



بیستوفیل

حسابان دوازدهم
ریاضی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۴
امیر محمد کیانی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصریان

رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبدالله آبادی

رتبه ۵۴۶
حسین تقضلی نژاد

رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلویی

رتبه ۲۶۲۵
زهره مجمعی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۳۸۱۰
هدیه رحیمی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسونند

رتبه ۵۷۰
زهره ولی نژاد

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۵۳۹
نجمه کبختا

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۱۱۲۷
زهره بابائی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملک شاهی

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۱ دوازدهم

سال دوازدهم
ریاضی

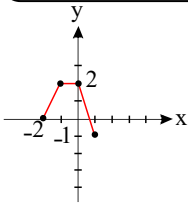


تابع

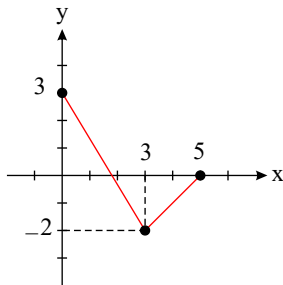
تبدیل نمودار توابع

۱ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

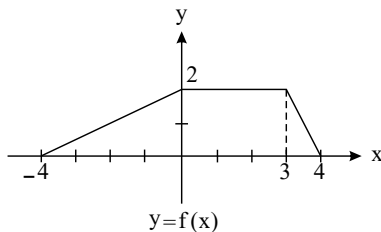
مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۲ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(3-x)$ را رسم کرده و دامنه آن را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸



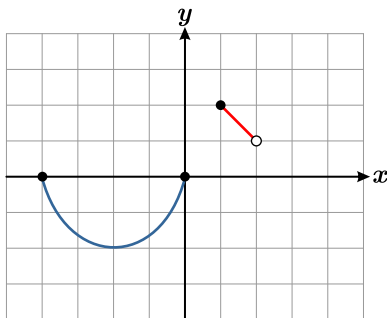
مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۳ با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، نمودار $y = \frac{1}{3}f(4x)$ را رسم کنید.۴ نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید، سپس اکیداً یکنوایی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود، بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۵ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.نمودار تابع $y = f(1-x) + 1$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲



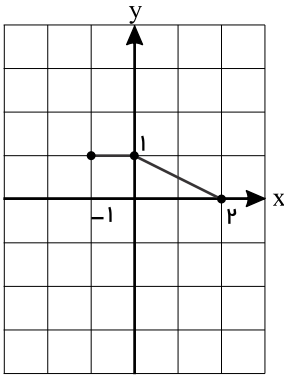
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۶ الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[0, 4]$ رسم کنید.ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = 2f(x-1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.



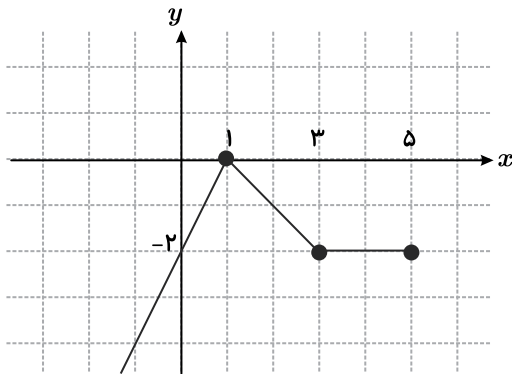
۷ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = f(x - 1) + 2$ را رسم کرده و دامنه تابع $g(x)$ را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱



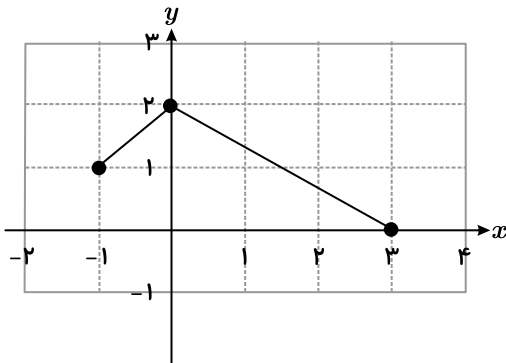
۸ نمودار تابع $f(x)$ در زیر رسم شده است، نمودار تابع $y = -f(2x - 1)$ را رسم کرده، سپس دامنه و برد توابع حاصل را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳



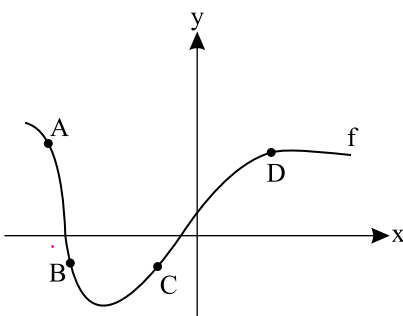
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۹ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، نمودار تابع $y = f(2x + 1)$ را به کمک آن رسم کنید.



۱۰ نمودار تابع $f(x) = -(x - 2)^3 + 1$ را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن تابع f را بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۱ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

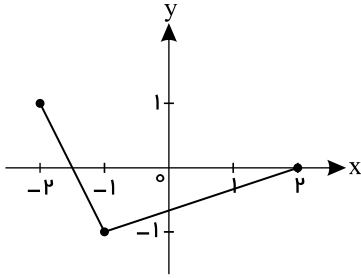
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

الف اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از نمودار $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می آید.



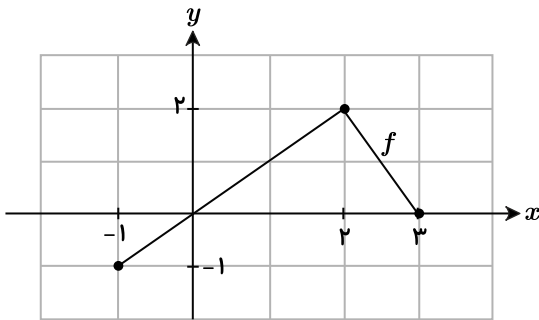
۱۲ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = 2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۱۳ در شکل زیر، نمودار تابع $y = f(x)$ رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -2f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ را رسم کنید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۱۴ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

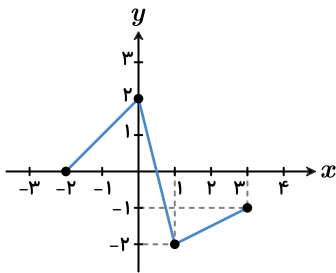
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

الف نمودار تابع $y = 2^{x-1}$ از انتقال نمودار $y = 2^x$ حاصل می شود. (افقی - عمودی)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۱۵ نمودار تابع $y = f(x)$ در شکل مقابل رسم شده است.

نمودار تابع $y = 2f\left(\frac{x}{2}\right)$ را رسم کنید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۱۶ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف اگر برد تابع $y = \sqrt{x}$ بازه $[0, 2]$ باشد، برد تابع $y = 2 + \sqrt{x-2}$ برابر است.

تابع

تابع یکنوا و تابع $y = x^3$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۱۷ اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۱۸ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

الف نمودار تابع $y = x^3$ در بازه $(0, 1)$ پایین تر از نمودار تابع $y = x^2$ قرار دارد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

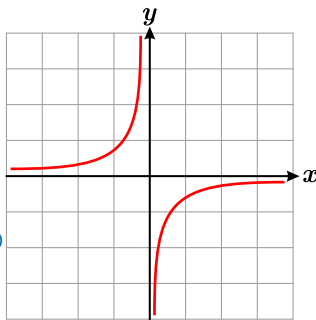
ب اگر تابع $f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه اکیدا صعودی نیز خواهد بود.

۱۹ ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ |x+1| & x < 0 \end{cases}$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیدا صعودی و در چه بازه‌ای اکیدا نزولی است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۲۰ با توجه به نمودار تابع مقابل، تعیین کنید:





مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف) تابع f در چه بازه‌هایی اکیداً یکنوا است.

ب) آیا تابع در کل دامنه خود اکیداً یکنوا است؟

۲۱) جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف) اگر تابعی در یک فاصله هم صعودی و هم نزولی باشد، تابع در آن فاصله است.

۲۲) درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $f(x) = (1-x)^3$ ، تابعی اکیداً نزولی است.۲۳) ابتدا نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمایید، سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌ای اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۲۴) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً نزولی باشند، تابع $f+g$ نیز در آن فاصله اکیداً نزولی است.

۲۵) درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) تابع $y = -\log_8 x + 1$ در دامنه خود، یک تابع اکیداً یکنوا است.۲۶) نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x} & x < 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$ را رسم کنید. بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن اکیداً صعودی است را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۲۷) با رسم نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2 & , -2 \leq x < -1 \\ -x - 1 & , -1 \leq x < 1 \\ x^2 - 1 & , 1 \leq x \end{cases}$ تعیین کنید، تابع در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۲۸) در $\left(\frac{1}{81}\right)^{1-2x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}$ حدود x را به دست آورید.۲۹) اگر توابع f و g در یک فاصله اکیداً صعودی باشند، نشان دهید که تابع $f+g$ نیز در این فاصله اکیداً صعودی است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

تابع

بخش پذیری

۳۰) اگر چندجمله‌ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x-2)$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۳۱) در چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x+2$ برابر -1 و $p(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۳۲) اگر چندجمله‌ای $x^2 + ax - 8$ بر $x-a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید.

۳۳) هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید.

الف) $x^5 + 1$ با عامل $x+1$



ب $x^6 - 1$ با عامل $x - 1$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۳۴ مقادیر a, b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^3 + ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش‌پذیر باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

الف چندجمله‌ای $P(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2$ یک چندجمله‌ای از درجه ۵ است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

ب اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز می‌باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳۶ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x) = x^3 + ax^2 + bx - 2$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳۷ باقی‌مانده تقسیم عبارت‌های $p(x) = x^3 + ax + 1$ و $q(x) = 2x^2 - x + 1$ بر $(x + 2)$ یکسان است. مقدار a را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۳۸ مقادیر a و b را چنان بیابید که عبارت $p(x) = x^3 - ax + b$ بر $(x - 2)$ بخش‌پذیر باشد و باقیمانده تقسیم آن بر $(x + 1)$ برابر ۳ باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۳۹ اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۰ چندجمله‌ای $x^5 + 3x^2$ را بر حسب عامل $x + 2$ تجزیه کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۴۱ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ بر $(x + 2)$ و $(x - 1)$ بخش‌پذیر باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۴۲ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + mx + 2$ بر $x - 2$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه باقی‌مانده تقسیم $p(x)$ بر $x + 1$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۳ چندجمله‌ای $x^5 - 1$ را طوری تجزیه کنید که $x - 1$ یک عامل آن باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۴ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف اگر n عدد طبیعی زوج و a عدد حقیقی باشد، آنگاه چندجمله‌ای $x^n + a^n$ بر $x + a$ بخش‌پذیر است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

ب تابع $y = \tan x$ در مجموعه $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ اکیداً صعودی است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۵ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 + kx^2 + 2$ بر $x - k$ بخش‌پذیر باشد، مقدار k را بیابید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۶ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^2 + a - 2$ بر $x - a$ بخش‌پذیر باشد، مقدار a را بیابید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۷ چندجمله‌ای $x^5 + 3x^2$ را بر حسب عامل $(x + 2)$ تجزیه کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۴۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف عبارت $x^{16} + 1$ بر $x + 1$ بخش‌پذیر است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴۹ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۲ باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۵۰ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $2x^3 + ax + b$ بر $x + 2$ بخش‌پذیر و باقی‌مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر ۱۵ باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

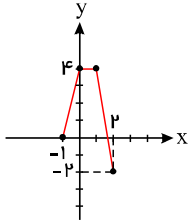




پاسخنامه تشریحی

۱

برای رسم ابتدا منحنی $y = f(x)$ را یک واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس برد آن را دوبار برابر می‌کنیم.



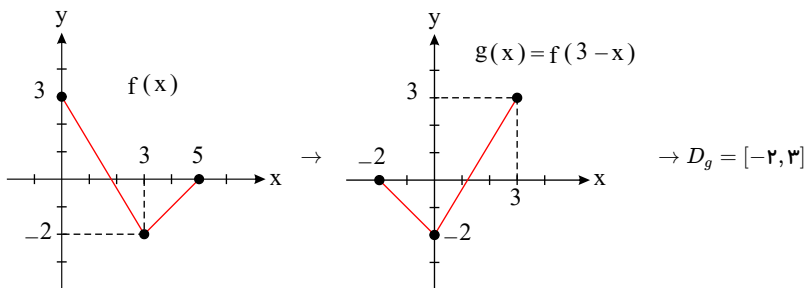
$$D_g = [-1, 2]$$

$$R_g = [-2, 4]$$

۲ برای رسم نمودار $g(x) = f(3-x)$ از روی نمودار تابع $y = f(x)$ داریم:

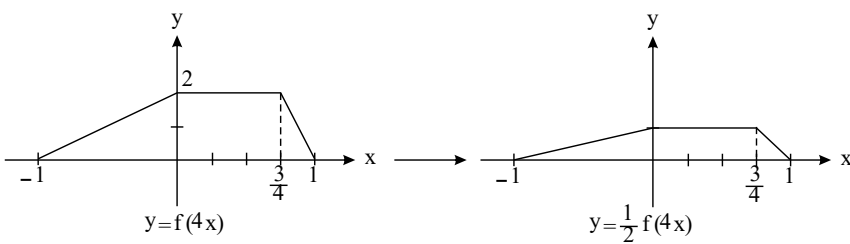
$$y = f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y = f(x+3) \xrightarrow{x \rightarrow -x} g(x) = f(-x+3) = f(3-x)$$

بنابراین باید ابتدا نمودار f را ۳ واحد به چپ منتقل کرده و سپس حاصل را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

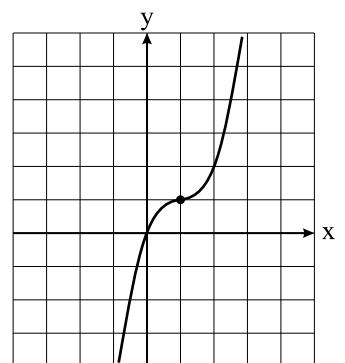


$$\rightarrow D_g = [-2, 3]$$

۳ کافی است طول نقاط را $\frac{1}{4}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.

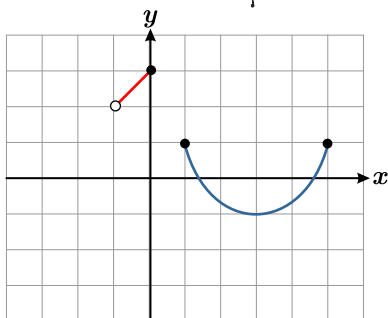


$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

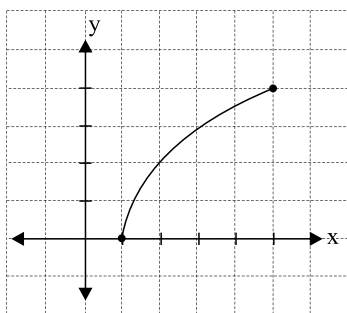


اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی)

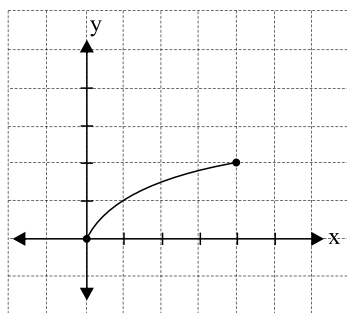
۵



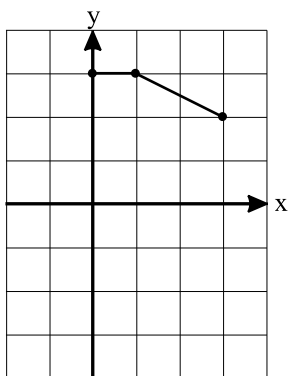
$$R_g = [0, 4] \text{ و } D_g = [1, 5]$$



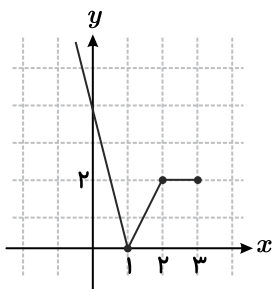
(ب)



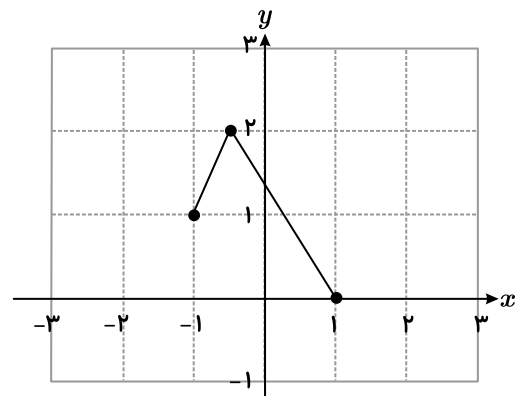
(الف)



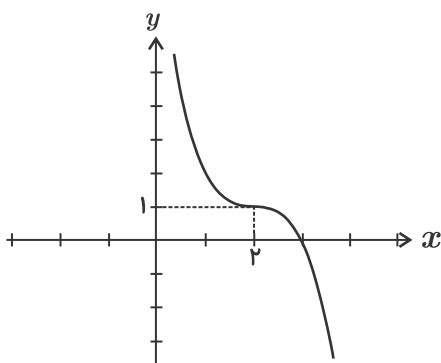
$$D_g = [0, 3]$$



$$\text{دامنه: } (-\infty, 3] \text{ و برد: } [0, +\infty)$$



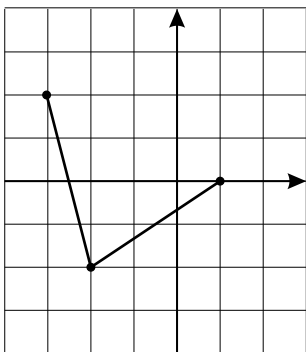
۱۰. $f(x)$ اکیداً نزولی (یا نزولی) است.



۱۱.

الف انقباض افقی

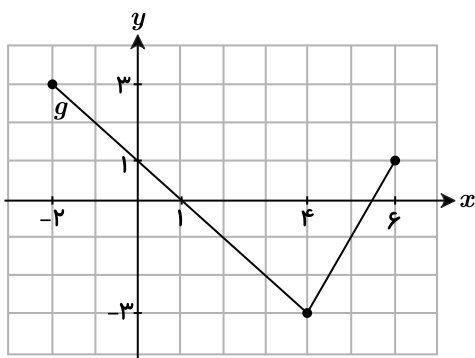
۱۲.



$$D_f = [-3, 1]$$

$$R_f = [-2, 2]$$

۱۳.

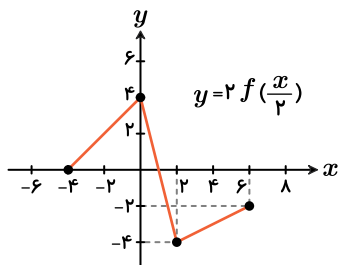


۱۴

الف

افقی، برای رسم نمودار تابع $y = 2^{x-1}$ می‌بایست نمودار تابع $y = 2^x$ را در راستای افقی، یک واحد به سمت راست انتقال دهیم.

۱۵ برای رسم نمودار $y = 2f(\frac{x}{2})$ طول نقاط را دو برابر و سپس عرض آنها را در ۲ ضرب می‌کنیم. بنابراین:



۱۶

الف

[۲, ۴]

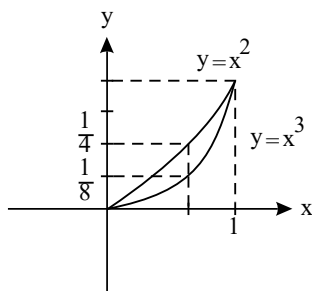
$$(\frac{1}{5})^{2x+1} \leq (\frac{1}{5})^x \Rightarrow 2x+1 \geq x \Rightarrow x \geq 1$$

۱۷

۱۸

الف

درست؛ به نمودار زیر دقت کنید:



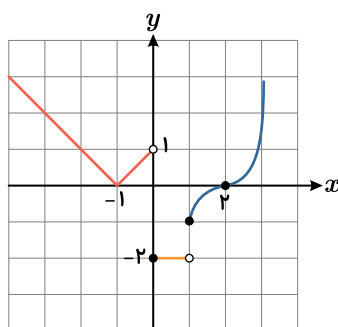
ب

نادرست؛ برای مثال $f(x) = 5$ در $\mathbb{R}$ صعودی است ولی صعودی اکید نیست.

۱۹

اکیداً صعودی $[1, +\infty)$, $[-1, 0)$

اکیداً نزولی $[-\infty, -1]$



۲۰

الف

$(-\infty, 0)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی) و $(0, +\infty)$ اکیداً یکنوا (اکیداً صعودی).

ب

خیر - در کل دامنه اکیداً یکنوا نیست.

۲۱

الف

ثابت



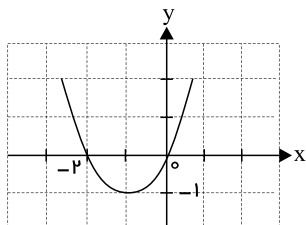
۲۲

الف

درست

۲۳ اکیداً صعودی $[-1, +\infty)$

اکیداً نزولی $(-\infty, -1]$



۲۴

الف

درست

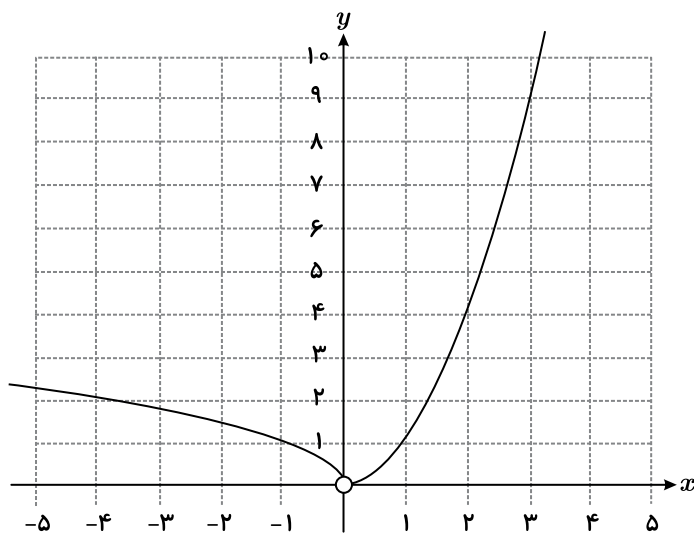
۲۵

الف

درست

۲۶

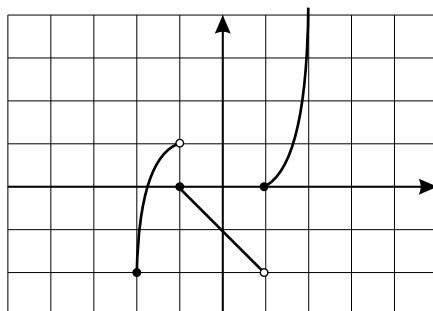
در بازه $(0, +\infty)$ اکیداً صعودی است.



۲۷

صعودی $[-2, -1]$ ، صعودی $[1, +\infty)$

نزولی $[-1, 1]$



۲۸

$$3^{2x-1} \leq 3^{-4}$$

$$2x - 1 \leq -4 \Rightarrow x \leq 3$$

$$\begin{cases} f(a) < f(b) \\ g(a) < g(b) \end{cases} \text{ بنابراین،}$$

۲۹ فرض کنید a و b دو عدد دلخواه در این فاصله باشند که $a < b$. چون توابع f و g اکیداً صعودی هستند، نتیجه می‌شود که

$f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$. از این رو، نتیجه می‌شود که $(f+g)(a) < (f+g)(b)$ پس، $f+g$ روی این فاصله تابعی اکیداً صعودی است.

۳۰ چون $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌مانده تقسیم صفر است.

$$f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$$

$$f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

۳۱

$$\begin{cases} p(-2) = -1 \\ p(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}, b = -\frac{5}{3}$$

$$x = a \Rightarrow 2a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

$$x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

$$(x^n - a^n) = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

$$(x^n + a^n) = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

$$x^8 - 1 = (x - 1)(x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

۳۴ نکته: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ عبارت است از: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -9 \quad (1)$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \rightarrow p(-1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \quad (2)$$

$$a = -\frac{9}{2}, b = -\frac{9}{2}$$

از حل رابطه (۱) و (۲) داریم:

$$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2, P(2) = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -6 \quad (1)$$

$$x + 1 = 0 \rightarrow x = -1, P(-1) = 3 \Rightarrow a - b = 6 \quad (2)$$

$$a = 1, b = -5$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow \begin{cases} p(-2) = -2a - 1 \\ q(-2) = 11 \end{cases} \Rightarrow a = -9$$

$$\begin{cases} p(2) = 0 \Rightarrow 1 - 2a + b = 0 \\ p(-1) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - a + b = -1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$p(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - (-\frac{5}{2})(-2) + 3 = -12$$

۳۲

۳۳

الف

می دانیم:

ب

می دانیم:

۳۵

الف

درست

ب

درست

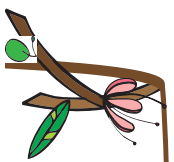
۳۶ می دانیم: باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax + b$ برابر است با: $r(x) = f(-\frac{b}{a})$

بنابراین از حل معادله (۱) و (۲) داریم:

۳۷

۳۸

۳۹



۴۰

$$(x+2)(x^5-2x^3+3x^2-8x+16)$$

۴۱

$$\begin{aligned} -8+4a-2b+2=0 &\Rightarrow 4a-2b=6 \Rightarrow a=0 \\ 1+a+b+2=0 &\Rightarrow a+b=-3 \Rightarrow b=-3 \end{aligned}$$

۴۲

$$p(2)=0 \Rightarrow 8+2m+2=0 \Rightarrow m=-5 \quad p(-1)=6$$

۴۳

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

۴۴

الف

نادرست

ب

نادرست

۴۵

$$x-k=0 \rightarrow x=k \rightarrow p(k)=0 \rightarrow k^3+k^2+2=0 \rightarrow k^3=-1 \rightarrow k=-1$$

۴۶ روش اول:

$$x-a=0 \Rightarrow x=a$$

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow a=1 \text{ یا } a=-2$$

روش دوم: با تقسیم چندجمله‌ای x^2+a-2 بر $x-a$ داریم:

$$x^2+a-2=(x-a)(x+a)+a^2+a-2$$

با توجه به اینکه باقی‌مانده صفر است؛ بنابراین:

$$a^2+a-2=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=-2 \end{cases}$$

۴۷

$$x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+3x^2-8x+16)$$

۴۸

الف

نادرست

۴۹

$$\begin{cases} p(-2)=0 \\ p(1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+b=7 \\ a-b=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{5}{3} \\ b=\frac{11}{3} \end{cases}$$

استفاده از قضیه تقسیم (چندجمله‌ای بر چندجمله‌ای) در دستگاه معادلات فوق در دستیابی به مقادیر a و b نیز صحیح است.

۵۰

$$\begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow 2(-2)^2+a(-2)+b=0 \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow 2(1)^2+a(1)+b=15 \end{cases} \Rightarrow a=-1, b=14$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۲ دوازدهم

سال دوازدهم
ریاضی



مثلاث

دوره تناوب و کاربرد آن

۱ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

الف) مینیمم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 2$ برابر با یک است.

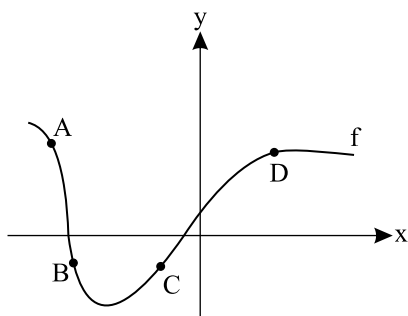
ب) تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.

۲ ضابطه تابعی به فرم $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن -۳ باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۳ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

الف) دوره تناوب تابع تانژانت برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف) اگر دوره تناوب تابع $y = \sin bx$ برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد، مقدار b برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

ب) دامنه تابع $y = \tan(3x)$ برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۵ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف) دوره تناوب تابع $y = 5 \cos \frac{x}{2} + 1$ برابر با 4π است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

ب) تابع تانژانت در بازه $(-\pi, \pi)$ ، تابعی صعودی است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۶ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

الف) دوره تناوب تابع $y = 3 \cos(-\frac{\pi}{4}x)$ برابر با است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۷ دوره تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ را مشخص کنید.

۸ ضابطه تابعی به صورت $y = a \sin bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن π ، مقدار ماکزیمم آن ۶ و مقدار مینیمم آن -۲ باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۹ مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 + 2 \sin 7x$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۱۰ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

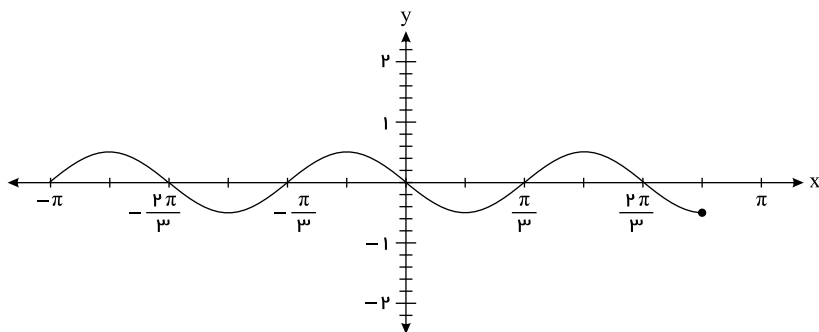
دامنه تابع با ضابطه $y = \tan x$ به صورت $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dots\}$ است.





۱۱ در شکل نمودار زیر، با تعیین مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع، ضابطه آن را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



۱۲ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

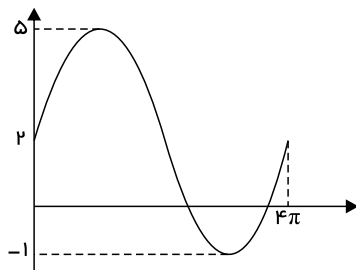
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف تابع تناونت در هر بازه ای که در آن تعریف شده باشد، صعودی است.

۱۳ نمودار داده شده مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. مقادیر a , b و c را محاسبه کنید و ضابطه آن را مشخص نمایید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

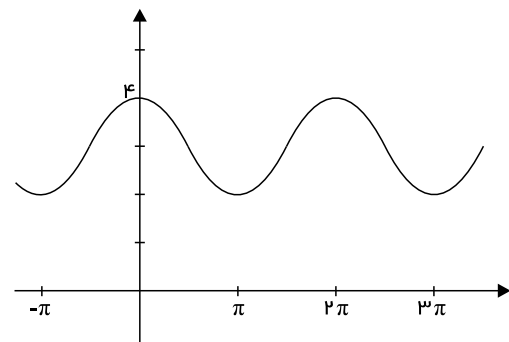
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۴ جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

الف دوره تناوب تابع $y = 7 \sin\left(\frac{-\pi}{4}x\right) + 2$ برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۱۵ نمودار تابع $f(x) = a + \cos bx$ به صورت زیر است. حاصل $a + b$ را به دست آورید. ($b > 0$)



۱۶ ضابطه تابعی به فرم $y = a \cos bx + C$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار می نیمم آن -۲ باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۷ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع $y = 9 - 2\pi \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ را محاسبه کنید.

۱۸ ضابطه تابع به صورت $y = a \cos bx + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار می نیمم آن -۱ باشد.

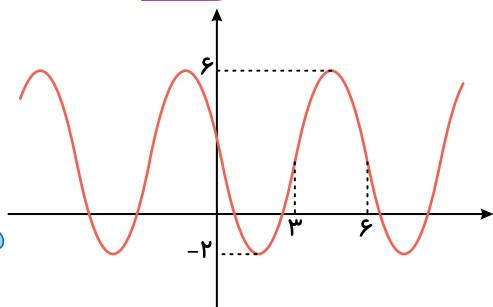
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲



۱۹ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin(bx) + c$ است.

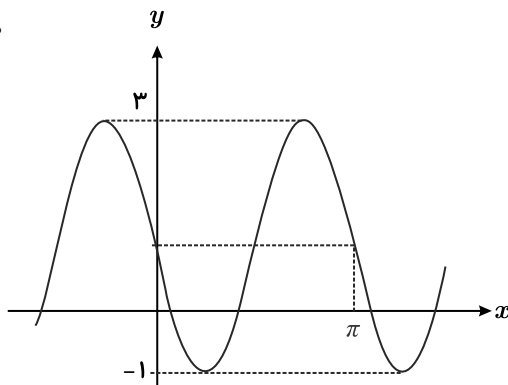
با توجه به نمودار، ضابطه آن را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳



۲۰ نمودار داده شده در شکل زیر مربوط به تابع با ضابطه $y = a \sin bx + c$ است. با فرض $a > 0$ ، مقادیر a ، b و c را به دست آورید.

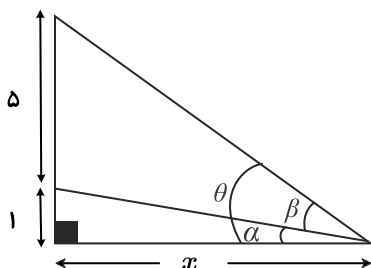
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳



۲۱ نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه β و x به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{5x}{x^2 + 6}$$

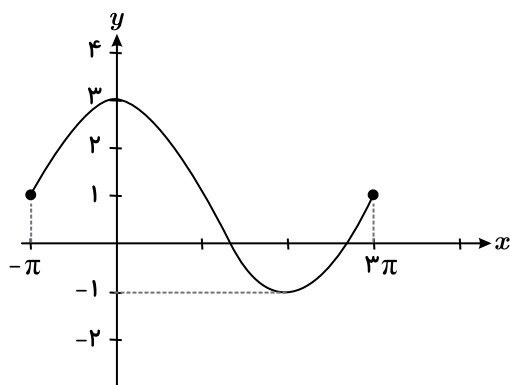
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳



۲۲ نمودار داده شده در شکل مقابل مربوط به تابع یا ضابطه $y = a \cos(bx) + c$ است. اگر $b < 0$ باشد، مقادیر a ، b و c را به دست آورید.

(راه حل نوشته شود.)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳





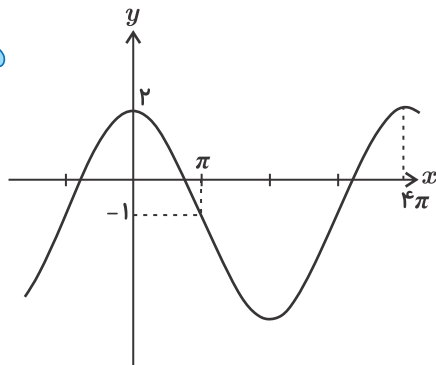
مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

۲۳ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

الف) برد تابع $y = \tan x$ با دامنه $\{\frac{\pi}{3}\} - [\frac{\pi}{3}, \pi]$ برابر است.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

۲۴ قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت مقابل است. مقادیر a ، b و c را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

۲۵ دوره تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = 2 - 3 \sin 4x$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

۲۶ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2 \sin(3x) - 1$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵

۲۷ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵

الف) دوره تناوب تابع $y = 3 \sin(\pi x)$ برابر است.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵

۲۸ معادله $4 \sin^2 x - 4 \cos x - 5 = 0$ را حل کنید و جوابهای کلی آن را بنویسید.

مثلات

معادلات مثلثاتی (دوازدهم)

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

۲۹ معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

۳۰ معادله مثلثاتی $\sin 3x = \sin 2x$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

۳۱ معادله $2 \cos 3x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

۳۲ معادله $2 \sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

۳۳ معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

۳۴ معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

۳۵ ضابطه تابع مثلثاتی سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

۳۶ معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

۳۷ معادله مثلثاتی $2 \cos^2 x + \cos x = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

۳۸ معادله مثلثاتی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

۳۹ معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را در بازه $0 \leq x \leq \pi$ حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

۴۰ معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

۴۱ معادله $2 \sin x \cos x + 3 \cos x = 0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

۴۲ معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

۴۳ جوابهای معادله مثلثاتی $4 \sin x + 2\sqrt{3} = 0$ را در بازه $[0, 2\pi]$ به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

۴۴ معادله $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.۴۵ معادله مثلثاتی $\tan 5x = \tan x$ را حل کنید. سپس جوابهایی از آن را که در بازه $[0, \frac{\pi}{3}]$ قرار دارند، مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳



مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۵

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۴

۴۶. معادله $\cos x(2 \cos x - 7) = 4$ را حل کنید.

۴۷. جواب‌های کلی معادله مثلثاتی $2 + 3 \sin x = \cos 2x$ را به دست آورید.

۴۸. اگر $\tan \alpha = \tan \beta = -\sqrt{2}$ مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ را به دست آورید.

۴۹. معادله مثلثاتی $\sqrt{3} \tan 3x - 1 = 0$ را حل کنید.

۵۰. معادله مثلثاتی $\sin(2\pi + x) \cos x = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.





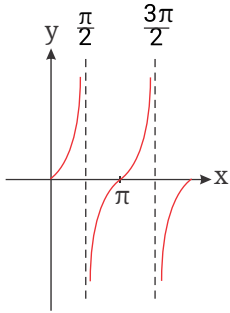
پاسخنامه تشریحی

۱ الف) نادرست - می‌دانیم تابع $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ است. پس داریم:

$$\text{مقدار مینیمم} = -|-3| + 2 = -1$$

ب) نادرست

زیرا همان‌طور که در شکل مشخص است تابع تناوب در یک دوره تناوب خود صعودی است، نه در دامنه.



۲ می‌دانیم تابع $y = a \sin bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$$

$$\begin{cases} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$y = -3 \sin(-2x) \text{ یا } y = 3 \sin(-2x) \text{ یا } y = -3 \sin(2x) \text{ یا } y = 3 \sin(2x)$$

۳
الف

۴
الف

ب

۵
الف
درست

ب
نادرست

۶
الف

$$b = \pm 6$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$y = a \cos bx + c \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\left|-\frac{\pi}{4}\right|} = 8$$

۷ می‌دانیم تابع $y = a \cos bx + c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a| + c$ و مقدار مینیمم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

ماکزیم: $\max = |-3| + 1 = 4$

مینیم: $\min = -|-3| + 1 = -2$

۸ توابع $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ دارای ماکزیم $|a| + c$ و مقدار مینیم $-|a| + c$ و دوره تناوب $\frac{2\pi}{|b|}$ است.

دوره تناوب: $\frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow |b| = 2$

از طرفی:

$$\begin{cases} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

هریک از توابع $y = 4 \sin(2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(2x) + 2$ یا $y = 4 \sin(-2x) + 2$ یا $y = -4 \sin(-2x) + 2$ صحیح است.

۹ می دانیم در تابع $y = a \sin bx + c$ داریم:

مقدار ماکزیم تابع $|a| + c$

مقدار مینیم تابع $-|a| + c$

با توجه به نکته بالا داریم:

$$\begin{cases} \max y = |a| + c = 2 + 1 = 3 \\ \min y = -|a| + c = -2 + 1 = -1 \end{cases}$$

$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}$

۱۱ با توجه به نمودار ضابطه به صورت $y = a \sin bx + c$, $a = -\frac{1}{3}$, $b = 3$ می شود.

$\max y = \frac{1}{3}$, $\min y = -\frac{1}{3}$, $T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \sin 3x$

درست

$$\begin{cases} |a| + c = 5 \\ -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = 2, a = \pm 3$$

$3\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{3}$

$\Rightarrow y = 3 \sin \frac{x}{3} + 2$, $y = -3 \sin(-\frac{x}{3}) + 2$

$T = 2\pi$ $b = 1$ $a = 3$ $a + b = 4$

$$\frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

هریک از توابع $y = -3 \cos(-\pi x) + 1$ یا $y = 3 \cos(-\pi x) + 1$ یا $y = 3 \cos(\pi x) + 1$ یا $y = -3 \cos(\pi x) + 1$ صحیح است.

$\max = |a| + c = |-2\pi| + 9 = 2\pi + 9$

$\min = -|a| + c = -|-2\pi| + 9 = -2\pi + 9$

$T = \frac{2\pi}{|\frac{1}{3}|} = 6\pi$



$$T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi$$

$$|a| = 2, c = 1 \Rightarrow y = -2 \cos(\pi x) + 1 \quad \text{یا} \quad y = 2 \cos(\pi x) + 1$$

$$T = 6 \rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \rightarrow |b| = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max = 6 \\ \min = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{array} \right. \rightarrow 2c = 4 \rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 4$$

$$y = a \sin bx + c \rightarrow y = -4 \sin \frac{\pi}{3} x + 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ |a| = 2 \xrightarrow{a > 0} a = 2 \end{array} \right.$$

$$T = \pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 2 \xrightarrow{b < 0} b = -2$$

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{6}{x} - \frac{1}{x}}{1 + \frac{6}{x^2}} = \frac{\frac{5}{x}}{\frac{x^2 + 6}{x^2}} = \frac{5x}{x^2 + 6}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |a| + c = 3 \\ -|a| + c = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 1 \\ |a| = 2 \Rightarrow a = 2 \end{array} \right.$$

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \frac{\max + \min}{2} \rightarrow c = 1 \\ |a| = \frac{\max - \min}{2} \rightarrow |a| = 2 \rightarrow a = 2 \end{array} \right.$$

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{2}$$

$$(-\infty, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty) \quad \text{یا} \quad \mathbb{R} - (0, \sqrt{3})$$

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2}$$

$$f(\pi) = -1 \Rightarrow a \cos(b\pi) + c = -1 \xrightarrow{|b| = \frac{1}{2}} a \times 0 + c = -1 \Rightarrow c = -1$$

(روش اول محاسبه a):

$$\max = 2 \Rightarrow |a| + c = 2 \xrightarrow{c = -1} |a| = 3 \xrightarrow{a > 0} a = 3$$

(روش دوم محاسبه a):

$$f(0) = 2 \Rightarrow a + c = 2 \xrightarrow{c = -1} a = 3$$

$$\max = |-3| + 2 = 5, \quad T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$$

اگر مقادیر ماکزیمم و دورۀ تناوب نمودار تابع از طریق روش هندسی (رسم نمودار تابع و مشخص کردن دورۀ تناوب و ماکزیمم) مشخص شود، به تناسب نمره تعلق گیرد.

$$T = \frac{2\pi}{3} \quad \max = 1 \quad \min = -3$$

۲: در تابع $T = \frac{2\pi}{|b|}, y = a \sin bx + c$ بنابراین:

$$y = \sqrt{2} \sin(\pi x) \Rightarrow T = \frac{\sqrt{2}\pi}{|\pi|} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \sin^2 x - \sqrt{2} \cos x - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}(1 - \cos^2 x) - \sqrt{2} \cos x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x + 1 = 0 \Rightarrow (\sqrt{2} \cos x + 1)^2 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi \pm \left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos \sqrt{2}x = \sqrt{2} \cos^2 x - 1 \quad \text{می دانیم:}$$

$$\sqrt{2} \cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(\sqrt{2} \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin \sqrt{2}x = \sin \sqrt{2}x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi + \sqrt{2}x \Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sqrt{2}x = (\sqrt{2}k + 1)\pi - \sqrt{2}x \Rightarrow x = \frac{(\sqrt{2}k + 1)\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\cos \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi \pm \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}k\pi}{1} \pm \frac{\pi}{1\sqrt{2}} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi + \pi - \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{1\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos \sqrt{2}x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos \sqrt{2}x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi + x \\ \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi \\ \sqrt{2}x = \sqrt{2}k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \\ x = k\pi + \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{دوره تناوب: } T = \frac{\sqrt{2}\pi}{|b|} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}}$$

$$|a| = 1, c = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sin \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} \quad y = -\sin \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad (\text{ق ق غ})$$

$$\cos x(\sqrt{2} \cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sqrt{2} \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi \pm \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sqrt{2} \sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \sqrt{2}k\pi + \frac{\pi}{4}, x = \sqrt{2}k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(\sqrt{2} \cos x - 1) = 0$$



$$\begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x (2 \sin x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ \sin x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$\sin x = \frac{-3}{2}$ قابل قبول نیست.

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{12} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{12} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \sin x + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{[0, 2\pi]} \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} \\ x = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{روش اول: } \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \end{cases}$$

$$(k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2 \sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\text{روش دوم: } \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Delta x = k\pi + x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

(جواب‌هایی قابل قبول هستند که باقی‌مانده عدد صحیح k بر ۴ برابر ۲ نباشد.) ($k \in \mathbb{Z}, k \neq 4q + 2, q \in \mathbb{Z}$)

$$k = 0 \rightarrow x = 0, k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x (2 \cos x - 3) = 4 \Rightarrow 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 4 \quad (\text{غ ق}) \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi + \left(\frac{2\pi}{3}\right), x = 2k\pi - \left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$2 + 3 \sin x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow 2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6} \\ x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

استفاده از روش هندسی (رسم نمودار توابع و مشخص کردن دقیق محل تلاقی) برای رسیدن به پاسخ نیز صحیح است.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-\sqrt{2}\sqrt{2}}{1 - (-\sqrt{2})\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\tan \sqrt{2}x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2}x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{1\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} \sin(\sqrt{2}\pi + x) = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}\pi + x = k\pi \Rightarrow x = k\pi - \sqrt{2}\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\sqrt{2}\pi + x) = \sin x \Rightarrow \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin(\sqrt{2}\pi + x) = \sin x \Rightarrow \sin x \cos x = 0 \Rightarrow \sin \sqrt{2}x = 0 \Rightarrow \sqrt{2}x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{\sqrt{2}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

۴۹

۵۰ روش اول:

روش دوم:

روش سوم:



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۳
دوازدهم

سال دوازدهم
ریاضی



حد

حد نامتناهی

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۱ حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 2x^2 + 1}{1 + 8x - x^2}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۲ حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۳ حاصل حدود زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 7}{x^5 - 4x + 3}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

ب

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x + x}{x^2}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴

حدود زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{4 - x^2}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۵ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف

حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \left(\frac{x+1}{\tan x} \right)$ برابر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۶ اگر $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 3}{(2-x)^3} = +\infty$ باشد، حدود a را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۷ درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید.

الف

حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$ برابر $-\infty$ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۸ حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.



الف

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{5x}{|2x - 1|}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

ب

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} \frac{x + 3}{x^2 + 6x + 9}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۹. حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x] - 2}{3 - x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 1}{x - 5} - \frac{2}{x} \right)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۱۰. حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

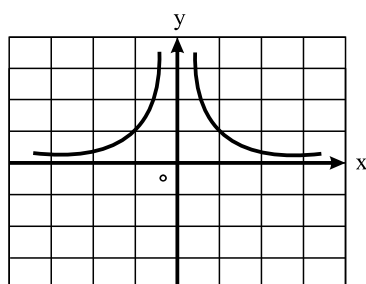
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{(x - 1)^2}$$

ب

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x - 1}{2 + x - x^4}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۱. با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ برابر است با

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۲. درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف

حاصل حد $\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{1}{\sin x}$ برابر با $-\infty$ است.

۱۳. حد زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{|x-2|}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\frac{4}{x} - 2}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۴. حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - x^3}{2x - 1}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{(x-3)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 4x^2}{-x^3|x| - 2}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۵. حدهای زیر را محاسبه کنید. (نماد $[]$ علامت جزء صحیح است).

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^3 + 2x + 1)$$

۱۶. حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

ب

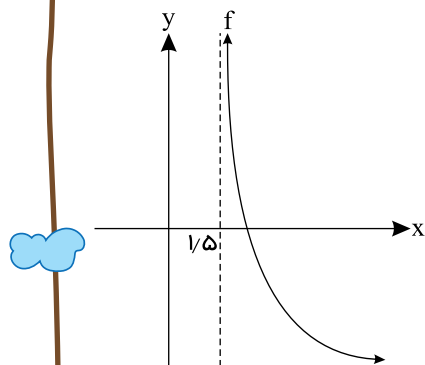
۱۷. جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.



الف

با توجه به نمودار تابع f ، حاصل $\lim_{x \rightarrow (1/5)^+} f(x)$ برابر با است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۸. حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{[x] - 2}{|3x - 1|}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4x + 2}{5 - x} - \frac{1}{x} \right)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۹. درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف

اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 5$ ، آن گاه $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = 5$.

۲۰

حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 5x + [-x]}{2x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{5 - x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۲۱. حدود زیر را در صورت وجود بیابید. (نماد جزء صحیح است).

الف

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[x]}{\cos x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - x^4}{2x^2 + 3x + 1}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

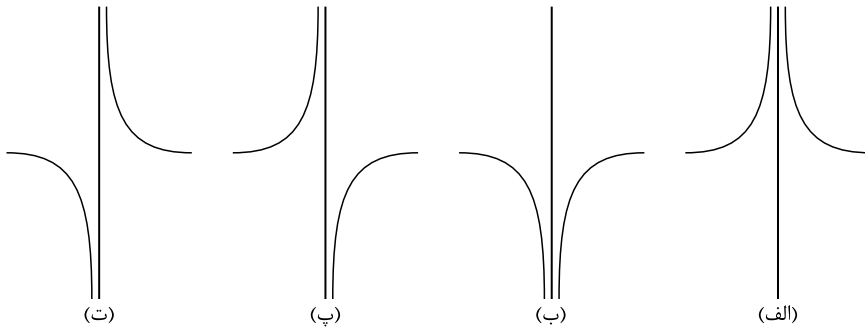


مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۲ * مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{x - 4x^3}{x^3 + 5}$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۳ * کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{2[x]}{4 - x}$ ، در نزدیکی مجانب قائم آن است؟ دلیل خود را بنویسید.



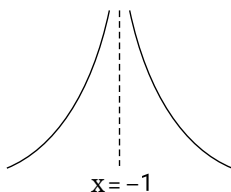
مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۲۴ * کدام یک از خطوط $x = 3$ و $x = -1$ مجانب قائم تابع $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x - 3}$ می باشد؟ دلیل ارائه کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۵ * مجانب قائم منحنی تابع $f(x) = \frac{1}{x - |x|}$ را به دست آورید.

۲۶ * اگر رفتار تابع $f(x) = \frac{x + 3}{x^2 + bx + c}$ در اطراف نقطه $x = -1$ به صورت شکل زیر باشد، مقادیر c, b را به دست آورید.



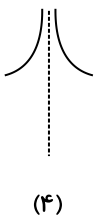
مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

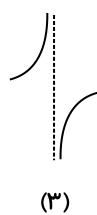
۲۷ * نمودار تابع $f(x) = \frac{x + 1}{x^3 + x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۲۸ * کدام شکل زیر وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{1 - \cos x}$ را در همسایگی $x = 0$ نمایش می دهد؟



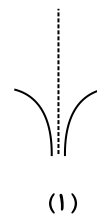
(۴)



(۳)



(۲)



(۱)

حد

حد در بی نهایت

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۲۹ * جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

الف * حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 2}$ برابر با است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳۰ * حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x^2}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹





ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{4x^3 + 2x - 1}$$

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

۳۱* حدود توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 10x + 25}$$

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4 - x + x^2}{5 - 2x^2}$$

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳

مرجع ۱: امتحان نهایی-۱۳۹۹

۳۲* نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:

$$f(1) = f(-2) = 0 \quad (\text{الف})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad (\text{ب})$$

خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد. (پ)

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

۳۳* مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{3x}{x^3 - 1}$ را بیابید.۳۴* فرض کنید $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ، محل تقاطع مجانب‌های آن، نقطه $(2, 1)$ است. اگر این تابع از نقطه $(-1, 0)$ بگذرد، ضابطه تابع را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

۳۵* مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2}$ را در صورت وجود بیابید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۸

۳۶* مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{x+3}{2-x}$ را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

۳۷* مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{x^2+x}{x^2-x}$ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

۳۸* جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۲

الف) مجانب‌های افقی تابع $y = \frac{|x|+1}{2x-1}$ برابر و است.

مرجع: امتحان نهایی-۱۳۹۹

۳۹* مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $y = \frac{1+2x^2}{1-x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۰

۴۰* مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

۴۱* اگر خط $y = 2$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax^2+1}{2x^2-3x}$ باشد، مقدار a را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۱

۴۲* مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $\frac{1-x^2}{x^2+x}$ را در صورت وجود بیابید.۴۳* مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ را در صورت وجود به دست آورید. سپس وضعیت نمودار تابع f را در همسایگی مجانب قائم آن نمایش دهید.

مرجع: امتحان نهایی-۱۴۰۳



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

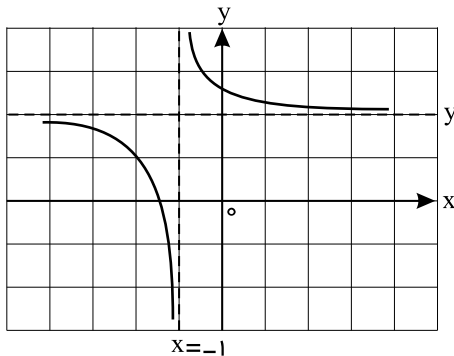
۴۴ الف) مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$ را به دست آورید.
ب) وضعیت نمودار $f(x)$ را در همسایگی مجانب قائم آن نمایش دهید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۵ مجانب‌های قائم و افقی نمودار تابع $f(x) = \frac{5x + 2}{x^2 - 4}$ را در صورت وجود به دست آورید. (راه حل نوشته شود).

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۴۶ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $f(x) = \frac{x}{x^2 - 9}$ را در صورت وجود بیابید.



۴۷ اگر نمودار تابع $f(x) = \frac{(a+1)x + 7}{2x + b}$ به صورت مقابل باشد، آنگاه مقدار $a + b$ را پیدا کنید.
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۴۸ مجانب‌های قائم و افقی منحنی تابع $y = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$ را در صورت وجود بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۹ مجانب‌های قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{-4x + 3}{2x + 1}$ را در صورت وجود به دست آورید. (راه حل نوشته شود).

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

$$y = \frac{3x^2 - 3}{2x^2 - 3x + 1}$$





پاسخنامه تشریحی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3 + 2x^2 + 1}{1 + 8x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x] + \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{[x]}{\sin x} + \cot x \right) = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 7}{x^5 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin^2 x}{x^2} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{0^-} = 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 1}{4 - x^2} = \frac{5}{4 - 4^+} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

حد هر چند جمله‌ای به صورت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ در $\pm\infty$ برابر حد جمله‌ای از آن است که دارای بزرگ‌ترین درجه است. لذا داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 + 1}{-3x^5 + 3x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^5}{-3x^5} = -\frac{4}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 3}{(2 - x)^2} = \frac{2a - 3}{0^-} = +\infty \Rightarrow 2a - 3 < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x + 1}{9 - x^2} = \frac{3^+ + 1}{9 - 9^+} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{(x + 3)}{(x + 3)^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

الف

الف
روش اول:

روش دوم:

الف

ب

الف

هرچه x به 2^+ می‌رود، x^2 هم به 4^+ میل می‌کند پس داریم:

ب

الف
صفر

الف

الف
درست

هرچه x از سمت راست به ۳ نزدیک‌تر شود، مقادیر x^2 از بالا به ۹ میل خواهد کرد؛ پس داریم:

الف

ب

۹
الف

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = 3$ داریم:

$$\frac{[3^+] - 2}{3 - 3^+} = \frac{3 - 2}{0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

ب

با استفاده از قاعده پرتوان برای کسر اول و همچنین $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{x} - 0 \right) = 3 - 0 = 3$$

۱۰
الف

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{-x^2} = -1$$

با توجه به نمودار هر چه x به صفر نزدیک تر می شود (چه از راست و چه از چپ)، مقادیر $f(x)$ به سمت $+\infty$ میل می کند.

۱۱
+

۱۲
الف

درست

۱۳
الف

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow 2^-} x - 2 = 0$ و $|x - 2|$ همواره عددی نامنفی است داریم:

$$\frac{3}{0^+} = +\infty$$

ب

با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ داریم:

$$\frac{3 + 0}{0 - 2} = \frac{-3}{2}$$

۱۴
الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \frac{+4}{0^+} = +\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty$$

۱۵
الف

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[2x] - 1}{x - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^2 + 2x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 = +\infty$$

۱۶
الف



$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{(x-3)^2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{-x^2(-x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3} = 0$$

۱۷
الف
+∞

۱۸
الف

$$\frac{-2}{0^+} = -\infty$$

ب

$$-4$$

۱۹
الف
نادرست

۲۰
الف

$$\frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x} = +\infty$$

۲۱
الف

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \frac{[x]}{\cos x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^2}{2x^2+3x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{2} = -\infty$$

۲۲

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-2x^2}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2 \Rightarrow y = -2$$

۲۳

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2[x]}{2-x} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2[x]}{2-x} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

۲۴ اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ آنگاه خط $x = a$ مجانب قائم است و برای پیدا کردن مجانب قائم باید ابتدا ریشه‌های مخرج را بیابیم.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x-3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x-3} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{1}{3}$$

خط $x = -1$ مجانب قائم منحنی f است ولی $x = 3$ مجانب قائم برای تابع f نیست.

۲۵

$$f(x) = \frac{1}{x - |x|} = \begin{cases} \text{تعریف نشده} & x > 0 \\ \frac{1}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2x} = -\infty \Rightarrow x = 0 \quad \text{مجانِب قائم}$$

۲۶ با توجه به نمودار مخرج باید در نقطه $x = -1$ ریشه مضاعف داشته باشد. پس:

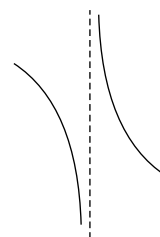
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

با توجه به نمودار $x = -1$ مجانب قائم است؛ پس ریشه مخرج $(x^2 + 2x + c)$ است داریم:

$$(-1)^2 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

۲۷ نمودار به صورت زیر است، زیرا:

ابتدا ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:



۲۸ شکل شماره ۴

۲۹

الف

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

۳۰

الف

با فاکتورگیری از صورت کسر و ساده کردن آن داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

ب

با توجه به قاعده پرتوان داریم:

$$\text{قاعده پرتوان: } ax^n + bx^{n-1} + \dots + x \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty ax^n$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{2x^2 + 2x - 1} \xrightarrow{\text{بنابر قاعده پرتوان}} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1} = 1$$

۳۱

الف

$$\lim_{x \rightarrow (-5)^-} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 + 10x + 25} = \lim_{x \rightarrow -5^-} \frac{(x+5)(x-3)}{(x+5)(x+5)} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

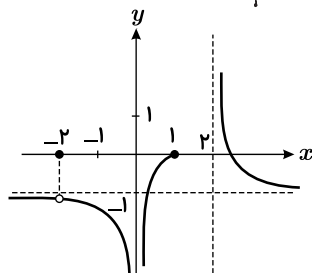
ب

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 4}{-2x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{-2x^2} = -\frac{1}{2}$$

۳۲ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ یعنی تابع در هر دو طرف $x = 0$ به $-\infty$ میل می‌کند و خط $x = 0$ مجانب قائم است. همچنین چون $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ پس تابع در سمت راست $x = 2$

به $+\infty$ میل می‌کند و خط $x = 2$ نیز مجانب قائم تابع است.

توجه کنید که می‌توان نمودارهای متفاوتی برای این تابع رسم کرد.



۳۳

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:
چون $x = 1$ صورت را صفر نمی‌کند، پس مجانب قائم تابع است.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ مجانب قائم}$$

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

۳۴

$$cx + d = 0 \Rightarrow d = -2c \quad (-1, 0) \Rightarrow \frac{-a+b}{-c+d} = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax}{cx} = 1 \Rightarrow a = c \quad f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

۳۵

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \text{ فاقد مجانب قائم}$$

۳۶

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+3}{2-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{-x} = -1 \Rightarrow y = -1 \text{ مجانب افقی}$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ مجانب قائم}$$

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$x = 2 \text{ مجانب قائم است، زیرا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{2-x} = \frac{5}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{2-x} = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

۳۷

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 - x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{مجانب قائم} \\ x = 0 & \text{قابل قبول نیست.} \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x} \rightarrow f(x) = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} \rightarrow f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x \neq 0$$

که در این حالت می‌بینیم $x = 0$ ریشه مخرج نبوده و نمی‌تواند مجانب قائم $f(x)$ باشد.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{2}{0} = \infty \rightarrow \text{مجانب قائم است.}$$

مجانب افقی برابر است با:

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow y = 1$$

۳۸

الف

$$y = -\frac{1}{2} \text{ و } y = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \Rightarrow y = -2$$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1} \frac{1 + 2x^2}{1 - x^2} = \infty$$

پس $x = \pm 1$ مجانب قائم هستند.

۳۰

برای بررسی داشتن مجانب قائم، ریشه‌های مخرج را پیدا می‌کنیم:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{مجانب‌های قائم}$$

برای داشتن مجانب افقی، حد تابع وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1 - 2x^2}{x^2 - 1} = -2 \Rightarrow y = -2 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 3x} = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1 \quad \text{مجانب افقی}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{مجانب قائم نیست} \\ \text{مجانب قائم} \end{array}$$

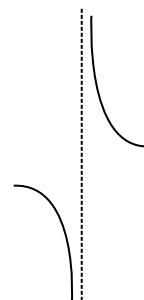
$$f(x) = \frac{(x-3)}{(x-3)(x+3)}, \text{ خط } x = 3 \text{ شرایط مجانب قائم را ندارد. } (\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{6})$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad \text{مجانب افقی}$$

$x = -3$ مجانب قائم منحنی تابع f است.



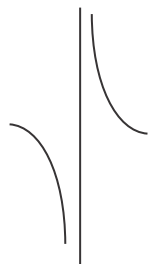
۳۴ الف) خط $x = 1$ مجانب قائم است؛ زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2}{0^-} = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{0^+} = +\infty$$

پس خط $y = 0$ مجانب افقی است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2} = 0$$

(ب)



۴۵

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x+2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{12}{0^-} = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{12}{0^+} = +\infty$$

در نتیجه خط $x = 2$ مجانب قائم تابع است.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{-8}{0^+} = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{5x+2}{x^2-4} = \frac{-8}{0^-} = +\infty$$

در نتیجه خط $x = -2$ مجانب قائم تابع است.

اگر با محاسبه ریشه‌های مخرج (که ریشه صورت نیست)، به مجانب قائم بودن $x = \pm 2$ اشاره شود پاسخ صحیح است.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \text{ مجانب‌های قائم}$$

۴۶

$$2x + b = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2} \Rightarrow \frac{-b}{2} = -1 \Rightarrow b = 2$$

$$\frac{a+1}{2} = 2 \Rightarrow a = 3 \quad a + b = 5$$

$$x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -3 \text{ مجانب قائم ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x+1}{x^2+3} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ مجانب افقی}$$

۴۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x+3}{2x+1} = -2 \text{ یا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x+3}{2x+1} = -2 \text{ خط } y = -2 \text{ مجانب افقی تابع است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} \frac{-4x+3}{2x+1} = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^+} \frac{-4x+3}{2x+1} = +\infty \text{ خط } x = \frac{1}{2} \text{ مجانب قائم تابع است.}$$

۵۰

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x + 3}{2x - 1} = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{3x^2 - 3}{2x^2 - 3x + 1} = \pm\infty$$

$$\text{پس } x = \frac{1}{2} \text{ تنها مجانب قائم تابع است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 - 3}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{مجانب افقی تابع } y = \frac{3}{2} \text{ است.}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۴ دوازدهم

سال دوازدهم
ریاضی



مشتق

تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

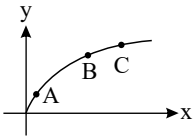
۱ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف

با توجه به شکل روبه‌رو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه بزرگتر از شیب خط مماس بر منحنی در

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

نقطه B است



مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته نباشد، آنگاه f در a مشتق‌پذیر هم نیست.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

ب

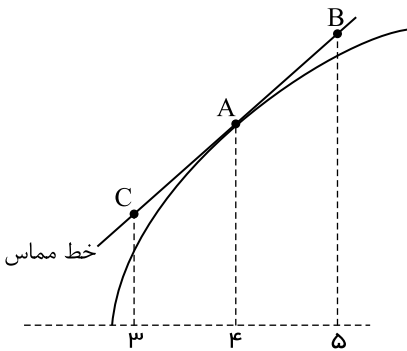
تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a) = 0$ و هم $f(a) = 0$ باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳

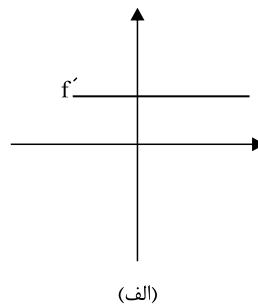
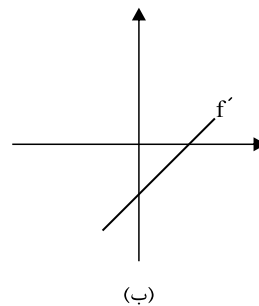
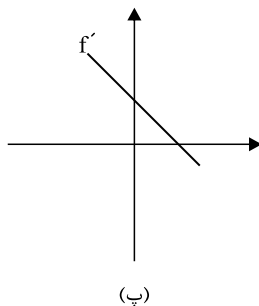
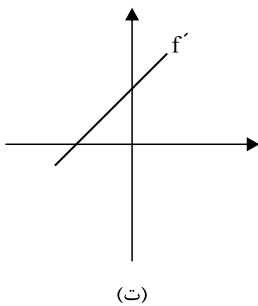
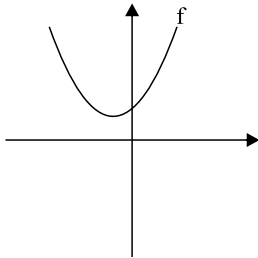
برای تابع f در شکل مقابل داریم: $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 25$. با توجه به شکل مختصات نقاط B و C را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

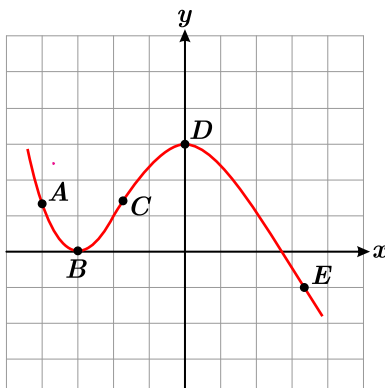


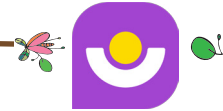
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴ با توجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.



۵ با توجه به نمودار تابع مقابل:





مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

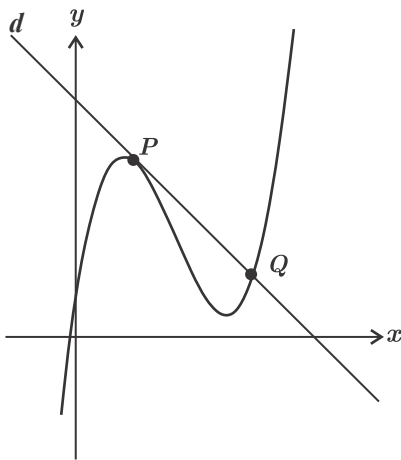
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟
 ب در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟
 پ در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟
 ت شیب نقاط D و A را با هم مقایسه نمایید.
 ۶ اگر $f(2) = 7$ و $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{2x - 4} = 5$ باشد، مشتق تابع $g(x) = xf(x)$ را در $x = 2$ به دست آورید.

۷ مطابق شکل روبرو خط d در نقطه $P(1, 3)$ بر نمودار تابع f مماس و در نقطه $Q(2a + 1, a)$ آن را قطع می کند. اگر $f'(1) = -1$ مقدار a را بیابید.
 مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴



۸ مشتق پذیری تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$ را در نقطه $x = 2$ با استفاده از تعریف مشتق بررسی کنید.
 مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۹ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x) = x|x - 1|$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.
 مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۱۰ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)
 مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 2x + 1}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

$$g(x) = \cos^3(2x)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۱ در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

الف اگر $f'(2) = -1$ و $g'(2) = 3$ ، در این صورت $(2f + 3g)'(2)$ برابر با است.

۱۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

$$f(x) = (4x^3 - 7)(2x - 1)^4$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰



ب

$$g(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۳ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف

$$f(x) = (-3x^2 + x)^5 (2x)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

ب

$$g(x) = 5 \tan x + \sin x^2$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

پ

$$h(x) = \frac{2}{x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۱۴ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف

اگر $f'(1) = 2$ و $g'(1) = -3$ باشد، حاصل $(3f + g)'(1)$ برابر ۹ است.

۱۵ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف

$$f(x) = (x^4 + 2x)(\sqrt{x})$$

$$g(x) = 3 \tan x - \sin^3(2x)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۱۶ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

الف

$$f(x) = \frac{5 \tan x}{1 - \sin x}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

ب

$$g(x) = \cos^5(x^2)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

پ

$$h(x) = (3x + 5)^6$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۱۷ اگر $g(x) = \sqrt{x}$ و $f(x) = 2x^3 + 1$ باشند، حاصل $(f + g)'(4) + (f \times g)'(1)$ را به دست آورید.



۱۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

(الف)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - 6x + 1}$$

(ب)

$$g(x) = 2 \tan x + \cos^5(2x^3)$$

۱۹ جاهای خالی را با توجه به عبارت‌های داخل پرانتز، کامل کنید. ([] نماد جزء صحیح است).

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در $x = 1$ برابر است. (صفر، یک)

۲۰ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن الزامی نیست).

(الف)

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 5x}{x - 3}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

(ب)

$$g(x) = (\cos^3 x)(\tan x)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۱ معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطه‌ای به طول $x = 0$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

(الف)

$$f(x) = (\Delta x^3 - x)^9 (\sqrt{2x+1})$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

(ب)

$$g(x) = \frac{4 \tan x}{3x^2 - 1}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۲۳ اگر $f'(1) = 3$, $g'(1) = 5$ و $f(1) = 1$, مقدار مشتق $(f+g)'$ در $x = 1$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۲۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

(الف)

$$f(x) = (1 + \sin \Delta x)^3$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

(ب)

$$g(x) = (x^3 - \Delta x)(\sqrt{x^2 + 1})$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۲۵ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

(الف)

$$f(x) = (\sqrt{x} + 3x)^y$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴



ب

$$g(x) = \cos^3(4x)$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۲۶ اگر $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x$ مقدار $f''(\frac{\pi}{6})$ را حساب کنید.

۲۷ اگر $f(x) = \cos 2x$ باشد، مقدار $f''(\frac{\pi}{8})$ را به دست آورید.

۲۸ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف مشتق دوم تابع $y = \sin x$ در نقطه $x = \frac{\pi}{3}$ برابر است.

۲۹ درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف اگر $f(x) = \sin x$ ، آن‌گاه $f'(\frac{\pi}{3}) = f''(\pi)$

۳۰ مشتق دوم تابع $f(x) = 3 \sin(4x) + 1$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{12}$ به دست آورید.

مشتق

بررسی مشتق‌پذیری

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۳۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x - 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۳۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

الف تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 0$ مشتق‌پذیر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۳۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = 4x(1 - |x|)$ را در نقطه $x = 0$ بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۳۴ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف اگر تابع f در $x = a$ پیوسته، آنگاه f در $x = a$ مشتق‌پذیر نیست.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۳۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۳۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف تابع f روی بازه (a, b) مشتق‌پذیر است هرگاه، در هر نقطه این بازه مشتق‌پذیر باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

ب اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۳۷ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} |x| & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$ را در نقطه $x = 0$ به کمک تعریف مشتق بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۳۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

الف تابع $y = \begin{cases} 2x + 1 & x \geq 1 \\ 2x - 1 & x < 1 \end{cases}$ در نقطه به طول $x = 1$ مشتق‌پذیر است.

۳۹ تابع $f(x) = |4 - x^2|$ را در نظر بگیرید. با استفاده از تعریف مشتق، شیب نیم‌مماس چپ تابع را در نقطه $x = -2$ محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۴۰ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x - 2|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۱ نشان دهید نقطه‌ای به طول $x = -1$ ، نقطه گوشه‌ای برای تابع $f(x) = |x^2 + x|$ است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و در این نقطه، مشتق چپ و راست نامتناهی باشد آنگاه $f'(a)$ وجود ندارد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۳ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

خط مماس قائم منحنی تابع $y = \sqrt[3]{x}$ است.

الف

مشتق

آهنگ تغییر

۴۴ یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری در لحظهٔ $t = 9$ چقدر است؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۵ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$ در نقطهٔ $x = 2$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه‌ای آن در $x = -1$ است؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۶ معادلهٔ حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$ ، بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

زمانی $[0, 4]$ با هم برابر هستند؟۴۷ معادلهٔ حرکت متحرکی به صورت $f(t) = t^2 - t + 10$ بر حسب متر در بازهٔ زمانی $[0, 5]$ داده شده است. در کدام لحظه در این بازه،

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط با هم برابر هستند؟

۴۸ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t + 3$ بر حسب متر است. $f(t)$ بر حسب ثانیه است. (مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف) سرعت متوسط تابع در بازه $[0, 3]$ را به دست آورید.ب) سرعت لحظه‌ای تابع را در $t = 4$ به دست آورید.۴۹ اگر سرعت متوسط یک متحرک در یک بازه برابر ۲ متر بر ثانیه باشد و معادله حرکت متحرک به صورت $f(t) = t^3 - t$ بر حسب متر

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

باشد. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای متحرک برابر سرعت متوسط آن است.

۵۰ آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $g(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نقطهٔ $x = 27$ به دست آورید. (مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴



پاسخنامه تشریحی

الف ۱

۲

الف

ب

درست؛ با توجه به تعریف واضح است.

نادرست؛ برای مثال تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید:

$$f(0) = 0, \quad f'(x) = 2x \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$A(4, 25) \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 25}{5 - 4}$$

$$B(5, 26, 5)$$

$$C(3, 23, 5)$$

۳

۴

۵

الف

E

B

C

ب

پ

ت

$$m_D > m_A$$

۶

$$\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{1}{2} f'(2) = 5 \Rightarrow f'(2) = 10$$

$$g'(x) = 1 \times f(x) + x \times f'(x) \Rightarrow g'(2) = 1 \times 7 + 2 \times 10 = 27$$

۷ خط d در نقطه $P(1, 3)$ بر تابع $f(x)$ مماس است؛ بنابراین شیب خط d برابر ۱- است.

روش اول: معادله خط d به صورت زیر است:

$$y - 3 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 4 \xrightarrow{Q(2a+1, a) \in d} a = -2a - 1 + 4 \Rightarrow a = 1$$

روش دوم:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a - 3}{2a + 1 - 1} = -1 \Rightarrow a = 1$$

۸ روش اول:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1 \end{cases}$$

پس $f(x)$ در $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

روش دوم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h)^2 - 4(2+h)} + 0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$



پس $f(x)$ در $x = 2$ مشتق پذیر نیست.

۹ روش اول:

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{x-1} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x(x-1)}{x-1} = -1$$

با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, نتیجه می شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

روش دوم:

$$f'_+(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h)|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} (1+h) = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{(1+h)|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -(1+h) = -1$$

با توجه به اینکه $f'_+(1) \neq f'_-(1)$, نتیجه می شود که تابع f در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

۱۰

می دانیم:

$$\left(\frac{u}{V}\right)' = \frac{u' \cdot V - V' \cdot u}{V^2}, \quad (u^n)' = n \cdot u' \cdot u^{n-1}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 1)(2x^2 + 2)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$$

می دانیم:

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$g'(x) = -\sqrt{2} \cos^2(2x) \sin(2x)$$

$$(2f + 3g)'(2) = 2f'(2) + 3g'(2) = \frac{f'(2) = -1, g'(2) = 3}{-2 + 9} = 7$$

$$f(x) = (12x^2)(2x-1)^2 + 2(2x-1)^2(2)(2x^2-7)$$

$$g'(x) = \frac{-\cos x(\cos x) - (-\sin x)(1 - \sin x)}{\cos^2 x}$$

$$f'(x) = 5(-6x+1)(-3x^2+x)^2(2x) + (2)(-3x^2+x)^2$$

$$g'(x) = 5(1 + \tan^2 x) + 2x \cos^2 x$$

$$h'(x) = \frac{-2}{x^2}$$

۱۴

نادرست

۱۵

الف

$$f'(x) = (x^r + 2)(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^r + 2x)$$

$$g'(x) = 2(1 + \tan^r x) - 2 \sin^r x \cos^r x$$

$$f'(x) = \frac{\Delta(1 + \tan^r x)(1 - \sin x) - (-\cos x)(\Delta \tan x)}{(1 - \sin x)^r}$$

$$g'(x) = -2 \cos^r(x^r) \times x^r \times \sin(x^r)$$

$$h'(x) = 2 \times 2 \times (2x + 5)^5$$

$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = (2(2))^r + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 16 + \frac{1}{2}$$

$$f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = (2)(1) + \left(\frac{1}{2}\right)(2) = 2 + \frac{2}{2}$$

$$(f+g)'(2) + (f \times g)'(1) = 16 + \frac{1}{2} + 2 + \frac{2}{2} = \frac{21}{2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(x^r - 2x + 1) - (2x^r - 2)\sqrt{x+1}}{(x^r - 2x + 1)^r}$$

$$g'(x) = 2(1 + \tan^r x) + (\Delta)(2x^r)(-\sin(2x^r)) \cos^r(2x^r)$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \Delta\right)(x - 2) - (1)(\sqrt{x} - \Delta x)}{(x - 2)^r}$$

$$g'(x) = (2(-\sin x) \cos^r x)(\tan x) + (\cos^r x)(1 + \tan^r x)$$

$$f'(\infty) = m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[r]{x} - \infty}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[r]{x}^r} = +\infty, A(\infty, \infty)$$

$$f'(x) = 2(1 \Delta x^r - 1)(\Delta x^r - x)^{\Delta}(\sqrt{2x+1}) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)(\Delta x^r - x)^{\Delta}$$

$$g'(x) = \frac{2(1 + \tan^r x)(2x^r - 1) - (2x) \times (2 \tan x)}{(2x^r - 1)^r}$$

ب

١٦

الف

ب

پ

١٧

١٨ الف

ب

١٩

الف صفر

٢٠

الف

ب

٢١

معادله مماس قائم: $x = \infty$

٢٢

الف

٢٣



$$((f+g) \circ f)'(1) = f'(1) \times (f+g)'(f(1)) = f'(1) \times (f'(1) + g'(1)) = 3 \times (3+5) = 24$$

۲۴

الف

$$f'(x) = (3)(5 \cos 5x)(1 + \sin 5x)^2$$

ب

روش اول:

$$g'(x) = (3x^2 - 5)(\sqrt{x^2 + 1}) + \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}}\right)(x^2 - 5x)$$

روش دوم:

$$g'(x) = (3x^2 - 5)(\sqrt{x^2 + 1}) + \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}\right)(2x)(x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}(x^2 - 5x)$$

۲۵

الف

$$f'(x) = (7)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 3\right)(\sqrt{x} + 3x)^2$$

ب

$$g'(x) = (3)(4)(-\sin 4x)(\cos^2 4x)$$

۲۶

$$f'(x) = \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} + 2 \sin 2x = 3 \sin 2x$$

$$f''(x) = 6 \cos 2x \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6 \cos \frac{\pi}{3} = 3$$

۲۷

$$f'(x) = -2 \sin 2x \Rightarrow f''(x) = -2 \cos 2x$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\sqrt{2}$$

۲۸

الف

-۱

۲۹

الف

درست

۳۰

$$f'(x) = 12 \cos(4x) \Rightarrow f''(x) = -48 \sin(4x)$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{12}\right) = -48 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -24\sqrt{3}$$

۳۱

تابع در $x = 1$ پیوسته است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} = 2, \quad f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} = 3$$

 $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست.

۳۲

الف

نادرست

۳۳

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 4x^2, & x \geq 0 \\ 4x + 4x^2, & x < 0 \end{cases}$$

تابع مشتق پذیر است.

$$\begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x - 4x^2}{x} = 4 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x + 4x^2}{x} = 4 \end{cases} \Rightarrow f'_+(0) = f'_-(0)$$

۳۴

الف

نباشد

۳۵

الف

نادرست

۳۶

الف

درست

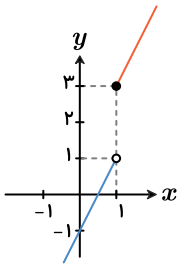
ب

نادرست

۳۷ f پیوسته است.

۳۸

الف

نادرست؛ مطابق نمودار این تابع دوضابطه‌ای، $x = 1$ طول نقطه ناپیوستگی است و در نتیجه تابع در این نقطه مشتق ناپذیر است.

۳۹ روش اول:

$$m = f'_-(-2) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{|4 - x^2| - 0}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} x - 2 = -4$$

روش دوم:

$$m = f'_-(-2) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|4 - (-2+h)^2| - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} h - 4 = -4$$

۴۰ مشتق پذیر نیست. زیرا:

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| - 0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{x-2} = 1, \quad f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1$$

۴۱ نقطه گوشه، نقطه‌ای در دامنه تابع است که تابع در آن پیوسته است اما مشتق چپ و راست دو عدد مختلف هستند یا یکی عدد و دیگری ∞ باشد. تابع f در $x = -1$ پیوسته است.

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{|x^2 + x|}{x+1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{-x(x+1)}{x+1} = 1$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x(x+1)}{x+1} = -1$$

مشتق‌های راست و چپ تابع هر دو متناهی ولی نابرابر هستند. پس $x = -1$ نقطه گوشه‌ای تابع است.

۴۲

الف

درست

۴۳

الف

 $x = 0$



۴۴

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t \rightarrow m'(9) = \frac{1.9}{6}$$

۴۵ آهنگ تغییر لحظه‌ای متغیر با مقدار مشتق و شیب خط مماس در آن نقطه برابر است: داریم:

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x + 5 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} f'(-1) = 1 \\ f'(2) = 13 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{f'(2)}{f'(-1)} = 13$$

در نتیجه ۱۳ برابر است.

۴۶

$$\left. \begin{array}{l} \text{سرعت متوسط} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{28 - 0}{4} = 7 \\ \text{سرعت لحظه‌ای} = f'(t) = 4t - 1 \end{array} \right\} \rightarrow 4t - 1 = 7 \rightarrow t = 2$$

۴۷

$$f(5) = 30, f(0) = 10 \Rightarrow \text{سرعت متوسط: } \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = 4$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای: } f'(t) = 4t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{4}$$

۴۸ الف

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{18 - 3}{3} = 5$$

(ب)

$$f'(t) = 4t - 1 \Rightarrow f'(4) = 15$$

۴۹

$$f'(t) = 3t^2 - 1 = 2 \Rightarrow 3t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow t = 1$$

۵۰ روش اول:

$$g'(x) = \frac{1}{3\sqrt{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{3\sqrt{27^2}} = \frac{1}{27}$$

روش دوم:

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Rightarrow g'(27) = \frac{1}{27}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل حسابان فصل ۵ دوازدهم

سال دوازدهم
ریاضی



کاربرد مشتق

اکسترم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

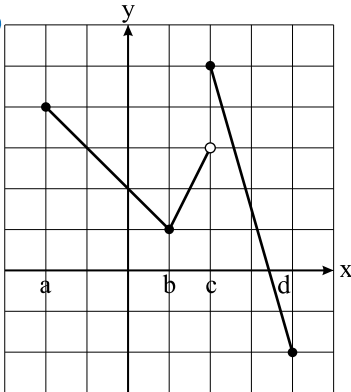
۱ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف اگر $f'(c) = 0$ باشد، آنگاه $x = c$ یک نقطه اکسترم نسبی است.

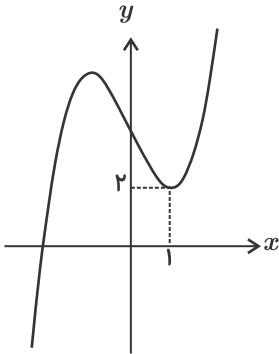
۲ در شکل نمودار رسم شده است، طول نقاط اکسترم های نسبی و مطلق را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۳ نمودار تابع $f(x) = x^3 + ax + b$ به صورت مقابل است. مقادیر a و b را بیابید.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴ جاهای خالی را با توجه به عبارت های داخل پرانتز، کامل کنید. ([] نماد جزء صحیح است.)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف نقطه ای به طول $x = 2$ ، نقطه تابع $f(x) = [x]$ است. (ماکزیم نسبی، مینیم نسبی)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۵ نقاط اکسترم نسبی و مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را در بازه $[-1, 3]$ در صورت وجود بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۶ مقادیر ماکزیم و مینیم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 4}$ را در بازه $[0, 2]$ تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۷ اکسترم های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۸ مقادیر ماکزیم و مینیم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 6x^2$ را روی بازه $[-2, 3]$ بیابید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۹ مقدار ماکزیم مطلق تابع $f(x) = x^3 - 12x$ در بازه $[-1, 3]$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۱۰ مقادیر اکسترم های مطلق تابع $f(x) = \frac{-2}{3}x^3 - x^3 - x^2 + 4x + 1$ را در بازه $[-3, 2]$ به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۱۱ مقدار مینیم مطلق تابع $f(x) = \frac{-1}{3}x^3 + x$ را در بازه $[0, 2]$ به دست آورید.

۱۲ ورق فلزی مربع شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را

کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۱۳ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

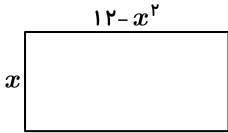
۱۴ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۲ سانتی متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۱۵ * ماکزیم مقدار مساحت مستطیل به ابعاد x و $12 - x^2$ را به دست آورید.۱۶ * نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

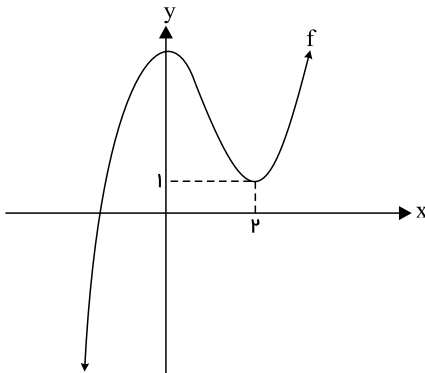
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۷ * اگر علامت f' بر بازه‌ای منفی باشد، آنگاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است.۱۸ * اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکسیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۹ * درستی یا نادرستی عبارت را تعیین کنید.

الف * در هر نقطه‌ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه عطف تابع است.

ب * اگر $x = c$ طول نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c) = 0$.۲۰ * ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(2, 1)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.۲۱ * نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است.مقادیر b و d را بیابید.۲۲ * مقادیر a و b را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ طوری به دست آورید که $x = 2$ طول نقطه اکسترمم نسبی و $x = 0$ طول نقطه عطف این تابع باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

کاربرد مشتق

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه عطف آن

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۲۳ * جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

الف * اگر برای هر x در بازه I ؛ $f''(x) > 0$ ، آنگاه نمودار $f(x)$ در این بازه تقعر رو به دارد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۲۴ * مقادیر a و b را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 - 1$ چنان بیابید که $A(1, 1)$ نقطه عطف منحنی باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۲۵ * ابتدا جهت تقعر تابع $y = \frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه عطف آن را بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۲۶ * جهت تقعر و نقطه عطف تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۲۷ * در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۲۸ * درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

الف * هر نقطه‌ای که در آن مقدار $f''(x)$ برابر صفر شود، یک نقطه عطف تابع $f(x)$ است.۲۹ * ابتدا جهت تقعر تابع $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در دامنه آن بررسی نمایید و سپس نقطه عطف آن را در صورت وجود، به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۳۰ * مقادیر a ، b و c را در تابع $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ طوری به دست آورید که در نقطه $(-1, 3)$ اکسترمم نسبی داشته باشد و

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

 $x = 1$ طول نقطه عطف آن باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۳۱ * اگر $f(x) = ax^3 + 3x^2 + 1$ باشد، مقدار a را طوری بیابید که $x = \frac{1}{3}$ طول نقطه عطف نمودار تابع باشد.



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۳۲ درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

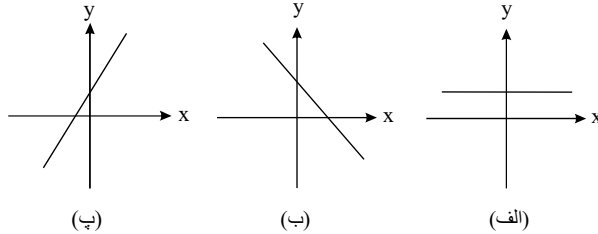
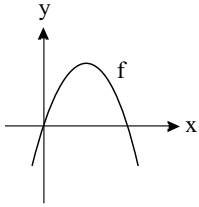
مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف هر تابع اکیداً صعودی، نقطه عطف ندارد.

۳۳ اگر $x = 1$ طول نقطه عطف و $x = -2$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + 24x$ باشد، آنگاه مقادیر a و b را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

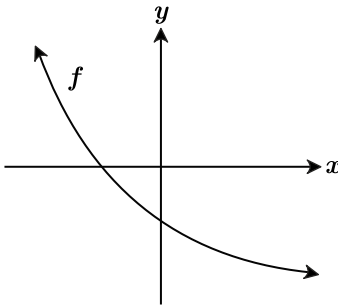
۳۴ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو آمده است. با بیان دلیل، مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸



مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۳۵ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$ را رسم کنید.

۳۶ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. اگر f' و f'' به ترتیب مشتق اول و دوم این تابع باشند، آنگاه به ازای هر x از دامنه تابع f ، کدام گزینه درست است؟ مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴



$$(2) \quad f'(x) < 0 \text{ و } f''(x) > 0$$

$$(1) \quad f'(x) < 0 \text{ و } f''(x) < 0$$

$$(4) \quad f'(x) > 0 \text{ و } f''(x) > 0$$

$$(3) \quad f'(x) > 0 \text{ و } f''(x) < 0$$

کاربرد مشتق رسم نمودار توابع

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۳۷ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۳۸ مقادیر a ، b و c را در تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$$f(0) = 1, f(2) = -3 \text{ و } x = 1 \text{ طول نقطه عطف نمودار تابع } f \text{ باشد.}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۳۹ جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۴۰ جدول رفتار و نمودار تابع $y = (x+2)(x-4)^2$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۱ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = (x+1)(x-2)^2$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۴۲ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۴۳ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = 4x^3 - 12x + 2$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۴۴ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۴۵ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۴۶ جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ را رسم کنید.





مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۴۷ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{x-2}{x+3}$ را رسم کنید.

۴۸ جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{2x-1}{x+3}$ را رسم کنید.

۴۹ جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.

۵۰ جدول رفتار و نمودار تابع $y = \frac{-x}{x+1}$ را رسم کنید.





پاسخنامه تشریحی

۱

الف

نادرست

۲ d مینیمم مطلق

c ماکزیمم مطلق

c ماکزیمم نسبی

b مینیمم نسبی

۳

$$f'(1) = 0 \xrightarrow{f'(x)=3x^2+a} 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow (1)^3 + a(1) + b = 2 \xrightarrow{a=-3} 1 - 3 + b = 2 \Rightarrow b = 4$$

۴

الف

ماکزیمم نسبی

۵

$$f'(x) = 3x^2 - 12x \xrightarrow{f'=0} 3x(x-4) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \notin [-1, 3] \end{cases}$$

x	-1	0	3
f'	+	0	-
f	-7	0	-27

$(0, 0)$ نقطه ماکزیمم نسبی، $(0, 0)$ نقطه ماکزیمم مطلق و $(3, -27)$ نقطه مینیمم مطلق این تابع در بازه $[-1, 3]$ است.

۶ ابتدا نقاط بحرانی را محاسبه نموده و در تابع قرار می‌دهیم و سپس با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه می‌کنیم.

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}} \xrightarrow{f'=0} x = 1$$

$$f(0) = f(2) = 2$$

مقدار ماکزیمم مطلق:

$$f(1) = \sqrt{2}$$

مقدار مینیمم مطلق:

۷

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \notin [-1, 1] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \\ f(0) = 1 \quad (max) \\ f(-1) = -3 \quad (min) \end{cases}$$

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4 \notin [-2, 3] \text{ غ ق}$$

$$f(-2) = -32, f(0) = 0, f(3) = -27$$

$$\text{مینیمم مطلق} = -32$$

$$\text{ماکزیمم مطلق} = 0$$

۹

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \times \begin{cases} f(-1) = 11 \\ f(2) = -16 \\ f(3) = -9 \end{cases} \Rightarrow \text{مقدار ماکزیمم} = 11$$

۱۰

$$f'(x) = -2x^2 - 2x + 4 \xrightarrow{f'=0} x = -2, x = 1$$

در نتیجه نقاط $x = -2$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع هستند.



$$f(1) = \frac{10}{3} \text{ و } f(-2) = \frac{-17}{3}$$

$$f(-3) = -2 \text{ و } f(2) = -\frac{1}{3}$$

مقدار ماکزیمم مطلق تابع f برابر $y = \frac{10}{3}$ و مقدار مینیمم مطلق تابع f برابر $y = \frac{-17}{3}$ است.

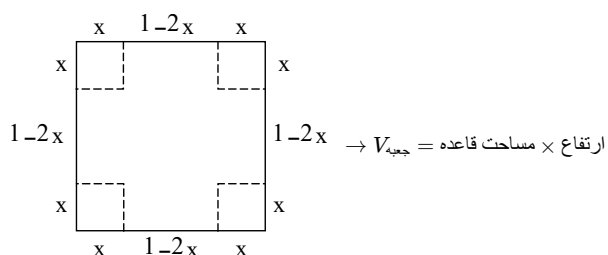
۱۱

$$f'(x) = -x^2 + 1 \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \notin [0, 2] \end{cases}$$

$$f(0) = 0 \quad f(1) = \frac{2}{3} \quad f(2) = -\frac{2}{3}$$

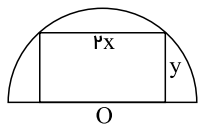
مقدار مینیمم مطلق: $\frac{-2}{3}$

۱۲



$$V = (1 - 2x)^2 \cdot x = (1 + 4x^2 - 4x)x = 4x^3 - 4x^2 + x$$

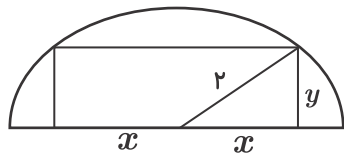
$$\xrightarrow{\text{مشتق}} 12x^2 - 8x + 1 = 0 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 48 = 16} \begin{cases} x = \frac{8+4}{24} = \frac{1}{2} \text{ غ ق} \\ x = \frac{8-4}{24} = \frac{1}{6} \end{cases}$$



$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2}) \Rightarrow S'(x) = \frac{22 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{4}, y = \sqrt{4}$$

طول $2\sqrt{4}$, عرض $\sqrt{4}$

۱۴ با توجه به شکل $x^2 + y^2 = 4$, پس $y = \sqrt{4 - x^2}$ در نتیجه:



$$S = 2xy \xrightarrow{y = \sqrt{4 - x^2}} S(x) = 2x\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow S'(x) = 2\sqrt{4 - x^2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}}(2x)$$

$$\xrightarrow{S'(x)=0} \frac{2(4 - x^2) - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow -4x^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$$

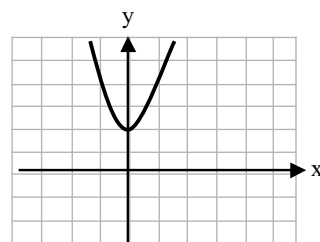
۱۵

$$S(x) = x(12 - x^2) = -x^3 + 12x$$

$$S'(x) = -3x^2 + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = +2 \end{cases} \xrightarrow{x \in [0, \sqrt{12}]} x = 2 \Rightarrow \begin{cases} S(0) = S(\sqrt{12}) = 0 \\ S(2) = 16 = \max \end{cases}$$

۱۶ نمودار $f(x) = x^2 + 2$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار داریم:

اکیداً صعودی: $(0, +\infty)$ ، اکیداً نزولی: $(-\infty, 0)$



۱۷ درست

۱۸ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق پذیر دارای دو خاصیت هستند:

(۱) در تابع صدق می کنند.

(۲) طولشان مشتق را صفر می کند.

$$\left| \begin{array}{l} 1 \\ y \end{array} \right| \xrightarrow{\text{صدق}} y = a + b$$

$$\left| \begin{array}{l} 1 \\ y \end{array} \right| \xrightarrow{\text{طولش مشتق را صفر می کند.}} f'(x) = 2ax + b \rightarrow 0 = 2a + b$$

پس: $\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \rightarrow a = -7, b = 14$

۱۹

الف نادرست

ب درست

۲۰

$$f(1) = 2 \Rightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + a \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow a = -3, b = -4$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \rightarrow 8 + (-12) + d = 1 \rightarrow d = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f''(x) = 6x + 2a$$

$$\begin{cases} f''(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 0, b = -12$$

۲۳

الف بالا

۲۴ مختصات نقطه عطف در خود تابع صدق می کند و طول نقطه عطف ریشه مشتق دوم است.

۲۵

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx \\ f''(x) = 6ax + 2b \xrightarrow{f''(1)=0} 6a + 2b = 0 \\ f(1) = 1 \Rightarrow a + b - 1 = 1 \Rightarrow a + b = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1 \\ b = 3 \end{array}$$

$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2}, y'' = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

جدول تعیین علامت زیر را در نظر بگیرید:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''	-		+
f	1 	$-\infty$	$+\infty$  1



با توجه به جدول در بازه $(1, +\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه $(-\infty, 1)$ تقعر رو به پایین است و نقطه عطف ندارد.

۲۶

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow (-1, 3) \text{ نقطه عطف}$$

جدول تعیین علامت زیر را در نظر بگیرید:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f''		$-$	$+$
$f(x)$		$\cup$	$\cap$

با توجه به جدول تعیین علامت داریم:

تقعر رو به بالا $(-1, +\infty)$ ، تقعر رو به پایین $(-\infty, -1)$

درست ۲۷

۲۸

الف نادرست

۲۹

$$f'(x) = \frac{-3}{(x-1)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{6}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f''		$-$	$\circ$ $+$
f			

نقطه عطف وجود ندارد.

۳۰

$$\left\{ \begin{array}{l} f(3) = -1 \Rightarrow 27 + 9a + 3b + c = -1 \\ f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow 27 + 6a + b = 0 \\ f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6 + 2a = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -3, b = -9, c = 26$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x \rightarrow f''(x) = 6ax + 6 \xrightarrow{x=\frac{1}{3}} 3a + 6 = 0 \rightarrow a = -2$$

۳۱

۳۲

الف نادرست

۳۳

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 2c \\ f''(x) = 6ax + 2b \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(-2) = 0 \\ f''(1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow a = -1, b = 3$$

نمودار (ب). سهمی نمودار داده شده ماکزیم دارد. پس ضریب x^2 منفی است. لذا در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.

۳۵

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -4, y = 0 \Rightarrow x = -2$$

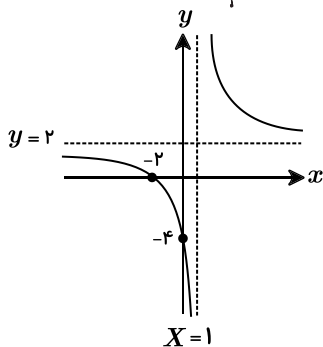
$$y = \frac{a}{c} = 2 \text{ یا } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+4}{x-1} = 2 \text{ در نتیجه } y = 2 \text{ مجانب افقی تابع است.}$$

$$x = \frac{-d}{c} = 1 \text{ یا } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+4}{x-1} = -\infty \text{ یا } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+4}{x-1} = +\infty \text{ در نتیجه } x = 1 \text{ مجانب قائم است.}$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
f'	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
f''	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$\circ$	$\cup$
f	2	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

$$f'(x) = \frac{-6}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{12}{(x-1)^3}$$



گزینه ۲

۳۶

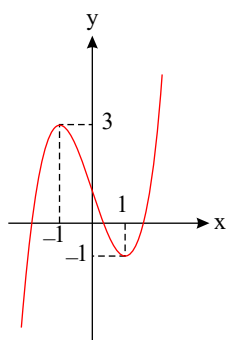
$$y' = 3x^2 - 3 \xrightarrow{y'=0} x = \pm 1$$

$$y'' = 6x = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow (0, 1) \text{ نقطه عطف}$$

جدول تعیین علامت زیر را در نظر بگیرید:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y''		$-$	$-$	0	$+$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
			max		min		

نمودار به صورت زیر است:



۳۸

$$f(0) = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$f(2) = -3 \Rightarrow \lambda a + 4b + 1 = -3 \Rightarrow \lambda a + 4b = -4 \Rightarrow a = 1, b = -3$$

$$f''(x) = 6ax + 4b \Rightarrow f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 4b = 0$$

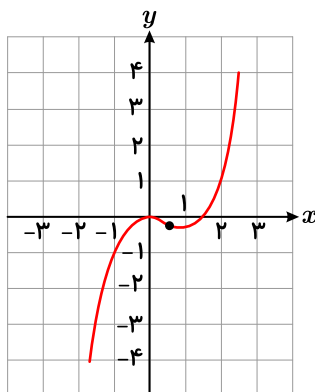
۳۹

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$f''(x) = 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
f'		+	0	-	+
f''		-	-	0	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
		max	min		





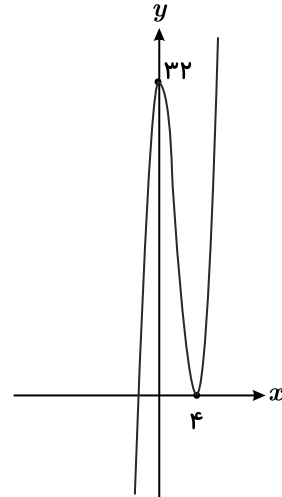
۴۰

$$y' = 3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow x = 0, 4$$

$$y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y''	$\cap$		$\cap$	0	$\cup$	$\cup$
y	$-\infty$	32	16	0	$+\infty$	

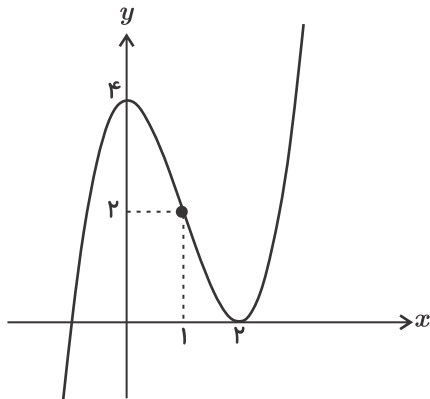
ماکزیمم عطف مینیمم



۴۱

$$f'(x) = (x-2)^2 + 2(x-2)(x+1) \xrightarrow{f'(x)=0} x = 0, x = 2$$

$$f''(x) = 6x - 6 \xrightarrow{f''(x)=0} x = 1$$



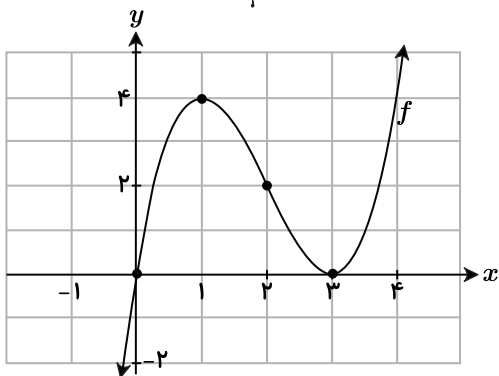
	0	1	2			
f'	+	○	-	-	○	+
f''	⌒	⌒	○	⌒	⌒	⌒
f	↗	↘	↘	↘	↗	↗

۴۲

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \xrightarrow{f'=0} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

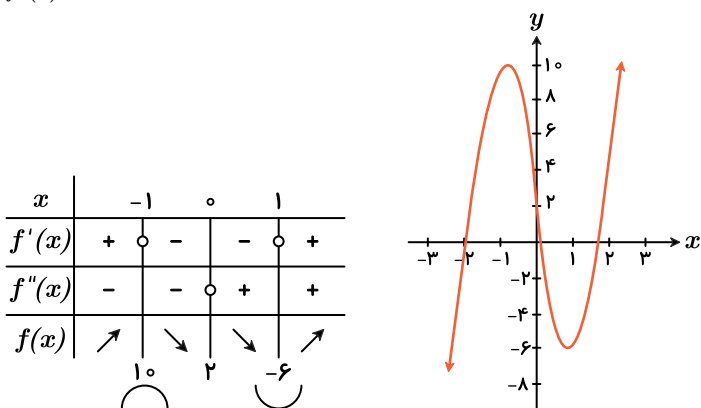
$$f''(x) = 6x - 12 \xrightarrow{f''=0} x = 2$$

	$-\infty$	۱	۲	۳	$+\infty$		
f'	+	۰	-	-	۰	+	
f''	$\cap$	$\cap$	۰	$\cup$	$\cup$		
f	$\nearrow$	۴	$\searrow$	۲	$\searrow$	۰	$\nearrow$
		ماکزیمم نسبی	نقطه عطف		مینیمم نسبی		



$$f'(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f''(x) = 24x = 0 \Rightarrow x = 0$$



م. قائم $x = 1$

م. افقی $y = 1$

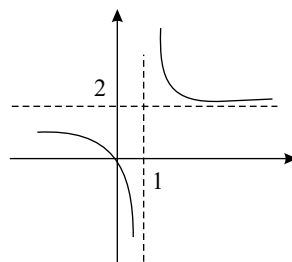
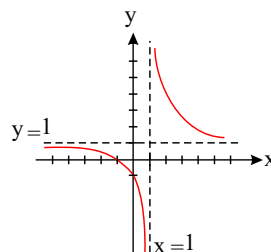
$$y' = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

$$f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x-1 = 0 \rightarrow x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x-1} = \frac{2}{0} = \infty \end{array} \right\} \rightarrow x = 1 \text{ میانب قائم است.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2 \text{ میانب افقی:}$$

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'	-	-	-	-	-
f	$1 \searrow -1 \searrow -\infty$	$+\infty$	$1 \searrow 2 \searrow 1$		



x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	-	-	-
f	$2 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 2$	

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$



برای مجانب قائم داریم:

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

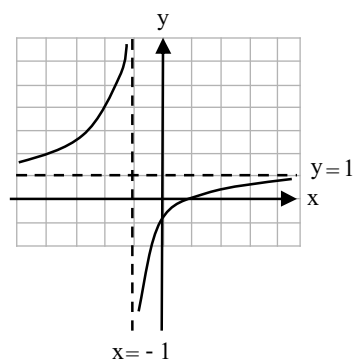
برای مجانب افقی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$$

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} > 0$$

جدول تعیین علامت زیر را در نظر بگیرید:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'	+		+
f	1	$-\infty$	1



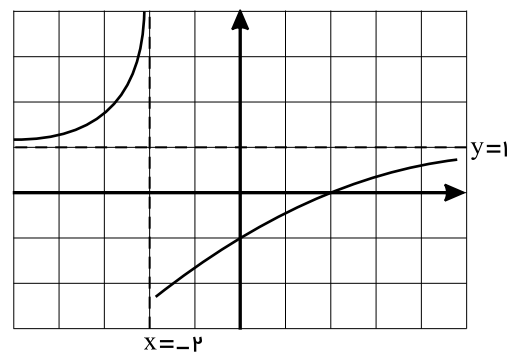
۴۷

مجانب قائم $x = -2$

مجانب افقی $y = 1$

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'	+		+
f	1	$+\infty$	$-\infty$



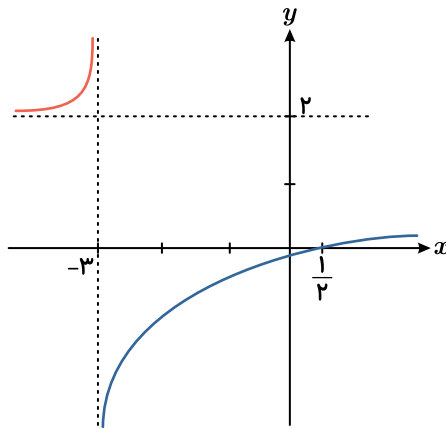
۴۸

$$y' = \frac{2(x+3) - 1(2x-1)}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$$

مجانب قائم $x = -3$ مجانب افقی $y = 2$



x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	$2 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 2$	



٤٩

$$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\} \quad f'(x) = \frac{3}{(x+1)^2}, \quad x \neq -1$$

$$f''(x) = \frac{-6}{(x+1)^3}, \quad x \neq -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$$

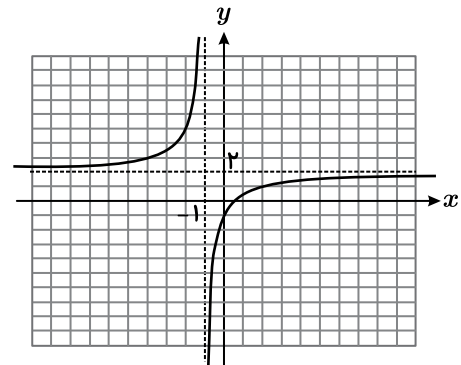
$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{2x-1}{x+1} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

مجانِب افقی $y = 2$

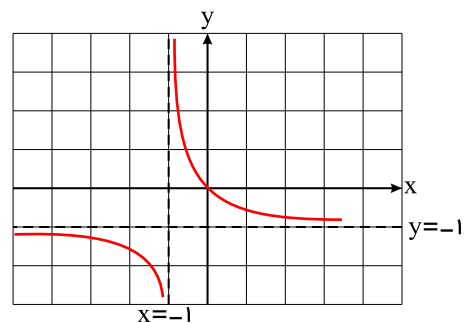
مجانِب قائم $x = -1$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$\cup$		$\cap$
$f(x)$	$2 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 2$	



٥٠

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$-$		$-$
y	$-1 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow -1$	



مجانِب قائم $x = -1$



مجانِب افقى $y = -1$

$$y' = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0$$