

یستوفیل

هندسه یازدهم - رشته ریاضی



یه گاز بزنی، یه فصل کنکور می پره!

 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com



کارخونه رتبه برتر سازی، نوتروفیل!



نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۳



رتبه ۲



محمدعلی موسی پور

نگ رقمی نوטר وفیل

رتبه ۶۸



منیره زمانی

رتبه ۴۸



محمدحسین هاشمی

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۹۵



سید حسین تقوی

رتبه ۱۳۴



امیرمحمد ملکشاهی

رتبه ۱۱۲



امیرمحمد شریفی کلوری

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۵۷۵



هانیه گنجعلی

رتبه ۵۰۹



علیرضا شهنساری

رتبه ۴۲۸



مهدیه اسدی ارزنده

رتبه ۳۵۷



فاطمه مروت بلسی

رتبه ۶۶۸



فائزه حیدری دهکردی

رتبه ۶۳۹



هلیا رضایی

رتبه ۶۲۷



فریما آقاپور

رتبه ۶۰۳



ریحانه فلاح امینی

رتبه ۸۸۱



حلما ناصری

رتبه ۸۰۵



لعیا زنگنه قاسم آبادی

رتبه ۷۹۳



سارینا تقی زاده

رتبه ۶۷۴



علی اسدی

رتبه ۱۰۲۰



مهسا پیری

رتبه ۱۰۲۰



سارا دهقان

رتبه ۹۹۵



جواد فلاحی

رتبه ۹۱۴



کیانا شیرین فر

رتبه ۱۱۲۵



سمیرا تباوار

رتبه ۱۱۱۱



رضا نصیری مدیسه

رتبه ۱۰۴۹



محمد خرم آبادی

رتبه ۱۰۲۴



ژینو نادری

رتبه ۱۲۶۷



مهدی آزادبخت

رتبه ۱۲۲۵



سید مهدی حیات غیبی

رتبه ۱۲۲۵



مهدی فیض زاده

رتبه ۱۲۰۴



یکتا سلیمانی پور

رتبه ۱۴۰۹



غزل قبادی

رتبه ۱۳۱۶



یسری ابوالمحمدی مله

رتبه ۱۳۰۶



مهتاب کامل

رتبه ۱۲۷۲



نرگس جوانی

رتبه ۱۵۹۸



محمد رضا دادپور

رتبه ۱۵۸۷



مهدی تیموری

رتبه ۱۴۳۹



ریحانه جعفری خیرخواه

رتبه ۱۴۱۶



زینب پارسا صفت

رتبه ۱۷۲۹



علی عزیززاده

رتبه ۱۷۲۹



علیرضا انصاری

رتبه ۱۶۶۹



مائده سادات حسینی

رتبه ۱۶۱۹



مehشید خانی

رتبه ۱۷۸۲



یاسین رئیس زید آبادی

رتبه ۱۷۷۶



علی عرب خانی

رتبه ۱۷۴۲



الهه فکاری



مشاوره کنکور نوتروفیل

نمونه سوال تشریحی هندسه
یازدهم آمادگی شبه نهایی_
نوتروفیل بهار ۱۴۰۴

یازدهم
ریاضی

فهرست

فصل اول : دایره

- ۱..... درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره
- ۱..... وتر و کمان و نظیر آن
- ۱..... زوایای مرکزی، محاطی و ظلّی
- ۱..... زوایای بین وترها و مماس ها
- ۱..... درس دوم : رابطه های طولی در دایره
- ۱..... روابط طولی در دایره
- ۲..... اوضاع نسبی دو دایره
- ۲..... مماس مشترک دو دایره
- ۲..... درس سوم : چند ضلعی های محاطی و محیطی
- ۲..... دایره های محاطی داخلی و خارجی مثلث

فصل دوم : تبدیل های هندسی

- ۲..... درس اول : تبدیل های هندسی
- ۲..... بازتاب خطی و ویژگی های آن
- ۳..... انتقال و ویژگی های آن
- ۳..... دوران و ویژگی های آن
- ۳..... تجانس و ویژگی های آن
- ۴..... ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن
- ۴..... درس دوم : کاربرد تبدیل ها
- ۴..... مسائل قرینه یابی و هم محیطی

مسائل پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر ۴

فصل سوم : روابط طولی در مثلث

درس اول : قضیه سینوس ها ۵

قضیه سینوس ها در مثلث و کاربرد آن ۵

درس دوم : قضیه کسینوس ها ۵

قضیه کسینوس ها در مثلث و کاربرد آن ۵

قضیه استوارت ۶

درس سوم : قضیه نیمساز های زوایای داخلی و محاسبه طول نیمساز ها ۶

قضیه نیمساز های زوایای داخلی ۶

محاسبه طول نیمساز داخلی مثلث ۶

درس چهارم : قضیه هرون (محاسبه ارتفاع ها و مساحت مثلث) ۶

قضیه سینوس ها در مساحت ۶



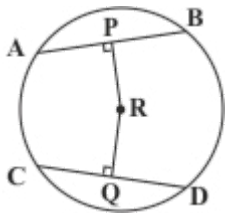
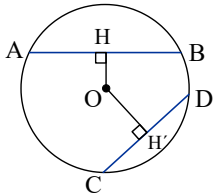
فصل اول : دایره



درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره وتر و کمان و نظیر آن



۱ در دایره $C(O, R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و تنها اگر $OH < OH'$ و OH فاصله O از دو وتر AB و CD هستند.

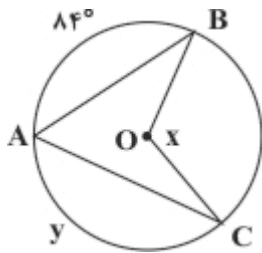


۲ با توجه به شکل روبه رو: الف) اگر طول شعاع 10 و $PR = 6$ ، آنگاه اندازه های AP و AB را به دست آورید.

ب) اگر $RC = \sqrt{2}$ ، آنگاه طول پاره خط های DQ و CD را به دست آورید.

۳ در دایره $C(O, R)$ می دانیم $\widehat{AB} = 60^\circ$ و $AB = 10$ ؛ فاصله O از وتر AB را به دست آورید.

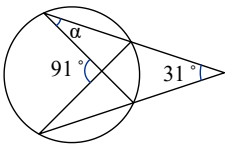
زوایای مرکزی، محاطی و ظلی



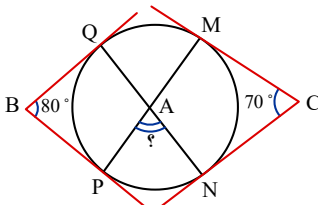
۴ الف) اگر $\widehat{y} = 140^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه x را به دست آورید. ب) اگر $\widehat{x} = 165^\circ$ ، آنگاه اندازه کمان $\widehat{y}$ را به دست آورید.

زوایای بین وترها و مماس ها

۵ در شکل مقابل اندازه زاویه α را به دست آورید.

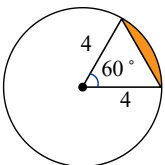


۶ در شکل اضلاع زاویه های $\widehat{B}$ و $\widehat{C}$ بر دایره مماس هستند. اندازه زاویه $\widehat{A}$ چند درجه است؟



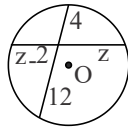
درس دوم : رابطه های طولی در دایره روابط طولی در دایره

۷ در دایره روبه رو به شعاع 4 ، مساحت ناحیه سایه زده را محاسبه کنید. این ناحیه، یک قطعه دایره نام دارد.

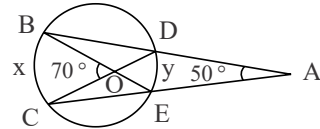




۸ با توجه به شکل‌های زیر اندازه x و y را در شکل (الف) و اندازه z را در شکل (ب) تعیین کنید.

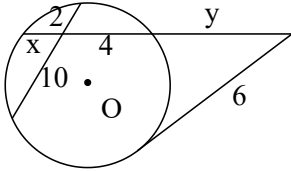


شکل (ب)



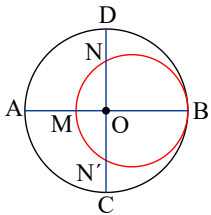
شکل (الف)

۹ در شکل زیر مقادیرهای x و y را به دست آورید.



اوضاع نسبی دو دایره

۱۰ در شکل مقابل، دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره بزرگ‌تر بر هم عمودند. اگر $AM = ۱۶$ و $ND = ۱۰$ ، شعاع‌های دو دایره را پیدا کنید.



مماس مشترک دو دایره

۱۱ طول شعاع‌های دو دایره متخارج را به دست آورید که طول مماس مشترک خارجی آنها مساوی $۳\sqrt{۷}$ و طول مماس مشترک داخلی آنها $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المركزین آنها مساوی ۸ واحد است.

۱۲ طول خط‌المركزین در دو دایره متقاطع به شعاع‌های ۴ و ۳ سانتی‌متر برابر ۶ سانتی‌متر است. طول مماس مشترک خارجی دو دایره را به دست آورید.

۱۳ طول خط‌المركزین دو دایره مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آنها ۱۶π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را به دست آورید.

۱۴ (الف) اندازه مماس مشترک خارجی در دو دایره $C(O, ۷)$ و $C'(O', ۱)$ را با فرض $OO' = ۱۰$ تعیین کنید.
(ب) این دو دایره چند مماس مشترک خارجی دارند؟

درس سوم: چند ضلعی‌های محاطی و محیطی دایره‌های محاطی داخلی و خارجی مثلث

۱۵ اگر r_a, r_b, r_c شعاع‌های سه دایره محاطی خارجی مثلث r شعاع دایره محاطی داخلی باشد، نشان دهید: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$
به همین ترتیب اگر h_a, h_b, h_c اندازه‌های سه ارتفاع باشند، نشان دهید: $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$



فصل دوم: تبدیل‌های هندسی

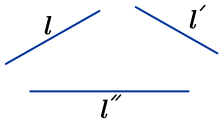
درس اول: تبدیل‌های هندسی بازتاب خطی و ویژگی‌های آن

۱۶ در حالتی که پاره خط AB در راستای عمود بر خط بازتاب قرار دارد، ثابت کنید که اگر $A'B'$ بازتاب AB باشد، AB و $A'B'$ هم‌اندازه‌اند.



انتقال و ویژگی های آن

۱۷ سه خط دوجه دو ناموازی l و l' و l'' در صفحه مفروض اند. پاره خطی به طول ۵ سانتی متر رسم کنید که دو سر آن روی l و l' و موازی l'' باشد.



دوران و ویژگی های آن

۱۸ نقاط $A(2, 0)$ ، $B(5, 0)$ و $C(5, 2)$ رأس های یک مثلث هستند.
الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل دوران به مرکز مبدأ مختصات و زاویه $90^\circ +$ رسم کنید.
ب) طول و شیب ضلع AC و تصویرش را به دست آورده و باهم مقایسه کنید.

تجانس و ویژگی های آن

۱۹ فرض کنید G محل برخورد میانه های مثلث ABC (مرکز ثقل آن) باشد و مثلث $A'B'C'$ مجانس مثلث ABC در تجانس به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ باشد.

الف) جایگاه رأس های A' و B' و C' نسبت به مثلث ABC کجاست؟
ب) مساحت مثلث $A'B'C'$ چه کسری از مساحت مثلث ABC است؟

۲۰ در تجانسی با نسبت $k < 0$ و مرکز تجانس O (نقطه O را خارج AB در نظر بگیرید) نشان دهید:
الف) تجانس شیب خط را حفظ می کند.
ب) تجانس زاویه بین خطوط را حفظ می کند.

۲۱ دایره $C(O, R)$ و نقطه M خارج این دایره مفروض است. مجانس این دایره را نسبت به نقطه M در هر حالت رسم کنید.

الف) $k = 2$

ب) $k = -2$

پ) $k = \frac{1}{2}$

۲۲ تحت تبدیل تجانس به مرکز $(0, 0)$ ، نقطه $A(1, 2)$ روی نقطه $A'(3, 6)$ تصویر شده است. نسبت تجانس را یافته و تعیین کنید این تجانس، انبساط است یا انقباض؟

۲۳ اگر نقطه A' مجانس نقطه A باشد که ضریب تجانس آن $k = 5$ باشد، مرکز تجانس کجاست؟

۲۴ تحت یک تجانس محیط مثلث تصویر ۱۲ و محیط مثلث اولیه ۴ است. شعاع دایره ای که مجانس دایره ای به مساحت 16π تحت این تجانس باشد، چقدر است؟



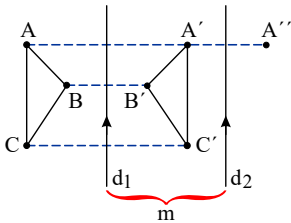
ترکیب تبدیل ها و ویژگی های آن

۲۵ در شکل، d_1 به موازات d_2 و به فاصله m از آن قرار دارد و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $AA'' = 2m$

ب) اندازه BB'' و CC'' چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

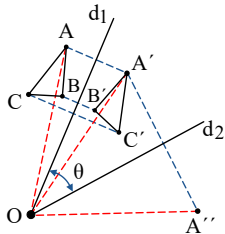


۲۶ در شکل، دو خط d_1 و d_2 با زاویه θ یکدیگر را قطع کرده اند. مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به خط d_1 است. بازتاب مثلث $A'B'C'$ را نسبت به خط d_2 رسم کنید و آن را $A''B''C''$ بنامید.

الف) نشان دهید: $\angle AOA'' = 2\theta$

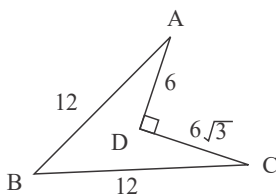
ب) اندازه $\angle B\hat{O}B''$ و $\angle C\hat{O}C''$ چقدر است؟

پ) با چه تبدیلی می توان مثلث $A''B''C''$ را تصویر ABC دانست؟ چه نتیجه ای می گیرید؟

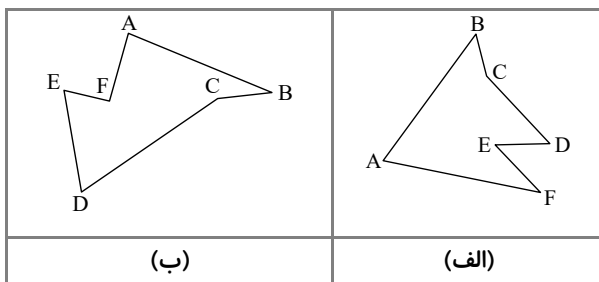


درس دوم : کاربرد تبدیل ها مسائل قرینه یابی و هم محیطی

۲۷ مطابق شکل اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم، مقدار افزایش مساحت جدید چقدر است؟

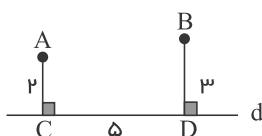


۲۸ دور زمین هایی مطابق شکل، حصارکشی شده است. چطور می توان بدون کم و زیاد کردن حصارها، مساحت زمین را افزایش داد؟



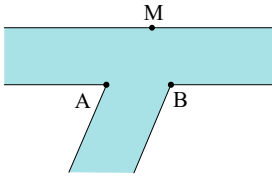
مسائل پیدا کردن کوتاه ترین مسیر

۲۹ مطابق شکل $CD = 5$ است. نقطه M روی d قرار دارد، به طوری که مسیر AMB کوتاه ترین مسیر است. طول این مسیر کدام است؟





۳۰ می‌خواهیم کنار رودخانه‌ها، ۳ اسکله بسازیم. جای ۲ اسکله A و B مطابق شکل مشخص است. اسکله M را در چه نقطه‌ای از ساحل رودخانه بسازیم که قایق‌ها هنگام طی مسیر $MABM$ کوتاه‌ترین مسیر را طی کنند؟



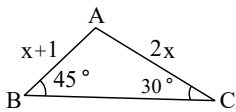
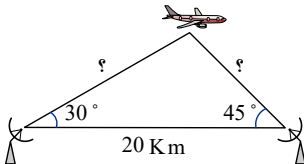
فصل سوم: روابط طولی در مثلث



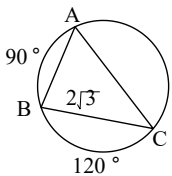
درس اول: قضیه سینوس ها قضیه سینوس ها در مثلث و کاربرد آن

۳۱ ثابت کنید در هر مثلث قائم‌الزاویه $\triangle ABC$ ($\hat{A} = 90^\circ$) با ارتفاع $AH = h_a$ داریم: $\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

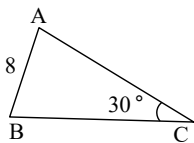
۳۲ دو ایستگاه رادار که در فاصله ۲۰ کیلومتری از هم واقع هستند، هواپیمایی را با زاویه‌های 30° و 45° درجه رصد کرده‌اند. فاصله هواپیما از دو ایستگاه را به دست آورید.



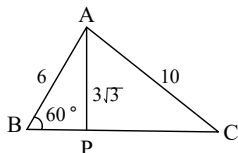
۳۳ در شکل مقابل، مقدار x چقدر است؟



۳۴ در شکل مقابل طول ضلع AB چقدر است؟



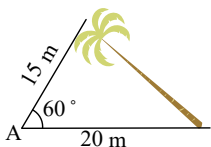
۳۵ شعاع دایره محیطی مثلث ABC چقدر است؟



۳۶ در شکل مقابل، شعاع دایره محیطی مثلث APC چقدر است؟

درس دوم: قضیه کسینوس ها قضیه کسینوس ها در مثلث و کاربرد آن

۳۷ یک درخت کج از نقطه A روی زمین، که در فاصله ۱۵ متری از نوک درخت است به زاویه 60° دیده می‌شود. اگر فاصله A تا پای درخت ۲۰ متر باشد، مطلوب است:



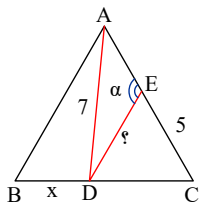
(الف) طول درخت

(ب) سینوس زاویه‌ای که درخت با سطح زمین می‌سازد.

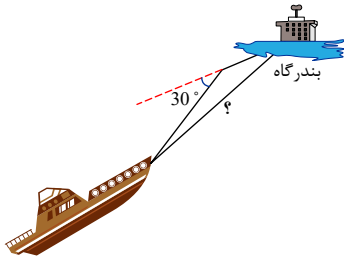
(پ) فاصله نوک درخت از زمین



۳۸ در مثلث متساوی‌الاضلاع $\triangle ABC$ به ضلع ۸ واحد، نقطه D ، که به فاصله ۷ واحد از رأس A قرار دارد از B و C چه فاصله‌ای دارد؟
 نقطه E ، که به فاصله ۵ واحد از C قرار دارد از D به چه فاصله‌ای است؟ اندازه زاویه $\widehat{AED}$ چند درجه است؟ ($CD > BD$)



۳۹ یک کشتی از یک نقطه با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت در یک جهت در حرکت است و یک ساعت بعد با 30° انحراف به راست با سرعت ۴۰ کیلومتر در ساعت به حرکت خود ادامه می‌دهد و یک ساعت و نیم پس از آغاز حرکتش در یک بندرگاه پهلو می‌گیرد. فاصله بندرگاه از مبدأ حرکت کشتی چند کیلومتر است؟

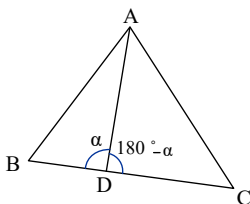


قضیه استوارت

۴۰ در مثلث $\triangle ABC$ ، نقطه دلخواه D روی BC مفروض است. به کمک قضیه کسینوس‌ها در دو مثلث $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$ درستی تساوی زیر را ثابت کنید:

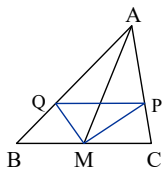
$$AB^2 \cdot DC + AC^2 \cdot DB = AD^2 \cdot BC + DB \cdot DC \cdot BC \quad (\text{قضیه استوارت})$$

به کمک قضیه استوارت، درستی قضیه میانه‌ها را نتیجه‌گیری کنید.



درس سوم: قضیه نیمسازهای زوایای داخلی و محاسبه طول نیمسازها قضیه نیمسازهای زوایای داخلی

۴۱ در مثلث ABC ، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند؛ ثابت کنید: $PQ \parallel BC$

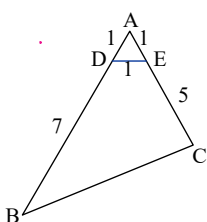


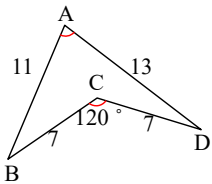
محاسبه طول نیمساز داخلی مثلث

۴۲ در مثلث $\triangle ABC$ می‌دانیم $AB = 7$ و $AC = 4$ و $BC = 10$ است. طول نیمساز داخلی زاویه $\widehat{C}$ را به دست آورید.

درس چهارم: قضیه هرون (محاسبه ارتفاع‌ها و مساحت مثلث) قضیه سینوس‌ها در مساحت

۴۳ در شکل مقابل، اولاً طول BC را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $DECB$ را بیابید.





۴۴ در شکل، اولاً اندازه زاویه A را به دست آورید. ثانیاً مساحت چهارضلعی $ABCD$ را بیابید.
راهنمایی: B را به D وصل کنید.

۴۵ در مثلث $\triangle ABC$ داریم: $AB = 10$ ، $AC = 6$ و $\hat{A} = 60^\circ$.

الف) طول BC را به دست آورید.

ب) مساحت مثلث را تعیین کنید.

پ) مقدار $\sin \hat{B}$ را پیدا کنید.



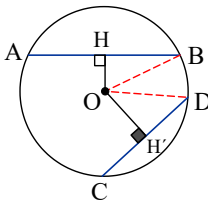


پاسخنامه تشریحی

۱ از O به B و C وصل می‌کنیم،

$$\begin{cases} OH \perp AB \Rightarrow AH = BH = \frac{AB}{2} \\ OH' \perp CD \Rightarrow CH' = DH' = \frac{CD}{2} \\ OB = OD = R \end{cases}$$

اگر $AB > CD$ داریم:

$$\frac{AB}{2} > \frac{CD}{2} \Rightarrow BH > DH'$$


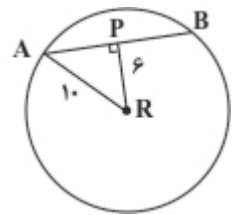
$$\begin{cases} \triangle OBH : BH^2 = R^2 - OH^2 \\ \triangle ODH' : DH'^2 = R^2 - OH'^2 \end{cases} \Rightarrow R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow OH < OH'$$

$$R^2 - OH^2 > R^2 - OH'^2 \Rightarrow BH^2 > DH'^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{4} > \frac{CD^2}{4} \Rightarrow AB > CD$$

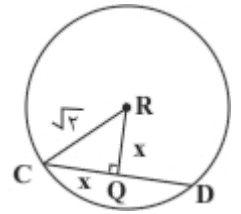
حال اگر فرض کنیم $OH < OH'$ ، داریم:

$$\begin{aligned} \triangle APR : AP^2 &= 100 - 36 = 64 \Rightarrow AP = 8 \\ AP = PB &\Rightarrow AB = 2AP = 16 \end{aligned}$$

۲ الف) مطابق شکل داریم:



ب) مطابق شکل داریم:



$$RQ = CQ = x$$

$$\triangle RCQ : x^2 + x^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$CQ = QD = 1 \Rightarrow CD = 2$$

$$\widehat{AB} = 60^\circ, AB = 10, OA = OB \Rightarrow OA = OB = AB = 10$$

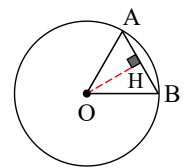
$$\triangle OAB : \text{متساوی الاضلاع} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = 5\sqrt{3}$$

$$84^\circ + y + \widehat{BC} = 360^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 360^\circ - 84^\circ - 140^\circ = 136^\circ$$

$$\hat{x} = \widehat{BC} = 136$$

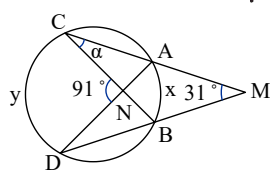
$$\hat{x} = 165^\circ \Rightarrow \widehat{BC} = 165^\circ \Rightarrow 84^\circ + 165^\circ + y = 360^\circ \Rightarrow \hat{y} = 111^\circ$$

۴ الف) با توجه به شکل داریم:



ب)

۵ با توجه به نام‌گذاری‌های روی شکل داریم:



$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 91^\circ \\ \frac{y-x}{2} = 31^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 182^\circ \\ y-x = 62^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 60^\circ \\ y = 122^\circ \end{cases}$$

بنابراین، داریم:

$$\alpha = \frac{x}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\begin{cases} \hat{B} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{MN} + \widehat{PN} - \widehat{PQ}}{2} = 80^\circ \\ \hat{C} = \frac{\widehat{QM} + \widehat{PQ} + \widehat{PN} - \widehat{MN}}{2} = 70^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 150^\circ = \frac{2\widehat{QM} + 2\widehat{PN}}{2} \Rightarrow \widehat{PN} + \widehat{MQ} = 150^\circ$$

$$\hat{A} = \frac{\widehat{PN} + \widehat{MQ}}{2} = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$$

۷

$$S'(\text{سایه‌زده}) = S(\text{قطاع } 60^\circ) - S(\text{مثلث}) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi \times 4^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = \frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3}$$

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} = 70^\circ \\ \frac{x-y}{2} = 50^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 120^\circ \\ y = 20^\circ \end{cases}$$

الف) طبق شکل داریم:

$$z(z-2) = 4 \times 12 \Rightarrow z^2 - 2z - 48 = 0 \Rightarrow z = -6 \text{ غ.ق.}, z = 8 \text{ ق.ق.}$$

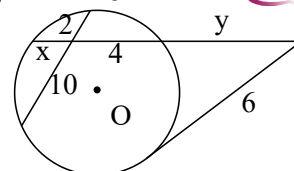
$$4 \times x = 2 \times 10 \Rightarrow x = 5$$

$$6^2 = y(y+4+x) \xrightarrow{x=5} y^2 + 9y - 36 = 0$$

$$\rightarrow (y-3)(y+12) = 0 \rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -12 \text{ غ.ق.} \end{cases}$$

ب) طبق روابط طولی داریم:

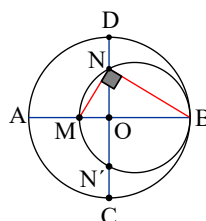
۹ طبق روابط طولی در دایره داریم:



۱۰

$$AM = 16, DN = 10, OA = R \Rightarrow OM = R - 16$$

$$OB = R, ON = R - 10$$



$$\triangle MNB: \hat{N} = 90^\circ, \hat{O} = 90^\circ \Rightarrow ON^2 = OM \times OB$$

$$(R-10)^2 = (R-16) \times R$$

$$R^2 - 20R + 100 = R^2 - 16R \Rightarrow 4R = 100 \Rightarrow R = 25$$

$$\text{شعاع دایره کوچکتر} = \frac{BM}{2} = \frac{2R - AM}{2} = \frac{2 \times 25 - 16}{2} = 14$$

$$\begin{cases} \text{مماس مشترک داخلی} = \sqrt{15} = \sqrt{d^2 - (R+R')^2} = \sqrt{64 - (R+R')^2} \\ \text{مماس مشترک خارجی} = 3\sqrt{7} = \sqrt{d^2 - (R-R')^2} = \sqrt{64 - (R-R')^2} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} (R + R') = 7 \\ (R - R') = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 4 \\ R' = 3 \end{cases}$$

$$TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \Rightarrow TT' = \sqrt{36 - 1} \Rightarrow TT' = \sqrt{35}$$

۱۲

۱۳

و طبق فرض داریم:

$$\text{طول خط‌المركزين} = 2 = R - R' \quad (1)$$

$$\text{مساحت ناحیه بین دو دایره} = \pi R^2 - \pi R'^2 = 16\pi \Rightarrow R^2 - R'^2 = 16 \Rightarrow \underbrace{(R - R')}_2 (R + R') = 16 \Rightarrow R + R' = 8 \quad (2)$$

$$\Rightarrow (1), (2) R = 5, R' = 3$$

۱۴ الف

$$\begin{cases} R = 7 \\ R' = 1 \Rightarrow TT' = \sqrt{d^2 - (R - R')^2} \rightarrow TT' = \sqrt{10^2 - (7 - 1)^2} \rightarrow TT' = 8 \\ d = 10 \end{cases}$$

(ب) دو مماس مشترک خارجی

۱۵

در فرمول‌های مقابل S مساحت و p نصف محیط می‌باشد.

$$r_a = \frac{s}{p-a}, r_b = \frac{s}{p-b}, r_c = \frac{s}{p-c}, r = \frac{s}{p}$$

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{\frac{s}{p-a}} + \frac{1}{\frac{s}{p-b}} + \frac{1}{\frac{s}{p-c}} = \frac{p-a+p-b+p-c}{s} = \frac{3p-2p}{s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c \Rightarrow h_a = \frac{2s}{a}, h_b = \frac{2s}{b}, h_c = \frac{2s}{c}$$

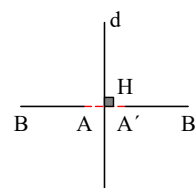
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2s} + \frac{b}{2s} + \frac{c}{2s} = \frac{a+b+c}{2s} = \frac{2p}{2s} = \frac{p}{s} = \frac{1}{r}$$

۱۶

$$AB \perp d, \hat{H} = 90^\circ$$

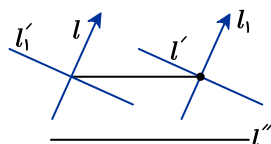
$$AH = A'H, BH = B'H$$

$$\begin{cases} AB = BH - AH \\ A'B' = B'H - A'H \end{cases} \Rightarrow AB = A'B'$$



۱۷

پاسخ: برای این کار، ابتدا خط l را با برداری به طول $5cm$ و موازی با l'' انتقال می‌دهیم تا خط l_1 به دست آید.

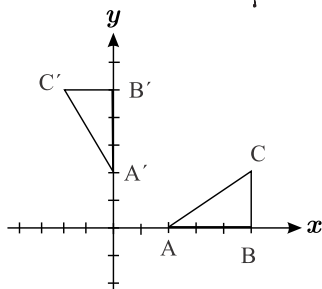


l_1, l' را در B قطع می‌کند.

به همین ترتیب، l' را با برداری به طول $5cm$ موازی با l'' انتقال می‌دهیم تا l_1 به دست آید.

l و l_1 در A متقاطع هستند. پاره‌خط $AB = 5cm$ جواب مسئله است.

۱۸ پاسخ: الف) با توجه به شکل در این دوران داریم:

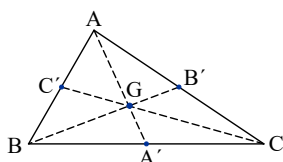


$$\begin{cases} A(2, 0) \rightarrow A'(0, 2) \\ B(5, 0) \rightarrow B'(0, 5) \\ C(5, 2) \rightarrow C'(-2, 5) \end{cases}$$

(ب)

$$\left. \begin{aligned} AC &= \sqrt{(5-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{13} \\ A'C' &= \sqrt{(-2-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13} \end{aligned} \right\} \Rightarrow AC = A'C'$$

$$\left. \begin{aligned} m_{AC} &= \frac{2-0}{5-2} = \frac{2}{3} \\ m_{A'C'} &= \frac{5-2}{-2-0} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m_{AC} \neq m_{A'C'}$$



می‌دانیم که محل هم‌رسمی میانه‌ها، هر میانه را به نسبت ۱ به ۲ تقسیم می‌کند. داریم:

$$\frac{GA'}{GA} = \frac{1}{2}, \quad \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{2}, \quad \frac{GC'}{GC} = \frac{1}{2}$$

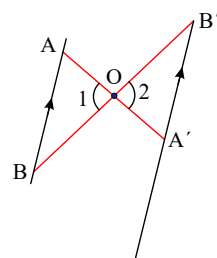
مطابق شکل بالا بنابراین، A' ، B' ، C' مجانس‌های A و B و C به مرکز G و نسبت $k = -\frac{1}{2}$ هستند.

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$$

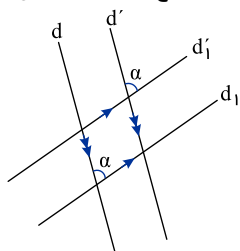
۲۰ الف) چون $k < 0$ است، پس به شکل زیر می‌باشد.

$$OA' = k \times OA, OB' = k \times OB$$

$$\Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}, \hat{O}_1 = \hat{O}_2$$



$$A\hat{O}B \sim A'\hat{O}B' \Rightarrow \hat{B}' = \hat{B}, \hat{A}' = \hat{A} \Rightarrow AB \parallel A'B'$$

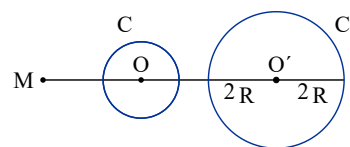


(ب) اگر زاویه بین دو خط متقاطع برابر با α باشد، از آنجا که مجانس خط با آن خط موازی می‌باشد، پس زاویه بین مجانس‌های دو خط همان زاویه بین دو خط (α) است.

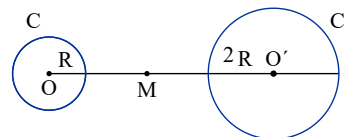
۲۱



الف) $k = 2 \Rightarrow MO' = 2OM, R' = 2R$

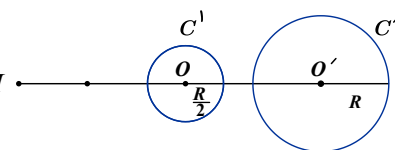


ب) $k = -2 \Rightarrow MO' = 2OM, R' = 2R$



پ) $k = \frac{1}{2}$

این قسمت مانند (الف) می باشد فقط مرکز متجانس M و O' در یک خط است. تصویر C' می باشد.



۲۲

$$A(1, 2) \rightarrow A'(3, 6) \Rightarrow k = \frac{OA'}{OA} = \frac{\sqrt{3^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 3$$

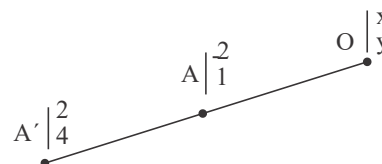
تجانس، انبساط است زیرا $k > 1$ است.

۲۳ مطابق شکل:

$$k = \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} = (2-x, 4-y), \quad \overrightarrow{OA} = (-2-x, 1-y)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA'} = 5 \times \overrightarrow{OA} \Rightarrow \begin{cases} 2-x = 5(-2-x) = -10 - 5x \Rightarrow x = -3 \\ 4-y = 5(1-y) = 5 - 5y \Rightarrow y = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow O \left(-3, \frac{1}{4} \right)$$

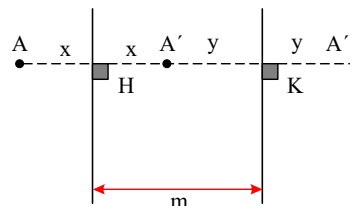


۲۴ دو مثلث متشابه اند و نسبت تشابه مثلث دومی به اولی همان نسبت محیط آنهاست. داریم:

$$k = \frac{12}{4} = 3 \Rightarrow \frac{\text{شعاع دایره تصویر}}{\text{شعاع دایره اولیه}} = 3 \Rightarrow \frac{\text{مساحت دایره تصویر}}{\text{مساحت دایره اولیه}} = 3^2 = 9$$

$$\Rightarrow \frac{S'}{16\pi} = 9 \Rightarrow S' = 9 \times 16\pi \Rightarrow \pi \times R'^2 = 9 \times 16\pi \Rightarrow R' = 12$$

۲۵ پاسخ:



$$AH = A'H = x, A'K = A''K = y, x + y = m$$

$$AA'' = 2(x + y) = 2m$$

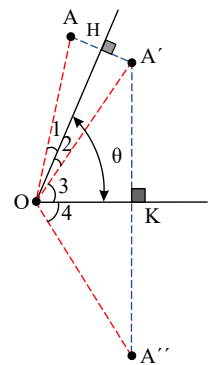
$$BB'' = CC'' = 2m$$

به همین ترتیب داریم:

می توان نتیجه گرفت که $A''B''C''$ تصویر $\triangle ABC$ نتیجه انتقالی با بردار $2m$ و راستای عمود بر محورهای بازتاب می باشد.

۲۶ الف بازتاب، اندازه زاویه را حفظ می کند. داریم:

$$\begin{cases} A \text{ بازتاب } A' \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_r \Rightarrow A\hat{O}A'' = r(\hat{O}_r + \hat{O}_s) = r\theta \\ A' \text{ بازتاب } A'' \Rightarrow \hat{O}_r = \hat{O}_s \end{cases}$$



(ب) به همین ترتیب داریم:

$$B\hat{O}B'' = C\hat{O}C'' = r\theta$$

(پ) از آنجا که داریم:

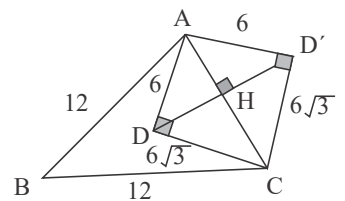
$$OA = OA'', A\hat{O}A'' = r\theta$$

پس A'' دوران یافته A به مرکز O و زاویه $r\theta$ می باشد. پس $A''B''C''$ دوران یافته ABC به مرکز O و زاویه $r\theta$ می باشد.

۲۷ اگر بخواهیم بدون تغییر محیط، مساحت چهارضلعی را افزایش دهیم باید بازتاب D را نسبت به محور AC بدست آوریم. بدین ترتیب چهارضلعی جدید محیطش با محیط $ABCD$ برابر است و مساحت آن از مساحت $ABCD$ بیشتر است. به این ترتیب داریم:

$$\triangle ADC : AC^2 = 6^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow AC = 12$$

$$S_{\triangle ADC} = \frac{6 \times 6\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$$



افزایش مساحت برابر است با:

$$2S_{\triangle ADC} = 2 \times 18\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} BD \Rightarrow C' \text{ بازتاب } C' \\ \Rightarrow BC = BC', \quad DC = DC' \\ DF \Rightarrow E' \text{ بازتاب } E' \\ \Rightarrow DE = DE', \quad FE = FE' \end{aligned}$$

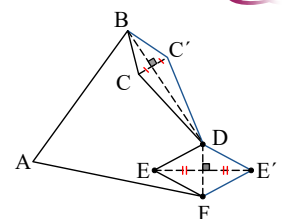
$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } ABCDEF = \text{محیط } ABC'D'E'F \\ S_{ABC'D'E'F} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} AE \Rightarrow F' \text{ بازتاب } F' \\ \Rightarrow AF = AF', \quad EF = EF' \end{aligned}$$

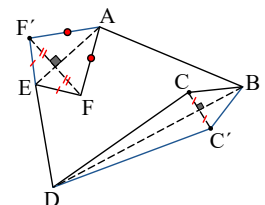
$$\begin{aligned} BD \Rightarrow C' \text{ بازتاب } C' \\ \Rightarrow BC = BC', \quad DC = DC' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{محیط } ABCDEF = \text{محیط } ABC'D'E'F \\ S_{ABC'D'E'F} > S_{ABCDEF} \end{cases}$$

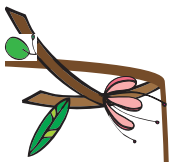
۲۸ الف)



(ب) بنابر مسائل هم محیطی، کافی است که در رأس هایی که زوایا بیشتر از 180° هستند، بازتاب محوری انجام شود:



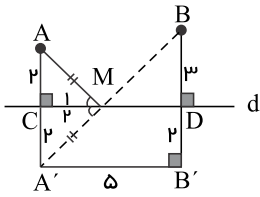
۲۹



مطابق شکل کوتاه‌ترین مسیر AMB است.

بازتاب A نسبت به d است A' .

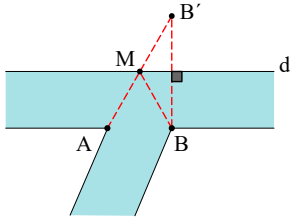
به این ترتیب مسیر AMB ، هم‌اندازه با $A'B$ است. داریم:



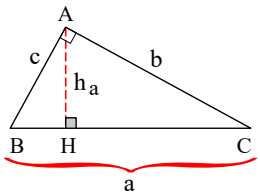
$$A'B^2 = \delta^2 + \delta^2 \Rightarrow A'B = \sqrt{\delta^2} \Rightarrow A'B = \delta\sqrt{2}$$

۳۰

این مسأله به این معناست که روی خط d ، نقطه M را طوری بیابیم که مسیر AMB کوتاه‌ترین باشد. برای این کار، بازتاب B نسبت به d (B') را یافته و به A وصل می‌کنیم. طبق مسأله هرون مسیر AMB کوتاه‌ترین مسیر می‌باشد. پس اسکله سوم در M قرار می‌گیرد.



۳۱

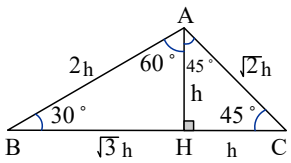


$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot c$$

$$\Rightarrow bc = a \cdot h_a$$

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{b^2 c^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot h_a^2} = \frac{1}{h_a^2}$$

۳۲ با فرض $h = AH$ داریم:



$$\widehat{AHC} : \widehat{HAC} = 45^\circ \Rightarrow AC = \sqrt{2}h, CH = h$$

$$\widehat{ABH} : \widehat{B} = 30^\circ, \sin 30^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{h}{AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2h$$

$$\widehat{HAB} = 60^\circ, \sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2h = \sqrt{3}h$$

$$BC = 20 = h + \sqrt{3}h = h(1 + \sqrt{3}) \Rightarrow h = \frac{20}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = 10(\sqrt{3} - 1)$$

$$AB = 2h = 20(\sqrt{3} - 1), AC = 10\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$$

۳۳

$$\text{قانون سینوسها: } \frac{x+1}{\sin 30^\circ} = \frac{2x}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{x+1}{\frac{1}{2}} = \frac{2x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \sqrt{2}(x+1) = 2x$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}x + \sqrt{2} = 2x \Rightarrow 2x - \sqrt{2}x = \sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{2} = \sqrt{2} + 1$$

۳۴

$$\widehat{A} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ, \widehat{C} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{BC}{\sin \hat{A}} \Rightarrow \frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{2}$$

$$2R = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2R = 4 \Rightarrow R = 2$$

$$\text{قانون سینوس ها در } \triangle ABP : \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R_1 \Rightarrow 2R_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4 \Rightarrow R_1 = 2$$

$$\text{می دانیم که } \frac{R_1}{R_{\triangle APC}} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{2}{R_r} = \frac{2}{4} \Rightarrow R_r = 2$$

طول درخت: $x^2 = 15^2 + 20^2 - 2 \times 15 \times 20 \times \cos 60^\circ$

$$\Rightarrow x^2 = 225 + 400 - 300 \Rightarrow x = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

$$\text{ب) } \frac{15}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{325}}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{15}{\sin \alpha} = \frac{5\sqrt{13}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}$$

$$\text{پ) } h = 15 \times \sin 60^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{2}$$

$$\triangle ADC : \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow AD^2 = DC^2 + AC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 49 = 64 + DC^2 - 2 \times 8 \times CD \times \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow CD^2 - 8CD + 15 = 0 \Rightarrow (CD - 3)(CD - 5) = 0$$

$$\Rightarrow CD = 3 \text{ یا } CD = 5$$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ یا } 3, \quad CD > BD \Rightarrow CD = 5, \quad BD = 3$$

$$CD = 5, \quad CE = 5, \quad \hat{C} = 60^\circ \Rightarrow \triangle DCE \text{ متساوی الاضلاع} \Rightarrow DE = 5$$

$$\hat{AED} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$AB = 60 \times 1 = 60, \quad BC = 40 \times 0.5 = 20, \quad \hat{ABC} = 150^\circ$$

$$\text{قضیه کسینوس ها: } AC^2 = 20^2 + 60^2 - 2 \times 20 \times 60 \times \cos 150^\circ$$

$$- \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

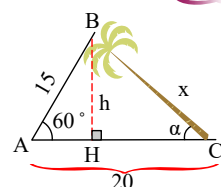
$$\Rightarrow AC^2 = 400 + 3600 + 1200\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AC^2 = 4000 + 1200\sqrt{3} \Rightarrow AC = \sqrt{4000 + 1200\sqrt{3}}$$

۳۵ طبق قانون سینوس ها داریم:

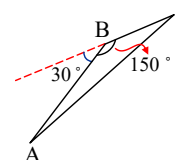
۳۶

۳۷



۳۸

۳۹ طبق فرض و شکل زیر داریم:



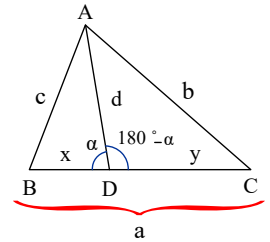


۴۰

$$\triangle ABD : c^2 = d^2 + x^2 - 2xd \cdot \cos \alpha$$

$$\triangle ADC : b^2 = d^2 + y^2 - 2yd \cdot \cos(180^\circ - \alpha), \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow b^2 = d^2 + y^2 + 2yd \cdot \cos \alpha \begin{cases} c^2 \times y = d^2 y + x^2 y - 2xyd \cdot \cos \alpha \\ b^2 \times x = d^2 x + xy^2 + 2xyd \cdot \cos \alpha \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} b^2 x + c^2 y = d^2(x+y) + xy(x+y) = (d^2 + xy)(x+y) \Rightarrow b^2 x + c^2 y = a(d^2 + xy)$$



۴۱

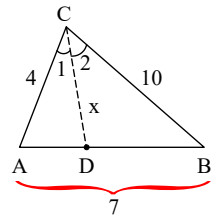
$$\begin{aligned} \triangle ABM : MQ \text{ نیمساز} : \frac{AQ}{BQ} &= \frac{AM}{BM} \\ \triangle AMC : MP \text{ نیمساز} : \frac{AP}{CP} &= \frac{AM}{MC} \end{aligned} \quad , \quad BM = MC$$

$$\Rightarrow \frac{AQ}{BQ} = \frac{AP}{CP} \xrightarrow{\text{عکس تالی}} PQ \parallel BC$$

$$x^2 = AC \cdot BC - AD \cdot BD \quad (1)$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \quad \text{قضیه نیمسازها:}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{2}{5} BD$$



$$AD + BD = 7 \Rightarrow \frac{2}{5} BD + BD = 7 \Rightarrow \frac{7}{5} BD = 7 \Rightarrow BD = 5 \Rightarrow AD = 2 \Rightarrow (1) : x^2 = 4 \times 10 - 2 \times 5 = 30 \Rightarrow x = \sqrt{30}$$

۴۲

$$AB = 8, AC = 6, (AD = AE = DE = 1 \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ)$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} = 36 + 64 - 48 = 52 \Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$S_{DECB} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADE} \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 12\sqrt{3}$$

$$S_{\triangle ADE} = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(1) : S_{DECB} = 12\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{47\sqrt{3}}{4}$$

۴۳

طبق قضیه کسینوس ها داریم:

$$\triangle BCD : BD^2 = 7^2 + 7^2 - 2 \times 7 \times 7 \times \underbrace{\cos 120^\circ}_{-\frac{1}{2}} = 49 + 49 + 49 \Rightarrow BD = 7\sqrt{3}$$

$$\triangle ABD : (7\sqrt{3})^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \times 11 \times 13 \times \cos \hat{A}$$

$$\Rightarrow 147 = 121 + 169 - 286 \cos \hat{A} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = 60^\circ$$

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 11 \times 13 \times \underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \underbrace{\sin 120^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 35,75\sqrt{3} - 12,25\sqrt{3} = 23,5\sqrt{3}$$

$$\text{الف) } BC^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \underbrace{\cos 60^\circ}_{\frac{1}{2}} = 36 + 100 - 60 = 76 \Rightarrow BC = 2\sqrt{19}$$

$$\text{ب) } S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

$$\text{پ) } S = \frac{1}{2} \times AB \times BC \times \sin \hat{B} = \frac{1}{2} \times 10 \times 2\sqrt{19} \times \sin \hat{B} = 15\sqrt{3} \Rightarrow \sin \hat{B} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{19}}$$

۴۵