پیستوفیل

جزوه سوالات گسسته
پایه دوازدهم
رشته ریاضی

بهترین سوالات امتحانی

- پاسخنامه تشریحی
- پوشش کامل فصل های کتاب

بچه‌ی نوتروفیلی من ، سلام 💜

به رسم همیشه که توی این مسیر کنارت بودیم ، این بار هم یک مجموعه سوال برای شب امتحانت آماده کردیم که با کار کردنشون تسلطت رو افزایش بدی و به امید خدا بری واسه نمره‌ی ۲۰ 😍
جان دلم نترسی از سختی امتحانات اگه به کتاب درسی کاملا مسلط باشی و این مجموعه سوال رو هم به عنوان مکمل حل کنی مطمئن باش نمره‌ت بهتر از چیزی که فکرش رو کنی میشه ✌️
یادت باشه امتحانات نهایی رو جدی رو بگیری چون با نمره ی خوب این امتحانات کار کنکورت رو خیلی آسون میکنی
یه حرف دلی هم دارم با بچه هایی که کمی دیرتر شروع کردن ...
مبادا خودت رو ببازی بچه‌ی من امید دارم بهت و میدونم اگه خوب بخونی قطعا میتونی نمره ی عالی بگیری پس پرقدرت بریم واسه ترکوندن امتحانات 💪
یادت نره این فایل رو برای اون دوستت که بهش احتیاج داره بفرستی و جزئی از این زنجیره ی عشق و مهربونی باشی 🩷

دوست همیشگی تو ، نوتروفیل

روش مطالعه :

بهترین روش برای خوندن درس گسسته اینه اول بری سراغ یه درسنامه ی خلاصه و در عین حال کامل. بعد تمام تمارین کتاب درسی رو مسلط بشی. حالا وقتشه بری سراغ یه مجموعه نمونه سوال خفن که همه ی تیپ سوالات رو پوشش بده و با حل کردن نمونه سوال کاملا به مطلب مسلط بشی. مرور فرمول ها و نکات مهم هم یادت نره.

بارم بندی گسسته دوازدهم

شماره فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
۱	کل	۱۵	٦	۷
۲	تا صفحه۴۲	۵	۲	٦
	صفحه ۴۲ به بعد		۵	
۳	کل		۷	۷
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

فهرست

فصل اول..... ۶
پاسخنامه فصل اول..... ۱۴
فصل دوم..... ۲۹
پاسخنامه فصل دوم..... ۴۵
فصل سوم..... ۶۳
پاسخنامه فصل سوم..... ۷۲

گسسته دوازدهم (ریاضی)

فصل اول

۱ معادلهٔ $۹x - ۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۲x + ۱$ را حل کنید و تعداد جواب‌های دورقمی طبیعی آن را به دست آورید.

۲ اگر a, b دو عدد صحیح و ab فرد باشد، باقی‌ماندهٔ $a^۲ + b^۲ - ۵$ بر ۸ را حساب کنید.

۳ هرگاه a, b, c سه عدد صحیح، $a \neq ۰$، $a|b$ و $a|c$ ثابت کنید: $a|b \pm c$

۴ ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی، از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.

گزینه صحیح را انتخاب کنید.

۵ اگر $a, b \in \mathbb{R}$ کدامیک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

۱) $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۲$

۲) $a < b \Leftrightarrow a^۳ < b^۳$

۳) $a < b \Leftrightarrow (a - b)^۲ \geq ۰$

۴) $a < b \Leftrightarrow a^۲ < b^۳$

درستی و یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۶ حاصل عبارت $(۳۰, -۱۸], [-۱۲, -])$ برابر -۶ است. (( ) نماد بم‌م و [ ] نماد کم‌م است.)

جاهای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید.

۷ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \not| a$، $(p, a) = \ldots$

۸ ثابت کنید اگر $p \geq ۳$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می‌شود. $(k \in \mathbb{Z})$

۹ با استفاده از اثبات بازگشتی نشان دهید برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$a^۲ + b^۲ \geq (a - ۱)(b + ۱)$$

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۰ میانگین پنج عدد طبیعی، همان عدد وسطی است.

۱۱ اگر $m \in \mathbb{Z} - \{۰\}$، آنگاه: $[m^۵, (m^۳, m^۲)] = m^۵$.

۱۲ تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعهٔ $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۴k + ۳\}$، مضرب ۴ است.

۱۳ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۴ و ۵، به‌ترتیب ۲ و ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۲۰ بیابید.

۱۴ اگر a عدد طبیعی و داشته باشیم $a|7k+1$ و $a|4k+3$، ثابت کنید $a=1$ یا $a=17$.

۱۵ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ $5x+9y=22$ را به‌دست آورید.

۱۶ باقیماندهٔ تقسیم عدد $A=(27)^{7}+19$ را بر ۱۳ بیابید.

۱۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(9^{100}-2^{100}-7^{100})$ بر ۱۴ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳

۳) ۵ ۴) ۸

۱۸ کدام‌یک از معادلات هم‌نهشتی زیر، در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب ندارد؟

۱) $6x\overset{9}{\equiv}11$ ۲) $2x\overset{5}{\equiv}3$

۳) $5x\overset{7}{\equiv}10$ ۴) $3x\overset{7}{\equiv}10$

۱۹ عدد ۱۴۰۲ به کدام دستهٔ هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۷ تعلق دارد؟

۱) $[5]$ ۲) $[2]$

۳) $[0]$ ۴) $[1]$

۲۰ رقم یکان عدد $A=2!+4!+6!+\ldots+100!$ را به دست آورید.

۲۱ اگر $a|b$ و $b\neq0$، در این صورت ثابت کنید: $|a|\leq|b|$

۲۲ ثابت کنید مجموع مربعات هر دو عدد حقیقی همواره از قرینهٔ حاصل‌ضرب آن‌ها کمتر نیست.

در هریک از موارد زیر، گزارهٔ درست را اثبات و گزارهٔ نادرست را با ارائهٔ مثال نقض، رد کنید.

۲۳ با اضافه کردن یک واحد به حاصل ضرب دو عدد زوج متوالی، حاصل، مربع کامل است.

۲۴ حاصل‌ضرب هر عدد گویا در عدد گنگ، همواره عددی گنگ است.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۲۵ اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $19k-300$ بر ۱۹ برابر با ..... است.

۲۶ اگر a، b و c عددی طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$، دراین‌صورت حاصل عبارت $([a,b],[a,c])$ برابر ..... است.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

۲۷ اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.

۲۸ اگر $a|b+c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

۲۹ برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b\neq ۰$ تساوی $\frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$ برقرار است.

۳۰ گزارهٔ زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:
"برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^۲+۱\geq -۲x(y+x+۱)$"

۳۱ عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

الف حاصل‌ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ، گویا) است.

ب اگر برای دو عدد صحیح a و b داشته باشیم $a|b$، برای هر $m\in\mathbb{Z}$ داریم: $(a|mb,\ ma|b)$

پ اگر $a|b$ آنگاه ب.م.م دو عدد a و b برابر با $(a,\ |a|)$ است.

ت اگر $ac\overset{m}{\equiv}bc$ و $(c,m)=d$، آنگاه رابطهٔ $(a\overset{m}{\equiv}b,\ a\overset{\frac{m}{d}}{\equiv}b)$ برقرار خواهد بود.

گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

۳۲ برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n-۱$ اول است.

۳۳ برای دو عدد طبیعی a و b، اگر $a|b$ آنگاه $[a,b]=|b|$.

۳۴ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ دارای جواب است اگروتنهااگر $(a,b)|m$.

۳۵ به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

۳۶ برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

۳۷ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند و $ab=۰$، آن‌گاه $a=۰$ یا $b=۰$.

۳۸ اگر $a,b\in\mathbb{R}$، داریم: $a<b\Leftrightarrow a^۲<b^۲$

۳۹ حاصل‌جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۴۰ ثابت کنید اگر a و b دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم: $\frac{a+b}{۲}\geq\sqrt{ab}$

۴۱ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha+\beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha-\beta$ گنگ است.

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۴۲ حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

۴۳ هیچ عدد صحیحی مانند x و y وجود ندارند که رابطهٔ $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$ برقرار باشد.

۴۴ $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ عددهایی صحیح هستند و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_۱ - b_۱)(a_۲ - b_۲)(a_۳ - b_۳)$ عددی زوج است.

۴۵ فرض کنیم a و n دو عدد طبیعی باشند، به‌طوری‌که $a \mid ۳n + ۴$ و $a \mid ۲n + ۳$. نشان دهید: $a = ۱$

۴۶ فرض کنید $m \in \mathbb{N}$ و $a, b \in \mathbb{Z}$. اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n \in \mathbb{N}$ ثابت کنید: $a^n \overset{m}{\equiv} b^n$.

۴۷ ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر ۹.

۴۸ اگر در یک سال، اول مهر شنبه باشد، در این صورت ۱۲ بهمن در همان سال چه روزی است؟

۴۹ جواب‌های عمومی معادلهٔ سیالهٔ خطی $۹x + ۱۳y = ۷$ را به دست آورید.

۵۰ معادلهٔ سیالهٔ $۵x + ۲y = ۱۸$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۵۱ با تبدیل معادلهٔ سیالهٔ خطی $۲۰۰۰x + ۵۰۰۰y = ۲۹۰۰۰$ به معادلهٔ هم‌نهشتی و حل آن، جواب‌های عمومی این معادله را بیابید.

۵۲ معادلهٔ سیالهٔ $۲x + ۵y = ۱۹$ را حل کنید.

۵۳ در معادلهٔ سیالهٔ $۱۵x + ۱۹y = ۷$، بزرگ‌ترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه حل)

۵۴ معادلهٔ هم‌نهشتی $۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۲$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۵۵ معادلهٔ هم‌نهشتی $۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰$ را حل کرده و جواب عمومی آن را به دست آورید.

۵۶ معادلهٔ $۷x \overset{۴}{\equiv} ۱$ را حل کنید.

درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

۵۷ اگر $a \mid b$ و m, n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$، آنگاه $a^m \mid b^n$.

۵۸ اگر $a \mid b$، آنگاه $(a, b) = a$.

۵۹ اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد، آنگاه باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی‌اند.

۶۰ منظور از حل معادلهٔ هم‌نهشتی، پیدا کردن همهٔ جواب‌های حقیقی است که در معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ صدق کند.

۶۱ معادلهٔ هم‌نهشتی $۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعهٔ جواب آن را به دست آورید.

۶۲ معادلهٔ هم‌نهشتی $۱۴۰۲x \overset{۹}{\equiv} ۱۱$ را حل کنید.

۶۳ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۲۷^{۲۰} + ۱۸$ را بر ۱۳ بیابید.

۶۴ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد، به‌طوری‌که $۵ \mid ۴k + ۱$، ثابت کنید $۲۵ \mid ۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$.

۶۵ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n، $n^۲ - ۵n + ۷$ عددی فرد است.

درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

۶۶ اگر $a|b$ و $b\neq 0$، در این صورت $|a| > |b|$.

۶۷ برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b اگر $(a|c\ ,\ b|c)$ و $(\forall m > 0\ ,\ a|m\ ,\ b|m \Rightarrow c \leq m)$ آنگاه $[a\ ,\ b] = c$.

۶۸ برای هر دو عدد صحیح a و b و عدد طبیعی m، اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر m مساوی با r باشد، در این صورت $a \overset{m}{\equiv} r$.

۶۹ بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد ۴ و ۲- برابر ۲- است.

۷۰ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطهٔ هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به‌عبارتی‌دیگر برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m، اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ آنگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$.

۷۱ رقم یکان عدد $(۲^{۱۱} + ۷)$ را به دست آورید.

۷۲ باقی‌مانده تقسیم $(۳۸^{۳۶} + ۱۹)$ را بر ۴ به دست آورید.

۷۳ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید.

۷۴ باقی‌مانده تقسیم عدد $۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰!$ را بر ۱۵ به دست آورید. (! نماد فاکتوریل است)

۷۵ اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به‌طوری‌که $۷|۲k + ۱$، ثابت کنید:

$$۴۹|۴k^۲ - ۱۰k - ۶$$

۷۶ به روش برهان خلف نشان دهید؛ اگر a عدد صحیح فرد باشد و $b|a + ۲$، آنگاه b نیز عددی فرد است.

۷۷ برای هر دو عدد حقیقی x و y به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:

$$۲x^۲ + ۲xy + y^۲ \geq ۴x - ۴$$

۷۸ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب برای اعداد صحیح a، b و c که $a\neq 0$، اگر $a|b + c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

پ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m)|b$.

ت اگر داشته باشیم $(a, b) = ۱$ آنگاه می‌گوییم؛ a و b نسبت به هم اول‌اند.

۷۹ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۶۳^{۱۴} + ۱$ را بر ۱۶ به دست آورید.

۸۰ باقی مانده تقسیم a بر دو عدد ۴ و ۵ به ترتیب برابر ۳ و ۴ می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر ۲۰ را محاسبه کنید. (با راه حل)

درست یا نادرست بودن عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۸۱ حاصل‌ضرب هر عدد گویا ناصفر در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۸۲ حاصل $(۳m + ۲\ ,\ ۳m + ۱)$ برابر ۱ می‌باشد.

۸۳ اگر $a|۲m + ۳$ و $a|m + ۷$ در این صورت چند مقدار صحیح و نامنفی برای a وجود دارد؟

۸۴ اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، ثابت کنید: $x^۲ + y^۲ + ۱ \geq ۲xy - z^۲$

۸۵ دانش‌آموزی در یک آزمون علمی شرکت کرده است. او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد)
این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

۸۶ هریک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائهٔ مثال، نقض کنید.

الف برای هر عدد طبیعی n، عدد $۲^n + ۱$ اول است.

ب مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

۸۷ اگر عدد طبیعی a، دو عدد $(۵k + ۹)$ و $(۸k + ۱۳)$ را عاد کند، ثابت کنید: $a = ۱$ یا $a = ۷$.

۸۸ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر دو عدد ۶ و ۷ به ترتیب ۳ و ۵ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۴۲ بیابید.

۸۹ اگر عدد طبیعی $a > ۱$، در دو شرط $a|۴k + ۹$ و $a|۶k + ۱۴$ صدق کند، مقدار a را بیابید.

۹۰ اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(a^۲ + b^۲ + ۵)$ را بر ۸ بیابید.

۹۱ اگر $a \neq ۰$ عددی صحیح و دو عدد $(۵m + ۴)$ و $(۶m + ۵)$ بر a بخش‌پذیر باشند ثابت کنید $a = \pm ۱$.

در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.

۹۲ حاصل $([m^۲, m], m^۵)$ برابر با ..... است.

۹۳ اگر برای دو عدد صحیح و ناصفر a و b داشته باشیم $(a, b) = ۱$، می‌گوییم a و b ..... هستند.

۹۴ معادلهٔ سیالهٔ $۶x + ۷y = ۱۸۵$ را حل کرده و جواب عمومی آن را بنویسید.

۹۵ اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۹۶ ثابت کنید باقی‌ماندهٔ تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸، برابر یک است.

۹۷ اگر دو عدد $۳a - ۵$ و $۴a - ۷$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $۹a + ۶$ را به دست آورید.

۹۸ ثابت کنید حاصل‌جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

۹۹ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + ۲$ یا $a + ۴$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۱۰۰ اگر $a > ۱$، $a|۹k + ۴$ و $a|۵k + ۳$، ثابت کنید a عددی اول است.

۱۰۱ ثابت کنید اگر $p \geq ۵$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = ۴k + ۱$ یا $p = ۴k + ۳$ نوشته می‌شود.

جاهای خالی را با عدد یا کلمهٔ مناسب پر کنید.

۱۰۲ a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$ آن‌گاه عدد ..... شمارندهٔ عدد ..... است.

۱۰۳ m عددی صحیح است. حاصل $(۲m, ۶m^۳)$ برابر با ..... است.

۱۰۴ اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(۵a + ۴, ۲a + ۳)$ را به دست آورید.

۱۰۵ اگر باقی‌مانده تقسیم اعداد a و b بر ۱۷ برابر ۵ و ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $(2a - 5b)$ بر ۱۷ را بیابید.

۱۰۶ اگر x و y دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

۱۰۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم 7^{30} بر ۱۵ را به دست آورید.

۱۰۸ اگر $n \in \mathbb{N}$، $n|9k + 7$ و $n|7k + 6$، ثابت کنید $n = 1$ یا $n = 5$.

۱۰۹ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $2a + 3$ بر ۸ را به دست آورید.

گزارهٔ درست را اثبات کنید و برای گزارهٔ نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

۱۱۰ مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۱۱۱ اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

۱۱۲ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم اعداد m و n بر ۱۷ به‌ترتیب ۵ و ۳ باشد، دراین‌صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد $(2m - 5n)$ بر ۱۷ را محاسبه کنید.

۱۱۳ ثابت کنید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p = 6k + 1$ یا $p = 6k + 5$، $(k \in \mathbb{W})$ نوشته می‌شود.

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۱۴ اگر $a|b$ آنگاه $[a, b] = |b|$.

۱۱۵ معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(a, b) |m$.

۱۱۶ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر $a > 0$ آنگاه $a + \frac{1}{a} \geq 2$.

۱۱۷ باقی‌ماندهٔ تقسیم 13^{22} را بر ۱۷ به دست آورید.

۱۱۸ فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۱۹ $[a, b] = c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a|c \ , \ b|c$ ۲) $\forall m > 0, \ldots$

۱۲۰ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم a بر دو عدد ۶ ,۵ به ترتیب ۳ ,۲ باشد؛ باقی‌ماندهٔ تقسیم عدد a را بر ۳۰ بیابید.

۱۲۱ برای هر سه عدد حقیقی x، y و z ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۱۲۲ مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

۱۲۳ برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $2^n - 1$ اول است.

۱۲۴ اگر باقیماندهٔ تقسیم m و n بر ۱۳ به ترتیب اعداد ۲ و ۹ باشد، در این صورت باقیماندهٔ تقسیم عدد $5n - 3m$ بر ۱۳ را به دست آورید.

۱

$$۹x - ۱ \overset{۱۳}{\equiv} ۲x + ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۷x \overset{۱۳}{\equiv} ۲ + ۲ \times ۱۳ = ۲۸ \xrightarrow{\div ۷} x \overset{۱۳}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow x = ۱۳k + ۴ \Rightarrow ۱۰ \leq ۱۳k + ۴ \leq ۹۹ \Rightarrow \frac{۶}{۱۳} \leq k \leq \frac{۹۵}{۱۳}$$

$$k = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷$$

لذا معادله ۷ جواب دورقمی دارد.

۲

راه اول: ab فرد است، لذا هر دو عدد a, b فرد می‌باشند.

$$\begin{matrix} a = ۲k + ۱ \\ b = ۲k' + ۱ \end{matrix} \Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۵ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ + ۴k'^۲ + ۴k' + ۱ - ۵$$

$$= \underbrace{۴k(k+۱)}_{۸q} + \underbrace{۴k'(k'+۱)}_{۸q'} - ۳$$

$$= ۸q'' - ۳ = ۸q'' - ۳ + ۸ - ۸ = ۸t + ۵ \Rightarrow r = ۵$$

راه دوم: ab فرد است، لذا هر دو عدد a, b فرد می‌باشند.

$$\begin{matrix} a = ۲k + ۱ \\ b = ۲k' + ۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \\ b^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱ \end{matrix} \Rightarrow a^۲ + b^۲ \overset{۸}{\equiv} ۲$$

$$\Rightarrow a^۲ + b^۲ - ۵ \overset{۸}{\equiv} -۳ \overset{۸}{\equiv} ۵ \Rightarrow r = ۵$$

۳

$$a \mid b \xrightarrow{\exists q \in \mathbb{Z}} b = aq$$

$$a \mid c \xrightarrow{\exists q' \in \mathbb{Z}} c = aq'$$

$$\xrightarrow{\pm} b \pm c = aq \pm aq' = a(q \pm q') \Rightarrow a \mid b \pm c$$

۴

اگر a و b دو عدد نامنفی باشند، حکم ما چنین خواهد بود: $\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab}$.

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a + b \geq ۲\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a + b - ۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow (\sqrt{a} - \sqrt{b})^۲ \geq ۰$$ گزاره همیشه درست

پاسخ سؤال ۵

۵ گزینه ۲

$a < b \Leftrightarrow a^{۳} < b^{۳}$

پاسخ سؤال ۶

۶ نادرست

پاسخ سؤال ۷

۷ ۱

۸ کافی است p را بر عدد ۴ تقسیم کنیم. در این صورت طبق قضیه تقسیم خواهیم داشت:

$p = ۴k \ , \ p = ۴k + ۱ \ , \ p = ۴k + ۲ \ , \ p = ۴k + ۳$

p در حالت‌های $p = ۴k$، $p = ۴k + ۲$ عددی زوج است. لذا با اول بودن آن تناقض دارد. فقط حالت‌های $p = ۴k + ۱$ و $p = ۴k + ۳$ باقی می‌ماند و حکم اثبات می‌شود.

۹

$a^{۲} + b^{۲} \geq ab + a - b - ۱$

$\Leftrightarrow ۲a^{۲} + ۲b^{۲} - ۲ab - ۲a + ۲b + ۲ \geq ۰$

$\Leftrightarrow (a - b)^{۲} + (a - ۱)^{۲} + (b + ۱)^{۲} \geq ۰$

این رابطه، همواره برقرار است.

پاسخ سؤالات ۱۰ تا ۱۲

۱۰ نادرست

۱۱ نادرست

۱۲ درست

نوترو فیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۳

.تک رقمی نوترو فیل

رتبه ۲
محمدعلی موسی پور

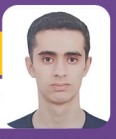
.دو رقمی های نوترو فیل

رتبه ۴۸
محمدحسین هاشمی

رتبه ۶۱
مهدیه اسدی

رتبه ۶۸
منیره زمانی

.سه رقمی و چهار رقمی های نوترو فیل



رتبه ۱۱۲
امیرمحمد شریفی کلوری

رتبه ۱۳۴
امیرمحمد ملکشاهی

رتبه ۱۹۵
سید حسین تقوی

رتبه ۴۲۸
مهدیه اسدی ارزنه‌ئی

رتبه ۵۰۹
علیرضا شهسواری

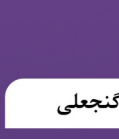
رتبه ۵۱۶
سحر کاظمی جوجیلی

رتبه ۳۵۷
فاطمه مروت بلسی

رتبه ۶۰۳
ریحانه فلاح امینی

رتبه ۶۲۷
فریما آقاپور

رتبه ۶۳۹
هلیا رضایی

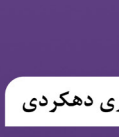


رتبه ۵۷۵
هانیه گنجعلی

رتبه ۶۷۴
علی اسدی

رتبه ۷۹۳
سارینا تقی‌زاده

رتبه ۸۰۵
لعیا زنگنه قاسم‌آبادی



رتبه ۶۶۸
فائزه حیدری دهکردی

رتبه ۹۱۴
کیانا شیرین‌فر

رتبه ۹۹۵
جواد فلاحتی

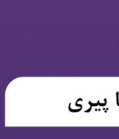
رتبه ۱۰۲۰
سارا دهقان

رتبه ۸۸۱
حلما ناصری

رتبه ۱۰۲۴
ژینو نادری

رتبه ۱۰۴۹
محمد خرم‌آبادی

رتبه ۱۱۱۱
رضا نصیری‌مدیسه



رتبه ۱۰۲۰
مهسا پیری

رتبه ۱۲۰۴
یکتا سلیمانی‌پور

رتبه ۱۲۲۵
مهدی فیض‌زاده

رتبه ۱۲۲۵
سید مهدی حیات‌غیبی

رتبه ۱۱۲۵
سمیرا تباوار

رتبه ۱۲۷۲
نرگس جوانی

رتبه ۱۳۰۶
مهتاب کامل

رتبه ۱۳۱۶
یسری ابوالمحمدی مله

رتبه ۱۲۶۷
مهدی آزادبخت

رتبه ۱۴۱۶
زینب پارساصفت

رتبه ۱۴۳۹
ریحانه جعفری خیرخواه

رتبه ۱۵۸۷
مهدی تیموری

رتبه ۱۴۰۹
غزل قبادی

رتبه ۱۶۱۹
مهشید خانی

رتبه ۱۶۶۹
مائده سادات حسینی

رتبه ۱۷۲۹
علیرضا انصاری

رتبه ۱۵۹۸
محمدرضا دادپور

رتبه ۱۷۴۲
الهه فکاری

رتبه ۱۷۷۶
علی عرب‌خانی

رتبه ۱۷۸۲
یاسین رئیسی زیدآبادی

رتبه ۱۷۲۹
علی عزیززاده

۱۳ روش اول:

$$\begin{cases} a = ۴q_۱ + ۲ \\ a = ۵q_۲ + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۵a = ۲۰q_۱ + ۱۰ \\ ۴a = ۲۰q_۲ + ۱۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۲۰(q_۱ - q_۲) - ۲ \Rightarrow a = ۲۰(q_۱ - q_۲) - ۲ + ۲۰ - ۲۰$$

$$\Rightarrow a = ۲۰(\underbrace{q_۱ - q_۲}_{q_۳} - ۱) + ۱۸ \Rightarrow a = ۲۰(\underbrace{q_۳ - ۱}_{q}) + ۱۸$$

$$\Rightarrow a = ۲۰q + ۱۸ \Rightarrow r = ۱۸ \text{ یا } r = -۲ + ۲۰ = ۱۸$$

روش دوم:

$$\begin{cases} a \overset{۴}{\equiv} ۲ \overset{۴}{\equiv} ۱۸ \\ a \overset{۵}{\equiv} ۳ \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \end{cases} \Rightarrow a = ۴k + ۱۸ \Rightarrow ۴k + ۱۸ \overset{۵}{\equiv} ۱۸$$

$$\Rightarrow k = ۵t \Rightarrow a = ۲۰t + ۱۸ \Rightarrow r = ۱۸$$

۱۴

$$a | ۷k + ۱ \Rightarrow a | ۲۸k + ۴$$

$$a | ۴k + ۳ \Rightarrow a | ۲۸k + ۲۱$$

$$a | ۱۷ \text{ یا } a | -۱۷ \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a = ۱ \text{ یا } a = ۱۷$$

۱۵ روش اول:

$$۵x \overset{۹}{\equiv} ۲۲ \Rightarrow x \overset{۹}{\equiv} ۸ \Rightarrow x = ۹k + ۸$$

$$۵(۹k + ۸) + ۹y = ۲۲ \Rightarrow y = -۲ - ۵k$$

روش دوم:

$$۹y \overset{۵}{\equiv} ۲۲ \Rightarrow y \overset{۵}{\equiv} ۳ \Rightarrow y = ۵k + ۳$$

$$۵x + ۹(۵k + ۳) = ۲۲ \Rightarrow x = -۱ - ۹k$$

۱۶

$$۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^{۷} \overset{۱۳}{\equiv} ۱^{۷} = ۱$$

$$۱۹ = ۱۳ \times ۱ + ۶ \Rightarrow ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۶ \Rightarrow (۲۷)^{۷} + ۱۹ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۶ = ۷ \Rightarrow A \overset{۱۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow r = ۷$$

۱۷

گزینه ۱

$$۹^{۱۰۰} \overset{۱۴}{\equiv} ۲^{۱۰۰} + ۷^{۱۰۰} \Rightarrow ۹^{۱۰۰} - ۲^{۱۰۰} - ۷^{۱۰۰} \overset{۱۴}{\equiv} ۰$$

۱۸ گزینه ۱

$۶x \overset{۹}{\equiv} ۱۱ \Rightarrow (۶,۹) \nmid ۱۱$

۱۹ گزینه ۲

$۱۴۰۲ = ۲۰۰ \times ۷ + ۲$

۲۰

$A = ۲! + ۴! + \underbrace{۶! + \ldots + ۱۰۰!}_{\text{مضرب ۲ و ۵}} \Rightarrow A = ۲! + ۴! + ۱۰k \ , \ k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۲ + ۲۴ + ۰ \Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۲۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۶$

۲۱

$a|b \Rightarrow b = aq \ , \ q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| = |a||q|$

$q \in \mathbb{Z} \ , \ q = ۰ \Rightarrow |q| \geq ۱ \Rightarrow |a||q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a|$

۲۲

$a^۲ + b^۲ \geq -ab \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + ab \geq ۰ \Leftrightarrow ۲a^۲ + ۲b^۲ + ۲ab \geq ۰$

$\Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + (a^۲ + b^۲ + ۲ab) \geq ۰ \Leftrightarrow a^۲ + b^۲ + (a + b)^۲ \geq ۰$ همواره برقرار

پاسخ سؤالات ۲۳ تا ۲۴

۲۳ درست- $۲k \times (۲k + ۲) + ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = (۲k + ۱)^۲$

۲۴ نادرست- با در نظر گرفتن صفر به عنوان عدد گویا و انتخاب هر عدد گنگی، حاصل‌ضرب صفر است که گویا می‌شود.

پاسخ سؤالات ۲۵ تا ۲۶

۲۵ ۴

۲۶ b

پاسخ سؤالات ۲۷ تا ۲۹

۲۷ درست

۲۸ نادرست

۲۹ نادرست

۳۰
$y^۲ + ۱ \geq -۲x(y + x + ۱) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy + x^۲ + ۲x + ۱ \geq ۰$
$\Leftrightarrow (x + ۱)^۲ + (x + y)^۲ \geq ۰ \Rightarrow$ این رابطهٔ بازگشتی همواره بدیهی است

۳۱
الف گنگ

ب $a|mb$

پ $|a|$

ت $a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

پاسخ سؤالات ۳۲ تا ۳۴

۳۲ نادرست

$n = ۴ \quad \Rightarrow \quad ۲^۴ - ۱ = ۱۵ \notin P$

۳۳ درست

۳۴ نادرست
معادلهٔ همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ دارای جواب است اگروتنهااگر $(a, m)|b$.

۳۵
$xy \leq \frac{x^۲ + y^۲}{۲} \Leftrightarrow ۲xy \leq x^۲ + y^۲ \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ - ۲xy \geq ۰ \Leftrightarrow (x - y)^۲ \geq ۰$

گزاره همواره درست است.

پاسخ سؤالات ۳۶ تا ۳۹

۳۶ نادرست

۳۷ درست

۳۸ نادرست

۳۹ نادرست

۴۰

$$\frac{a+b}{۲} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq ۲\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow a+b-۲\sqrt{ab} \geq ۰ \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{۲} \geq ۰$$

نابرابری آخر برای a و b نامنفی همیشه درست است. اثبات بازگشتی و حکم برقرار است.

۴۱ فرض خلف: فرض کنیم $\alpha-\beta$ گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است، پس $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta) \in \mathbb{Q}$؛ یعنی $۲\alpha \in \mathbb{Q}$. درنتیجه $\alpha \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

پاسخ سؤالات ۴۲ تا ۴۳

۴۲ درست

۴۳ نادرست

۴۴ برای درک بهتر مسئله، مثالی ارائه می‌کنیم. $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ را به‌ترتیب ۵، ۸ و ۱ در نظر می‌گیریم و $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ را ۸، ۱ و ۵ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)=(۵-۸)(۸-۱)(۱-۵)=(-۳)(۷)(-۴)=۸۴$$

اگر $(a_۱-b_۱)(a_۲-b_۲)(a_۳-b_۳)$ زوج نباشد (فرض خلف)، پس عددی فرد است. پس هر سه عامل $a_۱-b_۱$، $a_۲-b_۲$ و $a_۳-b_۳$ هم باید فرد باشند، زیرا اگر یکی از آن‌ها زوج باشد، حاصل‌ضربشان هم زوج می‌شود. درنتیجه مجموع آن‌ها هم باید عددی فرد باشد، یعنی $(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)$ باید عددی فرد باشد. اما مجموع این سه عبارت صفر است. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

۴۵

$$\begin{matrix} a \mid ۳n+۴ \\ a \mid ۲n+۳ \end{matrix} \Rightarrow a \mid -۲(۳n+۴)+۳(۲n+۳) \Rightarrow a \mid ۱ \Rightarrow a=\pm ۱ \xrightarrow{a \in \mathbb{N}} a=۱$$

۴۶

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow m \mid (a-b)\left(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\ldots+b^{n-۱}\right)$$

$$\Rightarrow m \mid a^{n}-b^{n} \Rightarrow a^{n} \overset{m}{\equiv} b^{n}$$

۴۷ عدد nرقمی $A=\overline{a_{n-۱}a_{n-۲}\ldots a_۲a_۱a_۰}$ را بسط می‌دهیم و در همنهشتی به پیمانهٔ ۹ به‌جای هر توان ۱۰، عدد ۱ را قرار می‌دهیم.

$$A=۱۰^{n-۱}\times a_{n-۱}+۱۰^{n-۲}\times a_{n-۲}+\ldots+۱۰^{۲}a_۲+۱۰^{۱}a_۱+۱۰^{۰}a_۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۹}{\equiv} ۱\times a_{n-۱}+۱\times a_{n-۲}+۱\times a_{n-۳}+\ldots+۱\times a_۱+۱\times a_۰$$

$$\Rightarrow A \overset{۹}{\equiv} a_{n-۱}+a_{n-۲}+a_{n-۳}+\ldots+a_۱+a_۰$$

۴۸ فاصله ۱ مهر تا ۱۲ بهمن برابر است با: ۲۹ روز در مهرماه و سه ماه آبان، آذر و دی و ۱۲ روز تا ۱۲ بهمن، یعنی $۱۳۱ = ۱۲ + ۳۰ \times ۳ + ۲۹$. ازطرفی $۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$. بنابراین طبق جدول زیر ۱۲ بهمن پنجشنبه است.

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۴۹
$$۱۳y \overset{۹}{\equiv} ۷, (۱۳ \overset{۹}{\equiv} ۴, ۷ \overset{۹}{\equiv} ۱۶) \Rightarrow ۴y \overset{۹}{\equiv} ۱۶ \xrightarrow{(۴,۹)=۱} y \overset{۹}{\equiv} ۴$$
$$y = ۹k + ۴, ۹x = ۷ - ۱۳(۹k + ۴) = -۱۱۷k - ۴۵ \Rightarrow x = -۱۳k - ۵$$

۵۰
$$۲y \overset{۵}{\equiv} ۱۸ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} y \overset{۵}{\equiv} ۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow y = ۵k + ۴$$
$$\Rightarrow ۵x + ۲(۵k + ۴) = ۱۸ \Rightarrow x = -۲k + ۲$$

۵۱
$$۲x + ۵y = ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۲۹ \Rightarrow ۲x \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۵k + ۲$$
$$y = -۲k + ۵$$

۵۲
$$۲x \overset{۵}{\equiv} ۱۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \xrightarrow{(۲,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۲$$
$$\Rightarrow x = ۵k + ۲ \Rightarrow y = -۲k + ۳$$

۵۳
$$۱۵x \overset{۱۹}{\equiv} ۷ \Rightarrow ۱۵x \overset{۱۹}{\equiv} ۴۵ \xrightarrow{(۱۵,۱۹)=۱} x \overset{۱۹}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۱۹k + ۳ \xrightarrow{k=۵} x = ۹۸$$

۵۴
$$۲ \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \Rightarrow ۵x \overset{۱۱}{\equiv} ۳۵ \xrightarrow{(۵,۱۱)=۱} x \overset{۱۱}{\equiv} ۷ \Rightarrow x = ۱۱k + ۷$$

۵۵
$$۸x \overset{۱۲}{\equiv} ۲۰ \overset{۱۲}{\equiv} ۳۲ \xrightarrow{(۸,۱۲)=۴} x \overset{\frac{۱۲}{۴}=۳}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۳k + ۴$$

۵۶
$$۷x \overset{۴}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۴ \times ۵ + ۱ \Rightarrow ۷x \overset{۴}{\equiv} ۲۱ \overset{(۷,۴)=۱}{\Rightarrow} x \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow x = ۴k + ۳$$

پاسخ سؤالات ۵۷ تا ۶۰

۵۷ درست

۵۸ نادرست

۵۹ درست

۶۰ نادرست

۶۱ چون $(۴,۶)|۱۰$، معادله جواب دارد.

$$۴x\overset{۶}{\equiv}۱۰ \Rightarrow ۴x\overset{۶}{\equiv}۴ \Rightarrow x\overset{۳}{\equiv}۱ \Rightarrow x=۳k+۱$$

۶۲

$$(۱+۴+۰+۲)x\overset{۹}{\equiv}۱+۱ \Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}۲ \Rightarrow ۷x\overset{۹}{\equiv}-۷$$

$$\xrightarrow{(۷,۹)=۱} x\overset{۹}{\equiv}-۱ \Rightarrow x=۹k-۱$$

.

۶۳

$$۲۷=۱۳\times۲+۱ \Rightarrow ۲۷\overset{۱۳}{\equiv}۱ \Rightarrow (۲۷)^{۲۰}\overset{۱۳}{\equiv}۱,\ ۱۸=۱۳\times۱+۵\ ,\ ۱۸\overset{۱۳}{\equiv}۵$$
$$\Rightarrow (۲۷)^{۲۰}+۱۸\overset{۱۳}{\equiv}۱+۵ \Rightarrow r=۶$$

۶۴

$$\begin{cases}۵|۴k+۱ \Rightarrow ۲۵|۱۶k^{۲}+۸k+۱\\ ۵|۴k+۱ \Rightarrow ۲۵|۲۰k+۵\end{cases} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^{۲}+۲۸k+۶$$

۶۵

$$n=۲k \Rightarrow n^{۲}-۵n+۷=۴k^{۲}-۱۰k+۶+۱=۲(۲k^{۲}-۵k+۳)+۱=۲q+۱$$

پاسخ سؤالات ۶۶ تا ۶۹

۶۶ نادرست

۶۷ درست

۶۸ درست

۶۹ نادرست

۷۰

$$a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|c\,(a-b) \Rightarrow m|ac-bc \Rightarrow ac\overset{m}{\equiv}bc$$

۷۱

$$۲^{۵}\overset{۱۰}{\equiv}۲ \Rightarrow ۲^{۱۰}\overset{۱۰}{\equiv}۲^{۲} \Rightarrow ۲^{۱۱}\overset{۱۰}{\equiv}۸ \Rightarrow ۲^{۱۱}+۷\overset{۱۰}{\equiv}۱۵\overset{۱۰}{\equiv}۵$$

رقم یکان برابر ۵ است.

۷۲

$$۳۸ \overset{۴}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۸^{۲} \overset{۴}{\equiv} ۴ \overset{۴}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} \overset{۴}{\equiv} ۰ \ , \ ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳ \Rightarrow ۳۸^{۳۶} + ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

۷۳

$$۱۰۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} (-۱)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱ \overset{۷}{\equiv} ۲ \Rightarrow r = ۲$$

۷۴

می‌دانیم $۱! \overset{۱۵}{\equiv} ۱$، $۲! \overset{۱۵}{\equiv} ۲$، $۳! \overset{۱۵}{\equiv} ۶$، $۴! \overset{۱۵}{\equiv} ۹$، $۵! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$ و ... و $۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۰$؛ پس داریم:

$$۱! + ۲! + ۳! + ۴! + ۵! + \cdots + ۲۰۰! \overset{۱۵}{\equiv} ۱ + ۲ + ۶ + ۲۴ + ۰ + ۰ + ۰ + \cdots + ۰ \overset{۱۵}{\equiv} ۳$$

۷۵

$$۷ | ۲k + ۱ \Rightarrow \begin{cases} ۴۹ | ۴k^{۲} + ۴k + ۱ \\ ۴۹ | ۱۴k + ۷ \end{cases} \Rightarrow ۴۹ | ۴k^{۲} - ۱۰k - ۶$$

۷۶

$$b = ۲k \ , \ b | a + ۲ \ \Rightarrow a + ۲ = bq \Rightarrow a = ۲t$$

که با فرض سؤال در تناقض است.

۷۷

$$۲x^{۲} + ۲xy + y^{۲} \geq ۴x - ۴ \Leftrightarrow x^{۲} + ۲xy + y^{۲} + x^{۲} - ۴x + ۴ \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^{۲} + (x - ۲)^{۲} \geq ۰$$

این رابطه همواره برقرار است.

۷۸

الف) نادرست

ب) نادرست

پ) درست

ت) درست

۷۹

$$۶۳ \overset{۱۶}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۶۳^{۱۴} \overset{۱۶}{\equiv} ۱ \Rightarrow A \overset{۱۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow r = ۲$$

۸۰

$$\begin{cases} a = ۵q_{۱} + ۴ \xrightarrow{\times ۴} ۴a = ۲۰q_{۱} + ۱۶ \\ a = ۴q_{۲} + ۳ \xrightarrow{\times ۵} ۵a = ۲۰q_{۲} + ۱۵ \end{cases} \xrightarrow{-} a = ۲۰q' - ۱ \Rightarrow ۲۰q'' + ۱۹$$

پاسخ سؤالات ۸۱ تا ۸۲

۸۱

درست

۸۲ درست

۸۳

$$\begin{cases} a|۲m+۳ \\ a|m+۷ \end{cases} \xrightarrow{\times ۲} \begin{cases} a|۲m+۳ \\ a|۲m+۱۴ \end{cases} \Rightarrow a|۱۱ \Rightarrow a=۱,\ a=۱۱$$

۸۴

$$x^۲+y^۲+۱ \geq ۲xy-z^۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲-۲xy+z^۲+۱ \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^۲+z^۲+۱ \geq ۰$$

همواره بدیهی است.

۸۵

$$۵x+۳y=۴۲ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x=۳k \Rightarrow ۵(۳k)+۳y=۴۲ \Rightarrow y=-۵k+۱۴$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ y=۱۴ \end{cases} ; \begin{cases} x=۳ \\ y=۹ \end{cases} ; \begin{cases} x=۶ \\ y=۴ \end{cases}$$

۸۶

الف نادرست، مثال نقض $n=۳$

ب درست، اثبات:

$$a=۲k+۱ \Rightarrow a^۲=(۲k+۱)^۲=۲(۲k^۲+۲k)+۱=۲k'+۱$$

۸۷

$$\begin{cases} a|۵k+۹ \\ a|۸k+۱۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a|۴۰k+۷۲ \\ a|۴۰k+۶۵ \end{matrix} \Rightarrow a|۷ \Rightarrow a=۱ \vee a=۷$$

۸۸

$$\begin{matrix} a=۶q+۳ \\ a=۷q'+۵ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ۷a=۴۲q+۲۱ \\ ۶a=۴۲q'+۳۰ \end{matrix} \Rightarrow a=۴۲(q-q'-۱)+۳۳ \Rightarrow r=۳۳$$

۸۹

$$\begin{matrix} a|۴k+۹ \\ a|۶k+۱۴ \end{matrix} \Rightarrow a|-۶(۴k+۹)+۴(۶k+۱۴) \Rightarrow a|۲ \xrightarrow{a>۱} a=۲$$

۹۰ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به‌صورت $۸k+۱$ می‌باشد $(k \in \mathbb{Z})$ پس داریم:

$$\begin{cases} a^۲=۸k+۱ \\ b^۲=۸k'+۱ \end{cases} \Rightarrow a^۲+b^۲+۵=۸k+۱+۸k'+۱+۵ \Rightarrow a^۲+b^۲+۵=۸k''+۷$$
$$\Rightarrow r=۷$$

۹۱

$$\begin{cases} a|۶(۵m+۴) \\ a|۵(۶m+۵) \end{cases} \Rightarrow a|۵(۶m+۵)-۶(۵m+۴) \Rightarrow a|۱ \Rightarrow a=\pm ۱$$

پاسخ سؤالات ۹۲ تا ۹۳

۹۲ $m^{۲}$

۹۳ نسبت به هم اول

۹۴

$$۶x \overset{۷}{\equiv} ۱۸۵ = ۲۳ \times ۷ + ۲۴ \Rightarrow ۶x \overset{۷}{\equiv} ۲۴ \xrightarrow{(۶,۷)=۱} x \overset{۷}{\equiv} ۴ \Rightarrow x = ۷k+۴ \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \ ۶(۷k+۴)+۷y = ۱۸۵ \Rightarrow y = -۶k+۲۳ \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

۹۵

$$a = bq + r \ , ۰ \le r < b \Rightarrow a - bq = r \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow n|a-bq \Rightarrow n|r$$

۹۶

$$a = ۲k+۱ \Rightarrow a^{۲} = ۴k^{۲} + ۴k + ۱ = \underbrace{۴k(k+۱)}_{\text{ضرب دو عدد صحیح متوالی}} + ۱ = ۴ \times ۲q + ۱ = ۸q + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

۹۷

$$۴a - ۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳a - ۵ \Rightarrow a \overset{۱۰}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۹a + ۶ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴ \Rightarrow r = ۴$$

۹۸ فرض کنیم r یک عدد گویا و x یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که $r+x$ یک عدد گنگ است.
فرض خلف: فرض کنیم $r+x$ گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس $r+x-r \in Q$، یعنی $x \in Q$ و این با فرض گنگ بودن x تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

۹۹ طبق الگوریتم تقسیم داریم:
$a = ۳k$ که بر ۳ بخش‌پذیر است یا $a = ۳k+۱ \Rightarrow a+۲ = ۳(k+۱)$ یا $a = ۳k+۲ \Rightarrow a+۴ = ۳(k+۲)$ که در هر دو مورد بر ۳ بخش‌پذیر هستند.

۱۰۰

$$a|۹(۵k+۳)-۵(۹k+۴) \Rightarrow a|۲۷-۲۰ \Rightarrow a|۷ \xrightarrow{a>۱} a = ۷ \in P$$

۱۰۱

$$p = ۴k \quad (۱) \ , \ p = ۴k+۱ \quad (۲)$$

$$p = ۴k+۲ = ۲(۲k+۱) \quad (۳) \ , \ p = ۴k+۳ \quad (۴)$$

در حالت (۱) و (۳)، p عددی زوج است که با اول‌بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم (۲) یا (۴) خواهند بود.

پاسخ سؤالات ۱۰۲ تا ۱۰۳

۱۰۲ عدد a شمارندهٔ عدد b است.

۱۰۳ $۲m$

۱۰۴

$$(۵a+۴, ۲a+۳)=d \Rightarrow \begin{cases} d|۲a+۳ \\ d|۵a+۴ \end{cases}$$

$$\Rightarrow d|-۲(۵a+۴)+۵(۲a+۳)$$

$$d|۷ \Rightarrow d=۱ \text{یا} ۷$$

۱۰۵

$$a=۱۷q+۵$$

$$b=۱۷q'+۳$$

$$\Rightarrow ۲a-۵b=۱۷\times ۲q+۱۰-۱۷\times ۵q'-۱۵$$

$$=۱۷\overbrace{(۲q-۵q'-۱)}^{k\in\mathbb{Z}}+۱۲=۱۷k+۱۲ \Rightarrow r=۱۲$$

۱۰۶

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq ۲ \Leftrightarrow \frac{x^۲+y^۲}{xy}\geq ۲ \Leftrightarrow x^۲+y^۲\geq ۲xy \Leftrightarrow (x-y)^۲\geq ۰$$

چون رابطهٔ آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست می‌باشد.

۱۰۷

$$۷^۲=۴۹\overset{۱۵}{\equiv}۴ \Rightarrow ۷^۴\overset{۱۵}{\equiv}۱۶\overset{۱۵}{\equiv}۱ \Rightarrow ۷^{۲۸}\overset{۱۵}{\equiv}۱ \xrightarrow{\times ۷^۲\overset{۱۵}{\equiv}۴} ۷^{۳۰}\overset{۱۵}{\equiv}۴$$

۱۰۸

$$\begin{cases} n|(۹k+۷)\times(-۷) \\ n|(۷k+۶)\times ۹ \end{cases} \Rightarrow n|-۶۳k-۴۹+۶۳k+۵۴ \Rightarrow n|۵ \xrightarrow{n\in\mathbb{N}} n=۱ \text{ یا } ۵$$

۱۰۹

$$a=۴q+۳ \Rightarrow ۲a+۳=۸q+۹=۸(q+۱)+۱=۸q'+۱ \Rightarrow r=۱$$

پاسخ سؤالات ۱۱۰ تا ۱۱۱

۱۱۰ نادرست

$$\sqrt{۲}, -\sqrt{۲}\in Q^C \quad , \quad \sqrt{۲}+\left(-\sqrt{۲}\right)=۰\notin Q^C$$

۱۱۱ درست

$$(۲k+۱)^۲ - ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱ = ۴k(k+۱) = ۴ \times ۲q = ۸q$$

۱۱۲

$$\begin{matrix} m = ۱۷q + ۵ & (q \in \mathbb{Z}) \\ n = ۱۷q' + ۳ & (q' \in \mathbb{Z}) \end{matrix} (۰/۵) \Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q') - ۵ \quad (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow (۲m - ۵n) = ۱۷(۲q - ۵q' - ۱) + ۱۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow r = ۱۲ \quad (۰/۲۵)$$

۱۱۳ هرگاه p را بر ۶ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\left.\begin{matrix} (۱): \ p = ۶k \, , \ (۲): \ p = ۶k + ۱, \ (۳): \ p = ۶k + ۲ = ۲(۳k+۱) \\ (۴): \ p = ۶k + ۳ = ۳(۲k+۱) \, , \ (۵): \ p = ۶k + ۴ = ۲(۳k+۲) \, , (۶): \ p = ۶k + ۵ \end{matrix}\right\} (۰/۷۵)$$

در حالات (۱)، (۳) و (۵) زوج و در (۴) بر ۳ بخش‌پذیر است(۰/۲۵) که با اول بودن p تناقض دارد (۰/۲۵). بنابراین فقط در حالات (۲) یا (۶)، p می‌تواند عددی اول باشد که حکم اثبات می‌شود (۰/۲۵).

پاسخ سؤالات ۱۱۴ تا ۱۱۵

۱۱۴ درست

۱۱۵ نادرست

۱۱۶

$$a + \frac{۱}{a} \geq ۲ \Leftrightarrow a^۲ + ۱ \geq ۲a \Leftrightarrow a^۲ - ۲a + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (a-۱)^۲ \geq ۰$$

عبارت بالا همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد.

۱۱۷

$$۱۳ \overset{۱۷}{\equiv} -۴ \Rightarrow ۱۳^۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۳^{۲۲} \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \xrightarrow{-۱ \overset{۱۷}{\equiv} ۱۶} r = ۱۶$$

۱۱۸

$$A = ۲۱a^۲ = ۳ \times ۷ \times a^۲ \ , \ B = ۳۵a^۳ = ۵ \times ۷ \times a^۳ \Rightarrow [A,B] = ۱۰۵a^۳$$

پاسخ سؤال ۱۱۹

۱۱۹

$$\forall m > ۰ \ , \ a|m \ , \ b|m \Rightarrow c \leq m$$

۱۲۰

$$\begin{cases} a = ۵q + ۲ \\ a = ۶q' + ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۶a = ۳۰q + ۱۲ \\ ۵a = ۳۰q' + ۱۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = ۳۰q'' - ۳ \Rightarrow a = ۳۰r + ۲۷$$

۱۲۱

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow ۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲z^۲ \geq ۲xy + ۲yz + ۲xz$$
$$\Leftrightarrow (x^۲ + y^۲ - ۲xy) + (y^۲ + z^۲ - ۲yz) + (x^۲ + z^۲ - ۲xz) \geq ۰$$
$$\Leftrightarrow (x - y)^۲ + (y - z)^۲ + (x - z)^۲ \geq ۰$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط، حکم برقرار است.

پاسخ سؤالات ۱۲۲ تا ۱۲۳

۱۲۲ درست است.

۱۲۳ نادرست است.

۱۲۴

$$\begin{matrix} m = ۱۳q_۱ + ۲ \\ n = ۱۳q_۲ + ۹ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} ۳m = ۱۳(۳q_۱) + ۶ \\ ۵n = ۱۳(۵q_۲) + ۴۵ \end{matrix} \Rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q' + ۳۹$$

$$\Rightarrow ۵n - ۳m = ۱۳q'' + ۰ \Rightarrow r = ۰$$

۱ ۷ دانش‌آموز a, b, c, d, e, f, g از یک کلاس را در نظر بگیرید. فرض کنید دوستی بین اعضای این گروه یک رابطه دو طرفه است. یعنی هر دو نفر از آن‌ها یا هر دو باهم دوست‌اند یا هیچ یک با دیگری دوست نیست. اطلاعات زیر را داریم:

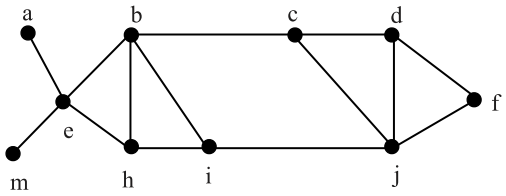
- شخص a با b, g, d دوست می‌باشد. شخص b با همه به جز c دوست می‌باشد.
- شخص e با f دوست می‌باشد. شخص d با g دوست می‌باشد.

الف برای رابطهٔ دوستی فوق یک گراف ترسیم کنید.

ب رأس یا رئوس ایزوله این گراف را مشخص کنید و تعبیر آن را در این رابطه دوستی بیان کنید.

پ رابطه دوستی کدام چهار نفر تشکیل یک گراف کامل را می‌دهد.

۲ گراف زیر را در نظر بگیرید.



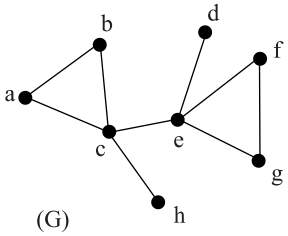
الف آیا $\{a, h, i, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای این گراف می‌باشد؟ چرا؟

ب آیا مجموعهٔ $\{a, m, i, f, d\}$ احاطه‌گر مینیمال است؟ چرا؟

پ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم شامل رأس e بنویسد.

۳ در گراف کامل K_p با ۲۸ یال مقدار $2\Delta(K_p) - 3\delta(K_p) + p$ را محاسبه کنید.

۴ گراف G زیر را در نظر بگیرید:



الف مقدار $q(\bar{G})$ را به دست آورید.

ب مجموع درجات رئوس گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.

پ مجموعهٔ $N_{\bar{G}}[e]$ را بنویسید.

درستی و یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۵ اگر $\deg_G(v) = ۵$ و G یک گراف ۱۰ رأسی باشد، آنگاه $\deg_{\bar{G}}(v) = ۴$.

جاهای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید.

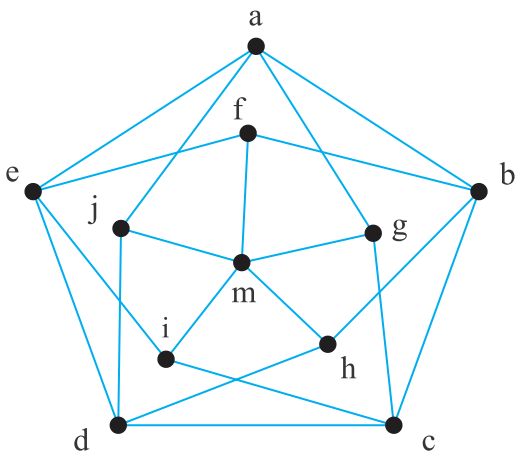
۶ گراف $۳-$ منتظم، ۸ رأسی دارای ..... یال است.

۷ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.

ب یک $۷-$ مجموعه از آن را مشخص کنید.

۸ باتوجه‌به گراف G، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



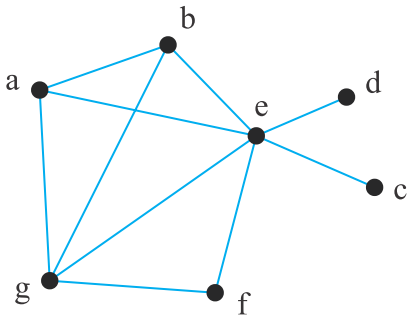
G

الف آیا مجموعهٔ $D = \{a, b, m\}$، یک مجموعهٔ احاطه‌گر است؟ چرا؟

ب عدد احاطه‌گری گراف G را به‌دست آورید. (با ذکر دلیل)

پ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن بنویسید.

۹ باتوجه‌به گراف G، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



G

الف مرتبه و اندازهٔ گراف را بنویسید.

ب مسیری به طول ۵ از رأس c به رأس f بنویسید.

پ دوری به طول ۴ بنویسید.

ت آیا گراف $\overline{G}$ همبند است؟ چرا؟

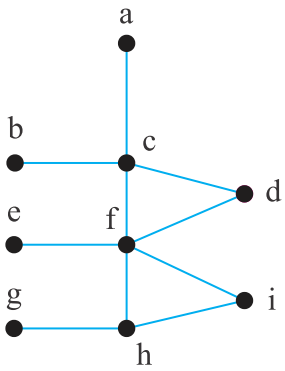
درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۰ هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید.

۱۱ عدد احاطه‌گری گراف C_7، برابر است با ..... .

۱۲ در گراف زیر:

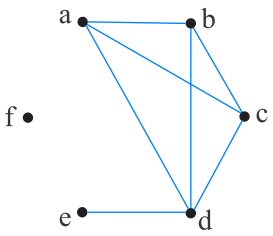


الف مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال $A = \{b, e, g, a, f\}$ را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کنید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم که شامل رأس e باشد را بنویسید.

پ با اضافه نمودن چه یالی، عدد احاطه‌گری گراف، ۲ می‌شود؟

۱۳ باتوجه‌به گراف G (شکل زیر) به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف مقدار $q - \Delta(G)$ را بیابید.

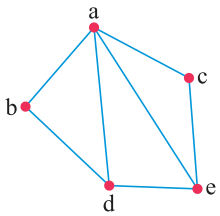
ب یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

پ با ذکر دلیل مشخص کنید گراف مکمل G چند یال دارد؟

۱۴ تفاوت بین مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال و مینیمم چیست؟ توضیح دهید.

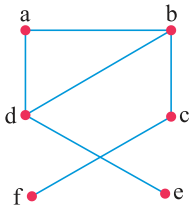
۱۵ در گراف P_{10} چند مسیر به طول ۳ وجود دارد؟

۱۶ مکمل گراف G که در شکل زیر آمده است را رسم کنید.



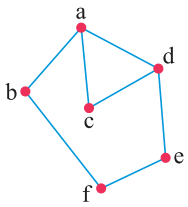
۱۷ الف) با ذکر دلیل عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را تعیین کنید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال بنویسید که مینیمم نباشد. برای پاسخ خود دلیل ارائه دهید.



(G)

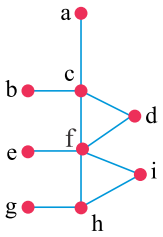
۱۸ در گراف شکل زیر، همسایگی باز رأس d را بنویسید.



۱۹ آیا می‌توان گرافی ۳- منتظم از مرتبهٔ ۹ رسم کرد؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

۲۰ مجموعهٔ همسایگی بستهٔ یک رأس در گراف را تعریف کنید.

۲۱ گراف شکل زیر را در نظر بگیرید.

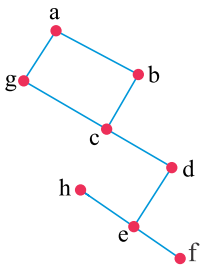


الف یک ۷− مجموعه مشخص کنید.

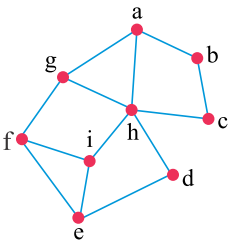
ب یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

۲۲ ابتدا گراف P_9 را رسم کنید. سپس یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم از آن را مشخص کنید.

۲۳ عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.



۲۴ برای گراف شکل زیر، یک مجموعه احاطه‌گر با ۴ عضو انتخاب کنید.

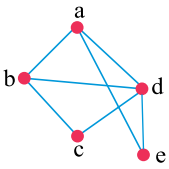


۲۵ مجموعه احاطه‌گر مینیمال را تعریف کنید.

به سوالات زیر کوتاه پاسخ دهید.

۲۶ گراف C_7 را رسم کنید. سپس یک مسیر به طول ۵ بنویسید.

۲۷ در گراف شکل زیر، $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.



جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

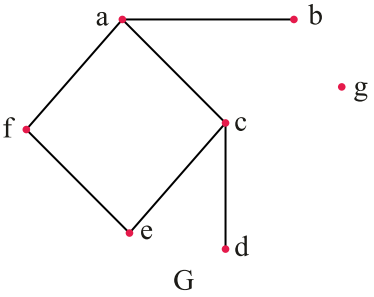
۲۸ اگر درجه یک رأس فرد باشد، آن را رأس ..... می‌نامیم.

۲۹ گرافی را که تمام رئوس آن تنها باشد، هیچ یالی نداشته باشد، گراف ..... می‌نامیم.

۳۰ تعداد یال‌های گراف K_4، برابر با ..... است.

۳۱ گراف G را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۳۲ گراف G به صورت زیر رسم شده است. باتوجه‌به این گراف به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف مرتبه و اندازهٔ آن را بنویسید.

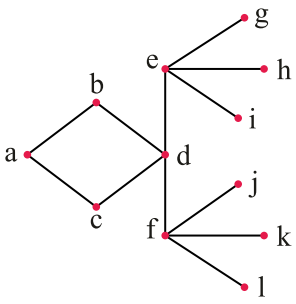
ب مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.

پ مجموعهٔ $N_G[c]$ را بنویسید.

ت دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.

ث حاصل عبارت $q(\overline{G}) + \deg_{\overline{G}}(g)$ را به دست آورید.

۳۳ گراف زیر را در نظر بگیرید:



الف عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.

پ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.

جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

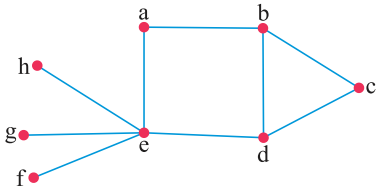
۳۴ گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف ..... می‌گوییم.

۳۵ تعداد رئوس فرد هر گراف عددی ..... است.

۳۶ مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبهٔ p برابر ..... است.

۳۷ گرافی را که درجهٔ تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف ..... می‌گوییم.

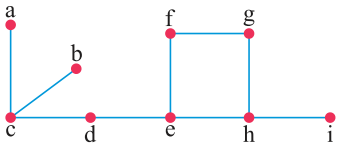
۳۸ عدد احاطه‌گری گراف زیر را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید. این گراف چند γ– مجموعه دارد؟



۳۹ یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۳ داشته باشد.

۴۰ یک گراف ۸ رأسی (همبند یا ناهمبند) با عدد احاطه‌گری ۳ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۳ داشته باشد.

۴۱ گراف زیر را در نظر بگیرید.

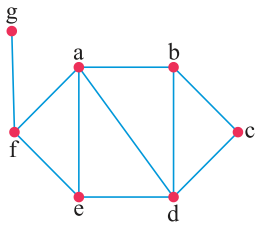


الف یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال با ۴ عضو بنویسید.

ب یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۴ عضو بنویسید.

پ با اضافه کردن چه یالی به گراف، عدد احاطه‌گری گراف ۲ خواهد شد؟

۴۲ گراف G به صورت زیر رسم شده است. باتوجه‌به این گراف به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف مجموعه $N_G(g)$ را بنویسید.

ب یک دور به طول ۵ با شروع از رأس a بنویسید.

پ درجه رأس c در گراف $\bar{G}$ (مکمل گراف G) را مشخص کنید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۴۳ در یک گراف از مرتبه p، اگر $\gamma(G) = ۱$ باشد، در این صورت حداقل تعداد یال‌ها برابر ..... است.

درست یا نادرست بودن عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۴۴ تعداد رئوس فرد هر گراف، عددی فرد است.

۴۵ عدد احاطه‌گری $P_{۱۰}$ برابر عدد ۳ است.

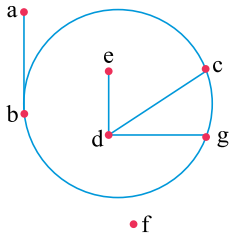
۴۶ به گراف ۸ رأسی ۳- منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه حل)

۴۷ به سؤالات زیر پاسخ داده و برای آن‌ها دلیل ارائه کنید.

الف یک گراف کامل ۱۱ رأسی چند یال دارد؟

ب در یک گراف از مرتبهٔ ۸ با $\Delta = ۳$ حداقل چند رأس برای احاطهٔ همه رئوس لازم است؟

۴۸ باتوجه‌به گراف (G) (شکل زیر)، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف یک مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.

ب یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

پ درجهٔ رأس a را در گراف $\overline{G}$ تعیین کنید.

ت آیا گراف G همبند است؟ (با ذکر دلیل)

ث $N_G[f]$ را بنویسید.

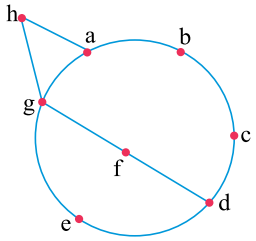
۴۹ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف گراف C_8 را رسم کنید.

ب یک $7-$ مجموعه از آن مشخص کنید.

پ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴- عضوی از آن را مشخص کنید.

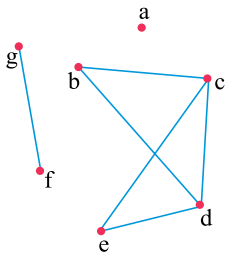
۵۰ باتوجه‌به گراف G (شکل زیر)، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف عدد احاطه‌گری را برای گراف مشخص کنید.

ب یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۵۱ گراف G (شکل زیر) را در نظر بگیرید:



الف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

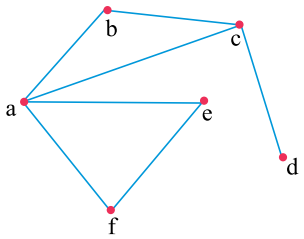
ب دوری به طول ۴ بنویسید.

پ دو مسیر به طول ۳ با شروع از رأس b بنویسید.

ت $N_G(f)$ را با اعضا مشخص کنید.

۵۲ یک گراف ۲-منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۵۳ عدد احاطه‌گری را برای گراف زیر مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



در هر مورد، عبارت صحیح را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

۵۴ تعداد رئوس یک گراف را (اندازه، مرتبه) می‌نامیم.

۵۵ گرافی را همبند می‌نامیم که بین هر دو رأس آن یک (مسیر، یال) وجود داشته باشد.

۵۶ اگر G یک گراف n رأسی باشد، مقدار $q(G)+q(\overline{G})$ برابر با $(n(n-۱)$، $\frac{n(n-۱)}{۲}$) است.

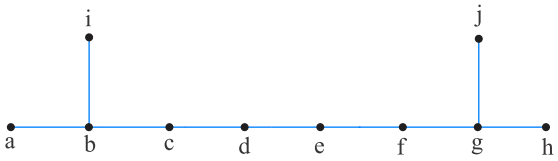
۵۷ گراف C_n تنها یک (دور، مسیر) n رأسی دارد.

در جاهای خالی عبارت‌های مناسب بنویسید.

۵۸ یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر ..... می‌نامیم.

۵۹ تعداد یال‌های گراف $K_۷$، برابر ..... است.

۶۰ عدد احاطه‌گری گراف G (شکل زیر) را با ارائهٔ راه‌حل، تعیین کنید.



۶۱ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.

الف هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم است.

ب اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد، آنگاه $\gamma(G) > \left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$.

پ در گراف P_n عدد احاطه‌گری برابر با $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ است.

ت $\lceil ۳/۴۸ \rceil = ۴$

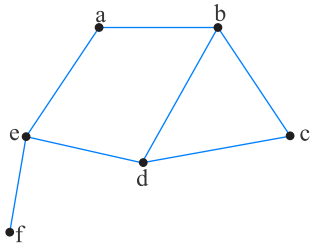
۶۲ به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف گراف $C_{۱۰}$ را رسم کنید.

ب یک ۷–مجموعه از آن را مشخص کنید.

پ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی از آن را تعیین نمایید.

۶۳ شکل زیر نمودار گراف G می‌باشد.



الف مرتبه و اندازهٔ گراف G را بنویسید.

ب مجموعهٔ $N_G(b)$ را بنویسید.

پ مجموع درجه‌های رأس‌های گراف $\bar{G}$ را مشخص کنید.

۶۴ گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های زیر در نظر بگیرید:

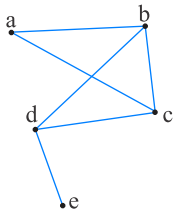
$$E = \{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef\}$$

الف نمودار گراف را رسم کنید.

ب $N_G[b]$ را مشخص کنید.

پ یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

۶۵ گراف G به‌صورت زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



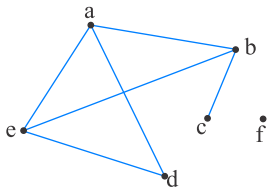
الف $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب اندازهٔ گراف را تعیین کنید.

پ مجموعهٔ همسایگی بستهٔ رأس b را بنویسید.

ت اگر $N_G(d) = \{e, x, b\}$ باشد، x کدام رأس است؟

۶۶ گراف G را در نظر گرفته و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

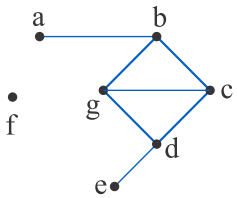


الف $N_G[a]$ را با اعضا مشخص کنید.

ب یک دور به طول ۴ در این گراف مشخص کنید.

پ یک مسیر به طول ۳ و یک مسیر به طول ۴ از a به c بنویسید.

باتوجه‌به گراف G (شکل زیر)، به سوالات زیر پاسخ دهید.



۶۷ مسیر به طول ۳ از a به c بنویسید.

۶۸ یک دور به طول ۴ مشخص کنید.

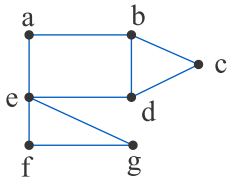
۶۹ درجهٔ رأس a در گراف $\overline{G}$ را تعیین کنید.

۷۰ آیا گراف G همبند است؟ دلیل ارائه کنید.

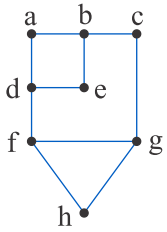
۷۱ $N_G(f)$ را معین کنید.

۷۲ گراف G، ۳− منتظم است و اندازهٔ آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف می‌باشد. مرتبهٔ گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

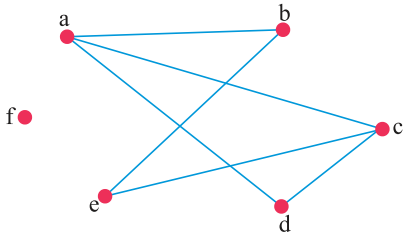
۷۳ عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را با ارائهٔ راه‌حل، تعیین کنید.



۷۴ در گراف شکل زیر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



۷۵ گراف G که به‌صورت زیر است را در نظر بگیرید:



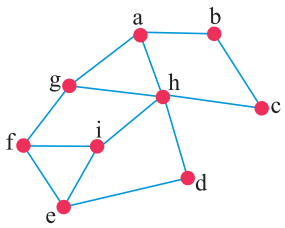
الف $N_G(c)$ را با اعضا مشخص کنید.

ب بزرگ‌ترین درجه در گراف $\bar{G}$ مربوط به کدام رأس و چند است؟

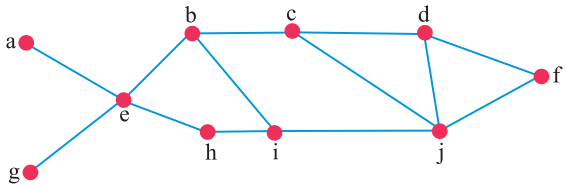
پ دوری به طول ۵ برای رأس a بنویسید.

ت آیا گراف G همبند است؟

۷۶ در گراف شکل زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



۷۷ عدد احاطه‌گری گراف شکل زیر را با ارائهٔ راه‌حل، تعیین کنید.

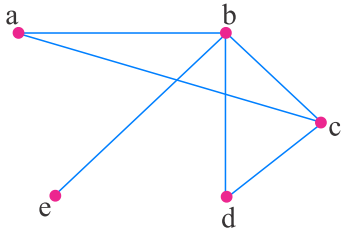


به سوالات زیر پاسخ دهید:

۷۸ یک گراف ۶ رأسی که ۷− مجموعهٔ آن با اندازهٔ یک باشد، رسم کنید.

۷۹ یک گراف ۶ رأسی که ۷− مجموعهٔ آن با اندازهٔ دو باشد، رسم کنید.

۸۰ گراف G را به صورت زیر در نظر بگیرید.

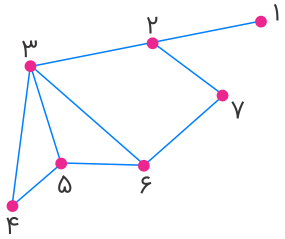


الف درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟

ب تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.

پ $\Delta(G)$ را مشخص کنید.

۸۱ در گراف G که شکل آن در زیر داده شده است:



الف یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال با ۳ عضو بنویسید.

ب عدد احاطه‌گری G را تعیین کنید.

به سؤالات زیر پاسخ دهید:

۸۲ گراف k−منتظم را تعریف کنید.

۸۳ گراف P_7 را رسم کنید.

۸۴ آیا گراف‌های C_n منتظم هستند؟

جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید.

۸۵ مرتبه گراف نشان دهنده تعداد ..... گراف است.

۸۶ اگر یک یال، یک رأس را به خود آن رأس وصل کند، این یال را ..... می‌نامیم.

۸۷ دو یال را ..... می‌نامیم هرگاه رأسی وجود داشته باشد که هر دوی آن‌ها را به هم متصل کند.

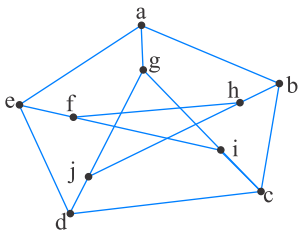
۸۸ تعداد رأس‌های فرد هر گراف عددی ..... است.

۸۹ گراف G، ۶ رأسی -3 منتظم است.

الف اندازهٔ گراف G را بیابید.

ب نمودار گراف G را رسم کنید.

۹۰ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



۹۱ گرافی ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید، به‌طوری‌که:

الف مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

۹۲ در گراف G، درجهٔ رأس v برابر با ۹ است و درجهٔ رأس v در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبهٔ گراف G را مشخص کنید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۹۳ مجموع درجه‌های رأس‌های هر گراف ..... تعداد یال‌ها است.

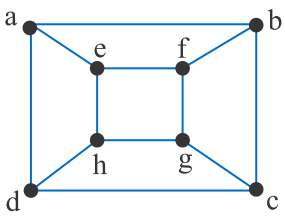
۹۴ در یک گراف $k-$ منتظم، ماکزیمم درجهٔ رأس برابر با ..... است.

۹۵ در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند، مجموعهٔ احاطه‌گر ..... گراف G می‌نامیم.

۹۶ یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هریک از رأس‌هایش، دیگر احاطه‌گر نباشد، احاطه‌گر ..... می‌نامیم.

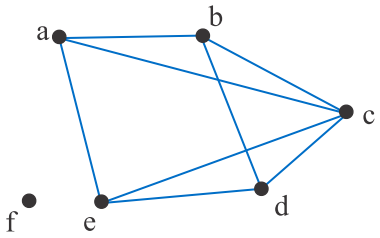
۹۷ گراف P_5 را رسم کرده و تمام مسیرهای به طول ۳ را مشخص کنید.

۹۸ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص کنید.



۹۹ گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

۱۰۰ گراف G به صورت زیر رسم شده است. به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ را مشخص کنید.

ب سه دور به طول ۳ بنویسید.

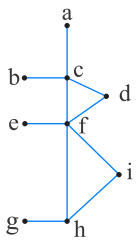
پ ماکزیمم درجه در مکمل گراف G چند است؟

ت $N_G(e)$ را با اعضا بنویسید.

ث آیا گراف G همبند است؟

۱۰۱ آیا گراف ۷ رأسیِ ۳-منتظم وجود دارد؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۱۰۲ برای گراف زیر:



الف یک مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو مشخص کنید.

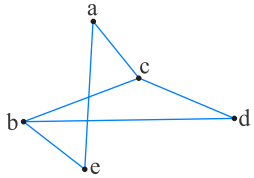
ب مجموعه‌ای از رئوس را مشخص کنید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

۱۰۳ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۱۰۴ تعداد رأس‌های زوج هر گراف، عددی فرد است.

۱۰۵ گراف G به‌صورت زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف دوری به طول ۵ مشخص کنید.

ب مکمل گراف G را رسم کنید.

۱۰۶ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجهٔ گراف باشد:

الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ است.

ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

۱۰۷) آیا گراف ۳−منتظم از مرتبهٔ ۵ وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

۱۰۸) گراف $k-$منتظم از مرتبهٔ n را تعریف کنید.

۱۰۹) به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) گراف P_8 را رسم کنید.

ب) یک $\gamma-$ مجموعه از آن را مشخص کنید.

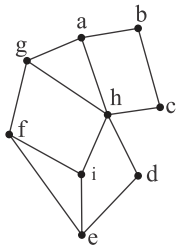
پ) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن را مشخص نمایید.

۱۱۰) یک گراف ۵ رأسی غیرتهی $k-$ منتظم رسم کنید به‌طوری‌که:

الف) k بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ب) k کمترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۱۱۱) در گراف شکل زیر، یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید؛ سپس با حذف برخی از رأس‌ها، آن‌ها را به یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.



جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۱۲) گراف G را ..... می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد.

۱۱۳) مقدار $\gamma(C_n)$ به ازای هر عدد طبیعی $n > ۲$ برابر است با: .....

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

۱۱۴) یک گراف کامل ۸ رأسی، ..... یال دارد.

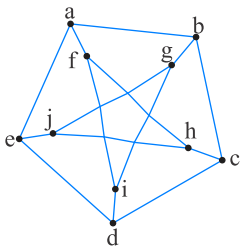
۱۱۵) در یک گراف از مرتبه ۱۰ با $\Delta = ۳$ ، حداقل ..... رأس برای احاطهٔ همه رئوس لازم است.

۱۱۶) اگر در گراف G از مرتبه p داشته باشیم $\gamma(G) = ۱$ ، در این صورت $\Delta(G)$ برابر ..... است.

۱۱۷) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۱۸) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۱۹ در گراف زیر یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۵ عضوی را مشخص کنید.



۱۲۰ ثابت کنید هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را می‌توان با حذف برخی از رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد.

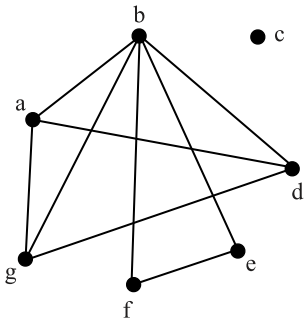
۱۲۱ گراف C_7 را در نظر بگیرید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی بنویسید.

ب) عدد احاطه‌گری C_7 را به دست آورید.

پ) دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم متمایز بنویسید.

۱ الف



ب c، دانش‌آموز c در این رابطه با هیچکس دوست نیست.

پ $\{a, b, d, g\}$

۲ الف خیر؛ زیرا رأس m توسط هیچ‌کدام از اعضای این مجموعه احاطه نمی‌شود.

ب خیر؛ زیرا با حذف رأس f مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز یک مجموعهٔ احاطه‌گر می‌باشد.

پ $\{e, j\}$

۳

$$q(K_p) = ۲۸ = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow p = ۸$$
$$\Delta(K_p) = \delta(K_p) = ۷ \Rightarrow ۲\Delta(K_p) - ۳\delta(K_p) + p$$
$$= ۲ \times ۷ - ۳ \times ۷ + ۸ = ۱$$

۴ الف

$$q(G) = ۹ \Rightarrow q(G) + q(\bar{G}) = \frac{n(n-۱)}{۲} \Rightarrow q(\bar{G}) = ۲۸ - ۹ = ۱۹$$

ب

$$\sum_{i=۱}^{۸} deg_{\bar{G}}(v) = ۲q(\bar{G}) = ۲ \times ۱۹ = ۳۸$$

پ

$$N_{\bar{G}}[e] = \{e, a, b, h\}$$

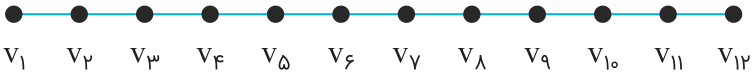
پاسخ سؤال ۵

۵ درست

پاسخ سؤال ۶

۶ ۱۲

۷ **الف**



ب

$\{v_2, v_5, v_8, v_{11}\}$

۸ **الف** خیر، زیرا رأس d احاطه نمی‌شود.

یا:

$N_G[a] \cup N_G[b] \cup N_G[m] \neq V(G)$

ب داریم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{11}{6} \right\rceil = 2$، و از طرفی، مجموعهٔ سه عضوی $\{a, m, d\}$، احاطه‌گر مینیمم می‌باشد. پس: $\gamma(G) = 3$.

پ

$\{f, g, h, i, j\}$

۹ **الف**

$p = 7 \ , \ q = 10$

ب cebagf یا ceabgf

پ ebgfe یا eagfe یا ebage یا eagbe

ت خیر، زیرا رأس e در گراف G، ماکزیمم درجه است؛ لذا درجهٔ آن در گراف $\overline{G}$، صفر است.

یا:

$deg_G(e) = p - 1 = \Delta = 6$

$\Rightarrow deg_{\overline{G}}(e) = 0 \Rightarrow$ $\overline{G}$ ناهمبند است.

پاسخ سؤال ۱۰

۱۰ نادرست

پاسخ سؤال ۱۱

۱۱ ۳ یا $\left\lceil \frac{۷}{۳} \right\rceil$

۱۲ الف

$\{b, g, a, f\}$

ب

$\{c, e, h\}$

پ

ec یا eh یا gf یا gc

۱۳ الف

$۷ - ۴ = ۳$

ب

a d b c a یا a b c d a

پ

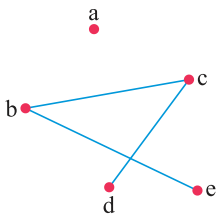
$$q(G) + q(\overline{G}) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Rightarrow ۷ + q(\overline{G}) = ۱۵ \Rightarrow q(\overline{G}) = ۸$$

۱۴ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم مجموعهٔ احاطه‌گری است که کمترین تعداد عضو را دارد ولی مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مجموعهٔ احاطه‌گری است که با حذف هریک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نیست و می‌تواند از مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم بیشتر عضو داشته باشد.

۱۵

۷ مسیر: ۱۲۳۴ – ۲۳۴۵ – ۳۴۵۶ – ۴۵۶۷ – ۵۶۷۸ – ۶۷۸۹ – ۷۸۹۱۰

۱۶



۱۷ الف) طبق قضیه داریم: $\gamma(G) \geq ۲ = \left\lceil \frac{۶}{۳+۱} \right\rceil$. ازطرفی مجموعهٔ $D = \{d, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، لذا $\gamma(G) \leq ۲$، بنابراین $\gamma(G) = ۲$.

ب) $D = \{a, f, e\}$، دلیل آنکه مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است: با حذف رأس a، رأس a احاطه نمی‌شود. با حذف رأس f، رأس c احاطه نمی‌شود. با حذف رأس e، خود رأس e احاطه نمی‌شود.

۱۸ $N_G(d) = \{a, c, e\}$

۱۹ خیر- در یک گراف $r-$ منتظم داریم $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2q$ به عبارتی $rp = 2q$. در این سؤال $r = 3$ ، $p = 9$، لذا $rp = 27$ عددی فرد و $2q$ عددی زوج است و این تناقض است.

۲۰ مجموعهٔ رأس‌هایی از یک گراف که به یک رأس متصل هستند و به همراه خود رأس را مجموعهٔ همسایگی بستهٔ آن رأس می‌نامیم.

۲۱ الف $D = \{h, c, e\}$

ب $D = \{g, c, i, e\}$

۲۲

$D = \{۲, ۵, ۸\}$

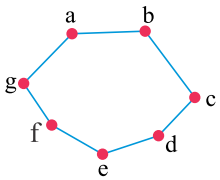
۲۳ برای احاطه کردن رئوس a، b، c، d و g حداقل دو تا از آن‌ها باید در مجموعه احاطه‌گر باشند، زیرا $\left\lceil \frac{۵}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ برای احاطه کردن رئوس e، f و h حداقل یکی از آن‌ها باید انتخاب شوند، زیرا، $\left\lceil \frac{۳}{۳+۱} \right\rceil = ۱$ بنابراین حداقل سه رأس باید در مجموعه احاطه‌گری از گراف باشد یعنی $\gamma(G) \geq ۳$ ازطرفی مجموعه $D = \{a, c, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq ۳$ بنابراین: $\gamma(G) = ۳$

۲۴ $D = \{h, b, i, a\}$

۲۵ یک مجموعه احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رئوس آن دیگر احاطه‌گر نباشد را احاطه‌گر مینیمال می‌نامیم.

پاسخ سؤالات ۲۶ تا ۲۷

۲۶ رسم گراف



مسیر: abcdef

۲۷ $N_G(c) = \{b, d\}$

پاسخ سؤالات ۲۸ تا ۳۱

۲۸ فرد

۲۹ تهی

۳۰ ۶

۳۱ همبند

۳۲ الف $p = ۷$ ، اندازه $q = ۶$ مرتبه

ب $\sum deg(v_i) = ۲q = ۱۲$

پ $N_G[c] = \{a, c, d, e\}$

ت acefa

ث $q(G) + q(\overline{G}) = \frac{n(n-۱)}{۲} = ۲۱ \Rightarrow q(\overline{G}) = ۱۵$

$deg_G(g) + deg_{\overline{G}}(g) = n - ۱ = ۶ \Rightarrow deg_{\overline{G}}(g) = ۶$

$q(\overline{G}) + deg_{\overline{G}}(g) = ۱۵ + ۶ = ۲۱$

۳۳ الف $\gamma(G) \geq [\frac{p}{\Delta + ۱}] \Rightarrow \gamma(G) \geq ۳ \quad (\star)$

ازطرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، بنا به رابطهٔ (*) پس: $\gamma(G) = ۳$

ب $B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$

پ $C = \{a, e, f, b\}$

پاسخ سؤالات ۳۴ تا ۳۷

۳۴ همبند

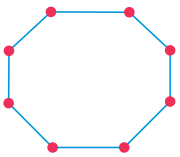
۳۵ زوج

۳۶ $p-1$

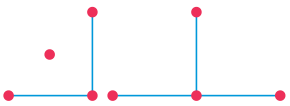
۳۷ k- منتظم

۳۸ می‌دانیم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ پس داریم $\left\lceil \frac{8}{5+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ درنتیجه $2 \leq \gamma(G)$ ازطرفی مجموعه‌ای مانند $\{e, c\}$ (هر کدام از مجموعه‌های $\{e, b\}$ یا $\{e, d\}$ اگر نوشته شده نیز مورد قبول است) یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف (G) می‌باشد پس $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$.
سه $\gamma-$ مجموعه دارد.

۳۹



۴۰



۴۱ الف $\{c, e, h, f\}$

ب $\{c, g, i, e\}$

پ fh

۴۲ الف $\{f\}$

ب abdefa یا abcdea

پ ۴

پاسخ سؤال ۴۳

۴۳ $p-۱$

پاسخ سؤالات ۴۴ تا ۴۵

۴۴ نادرست

۴۵ نادرست

۴۶

$$\begin{cases} q=\frac{kn}{۲} \Rightarrow q=\frac{۸\times ۳}{۲}=۱۲ \\ q=\frac{n(n-۱)}{۲} \Rightarrow q=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸ \end{cases} \Rightarrow ۲۸-۱۲=۱۶$$

۴۷

الف

$$\frac{p(p-۱)}{۲}=\frac{۱۱(۱۱-۱)}{۲}=۵۵$$

ب

$$\left\lceil \frac{n}{۵+۱} \right\rceil = \left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$$

۴۸

الف

abgc

ب

bcdgb

پ ۵

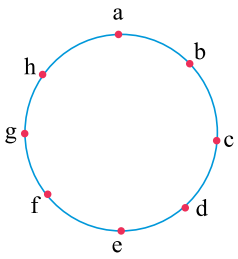
ت خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است. (هیچ مسیری از f به سایر رئوس وجود ندارد)

ث

$N_G[f]=\{f\}$

۴۹

الف



ب

$D = \{a, d, g\}$

پ $\{a, c, e, g\}$: یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال

۵۰

الف

$\{g, c\} \Rightarrow \gamma(G) = ۲$

ب

$\{h, d, b\}$

۵۱

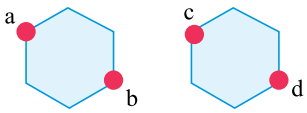
الف $\delta(G) = ۰\ ,\ \Delta(G) = ۳$

ب bcedb

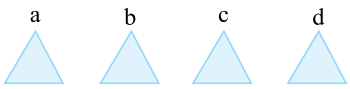
پ bcde یا bdec یا bced یا bdce

ت $N_G(f) = \{g\}$

۵۲



شکل دیگر با ویژگی‌های گفته‌شده می‌تواند شکل زیر باشد:



۵۳ روش اول: می‌دانیم $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$ پس داریم $\left\lceil \frac{۶}{۵} \right\rceil \leq \gamma(G)$ بنابراین $۲ \leq \gamma(G)$ و باتوجه‌به $\{a, d\}$ داریم $\gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G) = ۲$.

روش دوم: این گراف با مجموعهٔ دو عضوی $\{a, d\}$ احاطه می‌شود. پس عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است یعنی $\gamma(G) \leq ۲$. اما اگر $\gamma(G) = ۱$ یعنی گراف یک رأس دارد که تمام رئوس را احاطه می‌کند یعنی رأس از درجهٔ ۵ باید در گراف وجود داشته باشد که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G) > ۱$ بنابراین $۱ < \gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G) = ۲$.

پاسخ سؤالات ۵۴ تا ۵۷

۵۴ مرتبه

۵۵ مسیر

۵۶ $\frac{n(n-۱)}{۲}$

۵۷ دور

پاسخ سؤالات ۵۸ تا ۵۹

۵۸ مینیمال

۵۹ ۲۱

۶۰ طبق قضیه داریم $\left\lceil \frac{۱۰}{۳+۱} \right\rceil = ۳ \leq ۷$. ازطرفی مجموعهٔ $D = \{b, e, g\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، لذا $\gamma(G) \leq ۳$. بنابراین $\gamma(G) = ۳$.

۶۱ الف نادرست

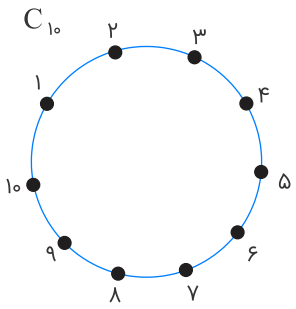
ب نادرست

پ درست

ت درست

۶۲

الف



ب

$D = \{۱, ۴, ۷, ۱۰\}$

پ

$D = \{۱, ۳, ۵, ۷, ۹\}$

۶۳

الف

$p = ۶ \ , \ q = ۷$

ب

$N_G(b) = \{a, d, c\}$

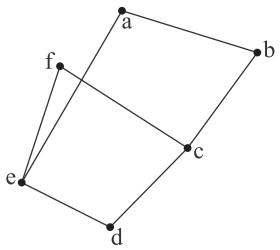
پ

$\bar{G}$ تعداد یال‌های گراف $+ G$ تعداد یال‌های گراف $= \frac{p(p-۱)}{۲}$

$\bar{G}$ تعداد یال‌های گراف $= ۸ \Rightarrow \bar{G}$ مجموع درجه‌های رئوس گراف $= ۱۶$

۶۴

الف



ب

$N_G[b] = \{a, b, c\}$

پ

b, a, e, f, c, d

۶۵

الف

$\delta(G) = ۱$

ب

$q = ۶$

پ

$N_G[b] = \{b, a, c, d\}$

ت $x = c$

۶۶ الف

$N_G[a] = \{a, b, e, d\}$

ب دور به طول ۴: a, b, e, d, a

پ مسیر به طول ۳: a, e, b, c و مسیر به طول ۴: a, d, e, b, c

پاسخ سؤالات ۶۷ تا ۷۱

۶۷ $abgc$

۶۸ $bcdgb$

۶۹ ۵

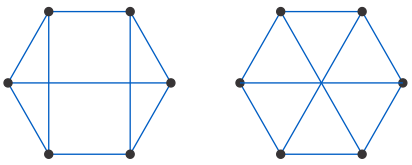
۷۰ خیر، زیرا دارای رأس ایزوله است، هیچ مسیری به سایر رئوس وجود ندارد.

۷۱

$N_G(f) = \{\}$

۷۲

$$q = ۲p - ۳ \Rightarrow \frac{۳p}{۲} = ۲p - ۳ \Rightarrow p = ۶$$



۷۳ طبق قضیه داریم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{۷}{۴+۱} \right\rceil = ۲$. ازطرفی مجموعهٔ $D = \{b, e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq ۲$. بنابراین $\gamma(G) = ۲$.

۷۴

$D = \{a, e, c, h\}$

۷۵ الف

$N_G(c) = \{a, e, d\}$

ب رأس f و درجهٔ ۵.

پ

$a\ b\ e\ c\ d\ a$

ت خیر.

۷۶ $D = \{a, c, i, d\}$

۷۷ طبق قضیه داریم $\gamma(G) \geq ۲ = \left\lceil \frac{۱۰}{۴+۱} \right\rceil$. ازطرفی مجموعهٔ $D = \{e, j\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. لذا $\gamma(G) \leq ۲$، بنابراین $\gamma(G) = ۲$.

پاسخ سؤالات ۷۸ تا ۷۹

۷۸

۷۹

۸۰ الف ۳

ب (b, d, c, b) و (a, b, c, a) و (a, b, d, c, a)

پ ۴

۸۱ الف $\{۱, ۶, ۴\}$ یا $\{۱, ۵, ۷\}$

ب $\gamma(G) \geq ۲$ (*). از سوی دیگر $\{۲, ۵\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است، لذا $\gamma(G) \leq ۲ = \left\lceil \frac{۷}{۴+۱} \right\rceil$ (**). از (*) و (**) نتیجه می‌شود که $\gamma(G) = ۲$.

پاسخ سؤالات ۸۲ تا ۸۴

۸۲ گرافی که درجه تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد k باشد.

۸۳

۸۴ بله

پاسخ سؤالات ۸۵ تا ۸۸

۸۵ رئوس

۸۶ طوقه

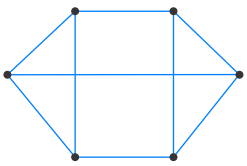
۸۷ مجاور

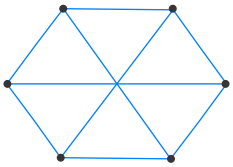
۸۸ زوج

۸۹ الف

$$۳ \times ۶ = ۲q \Rightarrow q = ۹$$

ب رسم یکی از گراف‌های زیر کافی است.



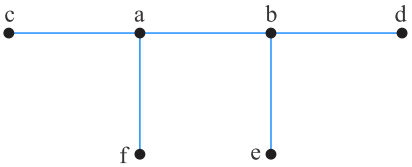


۹۰ برای گراف مورد سؤال داریم:

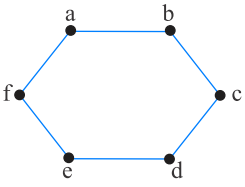
$$\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۱۰}{۳ + ۱} \right\rceil = ۳ \leq \gamma(G)$$

ازطرفی مجموعهٔ $\{g, h, d\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر برای گراف است، لذا $\gamma(G) \leq ۳$. بنابراین $\gamma(G) = ۳$.

۹۱ الف گراف زیر از مرتبهٔ ۶ و دارای تنها یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا $\{a, b\}$ است.



ب گراف زیر دارای سه مجموعهٔ احاطه‌گر به اندازه ۲ است که عبارت‌اند از: $\{e, b\}, \{f, c\}, \{a, d\}$



۹۲ $\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - ۱ \Rightarrow ۹ + ۱۲ = p - ۱ \Rightarrow p = ۲۲$

پاسخ سؤالات ۹۳ تا ۹۶

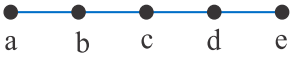
۹۳ دو برابر

۹۴ k

۹۵ مینیمم

۹۶ مینیمال

۹۷

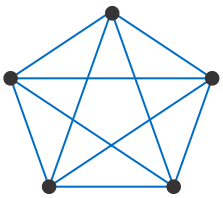


رسم گراف (۰/۵)

a, b, c, d (۰/۲۵) , b, c, d, e (۰/۲۵)

۹۸ باتوجه‌به $\left\lceil \frac{۸}{۳+۱} \right\rceil = ۲$ داریم $\gamma(G) \geq ۲$ (۰/۲۵) لذا حداقل عدد احاطه‌گری ۲ است (۰/۲۵). از طرفی $\{e, c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است (۰/۵). پس $\gamma(G) \leq ۲$ (۰/۲۵)، درنتیجه $\gamma(G) = ۲$ (عدد احاطه‌گری)(۰/۲۵).

۹۹ $\frac{p(p-۱)}{۲} = ۱۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p^۲ - p - ۲۰ = ۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow p = ۵$ (۰/۲۵)



رسم گراف(۰/۲۵)

۱۰۰ الف $\delta(G) = ۰$, $\Delta(G) = ۴$ (۰/۵)

ب c, a, b, c (۰/۲۵) , c, a, e, c (۰/۲۵) , c, e, d, c (۰/۲۵)

پ $\Delta(\bar{G}) = ۵$ (۰/۲۵)

WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL نوترو فیل

ت

$N_G(e) = \{a, c, d\}$ (۰/۷۵)

ث

خیر (۰/۲۵)

۱۰۱

وجود ندارد (۰/۲۵). زیرا:

$$\sum_{i=1}^{7} \deg v_i = 2q \quad (۰/۲۵) \Rightarrow ۳ \times ۷ = 2q \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \text{فرد } ۲۱ = 2q \text{ زوج} \quad (۰/۲۵)$$

۱۰۲

الف

مجموعهٔ احاطه‌گر با ۴ عضو مانند: $\{c, f, h, g\}$

ب

احاطه‌گر مینیمال مانند: $\{c, f, g\}$

۱۰۳

فرض کنیم G یک گراف و A مجموعهٔ همهٔ رئوس فرد گراف G و B مجموعهٔ همهٔ رئوس زوج گراف G باشد. در این صورت داریم:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in B} \deg(v)$$

از طرفی می‌دانیم که مجموع درجات رئوس یک گراف G عددی زوج است؛ یعنی $\sum_{v \in V(G)} \deg(v)$ عددی زوج است و همچنین می‌دانیم $\sum_{v \in B} \deg(v)$ نیز عددی زوج است، بنابراین تفاضل آن‌ها نیز زوج خواهد شد.

پس $\sum_{v \in A} \deg(v)$ زوج است و در صورتی مجموع عددهای فرد زوج می‌شود که تعداد آن‌ها زوج باشد، درنتیجه $n(A)$ عددی زوج است.

پاسخ سؤال ۱۰۴

۱۰۴

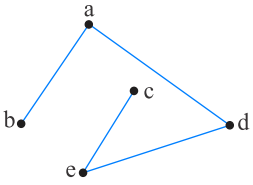
نادرست

۱۰۵

الف

a, c, d, b, e, a

ب

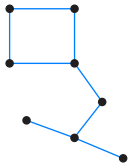


۱۰۶

الف برای مثال اگر $n = ۱۰$، رسم $C_{۱۰}$ یا $P_{۱۰}$. در این گراف‌ها:

$$\gamma(G) = \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil = ۴$$

ب در گرافی مشابه



$\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil = ۲$ ولی $\gamma(G) = ۳$ است.

۱۰۷ وجود ندارد. زیرا:

$$\sum_{i=۱}^{۵} \deg v_i = ۲q \Rightarrow ۵ \times ۳ = ۲q \quad \text{تناقض}$$

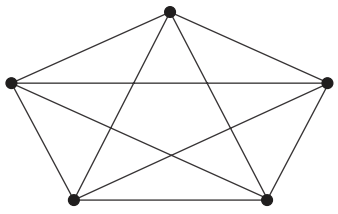
۱۰۸ گرافی از مرتبهٔ n که درجهٔ تمام رئوس آن باهم مساوی و برابر با عدد k , $(۰ \leq k < n)$ باشد.

۱۰۹ الف

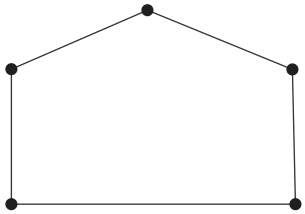
ب $\{a, d, g\}$

پ $\{a, d, e, h\}$

۱۱۰ الف



ب



۱۱۱ یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال به‌صورت $\{a, h, f, b\}$ است.
اکنون با حذف رأس a از آن، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال به دست می‌آید.

پاسخ سؤالات ۱۱۲ تا ۱۱۳

۱۱۲ همبند

۱۱۳ $\left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$

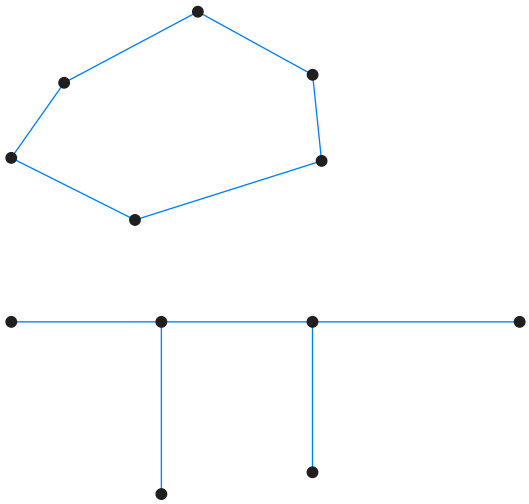
پاسخ سؤالات ۱۱۴ تا ۱۱۶

۱۱۴ ۲۸

۱۱۵ ۳

۱۱۶ $p - ۱$

۱۱۷



۱۱۸

۱۱۹ $A = \{h, g, f, i, j\}$

۱۲۰ اگر $\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال باشد، در این صورت یک یا چند عضو وجود دارند که با حذف آن‌ها مجموعه احاطه‌گر مینیمال باقی می‌ماند. بنابراین عضوی مانند $a_۱$ را در نظر می‌گیریم اگر با حذف آن هنوز مجموعه احاطه‌گر باقی بماند، آن را حذف می‌کنیم، در غیر این صورت آن را نگه داشته و همین کار را برای سایر رئوس انجام می‌دهیم.

۱۲۱ الف $\{v_۱, v_۳, v_۴, v_۵\}$

ب

$\gamma(G) = ۳$

پ

$\{v_۱, v_۳, v_۵\}$ ، $\{v_۲, v_۴, v_۶\}$

۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است؟

۲ اگر یک قفل رمزدار شامل ۴ رقم از صفر تا ۵ باشد و بدانیم رمز بسته‌شده روی قفل حداقل یک رقم صفر و یک رقم ۵ را شامل می‌شود، چند رمز متفاوت برای این قفل می‌توان ساخت؟

۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف سه مدرس A, B, C قصد دارند در یک روز در سه جلسه ۱۰-۸، ۱۲-۱۰ و ۱۴-۱۲ در سه کلاس (الف)، (ب) و (ج) تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه درسی خواهد داشت و هر مدرس در هر یک از کلاس‌ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. به کمک مربع لاتین چرخشی برای آن‌ها یک برنامه‌ریزی انجام دهید.

ب در برنامه قبلی، مدرس A تصمیم دارد با مدرس B برنامه خود را جابه‌جا کند. مربع لاتین جدید را تشکیل دهید و متعامد بودن این دو مربع لاتین را بررسی کنید.

۴ به چند طریق می‌توان از بین مدادهایی با رنگ‌های زرد، آبی، قرمز و سبز، ۱۱ مداد انتخاب کرد، اگر بخواهیم از مداد زردرنگ حداقل دوتا و از مداد سبزرنگ بیش از سه‌تا داشته باشیم؟

درستی و یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

۵ برای $n \neq 1, 2, 6$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه n وجود ندارد.

جاهای خالی را با کلمات یا عبارت مناسب تکمیل کنید.

۶ در بین ۳۹۰ دانش‌آموز، حداقل ..... نفر روز تولد یکسانی دارند.

۷ تعداد توابع یک به یک مانند $f : A \to B$ اگر بدانیم، $|B| = ۴$، $|A| = ۵$ برابر ..... است.

۸ با حروف کلمه "بادبادک باز" چند کلمه ۱۰ حرفی می‌توان نوشت؟

۹ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۲۰$ را با شرطهای $x_۳ \geq ۴$، $x_۲ = ۳$ و $x_۱ > ۲$ به‌دست آورید.

۱۰ قرار است سه کارگر با سه نوع ماشین نخ‌ریسی و سه نوع الیاف، در سه روز هفته کار کنند؛ به‌گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف، دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین، دقیقاً یک بار به‌کار گرفته شود. برای این مسئله، برنامه‌ریزی کنید.

جاهای خالی را با اعداد مناسب تکمیل کنید.

۱۱ تعداد راه‌های توزیع ۳ خودکار متفاوت بین ۵ نفر، به‌طوری‌که به هر نفر حداکثر یک خودکار برسد، برابر ..... است.

۱۲ حداقل چند دانش‌آموز در حیاط یک دبیرستان حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۱ نفر از آن‌ها متعلق به یک پایهٔ تحصیلی (دهم، یازدهم، دوازدهم) و یک رشتهٔ تحصیلی (ریاضی، تجربی، انسانی) هستند؟

۱۳ تعداد توابع پوشا از مجموعهٔ ۵ عضوی A به مجموعهٔ ۳ عضوی B را به‌دست آورید.

۱۴ با ارقام ۳، ۱، ۲، ۳، ۱، ۲، ۴، ۳، ۲، و ۲، چند عدد ۱۰ رقمی می‌توان نوشت؟

۱۵ می‌خواهیم ۱۰ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند، در دو طرف طول یک میز مستطیل‌شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

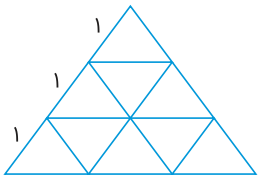
۱۶ در مربع لاتین A (شکل زیر) جای سطر اول و سوم را باهم جابه‌جا کنید تا مربع لاتین B ایجاد شود. سپس با ذکر دلیل بررسی کنید آیا A و B دو مربع لاتین متعامد هستند؟

A=

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۱۷ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

۱۸ یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطهٔ دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم، حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصلهٔ آن‌ها از یکدیگر کمتر از یک باشد.



۱۹ به چند طریق می‌توان با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، ۴ خودکار متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آنکه به هر نفر حداقل یک خودکار داده باشیم؟

۲۰ مربع لاتینی بنویسید که با مربع لاتین زیر متعامد باشد و متعامد بودن آن را با ذکر دلیل بیان کنید.

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

۲۱ با ارقام ۶, ۶, ۵, ۱, ۴, ۴, ۴ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۲۲ دو مربع لاتین ۲×۲ وجود ..... و ..... مربع لاتین ۱×۱ وجود دارد.

۲۳ تعداد توابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ دو عضوی به مجموعهٔ چهار عضوی برابر ..... می‌باشد.

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

۲۴ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۶ وجود ندارد.

۲۵ ثابت کنید اگر در دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۶ به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به‌طوری‌که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

۲۷ مربع لاتین A را در نظر بگیرید.

$A =$

۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱

الف) با اعمال جایگشت زیر مربع لاتین B را به دست آورید.

$۱ \to ۳$
$۲ \to ۲$
$۳ \to ۴$
$۴ \to ۱$

ب) آیا دو مربع لاتین A و B متعامدند؟ دلیل بیاورید.

۲۸ معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آنکه $x_۳ = ۴$ و $x_۵ > ۲$ باشد؟

۲۹ با ارقام ۹، ۷، ۶، ۵، ۳، ۳، ۱، ۱، ۱ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

۳۰ ۶ کتاب متفاوت تاریخ و ۵ کتاب متفاوت ادبیات را به چند طریق می‌توان در یک ردیف کنار هم چید به‌طوری‌که:

الف) کتاب‌های تاریخ همواره کنار هم باشند.

ب) به صورت یک در میان قرار بگیرند.

۳۱ معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۲$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آنکه $x_۲ = ۴$ و $x_۴ \geq ۳$ باشد؟

۳۲ چهار برادر و سه خواهر می‌خواهند در یک ردیف کنار هم بایستند و عکس یادگاری بگیرند. اگر همواره خواهرها کنار هم و برادرها کنار هم قرار بگیرند، آنگاه این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۳۳ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ $(۱ \leq n \leq ۵۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۵ بخش‌پذیر نباشند؟

۳۴ ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ ۳ بنویسید.

۳۵ با ارقام ۲، ۳، ۱، ۲، ۲، ۱، ۱ و ۱ چند کد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۳۶ یک نجار در هفته ۴ مدل مختلف صندلی در ۳ رنگ متفاوت می‌سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم، لااقل ۳ صندلی هم‌رنگ و هم‌مدل ساخته است؟

۳۷ حداقل افراد شرکت کننده در یک همایش چند نفر باشند، تا با اطمینان بتوان گفت که ۵ نفر از آن‌ها در یک ماه و یک فصل از سال متولد شده‌اند؟ (با تغییر)

۳۸ چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت به‌طوری‌که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی‌باشد)

۳۹ قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یک بار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هر یک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسأله برنامه‌ریزی کنید.

۴۰ اگر داشته باشیم $A = \{۷, ۸, ۹\}$ و $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ در این صورت چند کد با شش کاراکتر متمایز می‌توان نوشت که هر یک شامل دو رقم از A و چهار حرف از B باشد؟

جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

۴۱ در یک مربع لاتین چرخشی ۴×۴ مجموع درایه‌های روی قطر اصلی برابر ..... است.

۴۲ تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعه ۳ عضوی یک مجموعه ۵ عضوی برابر ..... است.

۴۳ معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + ۲x_۴^۳ = ۱۰$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۴۴ برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم مسئله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $۴! \times ۷!$ باشد.

۴۵ تعداد توابع یک‌به‌یک، از یک مجموعهٔ ۵ عضوی به یک مجموعهٔ ۷ عضوی را به دست آورید. (راه‌حل نوشته شود)

۴۶ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ زیر را با شرایط داده‌شده به دست آورید.

$$x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۹ \quad (x_i \geq ۰, ۱ \leq i \leq ۴, x_۵ = ۲)$$

۴۷ به چند طریق می‌توان ۴۵ دانش‌آموز را در چهار کلاس ۸ نفره، ۱۰ نفره، ۱۲ نفره و ۱۵ نفره در یک مدرسه قرار داد؟

۴۸ دو مربع لاتین متعامد ۳×۳ را بنویسید. (دلیل متعامد بودن آن‌ها را بیان کنید.)

۴۹ حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل دو نقطه از آن‌ها فاصله‌شان کمتر از ۱ است؟

۵۰ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبه‌دو برادر یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل‌شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۵۱ هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ٤ و ٦ انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصلهٔ آن‌ها کمتر از $\sqrt{۸}$ است.

۵۲ چند عضو از مجموعهٔ $S = \{n \in \mathbb{N} | ۱ \leq n \leq ۶۳۰\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیرند؟

۵۳ قرار است سه مدرس $T_۱$ و $T_۲$ و $T_۳$ در سه جلسهٔ متوالی در سه کلاس $C_۱$ و $C_۲$ و $C_۳$ به‌گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور، با استفاده از مربع لاتین، برنامه‌ریزی کنید.

۵۴ به چند روش می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱٦ شاخهٔ گل انتخاب کرد به‌طوری‌که، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست‌کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟

۵۵ به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به‌طوری‌که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟

۵۶ از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(۱ \leq n \leq ۳۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟

۵۷ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.

۵۸ می‌خواهیم با حروف "ش"، "الف" و "ث" و ۵ عدد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ یک رمز شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است، تعداد کل رمزهایی که در هریک از آن‌ها حروف کنار هم باشند.

۵۹ با حروف کلمهٔ جیرجیرک چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

۶۰ در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ $(1 \leq n \leq 200)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر باشند ولی بر ۷ بخش‌پذیر نباشند؟

۶۱ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف تمام مربع‌های لاتین 2×2 را بنویسید.

ب آیا دو مربع لاتین 2×2 متعامد وجود دارد؟ دلیل بیاورید.

۶۲ حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقهٔ کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آن‌ها روز تولدشان در هفته، یکسان است؟

۶۳ معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به‌شرط آنکه $x_1 > 2$ و $x_4 \geq 4$ باشد؟

۶۴ کوتاه پاسخ دهید.

علی و حسین و پنج نفر دیگر را به چند طریق می‌توان در یک صف کنار هم قرار داد، به‌طوری‌که:

الف علی و حسین کنار هم باشند.

ب ابتدا و انتهای صف علی و حسین ایستاده باشند.

۶۵ می‌خواهیم ۲۰ نفر را به ۴ گروه ۵ نفره تقسیم کنیم. به چند طریق این کار امکان‌پذیر است؟

۶۶ مربع لاتین A را در نظر بگیرید. ابتدا سطر اول و سطر دوم مربع A را جابه‌جا کنید. سپس در مربع حاصل ستون دوم و سوم را جابه‌جا کنید و مربع حاصل را B نام‌گذاری کنید. متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

$A=$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۶۷ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

به سوالات زیر پاسخ دهید:

۶۸ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۶۹ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداکثر یک کلاه داده شود؟

۷۰ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند، مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۷۱ به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل ۱۲ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم: از گل نوع اول حداقل یک شاخه، از گل نوع چهارم بیش از ۳ شاخه و از گل نوع ششم فقط یک شاخه انتخاب کنیم.

۷۲ پاسخ کوتاه دهید.

می‌خواهیم با حروف "ب" و "ج" و ارقام ۱، ۲، ۴، ۵، ۶، ۸ رمزی شامل ۸ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف تعداد رمزهایی که هریک از آن‌ها با یک حرف آغاز و با حرف دیگر خاتمه یابد.

ب تعداد رمزهایی که در آن‌ها حروف کنار هم باشند.

۷۳ مربع لاتین A را در نظر بگیرید.

$A=$

۲	۱	۳
۳	۲	۱
۱	۳	۲

الف با اعمال یک جایگشت روی درایه‌های مربع لاتین A، مربع لاتین B را تولید کنید.

ب متعامد بودن دو مربع لاتین A و B را بررسی کنید.

۷۴ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست‌کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام خانوادگی آن‌ها مانند هم و غیرتکراری است؟

۷۵ مجموعه $S = \{۱, ۲, ..., ۴۰۰\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند به‌طوری‌که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش‌پذیر باشند.

۷۶ معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۷$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آنکه $x_۵ = ۲$ و $x_۲ > ۲$ باشند.

۷۷ با ارقام ۴، ۳، ۷، ۸، ۶ چند عدد ۵ رقمی می‌توان نوشت که:

الف اعداد زوج کنار هم باشند.

ب اعداد فرد کنار هم باشند.

۷۸ قرار است سه کارگر $W_۱, W_۲, W_۳$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخ‌ریسی و با سه نوع الیاف کار کنند، به‌گونه‌ای‌که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

۷۹ در یک اردوی دانش‌آموزی حداقل چند دانش‌آموز حضور داشته باشند تا اطمینان داشته باشیم که لااقل هفت نفر از آن‌ها ماه تولد یکسانی دارند؟

۸۰ در بین اعداد طبیعی مانند n به‌طوری‌که $۱ \le n \le ۱۰۰$، چند عدد وجود دارد که بر ۶ یا ۱۰ بخش‌پذیر است؟

۸۱ به چند طریق می‌توان چهار خودکار متفاوت را بین هشت نفر توزیع کرد به‌شرط آنکه هیچ‌کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد؟ (به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم)

۸۲ چهار دانش‌آموز پایه دهم و سه دانش‌آموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند به‌طوری‌که:

الف هیچ دو دانش‌آموز هم‌پایه کنار هم نباشند.

ب همواره دانش‌آموزان پایه دهم کنار هم باشند.

۸۳ در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده‌شده را بررسی کنید.

الف

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

ب

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۸۴ مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید و با اعمال یک جایگشت بر روی ۱, ۲, ۳, ۴ یک مربع لاتین جدید به دست آورید.

۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

۸۵ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

۸۶ با ارقام ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۴ چند عدد ۷ رقمی می‌توان نوشت؟

۸۷ با ارقام ۱, ۱, ۲, ۲, ۳, ۲, ۴, ۴, ۵ چند عدد ۹ رقمی می‌توان نوشت؟

۸۸ متعامد بودن دو مربع لاتین زیر را بررسی کنید.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۸۹ یک مربع لاتین چرخشی ۴×۴ بنویسید.

۹۰ نشان دهید در یک خانوادهٔ ۵ نفری حداقل دو نفر فصل تولدشان یکسان است.

۹۱ ۸ نفر را که برای یک برنامهٔ تلویزیونی پیامک ارسال کرده‌اند، انتخاب کرده‌ایم و می‌خواهیم در ۴ مرحله و در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرعه‌کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (یک نفر می‌تواند ۴ جایزه را برنده شود)

۹۲ تعداد تابع‌های یک به یک از یک مجموعهٔ ۳ عضوی به یک مجموعهٔ ۶ عضوی چندتا است؟ (با ذکر دلیل)

۹۳ در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به‌شرط آن‌که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

۹۴ معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \ldots + x_۵ = ۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به‌شرط آن‌که $x_۱ \geq ۱$ و $x_۳ > ۳$ باشند؟

۹۵ هشت نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق سه نفره، چهار نفره و یک نفره قرار بگیرند؟

۹۶ بررسی کنید، آیا دو مربع لاتین ۳×۳ زیر متعامدند؟

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

۹۷ تعداد توابع یک‌به‌یک از یک مجموعهٔ ۲عضوی به یک مجموعهٔ ۳عضوی برابر ۶ است.

۹۸ مجموعهٔ اعداد $A = \{۱, ۲, ۳, ..., ۸۴\}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید هر زیرمجموعهٔ ۴۳عضوی از A دارای ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ است.

۹۹ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۴عضوی به یک مجموعهٔ ۳عضوی را به دست آورید.

۱۰۰ معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد. به شرط آنکه $x_۱ > ۲$، $x_۳ > ۳$ باشند.

۱۰۱ ۶ کتاب ریاضی مختلف و ۵ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم در یک ردیف قرار داد، به‌طوری‌که:

الف کتاب‌ها یکی در میان قرار گیرند.

ب کتاب‌های ریاضی کنار هم و کتاب‌های فیزیک نیز کنار هم باشند.

۱۰۲ با حروف کلمهٔ "می‌سی‌سی‌پی" چند جایگشت ۸حرفی بامعنا یا بی‌معنا می‌توان نوشت؟

۱۰۳ ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۶×۸ قرار دارند؛ نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آن‌ها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.

جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

۱۰۴ هرگاه $(kn + ۱)$ کبوتر یا بیشتر در ..... لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ..... کبوتر در آن قرار گرفته است.

۱۰۵ چند عدد طبیعی مانند n به‌طوری‌که $۱ \le n \le ۳۵۰$ وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۶ بخش‌پذیر نباشد.

۱۰۶ قرار است چهار مدرس $T_۱, T_۲, T_۳, T_۴$ در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس $C_۱, C_۲, C_۳, C_۴$ به‌گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۱۰۷ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + ... + x_۶ = ۱۲$ با شرط $x_۵ \ge ۴$ و $x_۱ > ۲$ را محاسبه کنید.

۱۰۸ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به‌طوری‌که:

الف همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.

ب هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

پ یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

۱۰۹ مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با ..... است.

۱۱۰ اگر سه دوست هم‌سایز، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به‌گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هریک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یکبار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورداستفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟

۱۱۱ ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش‌آموز مشغول به تحصیل باشند لااقل ۷ نفر از آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۱۲ در بین اعداد ۱ تا ۹۰ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشند.

۱۱۳ تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots x_5 = 10$ با شرط $x_i > 0 \; ; i = 2, 3, 4, 5$ را محاسبه کنید.

۱۱۴ ۶ دانش‌آموز پایه دوازدهم و ۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به چند طریق می‌توانند کنار هم در یک ردیف قرار گیرند، به‌طوری‌که:

الف) به‌صورت یک‌درمیان قرار بگیرند.

ب) همواره دانش‌آموزان یازدهم کنار هم باشند.

پ) یک دانش‌آموز خاص یازدهم و یک دانش‌آموز خاص دوازدهم در کنار هم باشند.

۱ اعداد طبیعی را به دو گروه زوج و فرد افراز می‌کنیم. این دو مجموعه را لانه‌ها و سه عدد طبیعی را کبوترها در نظر می‌گیریم. بنا به اصل لانه کبوتری یک لانه وجود دارد که حداقل شامل دو کبوتر باشد. یعنی دو عدد طبیعی وجود دارد که هر دو زوج یا هر دو فرد هستند. لذا مجموع آن‌ها در هر دو حالت زوج است.

۲

$$|S| = ۶^۴$$
$$A = \{\overline{abcd} | a, b, c, d \neq ۰\} \Rightarrow |A| = ۵^۴$$
$$B = \{\overline{abcd} | a, b, c, d \neq ۵\} \Rightarrow |B| = ۵^۴$$
$$A \cap B = \{\overline{abcd} | a, b, c, d \neq ۰, ۵\} \Rightarrow |A \cap B| = ۴^۴$$
$$|\overline{A \cup B}| = |\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$
$$= ۶^۴ - (۵^۴ + ۵^۴ - ۴^۴) = ۳۰۲$$

۳ الف

$$A = ۱ \ , \ B = ۲ \ , \ C = ۳$$

	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
الف	۱	۲	۳
ب	۳	۱	۲
ج	۲	۳	۱

ب

$۱ \to ۲\ ,\ ۲ \to ۱\ ,\ ۳ \to ۳$

$M=$

	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
الف	۱	۲	۳
ب	۳	۱	۲
ج	۲	۳	۱

$N=$

	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
الف	۲	۱	۳
ب	۳	۲	۱
ج	۱	۳	۲

$MN=$

	۸-۱۰	۱۰-۱۲	۱۲-۱۴
الف	۱۲	۲۱	۳۳
ب	۳۳	۱۲	۲۱
ج	۲۱	۳۳	۱۲

دو مربع لاتین متعامد نیستند؛ زیرا در ماتریس ادغام‌شده درایهٔ تکراری وجود دارد.

۴

راه اول:

$x_۱ =$ تعداد مداد زرد ، $x_۲ =$ تعداد مداد آبی ، $x_۳ =$ تعداد مداد قرمز ، $x_۴ =$ تعداد مداد سبز

$$x_۱ \geq ۲\ ,\ x_۴ > ۳ \Rightarrow x_۴ \geq ۴\ ,\ x_۲, x_۳ \geq ۰$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۱ \Rightarrow \underbrace{x_۱ - ۲}_{y_۱} + x_۲ + x_۳ + \underbrace{x_۴ - ۴}_{y_۴} = ۱۱ - ۲ - ۴$$

$$\Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ = ۵\ ,\ y_۱, x_۲, x_۳, y_۴ \geq ۰$$

$$\binom{۵ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۸}{۳} = ۵۶$$

راه دوم:

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱ \geq ۲, x_۲, x_۳ \geq ۰, x_۴ \geq ۴$$

$$\Rightarrow \binom{۱۱ - ۲ - ۴ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = \binom{۸}{۳} = ۵۶$$

پاسخ سؤال ۵

۵

نادرست

پاسخ سؤالات ۶ تا ۷

۶ ۲

۷ صفر

۸

$$\frac{۱۰!}{۳! \times ۳! \times ۲!}$$

۹ روش اول:

$$x_۱ + ۲(۳) + x_۳ + x_۴ = ۲۰ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۱۴$$

$$x_۱ - ۳ \geq ۰ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۳ \ , \ x_۳ - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x_۳ = y_۳ + ۴$$

$$y_۱ + ۳ + y_۳ + ۴ + x_۴ = ۱۴ \Rightarrow y_۱ + y_۳ + x_۴ = ۷$$

$$\Rightarrow \binom{۷ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

روش دوم:

$$x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۱۴$$

$$\binom{۱۴ - ۳ - ۴ + ۳ - ۱}{۳ - ۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$$

۱۰

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

A =

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۳	۱	۲
یکشنبه	۱	۲	۳
دوشنبه	۲	۳	۱

B =

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۱۳	۲۱	۳۲
یکشنبه	۳۱	۱۲	۲۳
دوشنبه	۲۲	۳۳	۱۱

چون اعداد دورقمی تکراری در مربع ساخته‌شده وجود ندارد، پس متعامدند.

(مربع‌های لاتین فوق، پیشنهادی هستند. نوشتن مربع‌های لاتین دیگری که ویژگی سؤال را داشته باشند نیز صحیح می‌باشد.)

پاسخ سؤال ۱۱

۱۱ ۶۰ یا $\frac{۵!}{۲!}$

۱۲

$n = ۳ \times ۳ = ۹$ تعداد لانه

$k + ۱ = ۲۱ \Rightarrow k = ۲۰$

$kn + ۱ = ۲۰ \times ۹ + ۱ = ۱۸۱$ تعداد کبوترها

۱۳

$$۳^۵ - (۳ \times ۲^۵ - ۳) = ۱۵۰$$

۱۴

$$\frac{۱۰!}{۲! \times ۳! \times ۴!}$$

۱۵

روش اول:

$$۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ \times (۲!)^۵ = ۳۸۴۰$$

روش دوم:

$$(۱۰ \times ۱) \times (۸ \times ۱) \times (۶ \times ۱) \times (۴ \times ۱) \times (۲ \times ۱) = ۳۸۴۰$$

۱۶

متعامدند. زیرا در مربع آخر هیچ عدد ۲ رقمی تکراری وجود ندارد.

$B =$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

$\Rightarrow$

۱۲	۲۳	۳۱
۳۳	۱۱	۲۲
۲۱	۳۲	۱۳

۱۷

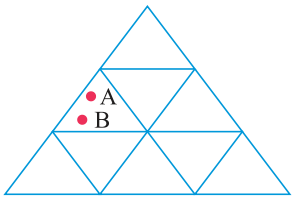
به هرکدام از $x_۱ , x_۲ , \dots , x_k$ عدد -۱ را اضافه می‌کنیم.

معادلهٔ جدید: $(x_۱ - ۱) + (x_۲ - ۱) + \dots + (x_k - ۱) = n - k$

لذا تعداد حالات جواب از رابطهٔ $\binom{n - k + k - ۱}{k - ۱} = \binom{n - ۱}{k - ۱}$ به دست می‌آید.

۱۸

۱۰ نقطه را کبوتر و هریک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می‌کنیم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $|AB| < ۱$.



۱۹

$A = \{a_۱ , a_۲ , a_۳ , a_۴\} \quad , \quad B = \{b_۱ , b_۲ , b_۳\}$

$A_j = \{f : A \to B | f(a_i) \neq b_j , ۱ \leq i \leq ۴\} \quad , \quad ۱ \leq j \leq ۳$

$|S| = ۳^۴ = ۸۱ \quad , \quad |A_j| = ۲^۴ = ۱۶$

$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۳ \cap A_۲| = ۱ \quad , \quad |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$

$|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲ \cap \bar{A}_۳| = ۸۱ - (۳ \times ۱۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۳۶$

۲۰ در مربع لاتین دوم عدد دورقمی تکراری نداریم. بنابراین مربع لاتین ارائه‌شده با مربع لاتین مورد سؤال متعامد است.

۱	۳	۲
۳	۲	۱
۲	۱	۳

→

۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱
۳۲	۲۱	۱۳

۲۱

$$\frac{۷!}{۲! \times ۳!}$$

پاسخ سؤالات ۲۲ تا ۲۳

۲۲ دارد- یک

۲۳ ۱۲

پاسخ سؤال ۲۴

۲۴ درست

۲۵ تعداد کبوترها = ۵۰۵

تعداد لانه‌ها = تعداد روزهای هفته × تعداد ماه‌های سال

$$n = ۷ \times ۱۲ = ۸۴$$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری:

$$\text{تعداد کبوترها} = kn + ۱ \xrightarrow{n=۸۴} ۵۰۵ = k \times ۸۴ + ۱ \Rightarrow k = ۶ \Rightarrow k + ۱ = ۷$$

در این صورت لانه‌ای وجود دارد که لااقل ۷ کبوتر در آن قرار می‌گیرند. یعنی حداقل ۷ نفر از دانش آموزان روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۶ این سوال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضوی می‌توان نوشت.

$$۳^۵ - (۳ \times ۲^۵ - ۳) = ۲۴۳ - ۹۳ = ۱۵۰$$

۲۷

الف

B=

۴	۱	۳	۲
۲	۳	۱	۴
۳	۲	۴	۱
۱	۴	۲	۳

ب

۳۴	۴۱	۱۳	۲۲
۲۲	۱۳	۴۱	۳۴
۱۳	۲۲	۳۴	۴۱
۴۱	۳۴	۲۲	۱۳

متعامد نیستند. زیرا در مربع بالا عدد دورقمی تکراری داریم.

۲۸

$$x_۳ = ۴ \, , \, x_۵ \geq ۳ \Rightarrow x_۵ = y_۵ + ۳$$

$$x_۱ + x_۲ + ۴ + x_۴ + ۳ + y_۵ + x_۶ = ۱۲$$

$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۴ + y_۵ + x_۶ = ۵ \Rightarrow \text{جمع} = \binom{۹}{۴}$$

۲۹

$$\frac{۹!}{۳! \times ۲!}$$

۳۰

الف

$$۶! \times ۶!$$

ب

$$۶! \times ۵!$$

۳۱

$$x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۸$$

$$x_۴ - ۳ = y_۴ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + y_۴ = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی} : \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

۳۲

<u>ب, ب, ب, ب</u>, <u>خ, خ, خ</u>

$$۳! \times ۴! \times ۲! = ۲۸۸$$

۳۳

A: تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۵

B: تعداد اعداد بخش‌پذیر بر ۴

$$|A| = [\frac{۵۰۰}{۵}] = ۱۰۰\,,\ |B| = [\frac{۵۰۰}{۴}] = ۱۲۵\,,\ |A \cap B| = [\frac{۵۰۰}{۲۰}] = ۲۵$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = ۵۰۰ - (۱۰۰ + ۱۲۵ - ۲۵) = ۳۰۰$$

۳۴

فرض کنید A و B دو مربع لاتین همرتبه باشند به‌طوری‌که از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل شود که هر خانهٔ آن حاوی یک عدد دو رقمی است که تمام رقم‌های سمت چپ مربوط به مربع A و تمام رقم‌های سمت راست مربوط به مربع B (و یا برعکس) است. در این صورت گوییم دو مربع لاتین A و B متعامدند، هرگاه هیچ‌یک از اعداد دو رقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند.

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۳۵

$$\frac{۸!}{۴! \times ۳! \times ۱!}$$

۳۶

$$k + ۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲\,,\ n = ۳ \times ۴ = ۱۲ \Rightarrow kn + ۱ = ۱۲ \times ۲ + ۱ = ۲۵$$

۳۷

$$\text{تعداد لانه‌ها} = \text{تعداد ماه‌ها} \times \text{تعداد فصل‌ها}$$

$$\Rightarrow n = ۱۲ \times ۴ = ۴۸$$

$$k + ۱ = ۵ \Rightarrow k = ۴$$

$$\text{تعداد کبوترها} = nk + ۱ \xrightarrow[k=۴]{n=۴۸} ۴۸ \times ۴ + ۱ = ۱۹۳$$

طبق تعمیم اصل لانه کبوتری حداقل ۱۹۳ نفر مورد نیاز است.

۳۸

$$|S| = ۵^۴ : \text{تعداد کل رمزها}$$

$$|A| = ۴^۴ : \text{تعداد رمزهای فاقد ۳}$$

$$|B| = ۴^۴ : \text{تعداد رمزهای فاقد ۲}$$

$$|A \cap B| = ۳^۴ : \text{تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳}$$

$$|\bar{A} \cap \bar{B}| = |S| - |A \cup B| = ۵^۴ - (۴^۴ + ۴^۴ - ۳^۴)$$

۳۹

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یک‌شنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

و

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یک‌شنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

$\Rightarrow$

	b	c
شنبه	۲۳	۳۲
یک‌شنبه	۱۲	۲۱
دوشنبه	۳۱	۱۳

a
۱۱
۳۳
۲۲

۴۰

$$\binom{۳}{۲} \times \binom{۶}{۴} \times ۶!$$

پاسخ سؤالات ۴۱ تا ۴۲

۴۱ ۴

۴۲

$$\frac{۵!}{۲!} = ۶۰$$

۴۳

$$\begin{cases} x_۴ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰ \Rightarrow \binom{۱۲}{۲} = ۶۶ \\ x_۴ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \Rightarrow \binom{۱۰}{۲} = ۴۵ \end{cases} \Rightarrow ۶۶ + ۴۵ = ۱۱۱$$

۴۴ ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم و ۶ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را به چند طریق می‌توان در یک ردیف (کنار هم) قرار داد به‌طوری‌که همواره دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم کنار هم باشند؟

۴۵ اگر فرض کنیم $A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴, a_۵\}$ و $B = \{b_۱, b_۲, b_۳, \ldots, b_۷\}$، برای تعریف f روی هر عضو A، ۷ انتخاب داریم، بنابراین طبق اصل ضرب تعداد تابع‌های یک‌به‌یک برابر است با: $۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ = \frac{۷!}{۲!}$

توجه: اگر از فرمول $(۷)_۵ = \frac{۷!}{۲!}$ پاسخ دهید، درست است.

۴۶

$$x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + x_۴ + ۲ = ۹ \Rightarrow x_۱ + ۴x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۷$$

$$\begin{cases} x_۲ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۷ \Rightarrow \binom{۹}{۲} = ۳۶ \\ x_۲ = ۱ \Rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۳ \Rightarrow \binom{۵}{۲} = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow ۳۶ + ۱۰ = ۴۶$$

۴۷

$$\binom{۴۵}{۸} \times \binom{۳۷}{۱۰} \times \binom{۲۷}{۱۲} \times \binom{۱۵}{۱۵}$$

توجه: در صورتی که جواب به فرم $\frac{۴۵!}{۸! \times ۱۰! \times ۱۲! \times ۱۵!}$ هم باشد، درست است.

۴۸

دو مربع لاتین زیر متعامدند، چون در مربع ترکیبی عدد تکراری نداریم.

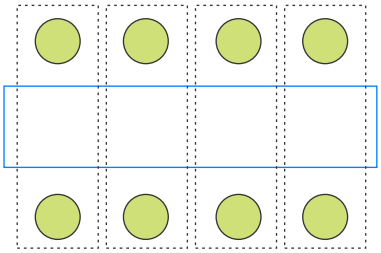
۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۴۹

۵ نقطه را کبوتر و ۴ مثلث کوچک را لانه در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانهٔ کبوتری $(۵ > ۴)$ حداقل یک لانه (مثلث) وجود دارد که دو نقطه (کبوتر) در آن قرار می‌گیرد.

۵۰



چون می‌خواهیم برادرها روبه‌روی هم بنشینند، هر جفت برادر را در یک بسته (شیء) در نظر می‌گیریم. پس ۴ شیء متمایز خواهیم داشت که به $۴!$ جایگشت دارند.

حال در هریک از بسته‌ها (که دو برادر قرار دارند) برادرها می‌توانند با هم جابه‌جا شوند. پس هریک از بسته‌ها داخل خود $۲!$ جایگشت دارد.

بنابراین تعداد حالات مطلوب برابر است با:

$$۴! \times ۲! \times ۲! \times ۲! \times ۲! = ۴! \times (۲!)^۴$$

۵۱

ابتدا مستطیل موردنظر را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم و هر قسمت را یک لانه فرض می‌کنیم و هفت نقطه را هفت کبوتر در نظر می‌گیریم. طبق اصل لانه‌کبوتری دست‌کم یک لانه وجود دارد که شامل دو کبوتر است. باتوجه‌به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \Rightarrow AB^۲ < ۲^۲ + ۲^۲ \Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$$

۵۲

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B|$$
$$|S| = ۶۳۰ \ , \ |A| = ۲۱۰ \ , \ |B| = ۱۲۶ \ , \ |A \cap B| = ۴۲$$
$$\Rightarrow |\overline{A \cup B}| = ۳۳۶$$

۵۳

فرض کنیم هر سطر نشان‌دهندهٔ هر کلاس و اعداد ۱، ۲ و ۳ در مربع لاتین نمایانگر مدرس‌های حاضر در کلاس باشند. طبق مربع لاتین ۳ × ۳ زیر هر مدرس در هر جلسه در یک کلاس حاضر می‌شود و در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس دارد.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

۵۴

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۶ \quad x_۳ = ۳ \ , \ x_۴ \geq ۳ \ , \ x_۵ \geq ۵$$
$$\xrightarrow{x_۳ = ۳, x_۴ = y_۴ + ۳, x_۵ = y_۵ + ۵} x_۱ + x_۲ + ۳ + y_۴ + ۳ + y_۵ + ۵ = ۱۶$$
$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ + y_۴ + y_۵ = ۵ \quad x_i \geq ۰, y_i \geq ۰$$
$$\Rightarrow \binom{۵ + ۴ - ۱}{۴ - ۱} = ۵۶$$

۵۵

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۰$$

$$x_۳ \geq ۴ \Rightarrow y_۳ = x_۳ - ۴, \ y_۳ \geq ۰$$

$$x_۶ > ۲ \Rightarrow y_۶ = x_۶ - ۳, \ y_۶ \geq ۰$$

$$\Rightarrow x_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ + y_۶ = ۳ \Rightarrow \text{جواب} = \binom{۸}{۵}$$

۵۶

$$A = \{۱ \leq n \leq ۳۰۰ | n = ۴k \ (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۳۰۰}{۴}\right] = ۷۵$$

$$B = \{۱ \leq n \leq ۳۰۰ | n = ۵k \ (k \in \mathbb{N})\}$$

$$A \cap B = \{۱ \leq n \leq ۳۰۰ | n = ۲۰k \ (k \in \mathbb{N})\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{۳۰۰}{۲۰}\right] = ۱۵$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = ۷۵ - ۱۵ = ۶۰$$

۵۷

برای اینکه مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. طبق اصل لانهٔ کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد؛ یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد.

۵۸

$$۶! \times ۳!$$

۵۹

$$\frac{۷!}{۲! \times ۲! \times ۲!} = \frac{۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲! \times ۴} = ۶۳۰$$

۶۰

$$A = \{۱ \le n \le ۲۰۰ | n = ۴k\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۲۰۰}{۴}\right] = ۵۰$$

$$B = \{۱ \le n \le ۲۰۰ | n = ۷k\}$$

$$A \cap B = \{۱ \le n \le ۲۰۰ | n = ۲۸k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{۲۰۰}{۲۸}\right] = ۷$$

$$|A \cap B'| = |A| - |A \cap B| = ۵۰ - ۷ = ۴۳$$

۶۱

الف دو نوع مربع لاتین مرتبهٔ ۲ داریم.

۱	۲
۲	۱

۲	۱
۱	۲

ب

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

متعامد نیستند، زیرا در مربع بالا عدد دورقمی تکراری داریم.

۶۲

$$k + ۱ = ۲۰ \Rightarrow k = ۱۹, kn + ۱ = ۱۹ \times ۷ + ۱ = ۱۳۴$$

۶۳

$$y_۱ = x_۱ - ۳, y_۱ \ge ۰ \quad , \quad y_۴ = x_۴ - ۴, y_۴ \ge ۰$$

$$y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + ۴ + x_۵ = ۱۵$$

$$\Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + x_۵ = ۸ \Rightarrow \text{جواب} = \binom{۱۲}{۴}$$

۶۴

الف

$$۶! \times ۲!$$

ب

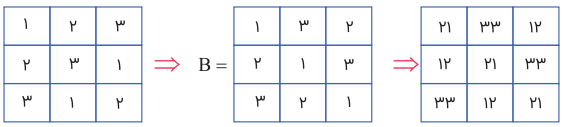
$$۲! \times ۵!$$

۶۵

راه‌حل اول: $\binom{۵}{۵}\binom{۱۰}{۵}\binom{۱۵}{۵}\binom{۲۰}{۵}$

راه‌حل دوم: $\frac{۲۰!}{۵! \times ۵! \times ۵! \times ۵!}$

۶۶



متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر عدد دو رقمی تکراری داریم.

۶۷

$$k+۱=۵ \Rightarrow k=۴ \quad , \quad kn+۱=۵۴ \Rightarrow ۴n=۵۳ \quad , \quad n=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$$

پاسخ سؤالات ۶۸ تا ۶۹

۶۸

$$۳^۴-(۳\times ۲^۴-۳)=۳۶$$

۶۹

$$\frac{۸!}{۴!}=۱۶۸۰$$

۷۰

$$|F|=۱۵ \ , \ |V|=۱۱ \ , \ |B|=۹ \ ,$$

$$|F\cap V|=۵ \ , \ |B\cap V|=۶ \ , \ |F\cap B|=۳ \ , \ |F\cap B\cap V|=۳$$

$$\text{فقط فوتبال بازی کنند} = |F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|$$

$$=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$$

$$\text{فقط والیبال بازی کنند} = |V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|$$

$$=۱۱-۵-۶+۳=۳$$

$$\text{فقط بسکتبال بازی کنند} = |B|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|$$

$$=۹-۳-۶+۳=۳$$

$$\Rightarrow ۱۰+۳+۳=۱۶$$

۷۱

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴+x_۵+x_۶=۱۲ \quad , \quad x_۱\geq ۱ \ , \ x_۴\geq ۴ \ , \ x_۶=۱$$

$$y_۱=x_۱-۱ \ , \ y_۱\geq ۰ \ , \ y_۴=x_۴-۴ \ , \ y_۴\geq ۰$$

$$y_۱+۱+x_۲+x_۳+y_۴+۴+x_۵+۱=۱۲ \Rightarrow y_۱+x_۲+x_۳+y_۴+x_۵=۶$$

$$\Rightarrow \quad ج=\binom{۱۰}{۴}$$

۷۲

الف

$$۶!\times ۲!$$

WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL نوترو فیل

ب

$۲! \times ۷!$

۷۳

الف

$۱ \to ۳ \quad ۲ \to ۱ \quad ۳ \to ۲$

B=

۱	۳	۲
۲	۱	۳
۳	۲	۱

ب

۲۱	۱۳	۳۲
۳۲	۲۱	۱۳
۱۳	۳۲	۲۱

متعامد نیستند. زیرا در مربع آخر، عدد دورقمی تکراری داریم.

۷۴

$$\text{تعداد لانه‌ها} = n = ۳۲ \times ۳۱ = ۹۹۲ \quad , \quad k + ۱ = ۳ \quad \Rightarrow \quad k = ۲$$

$$\text{تعداد کبوترها} = ۲ \times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$$

۷۵

$$A = \{n \in S | n = ۵k \ , \ n \in \mathbb{Z}\} \ \Rightarrow \ n(A) = \left[\frac{۴۰۰}{۵}\right] = ۸۰$$

$$B = \{n \in S | n = ۷k, n \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left[\frac{۴۰۰}{۷}\right] = ۵۷$$

$$A \cap B = \{n \in S | n = ۳۵k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{۴۰۰}{۳۵}\right] = ۱۱$$

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = ۴۰۰ - (۸۰ + ۵۷ - ۱۱) = ۲۷۴$$

۷۶

$$y_۲ = x_۲ - ۳ \ , \ y_۲ \geq ۰ \ , \ x_۵ = ۲$$

$$x_۱ + y_۲ + ۳ + x_۳ + x_۴ + ۲ + x_۶ = ۱۷$$
$$\Rightarrow \ x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۶ = ۱۲$$

$$\text{تعداد جواب‌ها} = \binom{۱۶}{۴}$$

۷۷

الف

$۳! \times ۳!$

ب $۲! \times ۴!$

۷۸ برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کنندهٔ الیاف است.

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

$= A$

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

$= B \Rightarrow$

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

در مربع سمت راست، عدد سمت چپ هر درایه نشان‌دهندهٔ ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کنندهٔ نوع الیاف است.

۷۹ در این مسئله $k + ۱ = ۷ \Rightarrow k = ۶$ و تعداد لانه‌ها ۱۲ است. پس تعداد کبوترها یا معادل با آن تعداد دانش‌آموزان حداقل می‌بایست $kn + ۱ = ۶ \times ۱۲ + ۱ = ۷۳$ باشد.

۸۰

$$A = \{n \in \mathbb{N} | ۱ \le n \le ۱۰۰, n = ۶k\} \Rightarrow |A| = \left[\frac{۱۰۰}{۶}\right] = ۱۶$$

$$B = \{n \in \mathbb{N} | ۱ \le n \le ۱۰۰, n = ۱۰k\} \Rightarrow |B| = \left[\frac{۱۰۰}{۱۰}\right] = ۱۰$$

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N} | ۱ \le n \le ۱۰۰, n = ۳۰k\} \Rightarrow |A \cap B| = \left[\frac{۱۰۰}{۳۰}\right] = ۳ \Rightarrow |A \cup B| = ۱۶ + ۱۰ - ۳ = ۲۳$$

۸۱ تعداد حالت‌های ممکن برای انجام این کار معادل است با پیدا کردن تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ ۴ عضوی به مجموعه‌ای ۸ عضوی، یعنی: $(۸)_۴ = \frac{۸!}{۴!} = ۱۶۸۰$

۸۲

الف $۴! \times ۳!$

ب $۴! \times ۴!$

۸۳

الف متعامدند، زیرا عدد دورقمی تکراری در مربع وجود ندارد.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب متعامد نیستند، زیرا عدد دورقمی تکراری در مربع وجود دارد.

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

۸۴ با استفاده از جایگشت $۱ \to ۴, ۴ \to ۳, ۳ \to ۲, ۲ \to ۱$ مربع لاتین به‌صورت زیر داریم:

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۸۵

$x_۱ + ... + x_۵ = ۱۱ \quad ; x_۲ \geq ۲ \ , \ x_۵ \geq ۴$

$x_۱ + y_۲ + ۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ = ۵$

$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{۵ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۹}{۴}$

۸۶

$$\frac{۷!}{۲! \times ۳!} = ۴۲۰$$

۸۷

$$P = \frac{۹!}{۳! \times ۲! \times ۲!} \Rightarrow P = ۳ \times ۷!$$

۸۸

در مربع لاتین زیر، اعداد ۲ رقمی تکراری نداریم. پس دو مربع لاتین، متعامدند (۰/۲۵).

رسم مربع لاتین (۰/۷۵)

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۸۹

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

رسم مربع لاتین (۰/۵)

۹۰

فصل تولد =لانه = ۴ (۰/۲۵) و افراد خانواده =کبوتر = ۵ (۰/۲۵). طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل یک لانه (فصل) وجود دارد که ۲ کبوتر (دو نفر از اعضای خانواده) در آن قرار می‌گیرند (در یک فصل به دنیا آمده‌اند) (۰/۲۵).

۹۱

حل مسأله معادل با یافتن تعداد تابع‌های ممکن از یک مجموعهٔ ۴ عضوی به یک مجموعهٔ ۸ عضوی است (۰/۵) که برابر با $۸^۴$ است (۰/۵).

۹۲ راه‌حل اول:

$A = \{a_۱, a_۲, a_۳\}\ ,\ b = \{b_۱, b_۲, ..., b_۶\}$

$f(a_۱) = b_۱ \vee b_۲ \vee ... \vee b_۶ \Rightarrow$ به ۶ طریق $f(a_۱)$ را تعریف کنیم $(۰/۲۵)$

f یک به یک $\Rightarrow f(a_۲) = f(a_۱) \Rightarrow$ به ۵ طریق $f(a_۲)$ را تعریف کنیم $(۰/۲۵)$

f یک به یک $\Rightarrow f(a_۳) = f(a_۱), f(a_۳) = f(a_۲) \Rightarrow$ به ۴ طریق $f(a_۳)$ را تعریف کنیم $(۰/۲۵)$

بنابراین طبق اصل ضرب $۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$ تابع یک به یک داریم $(۰/۲۵)$.

راه‌حل دوم:

$$P(۶, ۳) = \frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$$

۹۳ اگر مجموعهٔ کسانی را که فوتبال بازی می‌کنند با F و کسانی را که والیبال بازی می‌کنند با V نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\underbrace{|\overline{F \cup V}|}_{(۰/۲۵)} = |S| - |F \cup V| = ۲۵ - \underbrace{(۱۵ + ۱۴ - ۹)}_{(۰/۵)} = ۵ \quad (۰/۲۵)$$

۹۴

$y_۱ = x_۱ - ۱ \geq ۰ \Rightarrow x_۱ = ۱ + y_۱ \ (۰/۲۵)\ ,\ y_۳ = x_۳ - ۴ \geq ۰ \Rightarrow x_۳ = ۴ + y_۳ \ (۰/۲۵) \Rightarrow$

$۱ + y_۱ + x_۲ + ۴ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۴ \ (۰/۲۵) \Rightarrow y_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۹ \ (۰/۲۵)$

$$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{۹ + ۵ - ۱}{۵ - ۱} = \binom{۱۳}{۴} \ (۰/۲۵)$$

۹۵ راه‌حل اول:

$$\frac{۸!}{۳! \times ۴!} \quad (۰/۷۵)$$

راه‌حل دوم:

$$\underbrace{\binom{۸}{۴}}_{(۰/۲۵)} \underbrace{\binom{۴}{۳}}_{(۰/۲۵)} \underbrace{\binom{۱}{۱}}_{(۰/۲۵)}$$

۹۶ متعامدند. زیرا در جدول ترکیب‌شده از دو مربع لاتین، عدد تکراری نداریم.

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

۹۷ درست

۹۸ تعداد کبوترها برابر با ۴۳ و تعداد لانه‌ها برابر با ۴۲ و به‌صورت زیر هستند:

$$\underbrace{\quad}_{۱,۸۴},\ \underbrace{\quad}_{۲,۸۳},\ \underbrace{\quad}_{۳,۸۲},\ \cdots,\ \underbrace{\quad}_{۴۲,۴۳}$$

چنانچه قرار باشد کبوترها لانه‌ها را اشغال کنند، آنگاه طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد وجود دارد که در یک لانه جای می‌گیرند و مجموعشان ۸۵ است.

۹۹

$$۱ \le j \le ۳\ ,\ \ A_j = \{f : A \to B | f(a_i) = b_j\ \ ,\ \ ۱ \le i \le ۴\}$$
$$A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}, B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$$
$$|S| = ۳^۴\ \ ,\ \ |A_i| = ۲^۴, |A_i \cap A_j| = ۱^۴\ \ ,\ \ |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$
$$\left|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}\right| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۸۱ - (۳ \times ۱۶ - ۳ \times ۱ + ۰) = ۳۶$$

۱۰۰

$$y_۱ + ۳ + x_۲ + y_۳ + ۴ + x_۴ + x_۵ = ۱۴ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۷$$
$$\Rightarrow \binom{n + k - ۱}{k - ۱} = \binom{۱۱}{۴}$$

۱۰۱ الف $۵! \times ۶!$

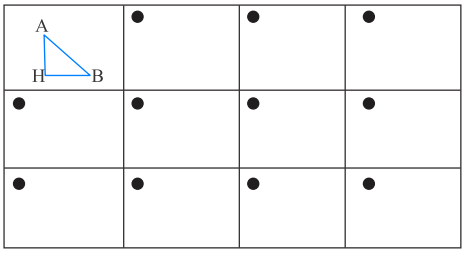
ب $۲! \times ۵! \times ۶!$

۱۰۲

$$\frac{۸!}{۴! \times ۲!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵}{۲} = ۸۴۰$$

۱۰۳ تعداد لانه‌ها: ۱۲ مربع مانند شکل

تعداد کبوترها: ۱۳ نقطه



طبق اصل لانه‌کبوتری دو نقطه مانند A و B در یک لانه جای می‌گیرند. پس:

$$\begin{cases} AH < ۲ \\ BH < ۲ \end{cases} \Rightarrow AH^۲ + BH^۲ < ۸ \Rightarrow AB^۲ < ۸ \Rightarrow AB < \sqrt{۸}$$

پاسخ سؤال ۱۰۴

۱۰۴ به ترتیب متن سؤال n و $(k+۱)$.

۱۰۵ $$\left|\bar{A}_۱ \cap \bar{A}_۲\right| = \left|\overline{A_۱ \cup A_۲}\right| = |S| - |A_۱| - |A_۲| + |A_۱ \cap A_۲| = ۳۵۰ - \left[\frac{۳۵۰}{۴}\right] - \left[\frac{۳۵۰}{۶}\right] + \left[\frac{۳۵۰}{۱۲}\right] = ۲۳۴$$

۱۰۶

	۱	۲	۳	۴
$C_۱$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$
$C_۲$	$T_۴$	$T_۱$	$T_۲$	$T_۳$
$C_۳$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۱$	$T_۲$
$C_۴$	$T_۲$	$T_۳$	$T_۴$	$T_۱$

این جدول یکی از پاسخ‌های ممکن است.

۱۰۷

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲ \Rightarrow y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ + x_۶ = ۱۲$$

$$y_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + x_۶ = ۵ \xrightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۵+۶-۱}{۶-۱} = ۲۵۲$$

۱۰۸ الف $۶! \times ۴!$

ب $۵! \times ۴!$

پ $۳! \times ۷!$

پاسخ سؤال ۱۰۹

۱۰۹ ۱۵

۱۱۰

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

و

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۲	۱	۳
B	۱	۳	۲
C	۳	۲	۱

→

	شنبه	یکشنبه	دوشنبه
A	۱۲	۲۱	۳۳
B	۳۱	۱۳	۲۲
C	۲۳	۳۲	۱۱

۱۱۱ تعداد لانه‌ها: $۷ \times ۱۲ = ۸۴$

تعداد کبوترها: ۵۰۵ دانش‌آموز

$$\begin{array}{r|l} ۵۰۵ & ۸۴ \\ \hline -\ ۵۰۴ & ۶ \\ \hline ۱ & \end{array} \Rightarrow ۶ + ۱ = ۷$$

طبق اصل لانه‌کبوتری لااقل ۷ نفر آن‌ها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۱۱۲

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = \left[\frac{۹۰}{۲}\right] + \left[\frac{۹۰}{۳}\right] - \left[\frac{۹۰}{۶}\right] \Rightarrow n(A \cup B) = ۶۰$$

۱۱۳

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۰ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ + y_۴ + ۱ + y_۵ + ۱ = ۱۰$$

$$x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۶ \xrightarrow{\binom{n+k-۱}{k-۱}} \binom{۶+۵-۱}{۵-۱}$$

۱۱۴

الف $۵! \times ۶!$

ب $۵! \times ۷!$

پ $۱۰! \times ۲!$

WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL نوترو فیل

آینده از آن توست! هر قدمی که امروز برداری، تو رو به رویاهات نزدیک‌تر میکنه. به تلاشت ادامه بده، ما کنارت هستیم!

بیا تو سایت کلی خبر خوب برات داریم😉

www.notruphil.com

notruphil

بانک جزوات امتحانی نوتروفیل!

منتظر تماست هستیم!

۰۲۱-۹۱۰۱۲۳۹۳