \end{cases}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{۱}{۱ + ۶ + ۳} = \frac{۱}{۱۰}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۵/۳ \Rightarrow ۵/۳ P(B) = P(A \cap B) \quad (I)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = ۵/۲ \Rightarrow ۵/۲ P(A) = P(B \cap A) \quad (II)$$

$$(II), (I) \Rightarrow ۵/۲ P(A) = ۵/۳ P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{۲}{۳} P(A)$$

$$P(A) + P(B) = ۵/۶ \Rightarrow P(A) + \frac{۲}{۳} P(A) = ۵/۶$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۳} P(A) = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(A) = \frac{۹}{۲۵} = ۵/۳۶$$

$$P(B) = \frac{۲}{۳} P(A) \Rightarrow P(B) = ۵/۲۴$$

$$P(A \cap B) = ۵/۵۷۲$$

$$P(B|A') = \frac{P(\overbrace{B \cap A'}^{B-A})}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{\underbrace{P(A')}_{1-P(A)}}$$

$$= \frac{۵/۲۴ - ۵/۵۷۲}{1 - ۵/۳۶} = \frac{۵/۱۶۸}{۵/۶۴} = \frac{۲۱}{۸۰}$$

دقت شود که میانگین‌ها باهم برابرند و امکان انجام محاسبات وجود دارد. مجموع‌های موجود در رابطه واریانس را در هرکدام از داده‌ها به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 \times n = 9 \times 7 = 63 \text{ سری اول داده‌ها}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 \times n = 3 \times 3 = 9 \text{ سری دوم داده‌ها}$$

پس کل داده‌ها باهم دارای مجموعی به‌صورت زیر هستند:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 63 + 9 = 72$$

بنابراین:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{72}{10} = 7.2$$

پاسخ سؤال ۱۹۰

۱۲ ۱۹۰

$$A = \{ \underset{\text{فرد}}{12, 13, \dots, 23, 24} \}$$

$$\frac{\binom{7}{2}}{\binom{6}{2} + \binom{7}{2}} = \frac{21}{15 + 21} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

$\downarrow$ هر دو فرد $\downarrow$ هر دو زوج

$$P(B|A) = 0/7 \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0/7 \Rightarrow P(A \cap B) = 0/14$$

$$P(B'|A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(A')} \\ = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(A)} = \frac{0/72}{0/8} = 0/9$$

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{3}{8}$$



$$n = ۴۰$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{۴۰} = ۱۰۰$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{۴۰}^2 = ۳۴۰$$

$$\bar{x} = \frac{۱۰۰}{۴۰} = \frac{۵}{۲}, \quad (\bar{x})^2 = \frac{۲۵}{۴}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{۳۴۰}{۴۰} - \frac{۲۵}{۴} = \frac{۱۷}{۲} - \frac{۲۵}{۴} = \frac{۳۴}{۴} - \frac{۲۵}{۴} = \frac{۹}{۴}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{۹}{۴} \Rightarrow \sigma = \frac{۳}{۲}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{۳}{۵}$$

نکته ۱: هرگاه مجموع اختلاف داده‌ها از عدد ثابت a ، برابر x باشد و تعداد داده‌ها n باشد، داریم:

$$\bar{x} = a + \frac{x}{n}$$

نکته ۲: هرگاه مجموع مجزورات اختلاف داده‌ها از میانگین برابر a باشد:

$$\sigma^2 = \frac{a}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{۰}{۱۸} + ۲۵ \Rightarrow \bar{x} = ۲۵$$

$$\sigma^2 = \frac{۴۵۰}{۱۸} = ۲۵ \Rightarrow \sigma = ۵$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{۵}{۲۵} = \frac{۱}{۵}$$

تذکر: برای به دست آوردن میانگین، می‌توانستیم از این نکته نیز استفاده کنیم که اگر مجموع اختلاف داده‌ها از یک عدد ثابت برابر با صفر باشد، آنگاه میانگین داده‌ها را همان عدد ثابت در نظر می‌گیریم.

وقتی دو تیر به هدف خورده باشد، پس یک تیر به هدف نخورده است.

$$P(A').P(B).P(C) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$$

تیر A به هدف نخورده

$$P(A).P(B').P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

تیر B به هدف نخورده

$$P(A).P(B).P(C') = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

تیر C به هدف نخورده

حال مجموع این احتمالات را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{36}$$

دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد برابر است با:

$$P = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{36}} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{خسرو}) = x \quad P(\text{کیومرث}) = 3x$$

$$P(\text{خسرو یا کیومرث}) = x + 3x - 3x^2 = \frac{17}{25}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 4x + \frac{17}{25} = 0 \Rightarrow (3x - \frac{17}{5})(x - \frac{1}{5}) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

میانگین تفاضل‌ها را به دست می‌آوریم، یعنی:

$$\text{میانگین تفاضل‌ها} = \frac{5 + 3 - 2 + 4 - 1}{5} = \frac{9}{5} = 1/8$$

پس میانگین واقعی برابر است با:

$$\bar{X} = 16 + 1/8 = 17/8 \Rightarrow \text{میانگین تفاضل‌ها} + \text{میانگین حدسی} = \text{میانگین واقعی}$$

مشخص است که در هر پرتاب احتمال خواسته‌شده مستقل از پرتاب‌های دیگر است، پس:

$$P(\text{نیامدن مضرب ۳ در یک پرتاب}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

پس احتمال خواسته‌شده در صورت مسئله عبارت است از:

$$P(\text{نیامدن مضرب ۳ در چهار پرتاب}) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{16}{81}$$

A: عدد انتخابی مریم ۱۵ باشد.

B: عدد انتخابی سارا از عدد انتخابی مریم کوچکتر باشد.

مریم و سارا در کل هرکدام به ۱۵ حالت از مجموعه A یک عدد را انتخاب می‌کنند، بنابراین $۱۵ \times ۱۵ = ۲۲۵$ حالت دارد. مریم و سارا نباید دو عدد یکسان را انتخاب کنند، پس $۲۲۵ - ۱۵ = ۲۱۰$. حال در نصف حالت‌ها عدد انتخابی سارا از مریم کوچکتر است، پس:

$$۲۱۰ \div ۲ = ۱۰۵ \Rightarrow P(B) = \frac{۱۰۵}{۲۲۵}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{۱۴}{۲۲۵}}{\frac{۱۰۵}{۲۲۵}} = \frac{۱۴}{۱۰۵}$$