

یستوفیل

هندسه دهم - رشته ریاضی



 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com





نوترفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



نگ رقصی نوترفیل

رتبه ۲

محمدعلی موسی پور



دورقصی های نوترفیل

رتبه ۶۸

منیره زمانی



رتبه ۴۸

محمدحسین هاشمی



سه رقصی و چهار رقصی های نوترفیل

رتبه ۱۹۵

سید حسین تقوی



رتبه ۱۳۴

امیرمحمد ملکشاهی



رتبه ۱۱۲

امیرمحمد شریفی کلوری



رتبه ۵۷۵

هانیه گنجعلی



رتبه ۵۰۹

علیرضا شهبزاری



رتبه ۴۲۸

مهدیه اسدی ارزنه‌ئی



رتبه ۳۵۷

فاطمه مروت بلسی



رتبه ۶۶۸

فائزه حیدری دهکردی



رتبه ۶۳۹

هلیا رضایی



رتبه ۶۲۷

فریما آقاپور



رتبه ۶۰۳

ریحانه فلاح امینی



رتبه ۸۸۱

حلما ناصری



رتبه ۸۰۵

لعیا زنگنه قاسم‌آبادی



رتبه ۷۹۳

سارینا تقی‌زاده



رتبه ۶۷۴

علی اسدی



رتبه ۱۰۲۰

مهسا پیری



رتبه ۱۰۲۰

سارا دهقان



رتبه ۹۹۵

جواد فلاحتی



رتبه ۹۱۴

کیانا شیرین‌فر



رتبه ۱۱۲۵

سمیرا تباوار



رتبه ۱۱۱۱

رضا نصیری مدیسه



رتبه ۱۰۴۹

محمد خرم‌آبادی



رتبه ۱۰۲۴

ژینو نادری



رتبه ۱۲۶۷

مهدی آزادبخت



رتبه ۱۲۲۵

سید مهدی حیات‌غیبی



رتبه ۱۲۲۵

مهدی فیض‌زاده



رتبه ۱۲۰۴

یکتا سلیمانی‌پور



رتبه ۱۴۰۹

غزل قبادی



رتبه ۱۳۱۶

یسری ابوالمحمدی مله



رتبه ۱۳۰۶

مهتاب کامل



رتبه ۱۲۷۲

نرگس جوانی



رتبه ۱۵۹۸

محمد رضا دادپور



رتبه ۱۵۸۷

مهدی تیموری



رتبه ۱۴۳۹

ریحانه جعفری خیرخواه



رتبه ۱۴۱۶

زینب پارسا صفت



رتبه ۱۷۲۹

علی عزیززاده



رتبه ۱۷۲۹

علیرضا انصاری



رتبه ۱۶۶۹

مائده سادات حسینی



رتبه ۱۶۱۹

مهشید خانی



رتبه ۱۷۸۲

یاسین رئیسی زیدآبادی



رتبه ۱۷۷۶

علی عرب‌خانی



رتبه ۱۷۴۲

الهه فکاری



جای تو اینجاست،
با نوترفیل رتبهات رو بساز!



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل هندسه دهم رشته
ریاضی دهم ریاضی_نوتروفیل

بهار ۱۴۰۴

سال دهم
ریاضی

فهرست

فصل اول: ترسیم های هندسی و استدلال

- ۱ ترسیم های هندسی
- ۱ یافتن نقاط با ویژگی مشخص در صفحه
- ۱ ویژگی عمودمنصف و نیمساز و روش رسم آنها
- ۱ رسم چهارضلعی ها
- ۱ استدلال
- ۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

فصل دوم: تالس و تشابه

- ۲ نسبت و تناسب
- ۲ نسبت مساحت ها، ارتفاع ها و قاعده ها
- ۲ ویژگی های تناسب
- ۲ قضیه تالس
- ۲ قضیه تالس در مثلث
- ۲ تشابه مثلث ها
- ۲ حالت های تشابه دو مثلث
- ۳ روابط طولی در مثلث قائم الزاویه

فصل سوم: چند ضلعی ها

- ۳ چند ضلعی ها و ویژگی های آنها
- ۳ زاویه ها و تعداد قطر ها در n ضلعی محدب
- ۳ مستطیل، لوزی و مربع

- ۳..... ویژگی هایی از مثلث قائم الزاویه
- ۳..... مساحت و کاربردهای آن
- ۳..... مساحت چندضلعی ها
- ۴..... ویژگی های مثلث متساوی الساقین و مثلث متساوی الاضلاع
- ۴..... نقاط شبکه ای و مساحت

فصل چهارم: تجسم فضایی

- ۴..... خط، نقطه و صفحه
- ۴..... وضعیت دو خط، دو صفحه و خط و صفحه
- ۵..... تفکر تجسمی
- ۵..... برش
- ۵..... دوران حول محور



فصل اول: ترسیم های هندسی و

ترسیم های هندسی یافتن نقاط با ویژگی مشخص در صفحه

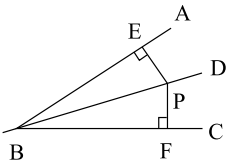
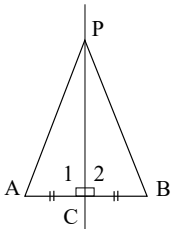
- ۱ دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطه O (محل تقاطع) به فاصله 5cm بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.
- ۲ نقاطی از یک صفحه را پیدا کنید که از دو نقطه A و B در آن صفحه به یک فاصله بوده و از خط مفروض d در همان صفحه به فاصله معلوم a باشد. (در مورد تعداد جواب ها بحث شود).



- ۳ دایره های وجود دارد که از سه نقطه زیر عبور می کند مرکز دایره و شعاع دایره را مشخص کنید.

ویژگی عمودمنصف و نیمساز و روش رسم آنها

- ۴ ثابت کنید هر نقطه مانند P روی عمودمنصف پاره خط AB از نقاط A و B به یک فاصله است.



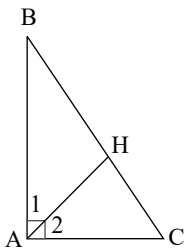
- ۵ نشان دهید که هر نقطه مانند P روی نیمساز زاویه $\hat{A}BC$ از ضلع های AB و BC به یک فاصله است.

رسم چهارضلعی ها

- ۶ یک دوزنقه رسم کنید که اندازه دو قاعده آن ۴ و ۹ سانتی متر و دو ساق آن ۵ و ۶ سانتی متر باشند.

استدلال تعاریف و مفاهیم اولیه

- ۷ در شکل مقابل $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{A}_1 \neq \hat{C}$. به روش غیرمستقیم (برهان خلف) ثابت کنید AH عمود بر BC نیست.



- ۸ نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) هر مستطیلی یک متوازی الاضلاع است.

ب) چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 360° نیست.

ج) اگر دو مثلث هم نهشت باشند محیط های آنها باهم برابر می شود.

- ۹ فرق استدلال استنتاجی و استدلال استقرایی را بیان کنید.

- ۱۰ گزاره های زیر را اثبات یا رد کنید.

الف) در هر مثلث، اندازه بزرگ ترین زاویه از چهار برابر اندازه کوچک ترین زاویه، کوچک تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک تر است.





فصل دوم: تالس و تشابه

نسبت و تناسب نسبت مساحت‌ها، ارتفاع‌ها و قاعده‌ها

۱۱ طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌متر هستند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی‌متر است. طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

ویژگی‌های تناسب

۱۲ میانگین هندسی دو عدد $5\sqrt{3}$ و $12\sqrt{3}$ را به دست آورید.

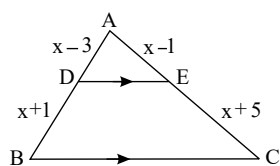
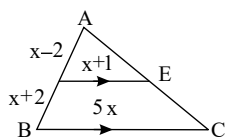
۱۳ اگر $\frac{x}{y} = \frac{7}{5}$ ، $\frac{y}{z} = \frac{3}{8}$ ، حاصل $\frac{x}{z}$ را به دست آورید.

قضیه تالس قضیه تالس در مثلث

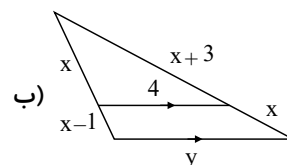
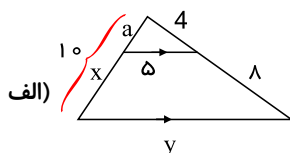
۱۴ سه نقطه M ، N و P وسط اضلاع مثلث ABC است نحوه رسم مثلث ABC را توضیح دهید.

M • N •

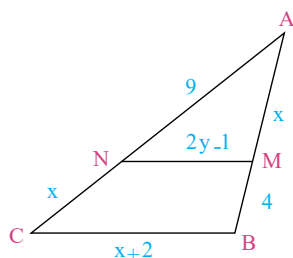
P •



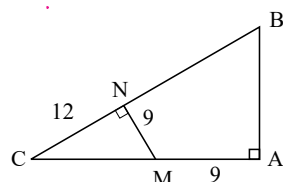
۱۵ در شکل‌های زیر، $DE \parallel BC$ است. مقادیر x را در دو شکل به دست آورید.



۱۶ با توجه به شکل، مقادیر مجهول را به دست آورید.



۱۷ در شکل مقابل، $MN \parallel BC$ ؛ مقادیر x و y را به دست آورید.

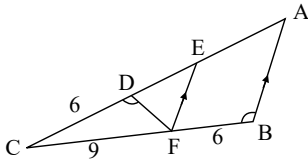


تشابه مثلثها تشابه حالت‌های تشابه دو مثلث

۱۸ در شکل مقابل، محیط چهارضلعی $ABNM$ را به دست آورید.

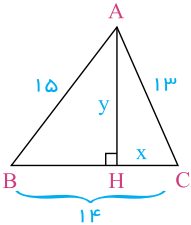


۱۹ در شکل مقابل، اگر $\hat{B} = \hat{D}$ ، $EF \parallel AB$ ، $DC = BF = ۶$ ، $CF = ۹$ باشد، نسبت DF به EF را به دست آورید.



روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه

۲۰ در شکل مقابل، مثلثی با اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه فیثاغورس در مثلث‌های $\triangle ABH$ و $\triangle ACH$ ، مقادیر x و y را به دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



فصل سوم: چند ضلعی‌ها

چند ضلعی‌ها و ویژگی‌های آنها زاویه‌ها و تعداد قطرهای n ضلعی محدب

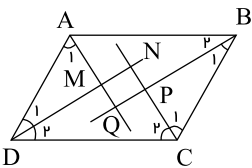
۲۱ تعداد قطرهای یک n ضلعی محدب، ۵۴ تا است. مجموع زاویه‌های داخلی آن را به دست آورید.

۲۲ مجموع تعداد قطرهای و اضلاع یک چندضلعی ۱۲۰ تا است. تعداد اضلاع، مجموع زاویه‌های داخلی و مجموع زاویه‌های خارجی آن را به دست آورید.

۲۳ مجموع تعداد اضلاع، تعداد قطرهای و تقارن یک n ضلعی منتظم برابر ۳۶ است. مجموع زاویه‌های داخلی، مجموع زاویه‌های خارجی و اندازه یک زاویه داخلی و اندازه یک زاویه خارجی آن را به دست آورید.

مستطیل، لوزی و مربع

۲۴ از تقاطع نیمسازهای داخلی یک متوازی‌الاضلاع، چهارضلعی $MNPQ$ پدید آمده است. ثابت کنید این چهارضلعی، مستطیل است.



۲۵ ثابت کنید از برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مستطیل یک مربع پدید می‌آید.

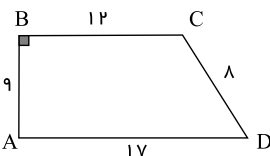
ویژگی‌هایی از مثلث قائم‌الزاویه

۲۶ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانه وارد بر وتر نصف وتر است.

مساحت و کاربردهای آن مساحت چندضلعی‌ها

۲۷ مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a را به دست آورید.

۲۸ مساحت چهارضلعی مقابل را به دست آورید.



ویژگی‌های مثلث متساوی‌الساقین و مثلث متساوی‌الاضلاع

۲۹ ثابت کنید مجموع فاصله‌های هر نقطه در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع مثلث برابر ارتفاع مثلث می‌شود.

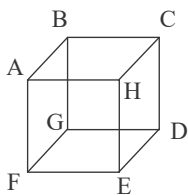
نقاط شبکه‌ای و مساحت

۳۰ یک مستطیل شبکه‌ای با ضلع‌های افقی و قائم که اندازه‌های ضلع‌های آن m و n واحد می‌باشد، مفروض است. مساحت آن را ابتدا به روش معمول و سپس به کمک فرمول پیک محاسبه و آنها را مقایسه کنید.

فصل چهارم: تجسم فضایی

خط، نقطه و صفحه وضعیت دو خط، دو صفحه و خط و صفحه

۳۱ با توجه به مکعب مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید.



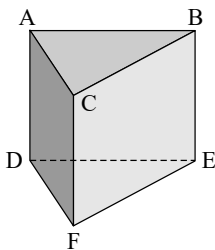
الف) سه خط هم‌رس نام ببرید.

ب) دو جفت خط متناظر نام ببرید.

ج) دو صفحه موازی و دو صفحه عمود برهم نام ببرید.

د) هر یال با چند یال، متناظر و با چند یال، موازی و با چند یال، متقاطع است؟

۳۲ منشور سه‌پهلوی زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:



الف) سه جفت خط متمایز دوجه‌دو موازی نام ببرید.

ب) سه جفت خط متمایز دوجه‌دو متناظر نام ببرید.

ج) سه جفت خط دوجه‌دو متقاطع نام ببرید.

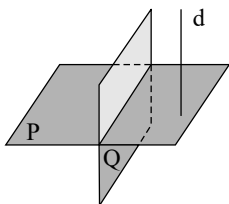
د) سه خط هم‌رس نام ببرید.

ه) سه جفت خط و صفحه موازی نام ببرید.

و) دو صفحه موازی نام ببرید.

ز) سه صفحه دوجه‌دو متقاطع نام ببرید.

۳۳ دو صفحه P و Q برهم عمود هستند و خط d نیز بر صفحه P عمود است. این خط نسبت به صفحه Q چه وضعی دارد؟



A



۳۴ از هر نقطه غیرواقع بر یک صفحه، چند خط می‌توان به آن صفحه عمود کرد؟

۳۵ از هر خط غیرواقع بر یک صفحه، چند صفحه می‌توان گذراند که بر آن صفحه عمود باشد؟

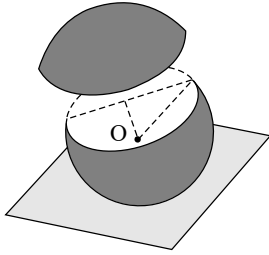
الف) خط بر صفحه عمود باشد. ب) خط بر صفحه عمود نباشد.



تفکر تجسمی  برش 

۳۶ صفحه P کره‌ای به مرکز O و شعاع ۵ سانتی‌متر را قطع کرده است.

اگر فاصله نقطه O از صفحه ۳ سانتی‌متر باشد، مساحت این سطح مقطع چقدر است؟



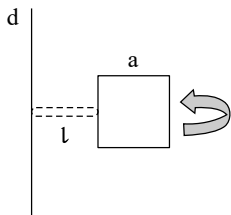
دوران حول محور 

۳۷ در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف دوران یک مستطیل حول طول آن.

ب دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه.

۳۸ مربعی به ضلع a را حول محور d دوران داده‌ایم. شکل حاصل را توصیف کنید.



۳۹ در هر مورد مشخص کنید شکل حاصل از دوران چه خواهد بود؟ تصویر مناسبی رسم کنید.

الف) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول ارتفاع آن:

ب) دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه:

پ) دوران یک دوزنقه قائم‌الزاویه حول ضلع عمود بر قاعده‌ها:

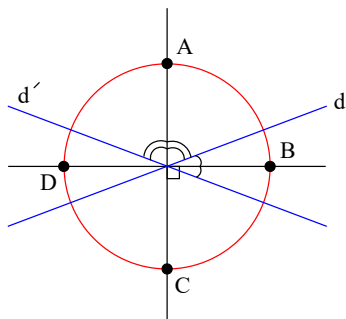
ت) دوران یک مثلث متساوی‌الساقین حول قاعده آن:



پاسخنامه تشریحی

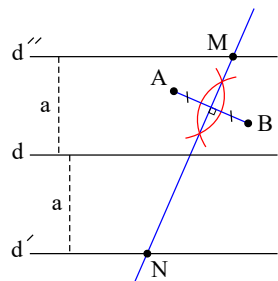
۱

ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط باهم می‌سازند را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع 5cm یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطه A, B, C, D از دو خط به یک فاصله‌اند و از O به فاصله 5cm هستند.



۲

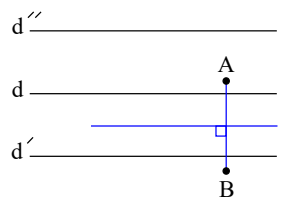
ابتدا موازی خط d و به فاصله a در دو طرف آن دو خط موازی d' و d'' را رسم می‌کنیم. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم، برخورد عمود منصف با دو خط d' و d'' جواب مسأله است. (نقاط A و B از نقاط M و N به یک فاصله‌اند و این نقاط از d به فاصله a هستند).



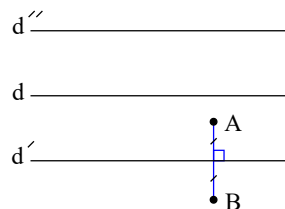
بحث درباره جواب‌ها:

حالت اول: دو نقطه M و N در شکل بالا جواب سؤال هستند.

حالت دوم: اگر عمود منصف AB ، با سه خط d, d', d'' موازی باشد، سؤال فاقد جواب است. (راستای A و B بر d عمود باشد).



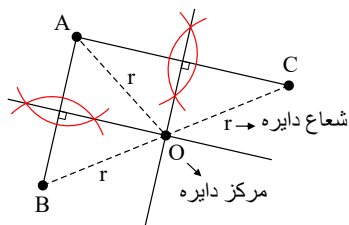
حالت سوم: اگر عمود منصف A و B بر یکی از سه خط d یا d' یا d'' منطبق باشد، سؤال بی‌شمار جواب دارد.



۳

فرض کنیم سه نقطه مقابل در یک صفحه در یک امتداد نباشند دایره‌ای وجود دارد که از این سه نقطه بگذرد.

عمود منصف‌های دو پاره خط دلخواه (AB و AC) را رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این دو عمودمنصف، مرکز دایره مزبور بوده و شعاع دایره نیز فاصله این نقطه تا سه نقطه A, B و C است.



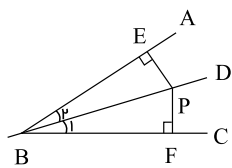
۴

مطابق شکل، فرض کنید PC عمودمنصف پاره خط AB است. داریم:

$$\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{C}_2 = 90^\circ \\ AC = BC \\ PC = PC \end{cases} \xrightarrow{\text{ضریض}} \triangle APC \cong \triangle BPC \rightarrow PA = PB$$

۵

مطابق شکل، فرض کنید BD نیمساز زاویه $\hat{ABC}$ است، پس $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ و نقطه P نقطه‌ای دلخواه روی آن است، پس داریم:



$$\begin{cases} \hat{B}_1 = \hat{B}_r \\ BP = BP \end{cases} \Rightarrow \triangle BFP \cong \triangle BFP \text{ طبق حالت وتر و یک زاویه حاده هم نهشت هستند.}$$

$$PE = PF \text{ بنابراین:}$$

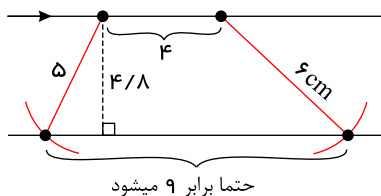
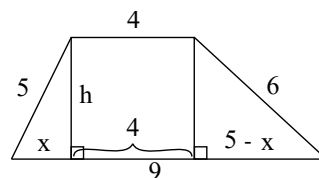
۶ شکل تقریبی دوزنقه را رسم می کنیم و به کمک رابطه فیثاغورس، اندازه ارتفاع وارد بر قاعده ها (h) را پیدا می کنیم. سپس دو خط موازی به فاصله $h = 4,8$ رسم کرده و روی یکی از آنها 4 cm جدا می کنیم از دو سر این پاره خط دو کمان به شعاع ۵ و ۶ می زنیم تا خط دیگر را در دو نقطه قطع کنند. چهار نقطه به دست آمده، جواب مسأله است. (به هم وصل می کنیم)

$$\begin{cases} h^2 = 36^2 - (5 - x)^2 = 36^2 - 25 + 10x - x^2 \\ h^2 = 25 - x^2 \end{cases}$$

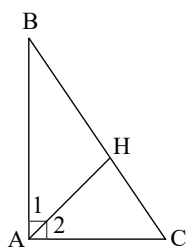
$$\Rightarrow 25 - \cancel{x^2} = \overbrace{36^2 - 25}^{11} + 10x - \cancel{x^2}$$

$$\Rightarrow 25 - 11 = 10x$$

$$\Rightarrow x = \frac{14}{10} = 1,4 \rightarrow h^2 = 25 - (1,4)^2 = 25 - 1,96 = 23,04 \rightarrow h = 4,8$$



۷



$$\begin{cases} \text{فرض : } \hat{A} = 90^\circ \text{ و } \hat{A}_1 \neq \hat{C} \\ \text{حکم : } AH \not\perp BC \end{cases}$$

اثبات به روش برهان خلف:

(۱) خلاف حکم را در نظر می گیریم یعنی $AH \perp BC$. (فرض خلف)
(۲) سعی می کنیم عمود بودن AH بر BC را به تناقض برسانیم.

$$\left. \begin{aligned} \triangle AHC : \hat{C} + \hat{A}_r &= 90^\circ \\ \hat{A}_1 + \hat{A}_r &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{A}_1 = \hat{C}$$

$$AH \not\perp BC$$

که این با فرض مسئله $\hat{A}_1 \neq \hat{C}$ در تناقض است.

(۳) پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود، یعنی:

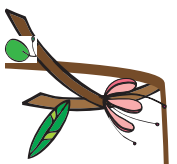
۸ الف) هر مستطیلی یک متوازی الاضلاع است.

نقیض: بعضی از مستطیل ها متوازی الاضلاع نیستند.

ب) چهارضلعی وجود دارد که مجموع زوایای آن 360° نیست.

نقیض: مجموع زوایای داخلی همه چهارضلعی ها 360° است.

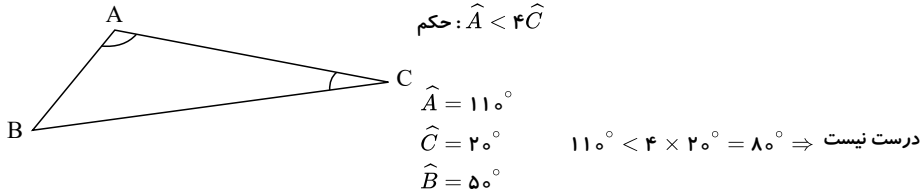
ج) اگر دو مثلث هم نهشت باشند محیط های آنها با هم برابر می شود.



نقیض: دو مثلث هم‌نهشت وجود دارد که محیط‌های آنها باهم برابر نیستند.

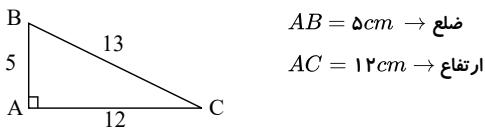
۹ در استدلال استقرایی ما به کمک چند تجربه که از مشاهده یا احساس یا حواس پنجگانه دیگر به دست می‌آید، یک نتیجه‌گیری کلی می‌کنیم، که ممکن است این نتیجه‌گیری درست و یا نادرست باشد. ولی در استدلال استنتاجی ما به کمک مفاهیم و فرضیاتی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، نتیجه‌گیری کلی می‌کنیم و نتیجه‌گیری حاصل حتماً درست است.

۱۰ الف) مطابق شکل، فرض کنید $\hat{A}$ و $\hat{C}$ به ترتیب بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین زوایای مثلث ABC هستند.

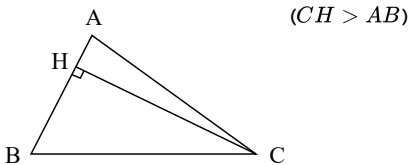


مثال نقض:

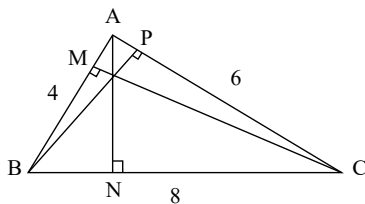
ب) مثال نقض اول:



مثال نقض دوم: در شکل مقابل ارتفاع CH از ضلع AB کوچک‌تر نیست.



۱۱ مطابق شکل داریم:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AN \times BC = \frac{1}{2} BP \times AC = \frac{1}{2} CM \times AB$$

$$CM = \frac{3\sqrt{15}}{2} \text{ یعنی: آن وارد می‌شود.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} AN \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{15}}{2} \times AB \Rightarrow AN \times 4 = 3\sqrt{15} \Rightarrow AN = \frac{3\sqrt{15}}{4} \\ \frac{1}{2} BP \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{15}}{2} \times AB \Rightarrow BP \times 3 = 3\sqrt{15} \Rightarrow BP = \sqrt{15} \end{array} \right.$$

$$a^2 = bc \Rightarrow a^2 = 12\sqrt{3} \times 5\sqrt{3} = 60 \times 3 = 180 \Rightarrow a = \sqrt{180} = \sqrt{36 \times 5} = 6\sqrt{5}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{7}{5} \\ \frac{y}{z} = \frac{3}{8} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} = \frac{x}{z} \Rightarrow \frac{7}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{21}{40}$$

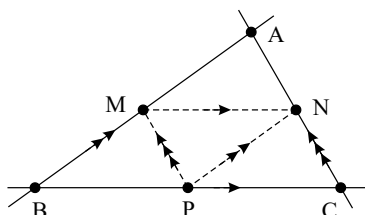
۱۲

۱۳

۱۴

طبق قضیه تالس می‌دانیم که اگر وسط اضلاع یک مثلث را به هم وصل کنیم، پاره‌خط‌های حاصل با اضلاع مثلث موازی خواهند بود. پس از هر

سه نقطه M ، N و P سه خط به موازات پاره خط مقابل خود رسم می‌کنیم. محل برخورد این سه خط $\triangle ABC$ خواهد بود.



۱۵ در شکل اول، طبق قضیه تالس داریم:

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{x-2}{2x+2-2} = \frac{x+1}{5x} \Rightarrow 5x^2 - 10x = 2x^2 + 2x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ.ق.ی} \\ x=4 & \text{ق.ی} \end{cases}$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x-1}{x+5}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = x^2 - 1 \Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$$

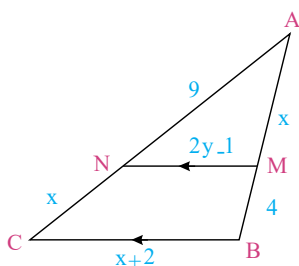
(الف)

$$\begin{aligned} \frac{a}{10} &= \frac{4}{12} \Rightarrow a = \frac{10}{3} \\ \Rightarrow x &= 10 - \frac{10}{3} = \frac{20}{3} \\ \frac{5}{y} &= \frac{4}{12} \Rightarrow y = \frac{5 \times 12}{4} = 15 \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \frac{x}{x-1} &= \frac{x+3}{x} \Rightarrow \cancel{x} + 3x - x - 3 = \cancel{x} \\ \Rightarrow 2x &= 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{x}{x+x-1} = \frac{4}{y} \Rightarrow \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = \frac{4 \times 2}{\frac{3}{2}} = \frac{8}{\frac{3}{2}} = \frac{16}{3}$$



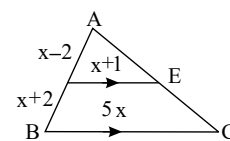
$$\begin{cases} \hat{A} = \hat{N} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ مشترک} \end{cases} \xrightarrow{\text{دز}} \triangle ABC \sim \triangle NMC \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{AC}{NC} = \frac{BC}{MC} \quad (1)$$

$$MNC : MC^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow MC = \sqrt{225} = 15$$

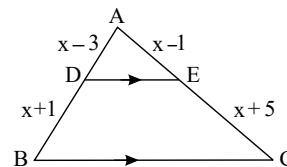
$$(1) \Rightarrow \frac{AB}{9} = \frac{9+15}{12} = \frac{BC}{15} \Rightarrow \begin{cases} AB = \frac{9 \times 24}{12} = 18 \\ BC = \frac{15 \times 24}{12} = 30 \end{cases}$$

$$BN = BC - NC = 30 - 12 = 18$$

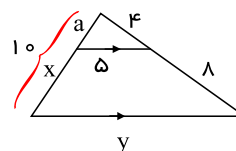
$$\text{محیط } ABNM = AB + BN + NM + AM = 18 + 18 + 9 + 9 = 54$$



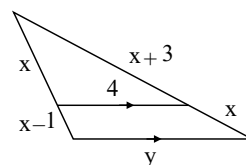
همچنین در شکل دوم، طبق قضیه تالس داریم:



۱۶ الف) طبق قضیه تالس داریم:



(ب) طبق قضیه تالس داریم:



۱۷ طبق قضیه تالس داریم:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{2y-1}{18} \Rightarrow 20y - 10 = 36 \Rightarrow 20y = 46 \Rightarrow y = \frac{23}{10} = 2.3$$

۱۸

طبق شکل داریم:



۱۹

$$\left. \begin{array}{l} EF \parallel AB \xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{مورب و قضیه خطوط}} \hat{B} = \hat{CFE} \\ \hat{B} = \hat{D} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{CFE} = \hat{D}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{CFE} = \hat{D} \\ \hat{C} = \hat{C} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{دو}} \triangle CDF \sim \triangle FDE \Rightarrow \frac{CF}{CE} = \frac{FD}{FE} = \frac{CD}{CF}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{CE} = \frac{DF}{EF} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{DF}{EF} = \frac{2}{3}$$

۲۰ مطابق شکل داریم:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle ABH : y^2 = 15^2 - (14 - x)^2 \\ \triangle ACH : y^2 = 13^2 - x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 15^2 - (14 - x)^2 = 13^2 - x^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{225 - 196 + 28x - x^2}_{29} = 169 - x^2 \Rightarrow 28x = 169 - 29 = 140 \Rightarrow x = \frac{140}{28} = 5$$

$$y^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow y = \sqrt{144} = 12$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AH \times BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 14 = 84$$

$$\text{تعداد قطر ها} = \frac{n(n-3)}{2} = 54 \Rightarrow n^2 - 3n = 108 \Rightarrow n^2 - 3n - 108 = 0$$

$$\Rightarrow (n-12)(n+9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 12 & \text{ق ق} \\ n = -9 & \text{غ ق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع زاویه های داخلی} = (n-2) \times 180^\circ = (12-2) \times 180^\circ = 1800^\circ$$

۲۲ طبق فرض داریم:

$$n + \frac{n(n-3)}{2} = 120 \Rightarrow 2n + n^2 - 3n = 240$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 240 = 0 \Rightarrow (n-16)(n+15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -15 & \text{غ ق} \\ n = 16 & \text{ق ق} \end{cases}$$

۱۶ ضلعی است.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مجموع زاویه های داخلی} = (n-2) \times 180^\circ = 14 \times 180^\circ = 2520^\circ \\ \text{مجموع زاویه های خارجی} = 360^\circ \end{array} \right.$$

نکته: مجموع زاویه های خارجی تمام n ضلعی ها برابر 360° است.

۲۳

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{تعداد اضلاع} = n \\ \text{تعداد محور های تقارن} = n \\ \text{تعداد قطر ها} = \frac{n(n-3)}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow n + n + \frac{n(n-3)}{2} = 36 \Rightarrow 4n + n^2 - 3n = 72$$

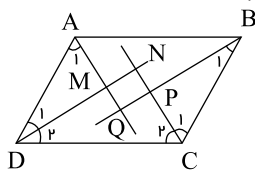
$$\Rightarrow n^2 + n - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -9 & \text{غ ق} \\ n = 8 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{مجموع زاویه های داخلی} = (n-2) \times 180^\circ = 6 \times 180^\circ = 1080^\circ$$

$$\text{مجموع زاویه های خارجی} = 360^\circ$$

$$\text{اندازه یک زاویه داخلی} = \frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} = \frac{1080^\circ}{8} = 135^\circ \Rightarrow \text{یک زاویه خارجی} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

۲۴ برای متوازی الاضلاع ABCD داریم:



$$\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \rightarrow \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{C}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_1 = 90^\circ \Rightarrow \triangle BPC : \hat{P} = 90^\circ$$

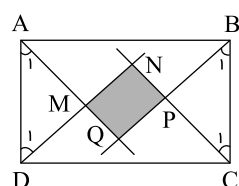
به طریق مشابه در مثلث $\triangle AMD$ ثابت می‌شود $\hat{M} = 90^\circ$ همین‌طور داریم:

$$\hat{C} + \hat{D} = 180^\circ \rightarrow \frac{\hat{C}}{2} + \frac{\hat{D}}{2} = 90^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 + \hat{D}_2 = 90^\circ \Rightarrow \triangle DNC : \hat{N} = 90^\circ$$

به طریق مشابه در مثلث $\triangle AQB$ ثابت می‌شود $\hat{Q} = 90^\circ$.

بنابراین در چهارضلعی $MNPQ$ تمامی زاویه‌ها قائمه هستند و این چهارضلعی یک مستطیل به حساب می‌آید. توجه کنید که اگر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ لوزی باشد، نیمسازهای داخلی منطبق بر قطرهای شده و چهارضلعی $MNPQ$ پدید نمی‌آید.

۲۵ برای مستطیل $ABCD$ داریم:



$$\left. \begin{array}{l} AD = BC \text{ (عرض مستطیل)} \\ \hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 45^\circ \\ \hat{D}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(ز ض ز)}} \left. \begin{array}{l} \triangle ADM \cong \triangle BPC \Rightarrow DM = PC \\ \triangle DNC \Rightarrow \text{مساوی الساقین} \Rightarrow DN = NC \end{array} \right\}$$

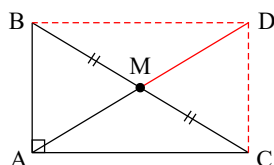
$$\Rightarrow DN - DM = NC - PC \Rightarrow MN = NP \quad (1)$$

به طریق مشابه می‌توان ثابت کرد که $\triangle AQB \cong \triangle DNC$ (ز ض ز) و از آنجا $DN = AQ$ و از طرفی $\triangle AMD$ متساوی‌الساقین است، پس $AM = DM$ در نتیجه:

$$AQ - AM = DN - DM \Rightarrow QM = MN \quad (2)$$

و به صورت مشابه می‌توان ثابت کرد $PN = PQ \quad (3)$.

بنابر روابط (1) و (2) و (3) می‌توان گفت که چهارضلعی $MNOP$ چهار زاویه قائمه دارد و چهار ضلع برابر دارد، پس این چهارضلعی یک مربع است.

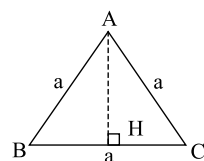


$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فرض: } MB = MC \\ \text{حکم: } AM = \frac{BC}{2} \end{array} \right.$$

از نقطه B موازی AC و از C موازی AB رسم می‌کنیم تا مستطیل $ABDC$ حاصل شود. می‌دانیم در مستطیل قطرها برابر بوده و همدیگر را نصف می‌کنند. یعنی:

$$AD = BC \rightarrow MB = MC \rightarrow M \text{ وسط } BC \rightarrow M \text{ وسط } AD \text{ هم هست} \rightarrow MA = MD$$

چون دو قطر برابر هستند پس نصف دو قطر نیز برابر هستند، یعنی: $AM = MB = \frac{BC}{2}$

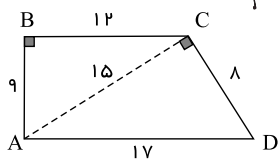


$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC$$

$$\triangle ACH : AH^2 = AC^2 - CH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \times BC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \times a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۲۸ قطر AC را رسم می‌کنیم. داریم:



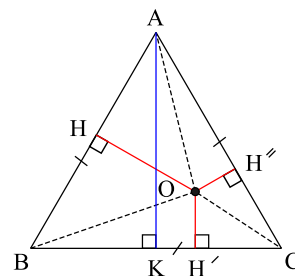
$$\triangle ABC : \hat{B} = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = 9^2 + 12^2 = 225$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{225} = 15$$

$$\triangle ACD : \left. \begin{array}{l} 17^2 = 289 \\ 15^2 + 8^2 = 225 + 64 = 289 \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} \triangle ACD \text{ قائم الزاویه است} \Rightarrow \hat{ACD} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 9 \times 12 + \frac{1}{2} \times 15 \times 8 = 54 + 60 = 114$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{فرض : } AB = AC = BC \\ \text{حکم : } OH + OH' + OH'' = AK \text{ (ارتفاع مثلث)} \end{array} \right.$$



اثبات: از سه رأس مثلث وصل می‌کنیم.

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OAB} + S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC}$$

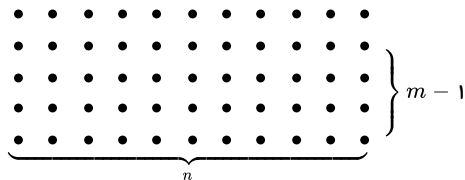
$$\frac{AK \times BC}{2} = \frac{OH \times \overbrace{AB}^{BC}}{2} + \frac{OH' \times BC}{2} + \frac{OH'' \times \overbrace{AC}^{BC}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض}} AK \left(\frac{BC}{2} \right) = OH \times \left(\frac{BC}{2} \right) + OH' \times \left(\frac{BC}{2} \right) + OH'' \times \left(\frac{BC}{2} \right)$$

از $\frac{BC}{2}$ فاکتور می‌گیریم:

$$AK \times \left(\frac{BC}{2} \right) = (OH + OH' + OH'') \times \left(\frac{BC}{2} \right) \Rightarrow AK = OH + OH' + OH''$$

۳۰ اندازه طول مستطیل n واحد است.



پس روی طول هر مستطیل $n+1$ نقطه داریم در عرض مستطیل نیز همین گونه است یعنی $m+1$ نقطه روی هر عرض داریم. اما دو نقطه آن قبلاً در هر قسمت محاسبه شده است پس $m-1$ نقطه روی عرض می‌ماند. در نتیجه تعداد نقاط مرزی مستطیل برابر است با:

$$b = 2(n+1) + 2(m-1) = 2n + 2m$$

اما برای محاسبه تعداد نقطه‌های درونی، ستون اول و آخر را کنار می‌گذاریم.

$n-1$ ستون داریم که روی هر کدام $m-1$ نقطه است. پس: $i = (n-1)(m-1)$ و در نتیجه:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1 = \frac{2n + 2m}{2} + (n-1)(m-1) - 1 = n + m + mn - n - m + 1 - 1 = mn = \text{مساحت مستطیل}$$

$$\text{الف) } AH \cap CH \cap EH = H$$



ب) $\begin{cases} EH \text{ و } AB \\ CH \text{ و } DG \end{cases}$

ج) $\begin{cases} \text{صفحه } ABCH \text{ با صفحه } FGDE \text{ موازی هستند.} \\ \text{صفحه } ABCH \text{ بر صفحه } HCDE \text{ عمود است.} \end{cases}$

د) $\begin{cases} \text{پل } AB \text{ با } 4 \text{ پل } FE, GD, HE, CD \text{ متناظر است.} \\ \text{پل } AB \text{ با } 3 \text{ پل } FG, DE, CH \text{ موازی است.} \\ \text{پل } AB \text{ با } 4 \text{ پل } BG, BC, AF, AH \text{ متقاطع است.} \end{cases}$

۳۲ الف) $(BC, EF), (AC, DF), (AB, DE)$

ب) $(AB, CF), (EF, AD), (AC, BE)$

ج) $(AD, DE), (DF, CF), (AB, BC)$

د) $(AC, BC, CF), (AB, BC, BE), \dots$

ه) $(\text{خط } BE, \text{ صفحه } ACFD), (\text{خط } CF, \text{ صفحه } ABED), (\text{خط } AD, \text{ صفحه } BCFE)$

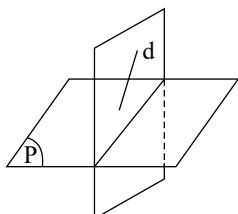
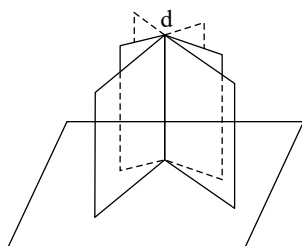
و) (DEF, ABC)

ز) $(ACFD, BCFE, ABED)$

۳۳ موازی

۳۴ فقط یک خط

۳۵ الف) بی شمار صفحه



ب) یک صفحه

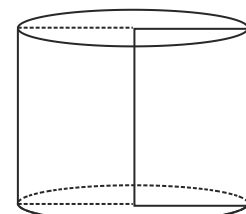
$$25 = 9 + r^2 \Rightarrow r^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow r = 4 \text{ (شعاع سطح دایره)}$$

$$S = \pi r^2 \xrightarrow{r=4} S = 16\pi$$

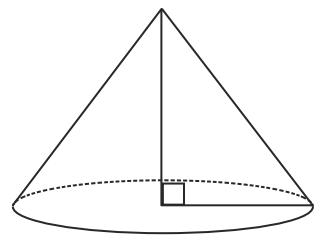
۳۶

۳۷

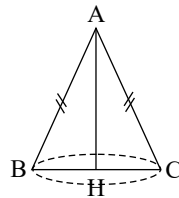
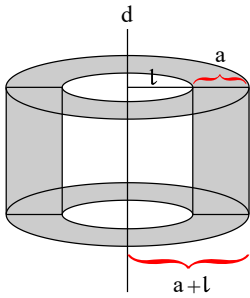
الف) استوانه



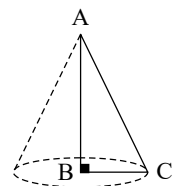
ب) مخروط



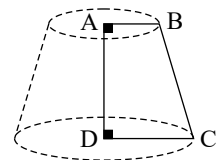
۳۸ شکل حاصل از این دوران، استوانه‌ای به شعاع قاعده $a + l$ است که در داخل این استوانه، استوانه دیگری به شعاع قاعده l است و این استوانه درونی یک استوانه خالی است.



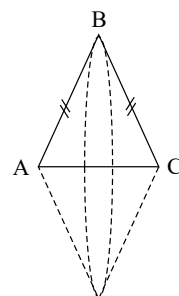
۳۹ الف) حول ارتفاع وارد بر قاعده، تشکیل یک مخروط قائم می‌دهد.



ب) مخروط



پ) مخروط ناقص



ت) دو مخروط کاملاً یکسان که از قاعده به یکدیگر چسبیده‌اند.