



بیستوفیل

گسسته دوازدهم
ریاضی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲ امیر محمد رضائی	رتبه ۲۰ سینا راضی	رتبه ۱۶ آریا قهرمانی	رتبه ۱۴ امیر محمد کیانی
رتبه ۸۰ محمد مهدی شریفی	رتبه ۷۵ محمد صالح عارفی	رتبه ۶۱ بهار هلالی	رتبه ۵۹ ایمان انفرادی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲ امیر محمد شکوهی	رتبه ۱۶۹ هانیه خواجه	رتبه ۱۶۰ اشکان کوثری	رتبه ۱۴۷ محدثه حیدری	رتبه ۲۵۹ ابوالفضل ناصریان
رتبه ۴۳۲ سید محمد صادق حسینی	رتبه ۳۴۱ حمید رضا بشیری	رتبه ۳۰۸ سید علی اکرمی	رتبه ۲۷۱ فاطمه سادات موسوی	رتبه ۴۷۳ زهره بابائی
رتبه ۵۳۹ نجمه کبختا	رتبه ۵۳۷ ریحانه حیدری	رتبه ۵۲۳ فاطمه شاهسونند	رتبه ۵۱۴ محمد پارسا عبدالله آبادی	رتبه ۵۴۶ حسین تقضلی نژاد
رتبه ۶۶۱ فاطمه اصغری	رتبه ۶۰۶ سجاد محمودی زاده	رتبه ۵۷۰ زهره ولی نژاد	رتبه ۵۵۷ محمد صالح زارعی	رتبه ۶۶۷ سیاوش مصطفایی
رتبه ۷۸۱ احسان قنبری	رتبه ۷۱۴ محمد یزدیان	رتبه ۶۹۱ بهار ضرامی	رتبه ۶۷۲ محمد ماهان عنبرستانی	رتبه ۷۸۶ نیما غفاری
رتبه ۹۰۹ کیمیا فدائی	رتبه ۸۹۳ فاطمه مشاوری نجف آبادی	رتبه ۸۰۴ آرمین رضایی	رتبه ۸۰۳ ماتده رنجبر	رتبه ۹۴۷ صفورا بقائی
رتبه ۱۱۲۷ زهره بابائی	رتبه ۱۱۲۲ علی طاهر زاده	رتبه ۱۰۵۸ الینا جلالی فر	رتبه ۱۰۵۲ پویان فریور افشار	رتبه ۱۲۳۴ مطهره توحیدی
رتبه ۱۳۵۰ علی زینلی	رتبه ۱۲۸۴ فاطمه معین زاده	رتبه ۱۲۸۴ بهار امیری	رتبه ۱۲۳۶ مبینا ایزدی	رتبه ۱۳۷۲ پارسا رضایی
رتبه ۱۵۰۳ فاطمه رحیم زاده	رتبه ۱۴۹۳ محمد مهدی خرم زاده	رتبه ۱۴۸۳ سینا خاوری خراسانی	رتبه ۱۴۲۴ سید امیر حسین حسینی	رتبه ۱۵۳۴ فاطمه عبیری
رتبه ۱۶۹۶ ندا ملک شاهی	رتبه ۱۶۷۸ سجاد ینکی	رتبه ۱۶۳۹ ابوالفضل نیرومند	رتبه ۱۶۲۸ امیر محمد فکور حقیقی	رتبه ۱۷۳۱ محمد رضا محسنی
رتبه ۲۵۵۹ سارا حمزه	رتبه ۲۰۱۵ علی شیرزاد	رتبه ۱۹۶۶ مهسا رضایی مقدم	رتبه ۱۷۵۴ هلیا حاجیلوئی	رتبه ۲۶۲۵ زهره جمعی
رتبه ۲۷۹۴ مریم بادلی	رتبه ۲۷۸۱ سعید شبانی	رتبه ۲۷۵۱ فهمیه سید آبادی	رتبه ۲۷۱۱ محمد غلامی	رتبه ۲۸۱۰ هدیه رحیمی
رتبه ۳۳۴۳ سینا ارزمانی	رتبه ۳۲۴۴ هلیا سجادی	رتبه ۳۱۳۳ صبا شایع ثانی	رتبه ۲۸۸۱ پارسا جمال امیدی	



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل گسسته فصل ۱ دوازدهم

سال دوازدهم
ریاضی

فهرست

درس ۱: استدلال ریاضی

- ۱ اثبات مستقیم
- ۱ مثال نقض
- ۲ اثبات غیر مستقیم (برهان خلف)
- ۲ اثبات های بازگشتی، گزاره های هم ارز

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

- ۳ بخش پذیری
- ۳ ب م م و ک م م
- ۴ قضیه تقسیم

درس ۳: هم نهشتی در اعداد صحیح، کاربردها

- ۴ رابطه هم نهشتی
- ۴ پیدا کردن باقی مانده
- ۵ تقویم نگاری
- ۵ قواعد بخش پذیری
- ۵ معادله هم نهشتی
- ۵ معادله سیاله

درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح

- ۶ بخش پذیری



درس ۱: استدلال ریاضی



اثبات مستقیم

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۱ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۲ هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف برای هر عدد طبیعی n ، عدد $2^n + 1$ اول است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ب مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۳ در هر یک از موارد زیر، گزاره درست را اثبات و گزاره نادرست را با ارائه مثال نقض، رد کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

ب حاصل ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف میانگین پنج عدد طبیعی همان عدد وسطی است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

الف اگر n حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه $4n + 1$ مربع کامل است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

ب اگر $a|b$ آنگاه $|a| = |b|$ (کروشه نماد ک.م.م است).

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف برای هر دو عدد حقیقی a و b ، اگر $a^2 + b^2 = 0$ باشد، آنگاه $a = 0$ و $b = 0$.

مثال نقض

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۷ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

الف برای هر دو عدد حقیقی x و y ، داریم: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

ب اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

پ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ داریم: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

ت حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۸ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف حاصل ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

ب برای اعداد صحیح a ، b و c که $a \neq 0$ ، اگر $a|b + c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

پ اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آنگاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۹ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف اگر α, β دو عدد گنگ غیرمساوی باشند، حاصل $\frac{\alpha + \beta}{2}$ عددی گنگ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۱۰ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید:



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف عدد ۱۴۰۴ به کلاس یا دسته هم‌نهشتی ۷ به پیمانه ۱۱ تعلق دارد.

اثبات غیرمستقیم (برهان خلف)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۱۱ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha + 2\beta$ گنگ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۲ a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند.ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۳ عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ، گویا) است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۱۴ گزینه صحیح را انتخاب کنید:

اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدام یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

$$(1) \quad a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2 \quad (2) \quad a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

$$(3) \quad a < b \Leftrightarrow (a - b)^2 \geq 0 \quad (4) \quad a < b \Leftrightarrow a^2 < b^3$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۱۵ ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۱۶ درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

ب حاصل $(3m + 1, 3m + 2)$ برابر ۱ می‌باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۱۷ با برهان خلف ثابت کنید اگر α و β دو عدد گنگ و $\beta - 2\alpha$ عددی گویا باشد، آنگاه $3\alpha - \beta$ عددی گنگ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۸ ثابت کنید اگر $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

اثبات‌های بازگشتی، گزاره‌های هم‌ارز

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۱۹ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

$$(x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \quad \text{برای هر دو عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ داریم:})$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۲۰ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آن‌گاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۱ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

$$(x^2 + y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \quad \text{برای هر دو عدد حقیقی } x \text{ و } y \text{ داریم:})$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۲ اگر x, y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^2 + y^2 + 1 \geq 2xy - z^2$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۲۳ ثابت کنید مجموع مربعات هر عدد حقیقی همواره از قرینه حاصل ضرب آنها کمتر نیست.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۲۴ برای هر دو عدد حقیقی a و b ، گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:

$$5a^2 + b^2 \geq 4ab$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

$$xy + \frac{1}{y}(y^2 + 1) \geq x(1 - x)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۲۶ با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$a^2 + b^2 \geq (a - 1)(b + 1)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۲۷ ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.



درس ۲: بخش پذیری در اعداد صحیح



بخش پذیری

۲۸. باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ است، باقی مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۲۹. اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m + 5)$ و $(6m + 5)$ بر a بخش پذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

۳۰. اگر $a \mid 2m + 3$ و $a \mid m + 7$ ، در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟

۳۱. اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت ثابت کنید: $|a| \leq |b|$.

۳۲. جملات زیر را با نوشتن عدد مناسب در جای خالی تکمیل کنید.

الف

اگر a, b دو عدد طبیعی بزرگ تر از یک باشند و $b \mid 27$ ، $9a \mid b$ آنگاه $a = \dots\dots\dots$ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۳۳. اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و $2a \mid 3m - 4$ ، $2a \mid 5m - 2$ جواب های صحیح a را مشخص کنید. ($m \in \mathbb{Z}$)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۳۴. اگر k عددی صحیح باشد به طوری که $4 \mid 3k + 1$ ، ثابت کنید: $16 \mid 9k^2 + 18k + 5$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۳۵. اگر a عددی اول باشد و $3a \mid 4k + 2$ و $3a \mid 5k + 1$ آنگاه مقدار a را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳۶. اگر $n \in \mathbb{N}$ و $n \mid 9k + 7$ و $n \mid 7k + 6$ ، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳۷. فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند به طوری که $a \mid 3n + 4$ و $a \mid 2n + 3$. نشان دهید $a = 1$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۳۸. هرگاه a, b, c سه عدد صحیح و $a \neq 0$ و $a \mid b$ و $a \mid c$ ثابت کنید: $a \mid b \pm c$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۳۹. اگر $a > 1$ ، $a \mid 9k + 4$ و $a \mid 5k + 3$ ، ثابت کنید a عددی اول است.

ب م م و ک م م

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۰. جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف) اگر k عددی صحیح باشد، باقی مانده تقسیم $300 - 19k$ بر ۱۹ برابر با $\dots\dots\dots$ است.

ب

اگر a, b و c اعدادی طبیعی باشند که $a \mid b$ و $b \mid c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر $\dots\dots\dots$ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۴۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب، کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

الف) حاصل $(0, -5)$ برابر $\dots\dots\dots$ است. (پراتنز نماد ب.م.م است.)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

ب) باقی مانده تقسیم $43 - 8$ برابر $\dots\dots\dots$ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴۲. در جاهای خالی عبارت های مناسب بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف) حاصل (m^2, m^5) برابر با $\dots\dots\dots$ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

ب) اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = 1$ می گوئیم a و b $\dots\dots\dots$ هستند.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۴۳. اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(2a + 3, 5a + 4)$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۴۴. فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a]$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۵. جاهای خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف) حاصل عبارت $[(48, 72), 15]$ برابر $\dots\dots\dots$ است.



۴۶ جاهای خالی را پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

الف $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a|c, b|c$ ۲) $\forall m > 0, \dots\dots\dots$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۷ درستی و یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید:

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف حاصل عبارت $(30, [-12, -18])$ برابر ۶- است. () نماد ب م و [] نماد کم است.

قضیه تقسیم

۴۸ ثابت کنید اگر $p \geq 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می شود. ($k \in \mathbb{Z}$)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۹ اگر باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۶ و ۵ به ترتیب ۳ و ۲ باشد؛ باقی مانده تقسیم a بر ۳۰ بیاید.

۵۰ اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $3 + 2a$ بر ۸ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۵۱ ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$ ($k \in \mathbb{W}$) نوشته می شود.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۵۲ اگر باقی مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ را بیاید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۵۳ اگر a, b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، باقی مانده $a^2 + b^2 - 5$ بر ۸ را حساب کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۵۴ اگر باقی مانده تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی مانده تقسیم عدد a بر ۲۰ بیاید.

۵۵ اگر باقی مانده تقسیم اعداد صحیح a و b بر ۲۳ به ترتیب ۶ و ۷ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد $3a - 5b$ بر ۲۳ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۵۶ اگر باقی مانده تقسیم دو عدد صحیح m و n بر ۱۹ به ترتیب ۴ و ۵ باشد، آنگاه باقی مانده تقسیم عدد $(3m - 5n)$ بر ۱۹ را به دست

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

آورید.



درس ۳: هم نهشتی در اعداد صحیح

کاربردها

رابطه هم نهشتی

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۵۷ فرض کنیم $a, b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ اگر $a \equiv b^m$ ، $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \equiv b^{nm}$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۵۸ اگر m, n دو عدد طبیعی و a, b دو عدد صحیح باشند و $a \equiv b^m$ ، نشان دهید $a^n \equiv b^{nm}$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۵۹ اگر $a \equiv b^m$ و $n|m$ ثابت کنید: $a \equiv b^n$.

پیدا کردن باقی مانده

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۶۰ باقی مانده تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۶۱ باقی مانده تقسیم عدد $A = (1000)^{25} \times 9 + 11$ را بر ۷ بیاید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۶۲ اگر a و b عددی صحیح و فرد باشند، در این صورت باقی مانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر ۸ بیاید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۶۳ در هر یک از سوالات زیر، گزینه مناسب را انتخاب کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف عدد 1402 به کدام دسته هم نهشتی به پیمانه ۷ تعلق دارد؟

[۱] (۴

[۰] (۳

[۲] (۲

[۵] (۱



مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

باقی‌مانده تقسیم عدد $(7^{100} - 2^{100} - 9^{100})$ بر ۱۴ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۸

کدام یک از معادلات هم‌نهشتی زیر در مجموعه اعداد صحیح جواب ندارد؟

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

(۴) $3x \equiv 10 \pmod{7}$

(۳) $5x \equiv 10 \pmod{7}$

(۲) $2x \equiv 3 \pmod{7}$

(۱) $6x \equiv 11 \pmod{7}$

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر ۱۶ به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

باقی‌مانده تقسیم $19 + (27)^7$ را بر ۱۳ بیابید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

باقی‌مانده تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

باقی‌مانده تقسیم $(38^{36} + 19)$ را بر ۴ به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

رقم یکان عدد $A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100!$ را به دست آورید.



مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

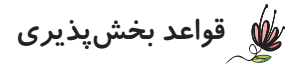
اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵

اگر ۲۵ خردادماه در یک سال یکشنبه باشد، ۱۰ آذرماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

در صورتی که دهم مهر در یک سال دوشنبه باشد، ۲۹ اسفند در همان سال چند شنبه است؟ (ذکر راه حل الزامی است).

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴



قواعد بخش پذیری

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m ، اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آن‌گاه $ac \equiv bc \pmod{m}$.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

ثابت کنید باقیمانده تقسیم هر عدد بر ۹، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.



معادله هم‌نهشتی

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

نشان دهید شرط وجود جواب برای معادله $16x \equiv 20 \pmod{14}$ برقرار است، سپس جواب‌های عمومی آن را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

معادله هم‌نهشتی $11 \equiv 1402x \pmod{9}$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

معادله $2x + 1 \equiv 9x - 1 \pmod{13}$ را حل کنید و تعداد جواب‌های دو رقمی طبیعی آن را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

شخصی در یک مسابقه پرتاب دارت، در هر پرتاب ۷ یا ۹ امتیاز و در مجموع ۱۸۳ امتیاز کسب کرده است. حداکثر تعداد پرتاب‌های ۹ امتیازی او چقدر است؟

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵

جواب‌های عمومی معادله هم‌نهشتی $50 - 2x \equiv 35x \pmod{11}$ را به دست آورید.



معادله سیاله

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

جواب‌های عمومی معادله سیاله خطی $9x + 13y = 7$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

معادله سیاله $2x + 5y = 19$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

معادله سیاله $5x + 2y = 18$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

دانش‌آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سوالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد یا امتیازی ندارد.)

این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟





۸۳ در معادله سیاله $۱۹y + ۱۵x = ۷$ ، بزرگ‌ترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت، چه مقداری است؟ (با راه‌حل)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۸۴ جواب‌های عمومی معادله سیاله $۵x + ۹y = ۲۲$ را به دست آورید.



درس ۲: بخش‌پذیری در اعداد صحیح



بخش‌پذیری

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۸۵ ثابت کنید اگر از مربع هر عدد فرد، یک واحد کم کنیم، حاصل بر ۸ بخش‌پذیر است.



پاسخنامه تشریحی

۱

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

۲

الف

نادرست، مثال نقض $n = 3$

ب

درست، اثبات:

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

۳

الف

درست

$$2k \times (2k + 2) + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k + 1)^2$$

ب

نادرست

با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل ضرب صفر است که گویا می شود.

۴

الف

نادرست

۵

الف

درست

ب

نادرست

۶

الف

درست

۷

الف

نادرست، برای مثال $x = 3$ و $y = 6$ را در نظر بگیرید:

$$3 = \sqrt{6+3} \neq \sqrt{6} + \sqrt{3}$$

ب

درست

پ

نادرست، برای مثال:

$$-2 < -1 \not\Rightarrow (-2)^2 \not\leq (-1)^2 = 1$$

ت

نادرست برای مثال:

$$\sqrt{2} \in Q^c, -\sqrt{2} \in Q^c \Rightarrow \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \in Q$$

۸

الف

نادرست

ب

نادرست

پ

درست

۹

الف

نادرست



الف

درست

۱۰ اگر $\alpha + 2\beta$ گنگ نباشد (فرض خلف) پس عددی گویا است.

از طرفی طبق فرض $\alpha + \beta$ نیز عددی گویا است.

می دانیم تفاضل دو عدد گویا، عددی گویاست در نتیجه: $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$

اما با توجه به فرض مسئله: β گنگ است.

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

۱۱ اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشند (فرض خلف)، پس عددی فرد است،

پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشند،

در نتیجه مجموع آنها باید فرد باشد،

اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است،

با توجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود.

الف

گنگ

۱۲ گزینه ۲،

۱۳ راه اول:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

رابطه اخیر همواره برقرار است.

راه دوم:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

رابطه اخیر همواره برقرار است.

الف

درست

ب

درست

۱۴ فرض کنیم $3\alpha - \beta$ عددی گویا باشد، داریم:

$$(3\alpha - \beta) + (\beta - 2\alpha) = \alpha$$

با توجه به اینکه مجموع دو عدد گویا، عددی گویاست، پس α باید عددی گویا باشد که با فرض مسئله در تناقض است.

۱۸

باقی مانده هر عدد بر ۴ به یکی از صورت های زیر است:

$$p = 4k \quad (1), \quad p = 4k + 1 \quad (2), \quad p = 4k + 2 \quad (3), \quad p = 4k + 3 \quad (4)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

۱۹

$$2x^2 + 2y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

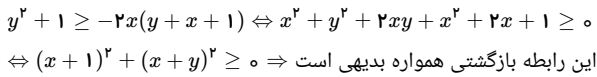
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, \quad (y-1)^2 \geq 0, \quad (x-y)^2 \geq 0$$

۲۰

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می باشد.

۲۱



همواره بدیهی است $x^r + y^r + 1 \geq 2xy - z^r \Leftrightarrow x^r + y^r - 2xy + z^r + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^r + z^r + 1 \geq 0$

روش اول:

$$\begin{aligned} a^r + b^r \geq -ab &\iff a^r + b^r + ab \geq 0 \iff \mathfrak{r}a^r + \mathfrak{r}b^r + \mathfrak{r}ab \geq 0 \\ &\iff a^r + b^r + (a^r + b^r + \mathfrak{r}ab) \geq 0 \iff a^r + b^r + (a+b)^r \geq 0 \quad \text{همواره برقرار} \end{aligned}$$

روش دوم:

$$a^r + b^r \geq -ab \iff a^r + \frac{b^r}{r} + ab + \frac{rb^r}{r} \geq 0 \iff \left(a + \frac{b}{r}\right)^r + \frac{rb^r}{r} \geq 0 \quad \text{همواره برقرار}$$

$$\Delta a^r + b^r \geq \mathfrak{F}ab \Leftrightarrow \Delta a^r + b^r - \mathfrak{F}ab \geq \circ \Leftrightarrow \mathfrak{F}a^r + a^r + b^r - \mathfrak{F}ab \geq \circ \Leftrightarrow (\mathfrak{r}a - b)^r + a^r \geq \circ.$$

نامساوی اخیر، همواره برقرار است و روابط بالا برگشت پذیرند.

روش دوم:

$$\Delta a^r + b^r \geq \mathfrak{r}ab \Leftrightarrow \Delta a^r - \mathfrak{r}ab + b^r \geq 0.$$

نامساوی اخیر، همواره برقرار است. زیرا:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ \Delta = 16b^2 - 40b^2 = -4b^2 \leq 0 \end{cases}$$

روابط بالا برگشت پذیرند.

یا به طور مشابه استدلال زیر قابل قبول است:

$$\Delta a^r + b^r \geq r_{ab} \Leftrightarrow b^r - r_{ab} + \Delta a^r \geq 0.$$

$$\begin{cases} 1 > 0 \\ \Delta = 1 \cdot 6b^2 - 2 \cdot 0a^2 = -2a^2 \leq 0 \end{cases}$$

نامساوی اخیر، همواره برقرار است و روابط بالا برگشت پذیرند.

$$xy + \frac{1}{r}(y^r + 1) \geq x(1 - x) \stackrel{\times r}{\Leftrightarrow} rxy + y^r + 1 \geq rx - rx^r \Leftrightarrow x^r + rxy + y^r + x^r + 1 - rx \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^r + (x-1)^r \geq 0$$

عبارت حاصل بدیهی است و تمامی روابط برگشت پذیرند.

$$a^r + b^r \geq ab + a - b - 1$$

$$\Leftrightarrow \mathfrak{r}a^{\mathfrak{r}} + \mathfrak{r}b^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r}ab - \mathfrak{r}a + \mathfrak{r}b + \mathfrak{r} \geq 0.$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^r + (a-1)^r + (b+1)^r \geq 0.$$

این رابطه همواره برقرار است

۲۷ فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r + x$ یک عدد گنگ است.

فرض خلف: فرض کنیم $r + x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r + x - r \in Q$ یعنی $x \in Q$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

[illegible]
$$\frac{a|\mathfrak{f}(\delta m + \mathfrak{f})}{a|\delta(\mathfrak{f}m + \delta)} \rightarrow a|\delta(\mathfrak{f}m + \delta) - \mathfrak{f}(\delta m + \mathfrak{f}) \rightarrow a|1 \rightarrow a = \pm 1$$

9





$$\begin{cases} a|2m+3 \\ a|m+7 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a|2m+3 \\ a|2m+14 \end{cases} \rightarrow a|11 \rightarrow a=1, a=11$$

$$a|b \Rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| = |a||q|$$

$$q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow |a||q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a|$$

۳۱

۳۲

الف

$$a = 3$$

$$\begin{cases} 2a|5m-2 \xrightarrow{\times 3} 2a|15m-6 \\ 2a|3m-4 \xrightarrow{\times 5} 2a|15m-20 \end{cases} \xrightarrow{-} 2a|14 \rightarrow a|7 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 7$$

روش اول: ۳۴

روش دوم:

$$\begin{cases} 4|3k+1 \Rightarrow 4 \times 4|(4(3k+1)) \Rightarrow 16|12k+4 \\ 4|3k+1 \Rightarrow 4^2|(3k+1)^2 \Rightarrow 16|9k^2+6k+1 \end{cases} \Rightarrow 16|9k^2+18k+5$$

روش سوم:

$$3k+1 = 4q \Rightarrow \begin{cases} 12k+4 = 16q \\ 9k^2+6k+1 = 16q^2 \end{cases} \Rightarrow 9k^2+18k+5 = 16q'^2$$

$$\Rightarrow 16|9k^2+18k+5$$

روش چهارم:

$$3k+1 \equiv 12k+4 \equiv 16q \pmod{16}, 9k^2+6k+1 \equiv 16q^2 \pmod{16} \Rightarrow 9k^2+18k+5 \equiv 16q'^2 \pmod{16}$$

روش پنجم:

$$4|3k+1 \Rightarrow 4|3k+5 \Rightarrow 16|(3k+1)(3k+5) \Rightarrow 16|9k^2+18k+5$$

روش اول: ۳۵

روش دوم:

$$\begin{cases} 3a|4k+2 \Rightarrow 3a|20k+10 \\ 3a|5k+1 \Rightarrow 3a|20k+4 \end{cases} \Rightarrow 3a|(20k+10) - (20k+4) \Rightarrow 3a|6 \Rightarrow a|2 \Rightarrow a=2$$

روش سوم:

$$\begin{cases} 3a|4k+2 \Rightarrow 4k \equiv -2 \pmod{3a} \Rightarrow 20k \equiv -10 \pmod{3a} \\ 3a|5k+1 \Rightarrow 5k \equiv -1 \pmod{3a} \Rightarrow 20k \equiv -4 \pmod{3a} \end{cases} \Rightarrow 6 \equiv 0 \pmod{3a} \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{a} \Rightarrow a=2$$

$$\begin{cases} 3a|4k+2 \Rightarrow 4k+2 = 3aq_1 \xrightarrow{\times 5} 20k+10 = 3aq_5 \\ 3a|5k+1 \Rightarrow 5k+1 = 3aq_2 \xrightarrow{\times 4} 20k+4 = 3aq_4 \end{cases} \Rightarrow 6 = 3aq_5 \Rightarrow 2 = aq_5 \Rightarrow a=2$$

۳۶

۳۷

۳۸

۳۹

۴۰

$$\begin{cases} n|9k+7 \times (-7) \\ n|7k+6 \times 9 \end{cases} \Rightarrow n|-63k-49+63k+54 \Rightarrow n|5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n=1 \text{ یا } 5$$

$$\frac{a|3n+4}{a|2n+3} \Rightarrow a|-2(3n+4)+3(2n+3) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a=1$$

$$\begin{cases} a|b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b=aq \\ a|c \xrightarrow{\exists q' \in \mathbb{Z}} c=aq' \end{cases} \xrightarrow{\pm} b \pm c = aq \pm aq' = a(q \pm q') \rightarrow a|b \pm c$$

$$a|9(5k+3) - 5(9k+4) \Rightarrow a|27-20$$

$$\Rightarrow a|7 \xrightarrow{a>1} a=7 \in P$$

الف ۴

ب b

۴۱

الف ۵

ب ۵

۴۲

الف

m^2

ب

نسبت به هم اول

۴۳

$$\left. \begin{aligned} (5a+4, 2a+3) = d &\Rightarrow \begin{cases} d|2a+3 \\ d|5a+4 \end{cases} \Rightarrow d|-2(5a+4) + 5(2a+3) \\ \Rightarrow d|7 &\Rightarrow d=1 \text{ یا } 7 \end{aligned} \right\}$$

$$A = 21a^2 = 3 \times 7 \times a^2, B = 35a^2 = 5 \times 7 \times a^2 \Rightarrow [A, B] = 105a^2$$

۴۴

۴۵

الف ۱۲۰

۴۶

الف

$$\forall m > 0, a|m, b|m \Rightarrow c \leq m$$

۴۷

الف

نادرست

۴۸ کافی است p را بر عدد ۴ تقسیم کنیم. در این صورت طبق قضیه تقسیم داشت:

$$p = 4k, p = 4k + 1, p = 4k + 2, p = 4k + 3$$

$p = 4k + 2, p = 4k$ در حالت‌های زوج است. لذا با اول بودن آن تناقض دارد. فقط حالت‌های $p = 4k + 1$ و $p = 4k + 3$ باقی می‌ماند و حکم ثابت می‌شود.

۴۹ بنابر قضیه تقسیم داریم:

$$\begin{cases} a = 5q + 2 \\ a = 6q' + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = 30q + 12 \\ 5a = 30q' + 15 \end{cases} \Rightarrow a = 30q'' - 3$$

$$\Rightarrow a = 30r + 27$$

۵۰

$$a = 4q + 3 \Rightarrow 2a + 3 = 8q + 9 = 8(\underbrace{q+1}_{q'}) + 1 = 8q' + 1 \Rightarrow r = 1$$

۵۱ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$p = 6k \quad (1), p = 6k + 1 \quad (2), p = 6k + 2 = 2(3k + 1) \quad (3)$$

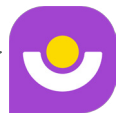
$$p = 6k + 3 = 3(2k + 1) \quad (4), p = 6k + 4 = 2(3k + 2) \quad (5), p = 6k + 5 \quad (6)$$

p در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش پذیر است که با اول بودن p تناقض دارد. بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود.

۵۲

$$\begin{cases} a = 17q + 5 \\ b = 17q' + 3 \end{cases} \Rightarrow 2a - 5b = 17 \times 2q + 10 - 17 \times 5q' - 15 = 17(12q - 5q' - 1) + 12 = 17k + 12 \Rightarrow r = 12$$

۵۳ راه اول: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می‌باشند.



$$\begin{aligned} a &= 2k + 1 \rightarrow \\ b &= 2k' + 1 \end{aligned}$$

$$a^2 + b^2 - 5 = 4k^2 + 4k + 1 + 4k'^2 + 4k' + 1 - 5 = 4k(k+1) + 4k'(k'+1) - 3 = 4q'' - 3 = 4q'' - 3 + 8 - 8 = 4t + 5 \rightarrow r = 5$$

راه دوم: ab فرد است لذا هر دو عدد a, b فرد می باشند.

$$\begin{aligned} a &= 2k + 1 \rightarrow a^2 \equiv 1 \\ b &= 2k' + 1 \rightarrow b^2 \equiv 1 \end{aligned} \rightarrow a^2 + b^2 \equiv 2 \rightarrow a^2 + b^2 - 5 \equiv -3 \equiv 5 \rightarrow r = 5$$

روش اول: ۵۴

$$\begin{aligned} a &= 4q_1 + 2 \Rightarrow 5a = 20q_1 + 10 \\ a &= 5q_r + 3 \Rightarrow 4a = 20q_r + 12 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a = 20(q_1 - q_r) - 2 \quad a = 20q_r + 12 \Rightarrow r = 18 \quad r = -2 + 20 = 18$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} a &\equiv 2 \equiv 18 \Rightarrow a = 4k + 18 \Rightarrow 4k + 18 \equiv 18 \Rightarrow k = 5t \Rightarrow a = 20t + 18 \Rightarrow r = 18 \\ a &\equiv 3 \equiv 18 \end{aligned}$$

روش اول: ۵۵

$$\begin{cases} a = 23q_1 + 6 \Rightarrow 3a = 3 \times 23q_1 + 18 \\ b = 23q_r + 7 \Rightarrow -5b = -5 \times 23q_r - 35 \end{cases} \Rightarrow 3a - 5b = 23(3q_1 - 5q_r) - 17 + 23 - 23 = 23(3q_1 - 5q_r - 1) + 6 \Rightarrow r = 6$$

روش سوم:

$$\begin{cases} a \equiv 6 \Rightarrow 3a \equiv 18 \\ b \equiv 7 \Rightarrow 5b \equiv 35 \end{cases} \Rightarrow 3a - 5b \equiv -17 \equiv 6 \Rightarrow r = 6$$

روش سوم:

$$\begin{cases} a = 23q_1 + 6 \Rightarrow 23|a - 6 \\ b = 23q_r + 7 \Rightarrow 23|b - 7 \end{cases} \Rightarrow 23|3(a - 6) - 5(b - 7) - 23 \Rightarrow 23|3a - 5b - 6 \Rightarrow 3a - 5b = 23q_r + 6 \Rightarrow r = 6$$

روش اول: ۵۶

$$\left. \begin{aligned} m &= 19q_1 + 4 \\ n &= 19q_r + 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} 3m &= 19q_r + 12 \\ 5n &= 19q_r + 25 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 3m - 5n = 19q_d + 6 \Rightarrow r = 6$$

روش دوم:

$$\begin{aligned} m &\equiv 4, n \equiv 5 \Rightarrow 3m - 5n \equiv 12 - 25 \equiv -13 \\ \Rightarrow 3m - 5n &\equiv -13 + 19 \equiv 6 \Rightarrow r = 6 \end{aligned}$$

۵۷

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m|a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

۵۸

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|(a - b)(a^{n-1} + ba^{n-2} + \dots + b^{n-1}) \Rightarrow m|a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n$$

روش اول: ۵۹

$$a \equiv b, n|m \Rightarrow m|a - b, n|m \Rightarrow n|a - b \Rightarrow a \equiv b$$

روش دوم:

$$a \equiv b, n|m \Rightarrow a - b = mq = nq' \Rightarrow a - b = nq'q \Rightarrow a \equiv b$$

روش سوم:

$$\left. \begin{aligned} a &\equiv b \\ n|m \Rightarrow m &= nq \end{aligned} \right\} \Rightarrow a \equiv b \Rightarrow nq|a - b, n|nq \Rightarrow n|a - b \Rightarrow a \equiv b$$

روش چهارم: برهان خلف: فرض می کنیم حکم برقرار نباشد، پس a همنهشت b به پیمانه n نیست:

$$\begin{cases} a - b \neq nq_1 \Rightarrow a - b = nq_1 + r, 0 < r < n \quad (*) \\ a \equiv b, n|m \Rightarrow a - b = mq_r, m = nq_r \Rightarrow a - b = nq_rq_r \end{cases} \Rightarrow nq_1 + r = nq_rq_r \Rightarrow n|r \quad (**)$$

رابطه (*) با (**) تناقض دارد، پس حکم برقرار است.

۶۰



$$13 \equiv -4 \pmod{17} \rightarrow 13^2 \equiv 16 \pmod{17} \rightarrow 13^{2^2} \equiv -1 \pmod{17} \xrightarrow{-1 \equiv 16} r = 16$$

۶۱

$$1000 \equiv -1 \pmod{25} \Rightarrow (1000)^{25} \times 9 + 11 \equiv (-1)^{25} \times 9 + 11 \equiv 2 \pmod{25} \Rightarrow r = 2$$

۶۲ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $8k + 1$ است. $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم:

$$\begin{cases} a^r = 8k + 1 \\ b^r = 8k' + 1 \end{cases} \rightarrow a^r + b^r + 5 = 8k + 1 + 8k' + 1 + 5 \rightarrow a^r + b^r + 5 = 8k'' + 7 \rightarrow r = 7$$

۶۳

گزینه ۲،

الف

گزینه ۱،

ب

گزینه ۱،

پ

۶۴

$$63 \equiv -1 \pmod{16} \Rightarrow 63^{14} \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow A \equiv 2 \pmod{16} \Rightarrow r = 2$$

۶۵

$$27 \equiv 1 \pmod{27} \Rightarrow (27)^7 \equiv 1^7 \pmod{27} \Rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 1^7 + 19 = 20 \pmod{27} \Rightarrow (27)^7 + 19 \equiv 7 \pmod{27}$$

۶۶

$$7^2 = 49 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow 7^{4 \times 15} \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow 7^{28 \times 15} \xrightarrow{\times 7^{15} \equiv 4} 7^{30 \times 15} \equiv 4$$

۶۷

$$38 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 38^2 \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow 38^{36} \equiv 0 \pmod{3}, 19 \equiv 3 \pmod{3} \Rightarrow 38^{36} + 19 \equiv 3 \pmod{3}$$

۶۸

$$A = 2! + 4! + \underbrace{6! + \dots + 100!}_{\text{مضرب ۵ و ۲}} \Rightarrow A = 2! + 4! + 10k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow A \equiv 2 + 24 + 0 \pmod{26} \Rightarrow A \equiv 26 \pmod{26} \Rightarrow A \equiv 0 \pmod{26}$$

۶۹ فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهرماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی $12 + 3 \times 30 + 29 = 131$. بنابراین $131 \equiv 5 \pmod{13}$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است.

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۷۰

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

۰ | آذرماه دوشنبه است.

$$6 + 3(31) + 2(30) + 10 \equiv -1 + 2 + 4 + 3 \pmod{1} \equiv 1 \pmod{1}$$

۷۱

$$20 + 4 \times 30 + 29 \equiv 169 \pmod{1} \equiv 1 \pmod{1}$$

روز سه شنبه

ی	ش	ج	پ	چ	س	د
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

۷۲

$$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$$

۷۳ عدد m رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2} \dots a_0$ را بسط می‌دهیم و در هم نمی‌نویسیم به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم:



$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + \dots + \dots + 10^2 a_2 + 10^1 a_1 + 10^0 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

۷۴ روش اول:

معادله جواب دارد $(16, 14) = 2 | 20$

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 4x \equiv 5 \Rightarrow 4x \equiv 5 + 7 \Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 7k + 3$$

روش دوم:

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 16x + 14y = 20 \Rightarrow 8x + 7y = 10, (8, 7) = 1, 1 | 10$$

$$8x \equiv 10 \Rightarrow 4x \equiv 5 \Rightarrow 4x \equiv 5 + 7 \Rightarrow x \equiv 3 \Rightarrow x = 7k + 3$$

روش سوم:

$$16x \equiv 20 \Rightarrow 16x + 14y = 20 \Rightarrow 8x + 7y = 10, (8, 7) = 1, 1 | 10$$

$$x_1 = 3, y_1 = -2 \Rightarrow x = x_1 + \frac{b}{d}k = 3 + 7k$$

۷۵

$$(1 + 4 + 0 + 2)x \equiv 1 + 1 \Rightarrow 7x \equiv 2 \Rightarrow 7x \equiv -7$$

$$\stackrel{(7,7)=1}{\Rightarrow} x \equiv -1 \Rightarrow x = 9k - 1 \text{ یا } x = 9k + 8$$

۷۶

$$k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9x - 1 \equiv 2x + 1 \Rightarrow 7x \equiv 2 \Rightarrow 7x \equiv 2 + 2 \times 13 = 28 \xrightarrow{\div 7} x \equiv 4 \Rightarrow x = 13k + 4 \rightarrow 10 \leq 13k + 4 \leq 99 \rightarrow \frac{6}{13} \leq k \leq \frac{95}{13}$$

لذا معادله ۷ جواب دو رقمی دارد.

۷۷ روش اول:

$$7x + 9y = 183 \Rightarrow 7x \equiv 183 \equiv 3 \xrightarrow{+18} 7x \equiv 21 \xrightarrow{\div 7} x \equiv 3$$

$$\Rightarrow x = 9k + 3 \Rightarrow 7(9k + 3) + 9y = 183 \Rightarrow y = 18 - 7k$$

$$k = 0 \Rightarrow y = 18$$

روش دوم:

$$7x + 9y = 183 \Rightarrow 9y \equiv 183 \equiv 1 \xrightarrow{+35} 9y \equiv 36 \xrightarrow{\div 9} y \equiv 4$$

$$\Rightarrow y = 7k + 4 \Rightarrow 7x + 9(7k + 4) = 183 \Rightarrow x = 21 - 9k$$

$$k = 2 \Rightarrow y = 18$$

۷۸

$$35x \equiv 50 - 2x \Rightarrow 37x \equiv 50, (37, 11) | 50 \Rightarrow 4x \equiv 6 \Rightarrow 2x \equiv 3 \Rightarrow 2x \equiv 14 \Rightarrow x \equiv 7$$

$$\Rightarrow x = 11k + 7 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۷۹ معادله سیاله دارای جواب است زیرا $1 | 7$ $(9, 13)$

$$13y \equiv 7, (13 \equiv 4, 7 \equiv 16) \rightarrow 4y \equiv 16 \xrightarrow{(4,4)=1} y \equiv 4 \rightarrow y = 9k + 4$$

در نتیجه با جایگذاری $y = 9k + 4$ در معادله سیاله $9x + 13y = 7$ داریم:

$$x = -13k - 5$$

۸۰ معادله سیاله جواب دارد زیرا: $19 | (2, 5)$ پس داریم:

$$2x \equiv 19 \equiv 4 \xrightarrow{(2,2)=1} x \equiv 2 \Rightarrow x = 5k + 2 \xrightarrow{2x+5y=19} 2(5k + 2) + 5y = 19 \Rightarrow y = -2k + 3$$

۸۱

$$2y \equiv 18 \xrightarrow{(2,2)=1} y \equiv 9 \equiv 4$$

$$\Rightarrow y = 5k + 4 \Rightarrow 5x + 2(5k + 4) = 18$$

$$\Rightarrow x = -2k + 2$$

۸۲

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \equiv 0 \Rightarrow x \equiv 0 \Rightarrow x = 3k \Rightarrow 5(3k) + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k + 14$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 14 \end{cases}; \begin{cases} x = 3 \\ y = 9 \end{cases}; \begin{cases} x = 6 \\ y = 4 \end{cases}$$



۸۳

$$15x \equiv 7 \rightarrow 15x \equiv 45 \xrightarrow{(15,19)=1} x \equiv 3$$

$$\rightarrow x = 19k + 3 \xrightarrow{k=5} x = 98$$

۸۴ روش اول:

$$5x \equiv 22 \Rightarrow x \equiv 8 \Rightarrow x = 9k + 8$$

$$5(9k + 8) + 9y = 22 \Rightarrow y = -2 - 5k$$

روش دوم:

$$9y \equiv 22 \Rightarrow y \equiv 3 \Rightarrow y = 5k + 3$$

$$5x + 9(5k + 3) = 22 \Rightarrow x = -1 - 9k$$

۸۵ روش اول:

$$(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1) = 4(2q) = 8q$$

روش دوم:

می‌دانیم هر عدد فرد را می‌توان به یکی از دو صورت $4k + 1$ یا $4k + 3$ نوشت، پس داریم:

$$\begin{cases} (4k + 1)^2 - 1 = 16k^2 + 8K + 1 - 1 = 8k(2k + 1) = 8m \\ (4k + 3)^2 - 1 = 16k^2 + 24k + 9 - 1 = 8(2k^2 + 3k + 1) = 8n \end{cases}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل گسسته فصل ۲

دوازدهم

سال دوازدهم

ریاضی

فهرست

درس ۱: معرفی گراف

- ۱..... مفاهیم مقدماتی گراف
- ۲..... درجه
- ۳..... انواع گراف
- ۴..... مسیر در گراف
- ۵..... دور در گراف
- ۶..... گراف همبند و ناهمبند

درس ۲: مدل سازی با گراف

- ۷..... احاطه گری
- ۸..... مجموعه های احاطه گر مینیمم (Min)
- ۹..... مجموعه های احاطه گر مینیمال
- ۱۲..... عدد احاطه گری



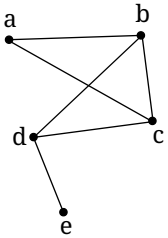
درس ۱: معرفی گراف

مفاهیم مقدماتی گراف



۱ گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹



مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

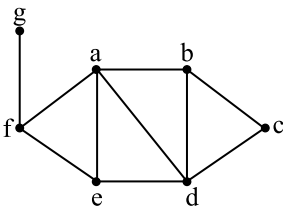
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف

$\gamma(G)$ را مشخص کنید.

ب

ب (اندازه گراف را تعیین کنید.

پ

مجموعه همسایگی بسته رأس b را بنویسید.

ت

اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، کدام رأس است؟

۲

در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.

الف

یک مجموعه احاطه گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش دیگر احاطه گر نباشد، احاطه گر می‌نامیم.

ب

تعداد یال‌های گراف K_n برابر است.

۳

درست یا نادرست بودن عبارات زیر را مشخص کنید.

الف

تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است.

ب

عدد احاطه‌گری P_1 برابر عدد ۳ است.

۴

گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف

مجموعه $N_G(g)$ را بنویسید.

ب

یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید.

پ

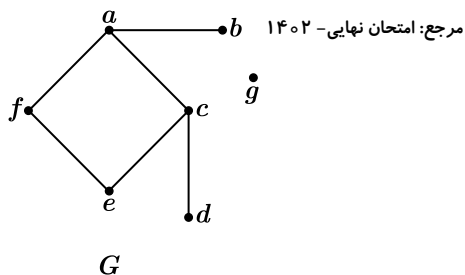
درجه رأس C در گراف $\overline{G}$ (مکمل گراف G) را مشخص کنید.

۵





گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

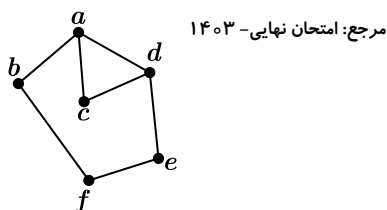
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵



مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف

مرتبه و اندازه آن را بنویسید.

ب

مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.

پ

مجموعه $N_G[c]$ را بنویسید.

ت

دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.

ث

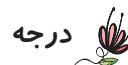
حاصل عبارت $q(\bar{G}) + \deg_{\bar{G}}(g)$ را به دست آورید.

۶

اگر در گراف G از مرتبه ۸، مجموع درجات ۴۰ باشد، تعداد یالهای گراف مکمل G را به دست آورید.

۷

در گراف شکل زیر همسایگی باز رأس d را بنویسید.



درجه

۸

ثابت کنید تعداد رأسهای فرد هر گراف، عددی زوج است.

۹

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف

مجموع درجههای رأسهای هر گراف تعداد یالها است.

ب

در یک گراف k -منتظم، ماکزیمم درجه رأس برابر با است.

۱۰

ثابت کنید تعداد رأسهای فرد هر گراف، عددی زوج است.

۱۱

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف

اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس می‌نامیم.

ب

گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد و هیچ یالی نداشته باشد، گراف می‌نامیم.

پ

تعداد یالهای گراف K_n برابر با است.

ت

گراف G را می‌نامیم، هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۱۲

جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف

گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف می‌گوییم.

ب

تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی است.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

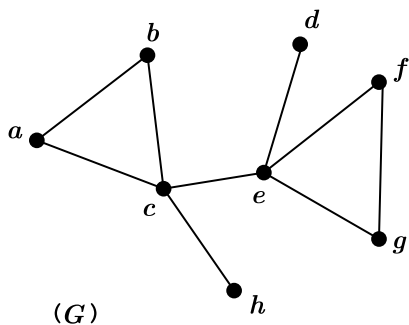
مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه p برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف می‌گوییم.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

گراف G روبه‌رو را در نظر بگیرید:



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مقدار $q(\bar{G})$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مجموع درجات رئوس گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مجموعه $N_{\bar{G}}[e]$ را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

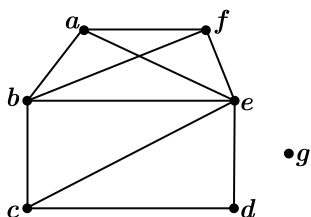
درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

تعداد یال‌های هر گراف، نصف مجموع درجات رئوس آن گراف است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

گراف G را در نظر بگیرید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مقدار $d_{\bar{G}}(e)$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

حاصل $q(\bar{G})$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

دوری به طول ۶ با شروع از رأس a در گراف G بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

گراف چند رأس زوج دارد؟

انواع گراف

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

الف) گراف k - منتظم از مرتبه n را تعریف کنید.

ب) آیا گراف ۳ - منتظم از مرتبه ۵ وجود دارد؟ (دلیل بیاورید)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

گراف G ، ۷ رأسی ۳ - منتظم است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

اندازه گراف G را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

نمودار گراف G را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

آیا گراف ۷ رأسی ۳ - منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.



مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۹ به گراف ۸ رأسی ۳- منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه حل)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۰ آیا می‌توان گرافی ۳- منتظم از مرتبه ۹ رسم کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۱ جاهای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف گراف ۳- منتظم، ۸ راسی دارای یال است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۲ یک گراف ۴ رأسی غیر تهی k -منتظم رسم کنید که:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۳ اگر G یک گراف ۳-منتظم از مرتبه ۶ باشد، مقدار $q(\bar{G})$ را محاسبه نمایید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۴ در گراف کامل K_p با ۲۸ یال مقدار $2\Delta(K_p) - 3\delta(K_p) + p$ را محاسبه کنید.۲۵ ۷ دانش‌آموز a, b, c, d, e, f, g از یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه دوطرفه است. یعنی

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

هر دو نفر از آنها یا هر دو با هم دوست‌اند یا هیچ یک با دیگری دوست نیست. اطلاعات زیر را داریم:

- شخص a با b, g, d دوست می‌باشد، شخص b با همه به جز c دوست می‌باشد.- شخص e با f دوست می‌باشد، شخص d با g دوست می‌باشد.

الف) برای رابطه دوستی فوق یک گراف ترسیم کنید.

ب) رأس یا رؤس ایزوله این گراف را مشخص کنید و تعبیر آن را در این رابطه دوستی بیان کنید.

پ) رابطه دوستی کدام چهار نفر تشکیل یک گراف کامل را می‌دهد.

۲۶ مجموع درجات گراف برابر ۲۴ است. اگر ۳ یال به یال‌های گراف G اضافه کنیم، گراف حاصل، گراف کامل می‌شود. مرتبه گراف G چقدر

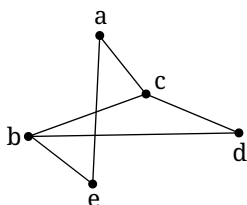
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

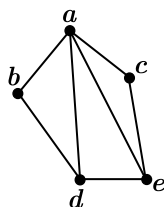
۲۷ گراف G به صورت مقابل را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دوری به طول ۵ مشخص کنید.

ب) مکمل گراف G را رسم کنید.۲۸ در گراف G ، درجه رأس v برابر با ۹ و درجه رأس v در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۹ مکمل گراف G که در شکل زیر آمده است را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۰ درستی و یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید:

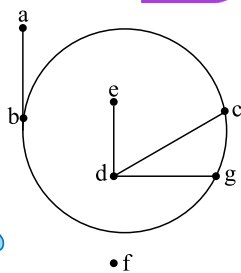
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف اگر $\deg_G(v) = 5$ و G یک گراف ۱۰ راسی باشد، آنگاه $\deg_{\bar{G}}(v) = 4$

مسیر در گراف

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۱ با توجه به گراف (G) (شکل مقابل) به سؤالات زیر پاسخ دهید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.

ب یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

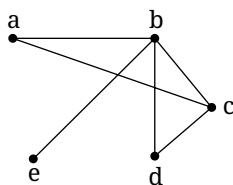
پ درجه رأس a را در گراف $\overline{G}$ تعیین کنید.

ت آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل)

ث $N_G[f]$ را بنویسید.

دور در گراف

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟

ب تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.

پ $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

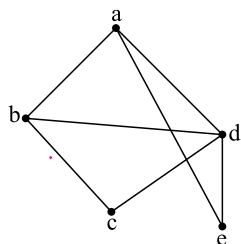
۳۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف گراف C_8 را رسم کنید.

۳۴ به سؤالات زیر کوتاه پاسخ دهید.

الف گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

ب در گراف شکل زیر، $N_G(e)$ را با اعضا مشخص کنید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

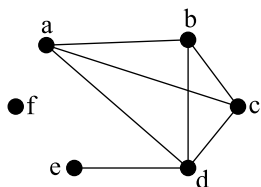
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۳۵





با توجه به گراف G (شکل مقابل) به سوالات زیر پاسخ دهید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف

مقدار $q - \Delta(G)$ را بیابید.

ب

یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

پ

با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل G چند یال دارد؟

۳۶

گراف C_1 را در نظر بگیرید.

الف

یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

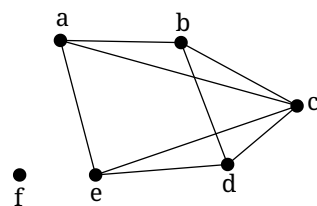
ب

یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین کنید.

گراف همبند و ناهمبند

۳۷

گراف G به صورت مقابل رسم شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

الف

$\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب

سه دور به طول ۳ بنویسید.

پ

ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟

ت

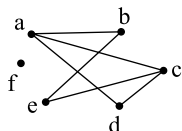
$N_G(e)$ را با اعضا بنویسید.

ث

آیا گراف G همبند است؟

۳۸

گراف G که به صورت مقابل است را در نظر بگیرید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

الف

$N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.

ب

بزرگ ترین درجه در گراف $\overline{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟

پ

دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.

ت

آیا گراف G همبند است؟



درس ۲: مدل‌سازی با گراف

احاطه‌گری

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۳۹ در جاهای خالی، عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

الف یک گراف کامل ۸ رأسی، یال دارد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

ب اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = 1$ در این صورت، $\Delta(G)$ برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۴۰ به سؤالات زیر پاسخ داده و برای آنها دلیل ارائه کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

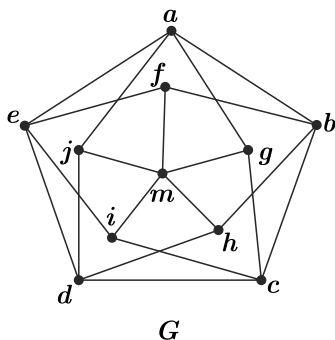
الف یک گراف کامل ۱۱ رأسی چند یال دارد؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ب در یک گراف از مرتبه ۸ با $\Delta = 3$ ، حداقل چند رأس برای احاطه همه رئوس لازم است؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۱ با توجه به گراف G ، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

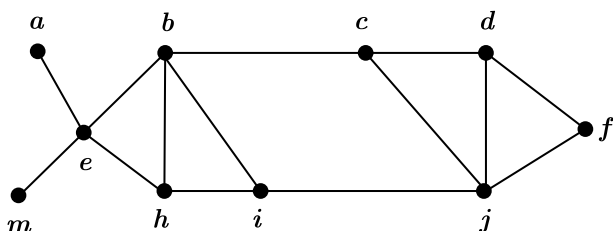
الف آیا مجموعه $D = \{a, b, m\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است؟ چرا؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

ب عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید. (با ذکر دلیل)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

پ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن بنویسید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۲ گراف روبه‌رو را در نظر بگیرید:

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف آیا $\{a, h, j, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای این گراف می‌باشد؟ چرا؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

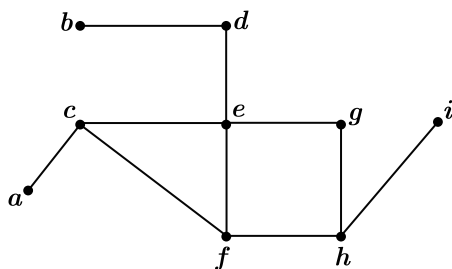
ب آیا مجموعه $\{a, m, i, f, d\}$ احاطه‌گر مینیمال است؟ چرا؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

پ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم شامل رأس e بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۳ گراف زیر را در نظر بگیرید.



مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

الف با اضافه کردن کدام رأس، به مجموعه $A = \{a, b, i\}$ می توان آن را به یک مجموعه احاطه گر تبدیل کرد؟

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

ب سه مجموعه احاطه گر ۴ عضوی غیرمینیمالی که شامل رأس f باشند را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

پ یک مجموعه احاطه گر مینیم برای این گراف بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

ت عدد احاطه گری این گراف را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

۴۴ گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

الف یک مجموعه احاطه گر ۴ عضوی بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

ب عدد احاطه گری C_7 را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

پ دو مجموعه احاطه گر مینیم متمایز بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

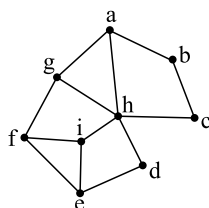
۴۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

الف مجموعه احاطه گر مینیمال را تعریف کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

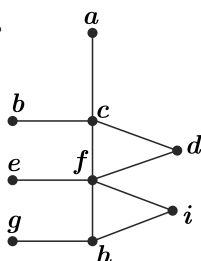
ب برای گراف شکل روبه رو، یک مجموعه احاطه گر با ۴ عضو انتخاب کنید.



مجموعه های احاطه گر مینیم (Min)

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

۴۶ در گراف روبه رو:



مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

الف مجموعه احاطه گر غیرمینیمال $A = \{b, e, g, a, f\}$ را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

ب یک مجموعه احاطه گر مینیم که شامل رأس e باشد را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

پ با اضافه نمودن چه یالی عدد احاطه گری گراف ۲ می شود؟



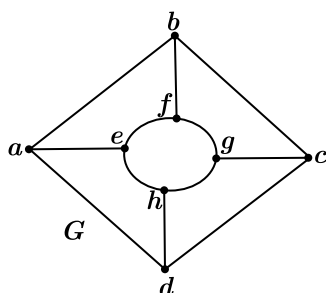
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۷ الف) گراف P_{12} را رسم کنید.

ب) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۴۸ گراف G را در نظر بگیرید.



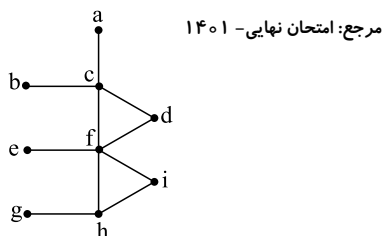
الف) عدد احاطه‌گری گراف G را با ذکر دلیل به دست آورید.

ب) در گراف G یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی شامل رأس a بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۴۹ ابتدا گراف P_9 را رسم کنید. سپس یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید.

۵۰ گراف شکل مقابل را در نظر بگیرید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف) یک γ -مجموعه مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

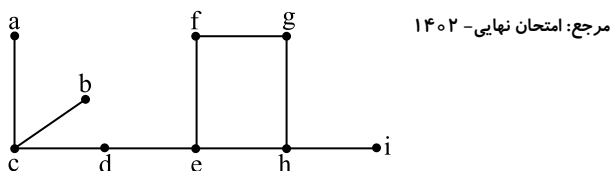
۵۱ الف) گراف P_8 را رسم کنید.

ب) یک γ -مجموعه از آن را مشخص کنید.

ج) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال

۵۲ گراف زیر را در نظر بگیرید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف) یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

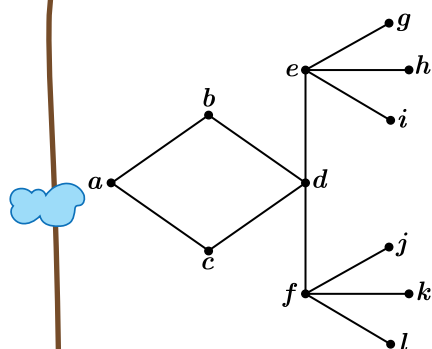
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

پ) با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد؟



۵۳ گراف زیر را در نظر بگیرید:



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.

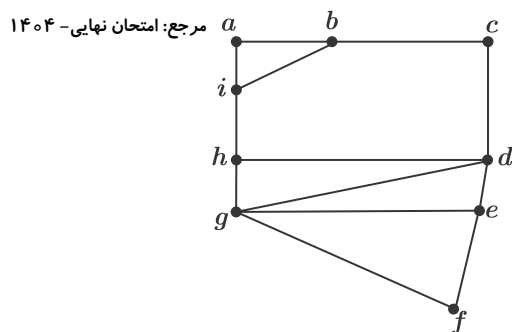
ب یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.

پ یک مجموعه احاطه‌گر غیر مینیمال ۴ عضوی بنویسید.

۵۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف هر مجموعه احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.

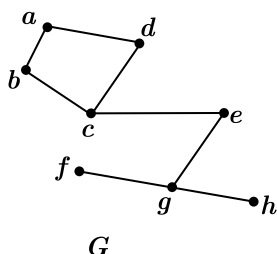
۵۵ با توجه به شکل زیر، به سؤال‌ها پاسخ دهید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۳ عضوی از گراف مقابل را بنویسید.

ب عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ذکر دلیل تعیین کنید.

۵۶ گراف G را در نظر بگیرید:

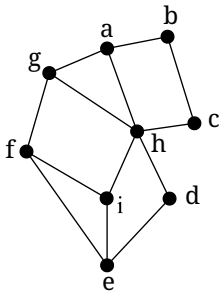
الف عدد احاطه‌گری گراف G را به دست آورید و ادعای خود را ثابت کنید.

ب یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی بنویسید.

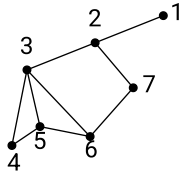


۵۷ در گراف شکل زیر، یک مجموعه احاطه گر غیرمینیمال انتخاب کنید؛ سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن را به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸



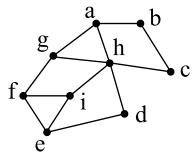
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



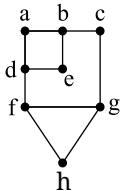
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

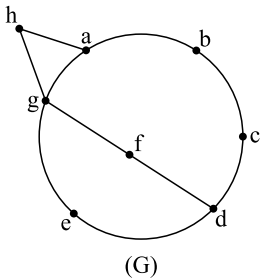
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۵۸ در گراف G که شکل آن در مقابل داده شده است:

الف یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید.

ب عدد احاطه گری G را تعیین کنید.

۵۹ در گراف شکل زیر، یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۶۰ در گراف شکل زیر، یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۶۱ باتوجه به گراف (G) به سؤالات پاسخ دهید.

الف عدد احاطه گری را برای گراف بالا مشخص کنید.

ب یک مجموعه احاطه گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۶۲ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف) هر مجموعه احاطه گر مینیمال، یک مجموعه احاطه گر مینیمم است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ب) اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجه Δ باشد، آنگاه $\gamma(G) > \left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

پ) در گراف p_n عدد احاطه گری برابر با $\left\lfloor \frac{n}{\Delta+1} \right\rfloor$ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ت) $[3, 48] = 4$.

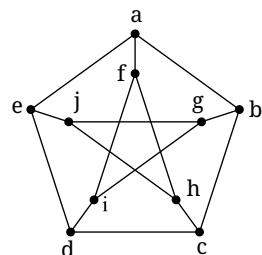
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۶۳) تفاوت بین مجموعه احاطه گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.

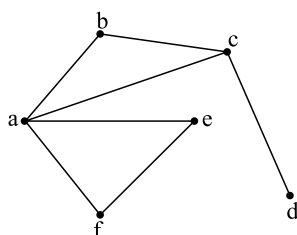
۶۴) الف) ثابت کنید هر مجموعه احاطه گر دلخواه غیر مینیمال را می توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعه احاطه گر مینیمال تبدیل کرد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

ب) در گراف روبه رو یک مجموعه احاطه گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.



عدد احاطه گری



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۶۵) عدد احاطه گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۶۶) یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

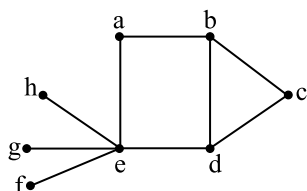
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۶۷) جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف) در یک گراف از مرتبه p ، اگر $\gamma(G) = 1$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یالها برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۶۸) الف) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۳ مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲ داشته باشند.ب) یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه گری ۳ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۳ داشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۶۹) عدد احاطه گری گراف مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف) این گراف چند γ -مجموعه دارد؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۷۰) جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف) عدد احاطه گری گراف C_7 برابر است با



۷۱. یک گراف همبند ۷ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

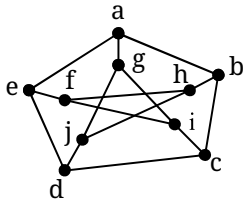
۷۲. الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد. مرجع ۱: تمرین های کتاب - ۱۴۰۳
ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۷۳. گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه گری ۲ رسم کنید، به طوری که: مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

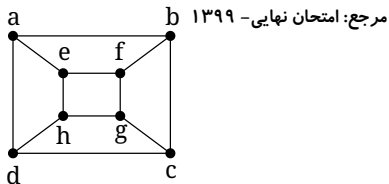
الف) مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

ب) بیش از یک مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۷۴. عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹



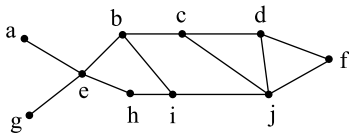
مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹



مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

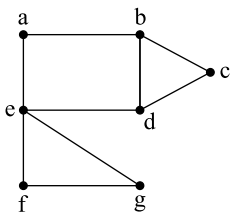
۷۵. عدد احاطه گری گراف زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



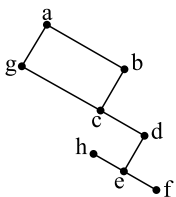
۷۶. عدد احاطه گری گراف شکل زیر را با ارائه راه حل، تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



۷۷. عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

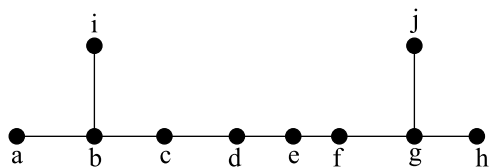


۷۸. عدد احاطه گری گراف شکل مقابل را با ارائه راه حل، تعیین کنید.



۷۹ عدد احاطه‌گری گراف G (شکل مقابل) را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱



مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۸۰ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد:

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.



پاسخنامه تشریحی

۱

الف

گراف G فاقد رأسی است که با تمام رأس‌های دیگر مجاور باشد. از طرفی مجموعه $\{b, e\}$ قادر به احاطه تمام رأس‌های گراف است، پس عدد احاطه‌گری گراف برابر ۲ است.

ب

تعداد یال‌های گراف همان اندازه گراف است؛ داریم:

$$q = ۶$$

$$N_G[b] = \{b, a, c, d\}$$

پ

ت

$$\left. \begin{array}{l} N_c(d) = \{b, c, e\} \\ N_c(d) = \{e, x, b\} \end{array} \right\} \Rightarrow x = v$$

۲

الف

مینیمال

ب

$$۲۱$$

۳

الف

نادرست

ب

نادرست

۴

الف

$\{f\}$

ب

$abcdea$ یا $abdefa$

پ

۴

۵

الف

$$p = ۷, q = ۶$$

ب

$$۲q = ۱۲$$

پ

$$N_G[c] = \{a, c, d, e\}$$

ت

$$acefa$$

ث

$$q(G) + d_G(g) = ۱۵ + ۶ = ۲۱$$



۶ روش اول:

$$2q = 40 \Rightarrow q = 20, \quad q(G) + q(\overline{G}) = \frac{P(P-1)}{2} \Rightarrow 20 + q(\overline{G}) = 28 \Rightarrow q(\overline{G}) = 8$$

روش دوم:

$$\sum \deg_{K_P}(v_i): \text{مجموع درجات گراف کامل}$$

$$\sum \deg_G(v_i) + \sum \deg_{\overline{G}}(v_i) = \sum \deg_{K_P}(v_i) \Rightarrow 40 + \sum \deg_{\overline{G}}(v_i) = 56$$

$$\Rightarrow \sum \deg_{\overline{G}}(v_i) = 16 \Rightarrow 2q(\overline{G}) = 16 \Rightarrow q(\overline{G}) = 8$$

$$N_G(d) = \{a, c, e\}$$

۸ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف G و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است، یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ زوج و $\sum_{v \in B} \deg(v)$ زوج است. بنابراین تفاضل آنها نیز زوج خواهد شد.بنابراین $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج و نتیجه می‌شود که $n(A)$ عددی زوج است.۹ الف
دوبرابرب
 k ۱۰ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2q$ و $\sum_{v \in B} \deg(v) = 2k$ زوج اند.لذا $\sum_{v \in A} \deg(v) = 2q - 2k$ باید زوج باشد. می‌دانیم تعدادی زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد.۱۱ الف
فردب
تهیپ
۶ت
همبند۱۲ الف
همبندب
زوج

پ

ت

$$p - 1$$



۱۳
الف

$$q(G) = 9 \rightarrow q(G) + q(\bar{G}) = \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow q(\bar{G}) = 28 - 9 = 19$$

ب

$$\sum_{i=1}^n \deg_{\bar{G}}(v) = 2q(\bar{G}) = 2 \times 19 = 38$$

پ

$$N_{\bar{G}}[e] = \{e, a, b, h\}$$

۱۴

الف درست

۱۵

الف

$$d_{\bar{G}}(e) = 1$$

ب

$$q(\bar{G}) = \frac{v(v-1)}{2} - 10 = 11$$

پ

$$a f e d c b a \text{ یا } a b c d e f a$$

ت

۳ رأس زوج دارد.

۱۶ الف) گرافی از مرتبه n که درجه تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد k , $(0 \leq k < n)$ باشد.

ب) وجود ندارد. زیرا تناقض $\underbrace{5 \times 3}_{\text{فرد}} = \underbrace{2q}_{\text{زوج}}$ $\Rightarrow \sum_{i=1}^5 \deg v_i = 2q$ متناقض است.

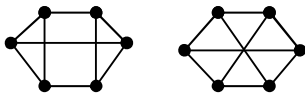
۱۷

الف

$$3 \times 6 = 2q \Rightarrow q = 9$$

ب

رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است.



۱۸ وجود ندارد. زیرا:

$$\sum_{i=1}^7 \deg v_i = 2q \Rightarrow 3 \times 7 = 2q \Rightarrow 21 = 2q \text{ فرد}$$

۱۹

$$\begin{cases} q = \frac{kn}{2} \rightarrow q = \frac{8 \times 3}{2} = 12 \rightarrow 28 - 12 = 16 \\ q = \frac{n(n-1)}{2} \rightarrow q = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \end{cases}$$

۲۰ خیر. در یک گراف r -منتظم داریم $\sum_{i=1}^p \deg(v_i) = 2q$ به عبارتی $rp = 2q$ در این سوال $p = 9, r = 3$ لذا $rp = 27$ عددی فرد و $2q$ عددی زوج است. و این تناقض

است.

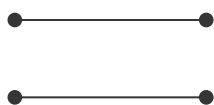
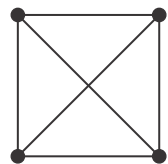


۲۱
الف

۲۲
الف

ب

۲۳
روش اول:



$$2q(G) = 3p(G) \Rightarrow 2q(G) = 18 \Rightarrow q(G) = 9 \Rightarrow q(\bar{G}) = \binom{6}{2} - 9 = 6$$

روش دوم:

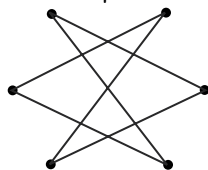
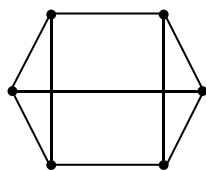
می‌دانیم مکمل هر گراف منتظم، خود نیز گراف منتظم است. لذا مکمل گراف ۳-منتظم با ۶ رأس، گرافی ۲-منتظم است. پس: $2q(\bar{G}) = 2p(G) \Rightarrow q(\bar{G}) = \frac{2 \times 6}{2} = 6$

روش سوم:

رسم نمودار G

رسم نمودار $\bar{G}$

$$q(\bar{G}) = 6$$



G

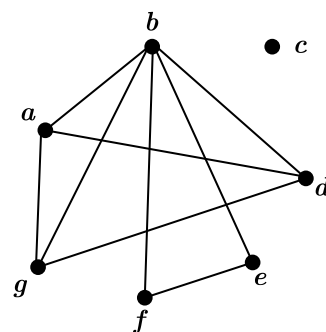
$\bar{G}$

$$q(K_p) = 28 = \frac{p(p-1)}{2} \rightarrow p = 8$$

$$\Delta(K_p) = \delta(K_p) = 7 \rightarrow 2\Delta(K_p) - 3\delta(K_p) + p = 2 \times 7 - 3 \times 7 + 8 = 1$$

۲۴

۲۵
الف



ب) c ، دانش‌آموز c در این رابطه با هیچ‌کس دوست نیست.

پ) $\{a, b, d, g\}$

۲۶
روش اول:

$$2q = 24 \rightarrow q = 12 \xrightarrow{+3} 15 = \frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow n(n-1) = 30 \Rightarrow n = 6$$

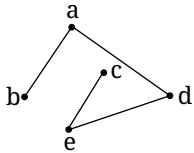


روش دوم: اگر یالی به گراف اضافه گردد، مجموع درجات گراف جدید ۲ واحد از مجموع درجات گراف قبل بیشتر است؛ بنابراین با اضافه شدن ۳ یال جدید، ۶ واحد به مجموع درجات رأس‌های گراف G اضافه می‌شود.

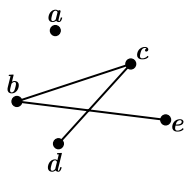
$$2q(G) + 6 = 2q(K_n) = n(n-1) \Rightarrow 30 = n^2 - n \Rightarrow n = 6$$

۲۷ الف $acdbea$

ب) گراف $\bar{G}$ به صورت مقابل است:



$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \Rightarrow 9 + 12 = p - 1 \Rightarrow p = 22$$



$abgc$

$bcdgb$

۵

$$N_G[f] = \{f\}$$

$$\left. \begin{array}{l} d_G(e) + d_{\bar{G}}(e) = 4 \\ d_G(e) = 1 \text{ از طرفی} \end{array} \right\} \Rightarrow d_{\bar{G}}(e) = 3$$

$bdcba, abca, abdca$

۲۸

۲۹

۳۰

الف درست

۳۱

الف

ب

پ

ت

خیر زیرا دارای رأس ایزوله است (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد).

ث

۳۲

الف

ب

تعداد دورها عبارتند از:

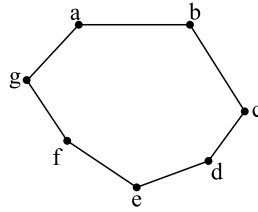
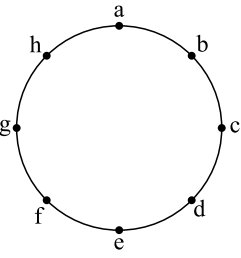
پ

$\Delta(G)$ برابر ۴ است.

۳۳

الف

رسم گراف C_8



مسیر: $abcdef$

$$N_G(c) = \{b, d\}$$

$$7 - 4 = 3$$

$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 7 + q(\overline{G}) = 15 \Rightarrow q(\overline{G}) = 8$$

$$D = \{1, 4, 7, 10\}$$

$$D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$\Delta(G) = 4, \quad \delta(G) = 0$$

$$cabc, caec, cedic$$

$$d_G(f) + d_{\overline{G}}(f) = p - 1 \Rightarrow 0 + d_{\overline{G}}(f) = 6 \Rightarrow d_{\overline{G}}(f) = 5$$

$$N_G(e) = \{a, c, d\}$$

۳۴
الف

ب

۳۵
الف

ب

پ

۳۶
الف

ب

۳۷
الف

ب

ت

ث - خیر - چون از رأس f به سایر رئوس گراف مسیری وجود ندارد.

۳۸

الف

$$N_G(c) = \{a, e, d\}$$

ب

درجه f در گراف G برابر صفر است، پس درجه f در گراف $\overline{G}$ برابر ۵ است و بزرگ‌ترین درجه در گراف $\overline{G}$ است.

پ a, b, e, c, d, a

ت

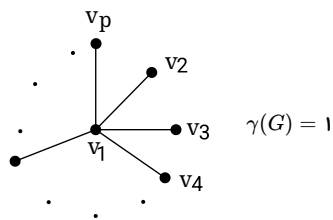
خیر

۳۹

الف

ب

شکل زیر را در نظر بگیرید:



$$\Delta(G) = p - 1$$

رأس v_1 ماکزیم درجه است، بنابراین:

۴۰

ب

الف

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{11(11-1)}{2} = 55$$

$$\left| \frac{n}{\Delta+1} \right| = \left| \frac{8}{3+1} \right| = 2$$

۴۱

الف

خیر؛ زیرا رأس d احاطه نمی‌شود یا $N_G[a] \cup N_G[b] \cup N_G[m] \neq V(G)$

ب

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{11}{6} \right\rceil = 2$$

داریم ۲

و از طرفی مجموعه سه عضوی $\{a, m, d\}$ احاطه گر مینیمم می‌باشد؛ پس: $\gamma(G) = 3$

پ

$\{f, g, h, i, j\}$

۴۲

الف

خیر - زیرا رأس m توسط هیچ کدام از اعضای این مجموعه احاطه نمی‌شود.

ب

خیر - زیرا با حذف رأس f مجموعه باقی‌مانده هنوز یک مجموعه احاطه گر می‌باشد.

پ

$\{e, j\}$

۴۳



الف

با اضافه کردن رأس e به مجموعه، می‌توان آن را تبدیل به یک مجموعه احاطه‌گر کرد.

ب

$$\{f, c, b, h\}, \{f, c, d, h\}, \{f, a, d, h\}$$

پ

$$B = \{c, h, b\} \text{ یا } A = \{c, h, d\}$$

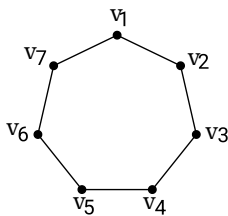
ت

$$\gamma(G) = 3$$

۴۴

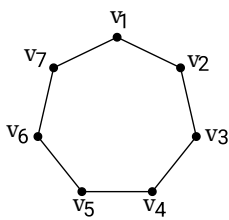
الف

مجموعه $\{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ۴ عضوی است.



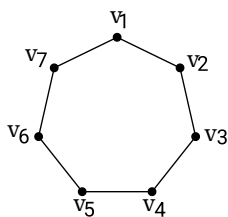
ب

مجموعه‌های $\{v_1, v_3, v_7\}$ و $\{v_1, v_2, v_5\}$ دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γ - مجموعه‌اند؛ داریم: $\gamma(G) = 3$.



پ

مجموعه‌های $\{v_1, v_3, v_5\}$ و $\{v_2, v_4, v_6\}$ دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم متمایز هستند.



۴۵

الف

یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هریک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

ب

$$D = \{h, b, i, a\}$$

۴۶

الف

$$\{b, g, a, f\}$$

ب

$$\{c, e, h\}$$



پ

gc یا gf یا eh یا ec

۴۷ الف

$v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \quad v_7 \quad v_8 \quad v_9 \quad v_{10} \quad v_{11} \quad v_{12}$

(ب) $\{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$

۴۸ الف

روش اول:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{\Delta}{\frac{p}{\Delta+1}} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 2 \Rightarrow \gamma(G) = 2$$

$A = \{b, h\}$

روش دوم:

چون هیچ رأسی در گراف G وجود ندارد که تمام رئوس را احاطه کند، پس عدد احاطه‌گری نمی‌تواند یک باشد، از طرفی مجموعه دو عضوی $A = \{b, h\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا

$$\gamma(G) = 2$$

(ب)

$\{a, f, c, h\}$ یا $\{a, b, c, d\}$

۴۹

$$D = \{2, 5, 8\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹

۵۰

الف

$$D = \{h, c, e\}$$

ب

$$D = \{g, c, i, e\}$$

۵۱

الف

a b c d e f g h

P_8

(ب) یک γ -مجموعه برابر است با: $\{a, d, g\}$

(ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی برابر است با: $\{a, d, e, h\}$

۵۲

الف

$\{c, e, h, f\}$

ب

$\{c, g, i, e\}$

پ

fh

۵۳

الف

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 3 \quad (*)$$

$$\gamma(G) = 3$$

از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است بنا به رابطه (*): پس:

ب

$$B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$$



هر مجموعهٔ احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نیز جواب صحیح است.

پ

$$C = \{a, e, f, b\}$$

هر مجموعهٔ احاطه‌گر چهار عضوی غیر مینیمال دیگر نیز جواب صحیح است.

۵۴

الف نادرست

۵۵

الف

$$D = \{e, b, h\}$$

ب روش اول:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq \left\lceil \frac{9}{4+1} \right\rceil = 2$$

لذا عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است. از طرفی مجموعهٔ $D = \{g, b\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؛ پس: $\gamma(G) = 2$

روش دوم: با توجه به اینکه $D = \{g, b\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است و همچنین هیچ مجموعهٔ احاطه‌گر یک‌عضوی وجود ندارد (گراف با یک رأس احاطه نمی‌شود؛ زیرا گراف مرتبهٔ ۹ است و هیچ رأسی از درجهٔ ۸ وجود ندارد)؛ بنابراین عدد احاطه‌گری برابر ۲ است.

۵۶

الف روش اول:

$$\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{p}{\Delta+1} \right\rceil = \left\lceil \frac{8}{4} \right\rceil \Rightarrow \gamma(G) \geq 2$$

به بیش از دو رأس برای احاطه‌گری نیاز است. از طرفی چون مجموعهٔ $A = \{g, c, a\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \geq 3$ پس $\gamma(G) = 3$ روش دوم:

برای احاطه کردن رئوس f, g, h, e حداقل به یک رأس نیاز است. همچنین برای چهار رأس باقی‌مانده حداقل به دو رأس دیگر نیاز است. یعنی $\gamma(G) \geq 3$. از طرفی مجموعهٔ

$$A = \{g, c, a\}$$

(ملاحظات: به جای مجموعهٔ A ، مجموعه‌های احاطه‌گر $\{g, c, d\}$ یا $\{g, c, b\}$ یا $\{g, e, a\}$ هم قابل قبول است.)

ب

$$\{f, h, e, d, b\}$$

۵۷ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیر مینیمال به صورت $\{a, h, f, b\}$ است. اکنون با حذف رأس a از آن، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال به دست می‌آید.

۵۸

الف $\{1, 6, 4\}$ یا $\{1, 5, 7\}$

$$\gamma(G) \geq 2 \quad \text{بنابراین:} \quad \gamma(G) \geq 2 \quad \text{از سوی دیگر} \quad \{2, 5\} \quad \text{یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا} \quad \gamma(G) \leq 2 \quad \text{از} \quad (*) \quad \text{و} \quad (**) \quad \text{نتیجه می‌شود که} \quad \gamma(G) = 2$$

تذکر: اگر G یک گراف m رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد، داریم:

$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

$$D = \{a, c, i, d\}$$

$$D = \{a, e, c, h\}$$

۵۹

۶۰

۶۱

الف

$$\{g, e\} \rightarrow \gamma(G) = 2$$

ب

$\{h, d, b\}$

۶۲

الف

نادرست

ب

نادرست

پ

درست

ت

درست

۶۳ مجموعه احاطه گر مینیمم، مجموعه احاطه گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعه احاطه گر مینیمال، مجموعه احاطه گری است که با حذف هریک از رئوس آن دیگر احاطه گر نیست و می تواند از مجموعه احاطه گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد.

۶۴

الف اگر $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ یک مجموعه احاطه گر غیر مینیمال باشد در این صورت، یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آنها مجموعه احاطه گر مینیمال باقی می ماند. بنابراین عضوی مانند a_1 را در نظر می گیریم، اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه گر باقی بماند آن را حذف می کنیم، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می دهیم.

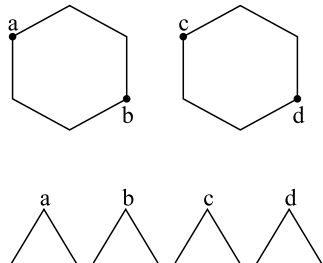
ب) مجموعه $A = \{h, g, f, i, j\}$ یک مجموعه احاطه گر مینیمال با ۵ عضو است.

۶۵

روش اول می دانیم $\gamma(G) \leq \frac{n}{\Delta+1}$ پس داریم $\left\lceil \frac{6}{5} \right\rceil \leq \gamma(G)$ ؛ بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ و با توجه به $\{a, d\}$ داریم $\gamma(G) = 2$ و لذا $\gamma(G) = 2$ روش دیگر: این گراف با مجموعه دوعضوی $\{a, d\}$ احاطه می شود. پس عدد احاطه گری این گراف کوچک تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$. اما اگر $\gamma(G) = 1$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رئوس را احاطه می کند یعنی رأس از درجه ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد، لذا $\gamma(G) > 1$ بنابراین $\gamma(G) \leq 2$ ؛ در نتیجه $\gamma(G) = 2$.

۶۶

رسم شکل با مشخص کردن نقاط احاطه گری آن

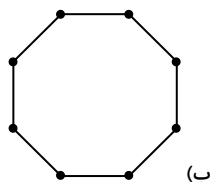


یا:

۶۷

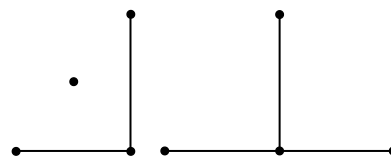
الف

$p - 1$



۶۸

الف



۶۹ می دانیم $\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ پس داریم $\left\lceil \frac{8}{5+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ ؛ در نتیجه $\gamma(G) \leq 2$ از طرفی مجموعه ای مانند $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر برای گراف (G) می باشد؛ پس $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$.

الف

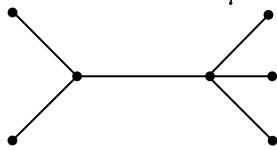
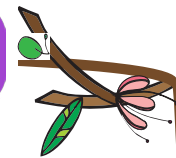
۳

۷۰

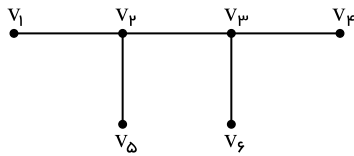
الف

$\left\lceil \frac{7}{3} \right\rceil$ یا ۳

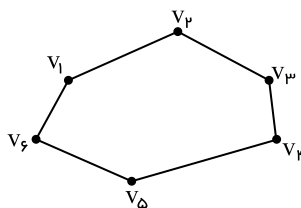
۷۱



۷۲ الف) مجموعه $\{v_2, v_3\}$ یک مجموعه احاطه گر یکتا با اندازه ۲ است.



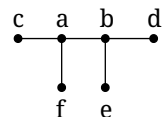
ب) مجموعه‌های $\{v_2, v_5\}$ و $\{v_3, v_6\}$ دو مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ هستند.



۷۳

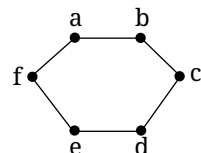
الف

گراف شکل زیر از مرتبه ۶ و دارای تنها یک مجموعه احاطه گر یکتا $\{a, b\}$ است.



ب

گراف مقابل، دارای سه مجموعه احاطه گر با اندازه ۲ است که عبارتند از: $\{a, d\}, \{f, c\}, \{e, b\}$



۷۴ برای گراف مورد سؤال داریم: $\gamma(G) = 3 \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lfloor \frac{10}{3+1} \right\rfloor = 3 \leq \gamma(G)$ از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه احاطه گر برای گراف است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$

۷۵ با توجه به رابطه $\left\lceil \frac{\Delta}{3+1} \right\rceil = 2$ داریم $\gamma(G) \geq 2$. لذا حداقل عدد احاطه گری ۲ است. از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعه احاطه گر است. پس $\gamma(G) \leq 2$ در نتیجه $\gamma(G) = 2$ (عدد احاطه گری).

۷۶ طبق قضیه داریم $\gamma(G) \leq 2$. $\left\lceil \frac{10}{4+1} \right\rceil = 2$ از طرفی مجموعه $D = \{e, j\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$.

۷۷ طبق قضیه داریم: $\gamma(G) \leq 2$ ، از طرفی مجموعه $D = \{b, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 2$. بنابراین $\gamma(G) = 2$.

۷۸ برای احاطه کردن رئوس a, b, c, d, g حداقل دو تا از آنها باید در مجموعه احاطه گر باشند، زیرا $\left\lceil \frac{5}{3+1} \right\rceil = 2$.

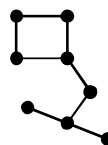
برای احاطه کردن رئوس e, f, h حداقل یکی از آنها باید انتخاب شوند، زیرا $\left\lceil \frac{3}{3+1} \right\rceil = 1$. بنابراین حداقل سه رأس باید در هر مجموعه احاطه گری از گراف باشد، یعنی $\gamma(G) \geq 3$. از طرفی مجموعه $D = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$.

۷۹ طبق قضیه داریم $\gamma(G) \leq 3$ ، از طرفی مجموعه $D = \{b, e, g\}$ یک مجموعه احاطه گر است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$.

۸۰ الف) برای مثال، اگر $n = 10$ ، رسم C_{10} یا P_{10} در این گراف‌ها: $\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil = 4$



$$\gamma(G) = 3 \text{ ولی } \left\lceil \frac{n}{\Delta + 1} \right\rceil = 2,$$



ب) در گرافی مشابه



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل گسسته فصل ۳

دوازدهم

سال دوازدهم

ریاضی

فهرست

درس ۱: مباحثی در ترکیبیات

- ۱ جایگشت
- ۲ ترکیب
- ۲ معادله سیاله با ضرایب واحد
- ۲ مربع لاتین

درس ۲: روش‌هایی برای شمارش

- ۵ اصل شمول و عدم شمول
- ۶ اصل لانه کیوتری



درس ۱: مباحثی در ترکیبیات



جایگشت

۱ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به‌طوری‌که:

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.

هیچ‌یک از دو کتاب ریاضی کنارهم نباشند.

یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص، همواره کنار هم باشند.

۲ دانش‌آموز پایه دهم و ۳ دانش‌آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به‌طوری‌که:

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

هیچ کدام از دو دانش‌آموز هم‌پایه کنار هم نباشند.

همواره دانش‌آموزان پایه دهم کنار هم باشند.

۳ کوتاه پاسخ دهید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

می‌خواهیم با حروف «ب» و «ج» و ارقام ۸، ۶، ۵، ۴، ۲، ۱ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف) تعداد رمزهایی که هریک از آنها با یک حرف آغاز و یا حرف دیگر خاتمه یابد.

ب) تعداد رمزهایی که در آنها، حروف کنار هم باشند.

۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۵ ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به‌طوری‌که:

کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند.

به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند.

۶ می‌خواهیم با حروف «ش»، «الف» و «ث» و ۵ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم، مطلوب است، تعداد کل رمزهایی که

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

در هریک از آنها حروف کنار هم باشند.

۷ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

بنشیند، این کار را به چند روش می‌توان انجام داد؟

۸ چهار برادر و سه خواهر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادرها کنار

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

هم قرار بگیرند، آنگاه این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۹ با ارقام ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۲، ۱، ۲، ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۱۱ با ارقام ۹، ۷، ۶، ۵، ۳، ۱، ۱، ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

۱۲ با حروف کلمه جیرجیرک چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

۱۳ با ارقام ۲، ۳، ۱، ۲، ۱، ۱ و ۱ چند کد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱۴ با ارقام ۶، ۵، ۴، ۱، ۴، ۴ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟





مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۵ با حروف کلمه «بادبادک باز» چند کلمه ۱۰ حرفی می‌توان نوشت؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۱۶ محاسبه کنید ۸ نفر به چند طریق می‌توانند در یک اتاق ۴ نفره و دو اتاق ۲ نفره در یک هتل اسکان یابند؟

ترکیب

۱۷ اگر داشته باشیم $A = \{۷, ۸, ۹\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می‌توان نوشت که هریک

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟

۱۸ می‌خواهیم ۱۰ نفر را که دوه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

معادله سیاله با ضرایب واحد

۱۹ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه $x_1 > ۲$ ، $x_3 > ۳$ باشند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۰ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳ شاخه انتخاب کنیم؟

۲۱ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = ۱۵$ چند جواب صحیح نامنفی دارد، به شرط آنکه $x_1 > ۲$ و $x_4 \geq ۴$ باشد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۲ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.۲۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + ۲x_2 + x_3 + x_4 = ۲۰$ را با شرط‌های $x_1 > ۲$ ، $x_2 = ۳$ ، $x_3 \geq ۴$ به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۴ معادله $x_1 + ۲\sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = ۵$ چند جواب صحیح نامنفی دارد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۵ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادله $x_1 + x_2 + ۴x_3 + x_4 = ۷$ را به دست آورید.

۲۶ از بین ۵ نوع گل مختلف به چند طریق می‌توان یک دسته گل شامل ۸ شاخه گل انتخاب کرد به‌طوری که از گل نوع اول حداقل ۲ شاخه گل

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

و از گل نوع پنجم فقط یک شاخه گل انتخاب شود؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۷ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + ۲x_4 = ۱۰$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۸ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = ۱۲$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_2 = ۴$ و $x_4 \geq ۳$ باشد؟

مربع لاتین

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۹ در جاهای خالی، عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳۰ یک مربع لاتین چرخشی ۴×۴ بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۱ مربع لاتین A را در نظر بگیرید.
$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A ، مربع لاتین B را تولید کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۲ مربع لاتین A را در نظر بگیرید.



$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف با اعمال جایگشت $\begin{matrix} 1 \rightarrow 3 \\ 2 \rightarrow 2 \\ 3 \rightarrow 4 \\ 4 \rightarrow 1 \end{matrix}$ مربع لاتین B را به دست آورید.

ب آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.

۳۳ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف در یک مربع لاتین چرخشی 4×4 مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر است.

ب تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۵ عضوی برابر است.

۳۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف دو مربع لاتین 2×2 وجود و مربع لاتین 1×1 وجود دارد.

ب تعداد توابع یک به یک از مجموعه دو عضوی به مجموعه ۴ عضوی برابر می‌باشد.

۳۵ جملات زیر را با نوشتن عدد مناسب در جای خالی تکمیل کنید.

الف مجموع درایه‌های ستون دوم یک مربع لاتین مرتبه ۴ برابر با است.

۳۶ متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.

۳۷ ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

۳۸ درستی و یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید:

الف برای $n \neq 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد.

۳۹ الف) یک مربع لاتین چرخشی مرتبه ۴ بنویسید و آن را A بنامید.

ب) مربع لاتین حاصل از جایگشت $\begin{pmatrix} 1 \rightarrow 4 \\ 2 \rightarrow 3 \\ 3 \rightarrow 2 \\ 4 \rightarrow 1 \end{pmatrix}$ را روی مربع لاتین A بسازید و آن را B بنامید.

ج) آیا A و B متعامدند؟ چرا؟

۴۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ وجود ندارد.





مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۱ مربع لاتین A را در نظر بگیرید:الف) با تعویض جای سطر اول و سطر سوم یک مربع لاتین دیگر به دست آورید و آن را B بنامید.ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامد هستند؟ چرا؟
$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴۲ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.

۴۳ اگر سه دوست همسایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد، هریک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک‌بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک‌بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۴ قرار است، چهار مدرس T_1, T_2, T_3, T_4 در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس C_1, C_2, C_3, C_4 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۵ قرار است سه کارگر W_1, W_2, W_3 در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند. به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک‌بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک‌بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۴۶ قرار است سه مدرس T_1, T_2, T_3 در سه جلسه متوالی در سه کلاس C_1, C_2, C_3 به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه‌ریزی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴۷ قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند. به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یک بار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴۸ قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخ‌ریسی و سه نوع الیاف در سه روز اول هفته کار کنند. به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۹ الف) سه مدرس A, B, C قصد دارند در یک روز در سه جلسه $10-12, 10-14, 12-14$ در سه کلاس (الف) و (ب) و (ج) تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. به کمک مربع لاتین چرخشی برای آنها یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

ب) در برنامه قبلی، مدرس A تصمیم دارد با مدرس B برنامه خود را جابجا کند، مربع لاتین جدید را تشکیل دهید و متعامد بودن این دو مربع لاتین را بررسی کنید:

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۵۰ در مربع لاتین مقابل، مقادیر x, y, z و t را به دست آورید.

۳	x	y
t	۲	z
۲	۳	t



درس ۲: روش‌هایی برای شمارش



اصل شمول و عدم شمول

- ۵۱ در بین اعداد طبیعی مانند n به طوری که $1 \leq n \leq 100$ ، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش پذیر است؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹
- ۵۲ مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 400\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند، به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰
- ۵۳ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشند؟ مرجع: تمرین های کتاب-۱۴۰۳
- ۵۴ از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰ ($1 \leq n \leq 300$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر است ولی بر ۵ بخش پذیر نیست؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱
- ۵۵ چند عضو از مجموعه $S = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیرند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲
- ۵۶ چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲
- ۵۷ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($1 \leq n \leq 500$) چند عدد وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲
- ۵۸ در بین اعداد مجموعه $\{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 400\}$ چند عدد وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۶ و ۴ بخش پذیر نباشند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴
- ۵۹ به کمک اصل شمول و عدم شمول تعیین کنید چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $n \leq 600$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۷ بخش پذیر نباشند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵
- ۶۰ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰
- ۶۱ چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \leq n \leq 200$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۶ و ۸ بخش پذیر نباشند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴
- (بر ۶ بخش پذیر نباشند و بر ۸ نیز بخش پذیر نباشند).
- ۶۲ به چند طریق می توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳
- آن که به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم.
- ۶۳ الف) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰
- ب) به چند طریق می توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱
- ۶۴ به چند طریق می توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴
- ۶۵ درستی یا نادرستی گزاره های زیر را تعیین کنید: مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴
- الف** اگر A یک مجموعه ۲ عضوی باشد، آنگاه فقط دو تابع پوشا مانند $f: A \rightarrow A$ وجود دارد. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴
- ۶۶ به چند طریق می توان ۴ مهره به رنگ های سبز، قرمز، آبی و سفید را در ۳ ظرف قرار دهیم، به شرطی که هیچ ظرفی خالی نماند؟ (ذکر راه حل الزامی است). مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴
- ۶۷ تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵



- ۶۸ تعداد تابع‌های یک به یک از یک مجموعه ۳ عضوی به یک مجموعه ۶ عضوی چند تا است؟ (با ذکر دلیل) مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹
- ۶۹ جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

الف تعداد راه‌های توزیع ۳ خودکار متفاوت بین ۵ نفر به طوری که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد، برابر است.

- مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳
- ۷۰ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید: مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

الف دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌های ۱، و وجود ندارد. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

ب تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ای ۲ عضوی به مجموعه‌ای ۴ عضوی برابر با است. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

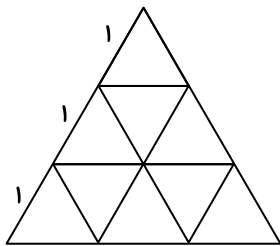
اصل لانه کبوتری

۷۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

۷۲ هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ است. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

۷۳ یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم‌بندی کرده‌ایم. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها از یکدیگر کمتر از یک باشد.



۷۴ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

۷۵ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ≤ 20 نفر از آنها، روز تولدشان یکسان است؟ (سال را غیر کیبسه در نظر بگیرید). مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

۷۶ در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند، تا اطمینان داشته باشیم که لااقل ۷ نفر از آنها ماه تولد یکسانی دارند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

۷۷ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم، دست‌کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آنها مانند هم و غیر تکراری است؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

۷۸ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است. مرجع: تمرین‌های کتاب-۱۴۰۳

۷۹ یک نجار در هفته ۴ مدل مختلف صندلی در ۳ رنگ متفاوت می‌سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم، لااقل ۳ صندلی هم‌رنگ و هم‌مدل ساخته است؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

۸۰ حداقل چند دانش‌آموز در حیاط یک دبیرستان حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۱ نفر از آنها متعلق به یک پایه تحصیلی (دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشته تحصیلی (ریاضی، تجربی، انسانی) هستند؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

۸۱ جاهای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

الف در بین ۳۹۰ دانش‌آموز، حداقل نفر روز تولد یکسانی دارند. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

ب تعداد توابع یک به یک مانند $f: A \rightarrow B$ اگر بدانیم $|B| = 4$ و $|A| = 5$ برابر است. مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

۸۲ با استفاده از اصل لانه کبوتری، تعیین کنید که در یک دبیرستان حداقل چند دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۱ نفر از آنها، روز هفته و فصل تولدشان، یکسان است؟ مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴



۸۳ در یک دبیرستان، حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۲۱ دانش آموز ماه تولدشان یکسان است؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۸۴ حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آنها فاصله‌شان کمتر از ۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

است؟

۸۵ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 3×4 قرار دارند. نشان دهید، حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله آنها از هم، کمتر از $\sqrt{2}$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

است.





پاسخنامه تشریحی

الف

۴ کتاب فیزیک را یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۵ کتاب مفروض ریاضی روی هم ۶ شیء بوده و ۶ جایگشت داشته و در هر یک از حالت‌ها ۴ کتاب فیزیک هم ۴! جایگشت دارند، لذا طبق اصل ضرب داریم: $۶! \times ۴!$

کتاب ریاضی: □

کتاب فیزیک: △

۴! × ۶! : حالات مطلوب → △△△ □□□□ △△
۴! = کتاب فیزیک

ب

کتاب ریاضی را با □ و کتاب فیزیک را با △ نشان می‌دهیم؛ مطابق شکل زیر برای اینکه هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند، باید کتاب‌های ریاضی و فیزیک را یک‌درمیان قرار دهیم:

□△□△□△□△□

۴! × ۵! → طبق اصل ضرب }
۵! : جایگشت کتاب‌های ریاضی
۴! : جایگشت کتاب‌های فیزیک

پ

یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص را یک شیء در نظر می‌گیریم که با ۶ کتاب مفروض باقی‌مانده روی هم ۷ شیء بوده و ۷! جایگشت داشته و در هر یک از حالت‌ها، یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک هم ۳! جایگشت دارند؛ لذا طبق اصل ضرب داریم:

۷! × ۳!

الف

□ دانش‌آموز دهم و △ دانش‌آموز یازدهم

مطابق شکل کافی است دانش‌آموزان دهم و یازدهم، یک‌درمیان قرار بگیرند.

□△□△□△□

حالات مطلوب برابر است با:

۴! × ۳!

ب

۴ دانش‌آموز پایه دهم را یک بسته در نظر می‌گیریم که با ۳ دانش‌آموز یازدهم دارای ۴! جایگشت هستند. با توجه به جابه‌جایی ۴ دانش‌آموز پایه دهم درون بسته، تعداد حالت‌ها برابر است با:

۴! × ۴!

۳

الف) شکل زیر را در نظر بگیرید (△: حروف و ○: ارقام)

△○○○○○○△

۲! × ۶! : جایگشت مطلوب

△△○○○○○○

۷! × ۲! : جایگشت مطلوب

۴ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایه یازدهم را به چند طریق می‌توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد، به‌طوری که همواره دانش‌آموزان پایه دوازدهم در کنار هم باشند.

الف

۶! × ۶!

ب

۵! × ۶!

$$6! \times 3!$$

$$4! \times 2^4 = 384$$

$$3! \times 4! \times 2! = 288$$

$$\text{تعداد حالات مطلوب} = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2!}$$

$$\frac{45!}{8! \times 10! \times 12! \times 15!} \text{ در صورتی که جواب را به فرم } \binom{45}{8} \times \binom{37}{10} \times \binom{27}{12} \times \binom{15}{15}$$

$$\frac{9!}{3! \times 2!}$$

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 2!}$$

$$\frac{8!}{4! \times 3! \times 1!}$$

$$\frac{7!}{2! \times 3!}$$

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2!}$$

$$\frac{8!}{4! \times 2! \times 2!} = 420$$

$$\binom{8}{4} \binom{4}{2} \binom{2}{2} = 420 \text{ یا } \binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{4} = 420 \text{ یا } \binom{8}{2} \binom{6}{4} \binom{2}{2} = 420$$

$$\binom{3}{2} \times \binom{6}{4} \times 6!$$

$$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times (2!)^5 = 3840$$

$$(10 \times 1) \times (8 \times 1) \times (6 \times 1) \times (4 \times 1) \times (2 \times 1) = 3840$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1 - 3}_{y_1} \geq 0 \Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow x_1 > 2$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_2 - 4}_{y_2} \geq 0 \Rightarrow x_2 \geq 4 \Rightarrow x_2 > 3$$

$$y_1 + 3 + x_2 + y_2 + 4 + x_3 + x_5 = 14 \Rightarrow y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + x_5 = 7 \Rightarrow \text{تعداد جوابهای صحیح نامنفی} : \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{7+5-1}{5-1} = \binom{11}{4}$$

فرض کنید تعداد شاخه گل‌های انتخاب شده از ۵ نوع گل را با متغیرهای x_1 تا x_5 نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$x_1 + \dots + x_5 = 11, \quad x_2 \geq 2, \quad x_5 \geq 4$$

$$x_1 + y_2 + 2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 = 11 \Rightarrow x_1 + y_2 + x_3 + x_4 + y_5 = 5 \Rightarrow \text{تعداد جوابها} = \binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} \underbrace{x_2 - 2}_{y_2} \geq 0, \quad \underbrace{x_5 - 4}_{y_5} \geq 0$$



۲۱

$$y_1 = x_1 - 3, y_1 \geq 0, \quad y_4 = x_4 - 4, \quad y_4 \geq 0$$

$$y_1 + 3 + x_2 + x_3 + y_4 + 4 + x_5 = 15 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 8$$

$$\text{تعداد جوابهای صحیح و نامنفی} = \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4}$$

۲۲ به هر کدام از $x_k, \dots, x_2, x_1$ عدد ۱ را اضافه می‌کنیم.

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$$
 معادله جدید

لذا تعداد حالات جواب از رابطه $\binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$ به دست می‌آید.

۲۳ روش اول:

$$x_1 + 2(3) + x_3 + x_4 = 20 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 14 \quad x_1 - 3 \geq 0 \Rightarrow x_1 = y_1 + 3, x_3 - 4 \geq 0 \Rightarrow x_3 = y_3 + 4$$

$$y_1 + 3 + y_3 + 4 + x_4 = 14 \Rightarrow y_1 + y_3 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

روش دوم:

$$x_1 + x_3 + x_4 = 14$$

$$\binom{14-3-4+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

۲۴

$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5 \rightarrow \binom{5+3-1}{3-1} = 21$$

$$x_2 = 1 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = 10$$

$$x_2 = 4 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = 3$$

$$21 + 10 + 3 = 34$$

۲۵

$$\left. \begin{array}{l} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 7 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{9}{2} = 36 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 = 3 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 36 + 10 = 46$$

۲۶

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8, \quad x_5 = 1, \quad x_1 \geq 2 \Rightarrow \underbrace{x_1 - 2}_{t_1} \geq 0$$

$$t_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 - 2 - 1 = 5 \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3} = 56$$

۲۷

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \binom{12}{2} \\ x_4 = 1 \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \rightarrow \binom{10}{2} \end{array} \right. \rightarrow \binom{12}{2} + \binom{10}{2} = 66 + 45 = 111$$

۲۸

$$x_1 + x_3 + x_4 = 8$$

$$x_4 - 3 = y_4 \Rightarrow x_1 + x_3 + y_4 = 5 \Rightarrow \binom{7}{2} = 21$$

۲۹

الف

$$\text{مجموع درایه‌های سطر اول} : 1 + 2 + 3 + \dots + 5 = \frac{5 \times \frac{5}{2}}{1} = 15$$

۳۰



۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 3 \\ 2 &\rightarrow 1 \\ 3 &\rightarrow 2 \end{aligned}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 21 & 13 & 32 \\ \hline 32 & 21 & 13 \\ \hline 13 & 32 & 21 \\ \hline \end{array}$$

$$B = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 1 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 1 & 4 \\ \hline 3 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 1 & 4 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

۴

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۳۱

الف

ب

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دورقمی تکراری داریم.

۳۲

الف

ب

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دورقمی تکراری داریم.

۳۳

الف

ب

۳۴

الف

دارد - یک

ب

۱۲

۳۵

الف

۱۰

۳۶ در مربع لاتین مقابل، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند.

۳۷



۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۳۸

الف

نادرست

۳۹

الف)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & ۴ \\ ۴ & ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

ب)

$$B = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & ۴ & ۳ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۴ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$
 $\Rightarrow$

۱۴	۲۳	۳۲	۴۱
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۳۲	۴۱	۱۴	۲۳
۲۳	۳۲	۴۱	۱۴

ج) خیر؛ زیرا مربع لاتین ادغام شده، دارای درایه های تکراری است.

۴۰

الف

نادرست

۴۱

(الف)

$$B = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

۱۳	۲۱	۳۲
۲۲	۳۳	۱۱
۳۱	۱۲	۲۳

ب) روش اول: بله، زیرا در مربع زیر عدد دو رقمی وجود ندارد.

روش دوم: بله، زیرا هر دو جایگاه در مربع A که اعداد یکسانی دارند، جایگاه های نظیر آنها از مربع B اعداد متمایزی دارند.

۴۲

الف

درست

۴۳

کافی است دو مربع لاتین متعامد یکی برای کت ها و دیگری برای پیراهن ها بنویسیم.

کت ها

شنبه	یکشنبه	شنبه	
۳	۲	۱	A
۲	۱	۳	B
۱	۳	۲	C

پیراهن ها

دوشنبه	یکشنبه	شنبه	
۳	۱	۲	A
۲	۳	۱	B
۱	۲	۳	C

و

 $\Rightarrow$

دوشنبه	یکشنبه	شنبه	
۳۳	۲۱	۱۲	A
۲۲	۱۳	۳۱	B
۱۱	۳۲	۲۳	C

۴۴ برای برنامه ریزی مسئله مربع لاتین، شکل زیر را در نظر بگیرید که سطرها و ستون های آن متناظر با کلاس ها و ستون های آن متناظر با جلسات است.



	1	2	3	4
C ₁	T ₁	T ₂	T ₃	T ₄
C ₂	T ₄	T ₁	T ₂	T ₃
C ₃	T ₃	T ₄	T ₁	T ₂
C ₄	T ₂	T ₃	T ₄	T ₁

۴۵ برای برنامه‌ریزی باید دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کنندهٔ ایاف است.

	W_1	W_2	W_3
روزاول	1	3	2
روزدوم	3	2	1
روزسوم	2	1	3

 $= A$

	W_1	W_2	W_3
روزاول	2	1	3
روزدوم	3	2	1
روزسوم	1	3	2

 $= B$

	W_1	W_2	W_3
روزاول	12	31	23
روزدوم	33	22	11
روزسوم	21	13	32

عدد سمت چپ هر درایه نشان‌دهندهٔ ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع ایاف است.

۴۶ فرض کنیم هر سطر نشان‌دهنده هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین 3×3 زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

و

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

 $\Rightarrow$

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

	w_1	w_2	w_3
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

 $A =$

	w_1	w_2	w_3
شنبه	۳	۱	۲
یکشنبه	۱	۲	۳
دوشنبه	۲	۳	۱

 $B =$
 $\Rightarrow$

	w_1	w_2	w_3
شنبه	۱۳	۲۱	۳۲
یکشنبه	۳۱	۱۲	۲۳
دوشنبه	۲۲	۳۳	۱۱

چون اعداد دورقمی تکراری در مربع ساخته‌شده وجود ندارد پس متعامدند.

۴۹ الف) $A = 1, B = 2, C = 3$

	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
الف	۱	۲	۳
ب	۳	۱	۲
پ	۲	۳	۱

 $M =$

ب) $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 1, 3 \rightarrow 3$



$$N =$$

	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
الف	۲	۱	۳
ب	۳	۲	۱
پ	۱	۳	۲

$$MN =$$

	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
الف	۱۲	۲۱	۳۳
ب	۳۳	۱۲	۲۱
پ	۲۱	۳۳	۱۲

دو مربع لاتین متعامد نیستند زیرا در ماتریس ادغام شده درایه تکراری وجود دارد.

$$t = 1, x = 1, z = 3, y = 2$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{100}{6} \right\rfloor = 16$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 10k\} \Rightarrow |B| = \left\lfloor \frac{100}{10} \right\rfloor = 10$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 100, n = 30k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3 \Rightarrow |A \cup B| = 16 + 10 - 3 = 23$$

داریم: ۵۲

$$A = \{n \in S | n = 5k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left\lfloor \frac{400}{5} \right\rfloor = 80$$

$$A = \{n \in S | n = 7k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(B) = \left\lfloor \frac{400}{7} \right\rfloor = 57$$

$$A \cap B = \{n \in S | n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left\lfloor \frac{400}{35} \right\rfloor = 11$$

در نتیجه:

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 400 - (80 + 57 - 11) = 274$$

۵۳

$$A = \{1 \leq n \leq 200 | n = 4k\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50, B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 7k\}$$

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 200 | n = 28k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$

۵۴

$$A = \{1 \leq n \leq 300 | n = 4k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{300}{4} \right\rfloor = 75$$

$$B = \{1 \leq n \leq 300 | n = 5k (k \in \mathbb{N})\}$$

$$A \cap B = \{1 \leq n \leq 300 | n = 20k (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A \cap B| = \left\lfloor \frac{300}{20} \right\rfloor = 15$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = 75 - 15 = 60$$

۵۵

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$

$$|S| = 630, |A| = 210, |B| = 126, |A \cap B| = 42$$

$$\Rightarrow |\overline{A \cup B}| = 336$$

۵۶

$$|S| = 5^4 : \text{تعداد کل رمزها}$$

$$|A| = 4^4 : \text{تعداد رمزهای فاقد ۳}$$

$$|B| = 4^4 : \text{تعداد رمزهای فاقد ۲}$$

$$|A \cap B| = 3^4 : \text{تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳}$$

$$|\overline{A \cap B}| = |S| - |A \cup B| \Rightarrow |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$$

$$|A| = \left[\frac{500}{5} \right] = 100, |B| = \left[\frac{500}{4} \right] = 125, |A \cap B| = \left[\frac{500}{20} \right] = 25$$

$$|\overline{A \cap B}| = |\overline{A \cup B}| = 500 - (100 + 125 - 25) = 300$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 6|n\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{400}{6} \right] = 66$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 4|n\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{400}{4} \right] = 100$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | 12|n\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{400}{12} \right] = 33$$

$$|\overline{A \cap B}| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 400 - (66 + 100 - 33) = 267$$

$$|S| : \text{تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۶۰۰}$$

$$|A| : \text{تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۳ بخش پذیرند.}$$

$$|B| : \text{تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۷ بخش پذیرند.}$$

$$|A \cap B| : \text{تعداد اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۶۰۰ که بر ۲۱ بخش پذیرند.}$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left[\frac{600}{3} \right] + \left[\frac{600}{7} \right] - \left[\frac{600}{21} \right] = 200 + 85 - 28 = 257$$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 600 - 257 = 343$$

$$|F| = 15, |V| = 11, |B| = 9, |F \cap V| = 5, |B \cap V| = 6, |F \cap B| = 3, |F \cap B \cap V| = 3$$

$$|F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap B \cap V| = 15 - 5 - 3 + 3 = 10 : \text{فقط فوتبال بازی می کنند.}$$

$$|V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = 11 - 5 - 6 + 3 = 3 : \text{فقط والیبال بازی می کنند.}$$

$$|B| - |F \cap B| - |V \cap B| + |F \cap B \cap V| = 9 - 3 - 6 + 3 = 3 : \text{فقط بسکتبال بازی می کنند.}$$

$$10 + 3 + 3 = 16 : \text{حالات مطلوب}$$

$$A = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 200, n = 6k\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{200}{6} \right] = 33$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 200, n = 8k\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{200}{8} \right] = 25$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | 1 \leq n \leq 200, n = 24k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{200}{24} \right] = 8$$

$$|\overline{A \cap B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 200 - (33 + 25 - 8) = 150$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$A_j = \{f: A \rightarrow B | f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}, 1 \leq j \leq 3$$

$$|S| = 3^4 = 81, |A_j| = 2^4 = 16$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1 \cap A_2 \cap A_3}| = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

$$\text{الف) حاصل برابر تعداد توابع پوشا، از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی است.}$$

$$3^4 - 3 \times 2^4 + 3 = 81 - 48 + 3 = 36$$

$$\text{ب) حاصل برابر تعداد توابع یک به یک، از یک مجموعه ۴ عضوی به یک مجموعه ۸ عضوی است.}$$

$$\frac{8!}{4!} = 1680 \text{ یا } \boxed{8} \times \boxed{7} \times \boxed{6} \times \boxed{5} = 1680$$

90

۶۷ روش اول:

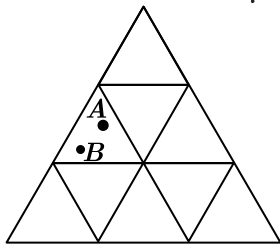
6人

69

Y.

٤٩٢

31



۱۰ نقطه را کیوتر و هر یک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می‌کنیم. طبق اصل لانه کیوتری حداقل دو کیوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $|AB| < 1$

۷۴ اعداد طبیعی را به دو گروه زوج و فرد افراز می‌کنیم. این دو مجموعه را لانه‌ها و سه عدد طبیعی را کیوترها در نظر می‌گیریم، بنا به اصل لانه کیوتری یک لانه وجود دارد که حداقل شامل دو کیوتر باشد. یعنی دو عدد طبیعی وجود دارد که هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. لذا مجموع آنها در هر دو حالت زوج است.

$$n = 365$$

۷۵ طبق تعمیم اصل لانه کیوتری، تعداد لانه‌ها، همان روزهای سال می‌باشد:

$$K + 1 = 20 \Rightarrow k = 19$$

طبق تعمیم اصل لانه کیوتری، حداقل تعداد تماشاگران برابر است با:

$$kn + 1 = 365 \times 19 + 1 = 6936$$

۷۶ در این مسأله $k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$ و تعداد لانه‌ها ۱۲ است. پس تعداد کیوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان، حداقل باید $73 = 6 \times 12 + 1$ باشد.

۷۷

$$n = 32 \times 31 = 992, \quad k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2$$

$$\text{تعداد کیوترها} = 2 \times 992 + 1 = 1985$$

۷۸ تعداد کیوترها $= 505$ و تعداد لانه‌ها $=$ تعداد روزهای هفته $\times$ تعداد ماه‌های سال. $n = 7 \times 12 = 84$
طبق تعمیم اصل لانه کیوتری:

$$kn + 1 \xrightarrow{n=84} 505 = k \times 84 + 1 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow k + 1 = 7$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لاقبل ۷ کیوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش‌آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۷۹

$$k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2, \quad n = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow kn + 1 = 12 \times 2 + 1 = 25$$

۸۰

$$n = 3 \times 3 = 9: \text{تعداد لانه}$$

$$k + 1 = 21 \Rightarrow k = 20$$

$$kn + 1 = 20 \times 9 + 1 = 181: \text{تعداد کیوترها}$$

۸۱

الف ۲

ب صفر

۸۲

$$\left. \begin{array}{l} k + 1 = 21 \Rightarrow k = 20 \\ n = 7 \times 4 = 28 \end{array} \right\} \Rightarrow m = kn + 1 = 20 \times 28 + 1 = 561$$

۸۳ روش اول:

m : تعداد لانه‌ها (ماه‌های سال) ، $k + 1$: حداقل کیوترها (دانش‌آموزان دبیرستان)

$$k + 1 = 21 \Rightarrow k = 20$$

$$nk + 1 = 12 \times 20 + 1 = 241$$

روش دوم:

m : حداقل تعداد دانش‌آموزان دبیرستان

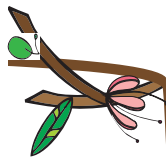
به کمک عمل تقسیم داریم: $m = 12 \times 20 + 1 = 241$

روش سوم:

t : تعداد دانش‌آموزان دبیرستان ، $k + 1$: حداقل کیوترها (دانش‌آموزان دبیرستان)

$$\left\lceil \frac{t-1}{k} \right\rceil = n \Rightarrow \left\lceil \frac{t-1}{20} \right\rceil = 12 \Rightarrow 12 \leq \frac{t-1}{20} < 13 \Rightarrow t \geq 241$$

بنابراین حداقل تعداد دانش‌آموزان دبیرستان ۲۴۱ نفر است.



۸۴ ۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه کبوتری ($4 < 5$) حداقل یک لانه (مثلث) وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می‌گیرد.

۸۵ مستطیل را به ۱۲ خانه مربع شکل 1×1 تقسیم می‌کنیم. ۱۳ نقطه را تعداد کبوترها و ۱۲ خانه را تعداد لانه‌ها در نظر می‌گیریم. بنابه اصل لانه کبوتری چون تعداد کبوترها از یک

برابر تعداد لانه‌ها ۱ واحد بیشتر است، لذا خانه‌ای وجود دارد که شامل بیش از یک کبوتر است. در هر خانه مربع شکل حداکثر فاصله نقاط برابر قطر مربع یعنی $\sqrt{2}$ است. $AB < d = \sqrt{2}$

