

## بچه‌ی نوتروفیلی من ، سلام 🍷

به رسم همیشه که توی این مسیر کنارت بودیم ، این بار هم یک مجموعه سوال برای شب امتحانات آماده کردیم که با کار کردنشون تسلط رو افزایش بدی و به امید خدا بری واسه نمره‌ی ۲۰ 🍷  
جان دلم نترسی از سختی امتحانات اگه به کتاب درسی کاملاً مسلط باشی و این مجموعه سوال رو هم به عنوان مکمل حل کنی مطمئن باش نمره‌ت بهتر از چیزی که فکرش رو کنی میشه 🍷  
یادت باشه امتحانات نهایی رو جدی رو بگیری چون با نمره‌ی خوب این امتحانات کار کنکور رو خیلی آسون میکنی  
یه حرف دلی هم دارم با بچه‌هایی که کمی دیرتر شروع کردن ...  
مبادا خودت رو ببازی بچه‌ی من امید دارم بهت و میدونم اگه خوب بخونی قطعاً میتونی نمره‌ی عالی بگیری پس پرقدرت بریم واسه ترکوندن اولین امتحان 🍷  
یادت نره این فایل رو برای اون دوستت که بهش احتیاج داره بفرستی و جزئی از این زنجیره‌ی عشق و مهربونی باشی 🍷  
پ:ن: مرسی که با وجود درگیری‌های ذهنی و عدم تمرکزی که ماجرای کارت ورود به جلسه براتون به همراه داشت ، همچنان قوی موندی و ادامه میدی 🍷  
به امید روزی که اینجا به عنوان همکار کنار خانواده‌ی بزرگ نوتروفیل باشی



دوست همیشگی تو ، نوتروفیل



## بارم بندی آمار و احتمال یازدهم ریاضی

| درس | نوبت اول                              | نوبت دوم |
|-----|---------------------------------------|----------|
| ۱   | ۱۲                                    | ۴/۵      |
| ۲   | ۸ / تا آخر درس ۲ تا سر<br>احتمال شرطی | ۵/۵      |
| ۳   |                                       | ۶        |
| ۴   |                                       | ۴        |





# آمار و احتمال یازدهم ریاضی

۱ اگر  $p$  گزاره درست و  $q \sim$  درست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، در صورت امکان ارزش گزاره زیر را تعیین کنید.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۲ هر عدد اول، فرد است.

$$\exists x \in \mathbb{N}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\exists x \in \mathbb{Z}; 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

۵ برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $n!$  عددی گویاست.

۶ در آمار، هر متغیر ترتیبی یک متغیر کیفی است.

۷ در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیرمجموعه فضای نمونه است.

۸ در فضای نمونه  $S$ ، پیشامدی مانند  $A$  وجود دارد به طوری که  $P(A) > 1$ .

۹ هر معادله درجه دوم، حداقل یک ریشه حقیقی دارد.

۱۰ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف

$$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

ب

$$\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$$

پ

$$\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$$

ت

$$\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$$

۱۱ هرگاه  $A = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x \leq 5\}$  دامنه متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.



$$\exists x \in A; x + ۴ = ۱۰$$

$$\forall x \in A; x + ۲ \leq ۹$$

$$\exists x \in A; x + ۳ \leq ۴$$

$$\forall x \in A; x + ۱ \geq ۶$$

جدول زیر را کامل کنید.

۱۲

| عبارت با زبان ریاضی                          | عبارت با زبان طبیعی                       |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq ۰$       | برای هر عدد حقیقی $x$ داریم: $x^2 \geq ۰$ |
| $\forall a \in E; a = ۲k (k \in \mathbb{Z})$ |                                           |
| $\exists p \in P; p = ۲k (k \in \mathbb{Z})$ |                                           |
|                                              | بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.         |

در جدول فوق، مجموعه اعداد زوج را با  $E$ ، مجموعه اعداد فرد را با  $O$  و مجموعه اعداد اول را با  $P$  نمایش داده ایم.

درستی هم‌ارزی  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید.

۱۳

اگر گزاره  $p$ : " $\sqrt{۲}$  عددی گنگ است" و گزاره  $q$ : "معادله  $x^2 + ۲۵ = ۰$  دو ریشه حقیقی دارد" باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های  $p \Rightarrow \sim q$  و  $q \Leftrightarrow p$  را تعیین کنید.

۱۴

گزاره  $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow p$  نادرست و گزاره  $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow p$  درست است. ارزش گزاره‌های  $p$  و  $q$  را مشخص کنید.

۱۵

اگر گزاره  $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow p$  درست و گزاره  $(\sim q \vee p) \Leftrightarrow$  نادرست باشد، وضعیت گزاره‌های  $p$  و  $q$  را بررسی کنید.

۱۶

با استفاده از جبر گزاره‌ها ثابت کنید:

۱۷

$$(p \Leftrightarrow \sim q) \wedge (q \Leftrightarrow p) \equiv F$$

آیا دو عبارت زیر به یک معنی هستند؟ (آیا هم‌ارز هستند؟)

۱۸

(۱) اگر عدد  $a$  بر ۶ بخش‌پذیر نباشد آنگاه یا بر ۲ بخش‌پذیر نیست یا بر ۳.

(۲) عدد  $a$  بر ۲ بخش‌پذیر نیست یا اگر بر ۶ بخش‌پذیر نباشد آنگاه بر ۳ بخش‌پذیر نیست.

عبارت زیر را به زبان منطق گزاره‌ها بنویسید:

۱۹

اگر تقاضا ثابت بماند و قیمت‌ها تنزل کند میزان معاملات زیاد می‌شود، اگر تنزل قیمت‌ها افزایش میزان معاملات را موجب شود آنگاه می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت، اگر تقاضا ثابت بماند، پس می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت.

ثابت کنید اگر  $n^2$  عددی صحیح و زوج باشد، آنگاه  $n$  نیز زوج است.

۲۰

در ترکیب عطفی ۴ گزاره تعداد حالت‌های نادرست را بیان کنید.

۲۱

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۲۲ اگر  $۴ > ۵$  باشد، آنگاه عدد ۱۱۹ اول است.

۲۳  $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$  گویا است، اگر و فقط اگر  $\frac{۵}{۶}$  گنگ باشد.

۲۴ ارزش گزاره‌های زیر را با دلیل مشخص کنید.

الف معادله  $x^۲ - ۳x + ۱ = ۰$  ریشه حقیقی ندارد.

ب  $f = \{(۱, ۲), (۲, ۳), (۳, ۲), (۲, ۱)\}$  تابع است.

پ  $(\sqrt{۲} \text{ گنگ است}) \vee (-۹ < -۱۰)$

ت  $(۰ \in \mathbb{Z}) \wedge (\frac{۱}{۲-۲} = -\frac{۱}{۲})$

۲۵ با استفاده از جدول ارزش‌ها، ارزش گزاره  $(p \vee \sim p) \wedge q$  را بررسی کنید.

۲۶ جدول ارزش گزاره زیر را بنویسید.

$$p \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \equiv F$$

۲۷ ارزش گزاره  $\forall x \in \mathbb{R}; x^۲ \geq x$  را مشخص کنید.

۲۸ درستی یا نادرستی گزاره  $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| - ۱ < ۰$  را مشخص کنید.

۲۹ جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد را بنویسید.

۳۰ عبارت زیر را به صورت گزاره بنویسید:

"هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که  $a \times b = ۰$  در این صورت  $a = ۰$  یا  $b = ۰$ "

۳۱ با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها و بدون جدول ارزش ثابت کنید گزاره زیر همواره درست است.

$$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$$

۳۲ هم‌ارزی زیر را با استفاده از قوانین جبر گزاره‌ها (بدون جدول ارزش) ثابت کنید:

$$p \Leftrightarrow q \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q$$

۳۳ عبارت زیر را به زبان سورها بنویسید، سپس آن را نقیض کنید:

فقط یک عدد طبیعی وجود دارد که هم زوج است و هم اول.

۳۴ عبارت زیر را به زبان سورها بنویسید:

اگر بعضی از خودکارها آبی نباشند آنگاه تمام مدادها قرمزند.

۳۵ عبارت زیر را به زبان منطق گزاره‌ها بنویسید:

اگر ۳ عددی زوج باشد، آنگاه  $۳ \times ۵$  زوج است یا ۲ فرد است.

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$$

۳۷ بدون استفاده از جدول ارزش گزارهها درستی هم‌ارزی را ثابت کنید.

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$$

۳۸ ارزش گزاره  $(\forall x \in \mathbb{R} : x^2 + 2 > x) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N} : x^3 < 0)$  را مشخص کنید.

۳۹ ارزش گزاره  $\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x} = 1 \vee \frac{x-1}{x-1} = 1$  را بررسی کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

۴۰ نقیض گزاره "تمام اعداد طبیعی اگر عددی اول هستند، مربع کامل نیستند" را به زبان فارسی بنویسید.

۴۱ گزاره "اگر عددی بزرگتر از ۲ و زوج باشد، آنگاه مربع آن عدد زوج است." را در نظر گرفته و آن را به صورت ریاضی بنویسید و عکس گزاره را نیز به زبان فارسی بنویسید.

۴۲ عکس گزاره "شرط کافی برای باریدن باران، ابری بودن هوا است." را بنویسید.

۴۳ با استفاده از جبر گزارهها ثابت کنید:

$$[\sim q \Rightarrow (p \wedge q)] \vee q \equiv q$$

۴۴ دامنه گزاره‌نمای  $x^2 + x - 2 = 0$  مجموعه اعداد اول است. مجموعه جواب گزاره‌نما را مشخص کنید.

۴۵ عبارت  $\frac{4x-1}{5} \geq 2$  را در نظر گرفته و دامنه و مجموعه جواب آن را مشخص کنید.

۴۶ نتیجه استدلال زیر را مشخص کنید:

هیچ عدد مربع کاملی، فرد نیست.  
۹ مربع کامل است.

۴۷ اگر  $p \Rightarrow q$  نادرست باشد و  $r$  گزاره دلخواهی باشد، ارزش  $(q \Rightarrow r)$  برابر است با:

(۱) T (۲) F

(۳) r (۴)  $\sim r$

۴۸ ارزش گزاره سوری زیر را مشخص کنید و نقیض آن را بنویسید.

$$\forall x \in \mathbb{R} ; (|x+1| \neq 0 \wedge |x-3| \geq 2)$$

۴۹ ارزش گزاره سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\forall x \in (-\infty, 0) ; x - \frac{1}{x} \leq -2$$

۵۰ اگر n عددی صحیح و  $n^2$  مضرب ۳ باشد، ثابت کنید n نیز مضرب ۳ خواهد بود.

باتوجه به عبارتهای خبری زیر به سؤالات پاسخ دهید.

۵۱

(الف) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد  $A$  رخ دهد برابر با  $\frac{1}{4}$  است.

(ب) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است ( $3x + 2y = 6$ ).

الف

اگر در جمله "الف" قرار دهیم  $A = \dots$  در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می شود.

ب

به نظر شما چه مجموعه هایی را به جای  $A$  قرار دهیم تا ارزش گزاره حاصل درست شود؟

پ

اگر در جمله "الف" قرار دهیم  $A = \dots$  در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

ت

اگر در جمله "ب" قرار دهیم  $x = \dots$  و  $y = \dots$  در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست است.

ث

اگر در جمله "ب" قرار دهیم  $x = \dots$  و  $y = \dots$  در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

۵۲

جدول ارزش های چهار گزاره، چند حالت دارد؟

۵۳

مجموعه های  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  با مرجع  $U$  را در نظر بگیرید، اگر  $A \subseteq B$  و  $C \subseteq D$  آنگاه ثابت کنید:

الف

$$A \cap C \subseteq B \cap D$$

ب

$$A \cap C \subseteq B \cup D$$

۵۴

ثابت کنید برای مجموعه های  $A$  و  $B$  با مرجع  $U$  داریم:

$$A - B \subseteq A$$

۵۵

فرض کنیم  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  چهار مجموعه با مرجع  $U$  باشند.

ثابت کنید: اگر  $A \subseteq B$ ،  $C \subseteq D$  باشد، آنگاه  $A \cup C \subseteq B \cup D$ .

۵۶

فرض کنید  $A$  و  $B$  دو مجموعه با مرجع  $U$  باشند و  $A \subseteq B$ . با استفاده از روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید:  $B' \subseteq A'$ .

۵۷

به چند حالت می توان ۱۲ نفر را به تیم های برابر بدون نام تقسیم کرد؟ (دقت کنید تیم ها می توانند تک نفره باشند و همه می توانند در یک تیم باشند).

۵۸

برای مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e\}$  چند افراز مختلف وجود دارد به طوری که سه عضو  $a$ ،  $b$  و  $c$  در یک مجموعه قرار داشته باشند؟ آنها را بنویسید.

۵۹

چهار افراز متفاوت برای مجموعه  $A = \{1, 2, 3\}$  بنویسید.

۶۰

اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  و  $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$  باشند، چند مجموعه مانند  $X$  وجود دارد که در شرط  $A - B \subseteq X \subseteq A \cup B$  صدق کند؟

۶۱

فرض کنید مجموعه  $A$  متناهی تا عضو دارد و  $a \in A$  در این صورت تعداد زیرمجموعه های  $A$  که فرد عضوی هستند بیشتر است یا تعداد زیرمجموعه های  $A - \{a\}$ ؟

۶۲

اگر  $A = \{x^2 - 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 4\}$  باشد، مجموعه  $A$  و مجموعه همه زیرمجموعه های  $A$  را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

۶۳ فرض کنید مجموعه  $A$  به صورت زیر باشد:

$$A = \{ \{1, 2\}, \{\emptyset, 1, \{\{3\}, 1, 4\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \{6, 7, 8\}\}\}, \{4, \emptyset, \{\{\{3, 4, 8\}\}, \{5\}\}\} \}$$

در این صورت چند تا  $a \in B \in A$  وجود دارد که  $a$  باشد؟

۶۴ اگر  $A_n = \{x \in \mathbb{Z} \mid -n \leq x \leq n\}$  باشد، مجموعه‌های  $A_1 \cup A_2$  و  $A_{10} - A_7$  را به وسیله نوشتن اعضا مشخص کنید.

۶۵ بازه  $A_n$  به صورت  $A_n = (1 - 2n, n + 2)$  تعریف شده است. اگر مساحت ناحیه  $A_n \times A_{n-1}$  برابر با ۱۳۰ باشد،  $n$  را بیابید.

۶۶ مجموعه مرجع برابر با اعداد طبیعی یک‌رقمی بوده و  $A \subseteq B$  است. اگر  $(A \times A) \cap (B \times B) = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$ ، تعیین کنید تعداد زیرمجموعه‌های ۴ عضوی  $A'$  چقدر از تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی آن بیشتر است؟

۶۷ اگر  $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 1\}$  باشد، مجموعه  $A^2 - (A \times B)$  را با اعضا نشان دهید.

۶۸ اعضای دو مجموعه  $A$  و  $B$  را مشخص کرده و سپس اعضای  $B \times A$  را محاسبه کنید.

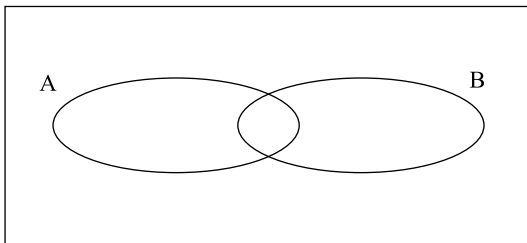
$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 15\}$$

$$B = \{3^k \mid |k| \leq 1, k \in \mathbb{Z}\}$$

۶۹ اگر  $A$  و  $B$  دو مجموعه باشند به طوری که  $B \subseteq A$ ، به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:

$$(A - B) \cup B = A$$

۷۰ باتوجه به شکل زیر پیشامد  $(A - B) \cup (B - A)$  را هاشور بزنید.



۷۱ برای سه مجموعه  $A$  و  $B$  و  $C$  مجموعه خواسته شده را با استفاده از نمودار ون هاشور زده و آن را با استفاده از نمادهای ریاضی نیز بنویسید.

- اعضای که در  $A$  یا  $C$  باشند اما در  $B$  نباشند.

۷۲ اگر  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \frac{18}{x} \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{10}{x} \in \mathbb{Z}\}$ ، آنگاه تعیین کنید مجموعه‌های زیر چند عضو دارند؟

$$A^2 - (A \times B)$$

الف

$$(B \times A) \cup (A \times B)$$

ب

۷۳ اگر  $A = [1, 5]$  و  $B = (-1, 1)$ ، مطلوب است رسم  $A^2 - B^2$  و  $A \times B - B \times A$  و محاسبه مساحت آن‌ها؟ (هر یک در یک دستگاه مختصات جدا رسم شود)

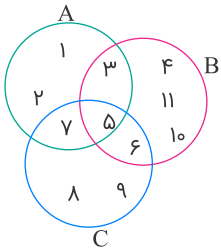
$$A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = B = \emptyset$$

۷۵ برای تساوی زیر مثال نقض بیاورید:

$$(A - B) \cup (B - C) = A - C$$

۷۶ اگر  $A = \{x + y, y - z, ۲\}$  و  $B = \{۱, x - z, ۷\}$  باشند و داشته باشیم  $A \times B = B \times A$ ، بیشترین مقدار  $x + y + z$  را به دست آورید.

۷۷ باتوجه به نمودار ون زیر چند مجموعه مانند  $X$  می‌توان یافت که در رابطه  $\forall x; [x \in X \Rightarrow x \in ((A \cup B) - C)]$  صدق کنند؟



۷۸ مجموعه‌های  $A = \{۱\}$  و  $B = \{۱, ۲\}$  مفروض‌اند:

الف مجموعه‌های  $A^۲$ ،  $A \times B$  و  $(A \times B) - A^۲$  را با اعضا مشخص کنید.

ب نمودار مجموعه  $(A \times B) - A^۲$  را در دستگاه مختصات رسم کنید.

۷۹ برای دو پیشامد  $A$  و  $B$  از فضای نمونه‌ای  $S$  ثابت کنید:

$$P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

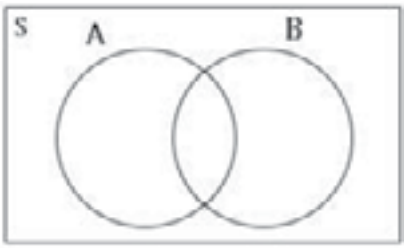
۸۰ عددی به تصادف از مجموعه  $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۱۰۰۰\}$  انتخاب می‌کنیم، مطلوب است احتمال آنکه عدد انتخابی بر ۵ بخش‌پذیر باشد ولی بر ۳ بخش‌پذیر نباشد.

۸۱ اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد از فضای نمونه‌ای  $S$  باشند و  $P(A) = ۰/۲$  و  $P(B) = ۰/۳$  و  $P(A \cup B) = ۰/۴$  احتمال آن را محاسبه کنید که هر دو پیشامد  $A$  و  $B$  باهم اتفاق بیفتند.

۸۲ اگر یک عدد چهاررقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱ به وجود آید، احتمال این که عدد ساخته شده بر ۵ بخش پذیر باشد را پیدا کنید. (تکرار ارقام غیرمجاز است.)

۸۳ آزمونی شامل ۱۰ سؤال دوگزینه‌ای (درست - غلط) می باشد، دانش آموزی به طور تصادفی به همه سؤالات این آزمون پاسخ می دهد، احتمال آنکه دقیقاً به ۸ سؤال پاسخ درست داده باشد، چقدر است؟

۸۴ با توجه به شکل زیر، پیشامد  $(A - B) \cup (B - A)$  را هاشور بزنید.



۸۵ احتمال قبولی علی در دو درس فیزیک و شیمی به ترتیب ۵۵ درصد و ۶۰ درصد است. اگر احتمال قبولی علی در یکی از این دو درس ۷۵ درصد باشد، با چه احتمالی در هر دو درس قبول می‌شود؟

۸۶ یک تاس را پرتاب می‌کنیم. اگر احتمال رو شدن هر عدد از رابطه  $P(i) = \begin{cases} \frac{1}{i(i+1)} & ; 1 \leq i \leq 4 \\ a & ; i = 5, 6 \end{cases}$  به دست آید، تعیین کنید

در پرتاب این تاس با چه احتمالی عدد رو شده مضرب ۳ است؟

۸۷ تعیین کنید هریک از موارد زیر مربوط به علم آمار است یا علم احتمال؟

الف چه تعداد از کودکان یک مهدکودک تک‌فرزند هستند؟

ب می‌دانیم ۴۰ نفر از ۶۰ نفر دانش آموزان پایه یازدهم عینکی هستند. اگر ۱۰ نفر از این دانش آموزان را به تصادف انتخاب کنیم چقدر ممکن است بیشتر از ۷ نفر عینکی باشند؟

۸۸ ۷ نفر عضو تیم ملی والیبال هستند به طوری که قد هیچ دو نفری از آن‌ها با هم برابر نیست. این افراد پشت سر هم وارد زمین می‌شوند. با چه احتمالی:

الف بلندترین عضو تیم، نفر وسط خواهد بود؟

ب کوتاه‌ترین عضو تیم نفر اول و بلندترین عضو تیم نفر آخر خواهد بود؟

پ کوتاه‌ترین عضو تیم قبل از بلندترین عضو وارد زمین شده است؟

۸۹ برق کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اولی و دومی به ترتیب ۵ و ۱۰ لامپ وجود دارد. در اولی K لامپ سالم و در دومی ۶ لامپ سالم است. اگر احتمال انتخاب لامپ سالم از جعبه دوم ۰/۲ بیشتر از جعبه اول باشد، K چقدر است؟

۹۰ تعیین کنید هر یک از موارد زیر مربوط به علم آمار است یا احتمال؟

الف چند نفر از دانش آموزان کلاس شما به رنگ بنفش علاقه دارند؟

ب در یک پاساژ ۲۰٪ مغازه‌ها حراج زده‌اند. اگر ۵ مغازه به تصادف انتخاب کنیم با چه احتمالی حداقل سه تا حراج زده‌اند؟

پ تیم والیبال ایران تا به حال ۴ بار به لیگ جهانی راه یافته است. با چه احتمالی امسال نیز به لیگ جهانی خواهد رفت؟

۹۱ بر روی هریک از چند کارت یکسان، اعداد دورقمی حاصل از جایگشت اعداد ۳، ۷، ۸ و ۹ را می‌نویسیم و به تصادف دو کارت بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال رقم اول هر دو کارت ۸ است؟

۹۲ برای دو پیشامد A و B اگر  $P(A) = \frac{1}{3}$ ،  $P(B) = \frac{1}{3}$  و  $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$  باشد، آنگاه مقدار  $P(A' \cup B)$  را بیابید.

۹۳ در یک جعبه پنج جفت کفش وجود دارد، چهار لنگه کفش به تصادف از جعبه انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل یک جفت کفش در بین این چهار لنگه کفش وجود داشته باشد چقدر است؟

۹۴ در یک تجربه تصادفی  $S = \{x, y, z\}$  فضای نمونه است. اگر  $P(x)$ ,  $P(y)$  و  $P(z)$  یک دنباله حسابی با قدر نسبت  $\frac{1}{4}$  تشکیل دهند، احتمال وقوع هریک از برآمدها را به دست آورید.

۹۵ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهده شدن هر عدد، متناسب با مربع همان عدد است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد اول مشاهده شود چقدر است؟

۹۶ اگر فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی  $S = \{1, 2, 3\}$  باشد و  $P(1) = a^2$  و  $P(3) = 2P(2) = a$  مقدار  $a$  و  $P(2)$  را به دست آورید.

۹۷ سه نفر دنده  $a$  و  $b$  و  $c$  در یک مسابقه شرکت می کنند، احتمال برد  $a$  نصف احتمال برد  $b$  و احتمال برد  $b$ ،  $\frac{1}{3}$  احتمال برد  $c$  است:

الف احتمال برد هریک از دنده ها را بیابید.

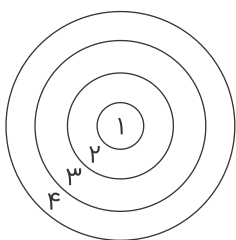
ب احتمال آنکه  $b$  یا  $c$  برنده شوند را تعیین کنید.

۹۸ اگر  $S = \{a, b, c, d\}$  و  $P(a) = P(b) = 2P(c) = \frac{P(d)}{2}$  باشد و هیچ دو پیشامد نتوانند باهم رخ دهند، احتمال رخ دادن  $a$  یا  $b$  را به دست آورید.

۹۹ یک تاس را پرتاب می کنیم. اگر احتمال رو شدن هر عدد از رابطه  $P(i) = \begin{cases} \frac{1}{i(i+1)} & ; 1 \leq i \leq 4 \\ a & ; i = 5, 6 \end{cases}$  به دست آید، تعیین کنید در پرتاب این تاس به چه احتمالی عدد رو شده مضرب ۳ است؟

۱۰۰ اگر  $S = \{a, b, c, d, e\}$  فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی و  $A = \{a, b\}$  و  $B = \{a, b, c, d\}$  و  $C = \{a, b, e\}$  سه پیشامد باشند به طوری که  $P(A) = \frac{2}{7}$  و  $P(B) = \frac{3}{5}$  مقدار  $P(C')$  را به دست آورید.

۱۰۱ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره ای شکل مطابق شکل زیر، این صفحه به چهار ناحیه مجزا تقسیم شده است. فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیه اول  $x$  باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیه  $k$ ام،  $(2k-1)x$  باشد:



الف احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به دست آورید.

ب احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه های اول یا چهارم بیشتر است، یا اصابت بر ناحیه دوم و سوم؟

۱۰۲ یک تاس به گونه ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. در پرتاب این تاس احتمال آنکه عدد ظاهر شده بزرگتر از ۴ باشد را بیابید.

۱۰۳ اگر  $S = \{a, b, c\}$  و  $P(a) = (P(b))^2 = 2P(c)$  باشد،  $P(b)$  را بیابید.

۱۰۴ دو سکه داریم که در سکه اول احتمال رو آمدن سه برابر ظاهر شدن پشت و در سکه دوم احتمال پشت آمدن سه برابر ظاهر شدن رو است. این دو سکه را باهم پرتاب می کنیم. احتمال اینکه یکی رو و دیگری پشت بیاید کدام است؟

۱۰۵ از بین اعداد مجموعه  $S = \{110, 111, 200, 201, 120, 102\}$  عددی به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال انتخاب هر کدام از اعداد متناسب با مجموع ارقام آن عدد می باشد. احتمال اینکه عددی فرد انتخاب شود کدام است؟

۱۰۶ یک تاس به گونه‌ای ساخته شده که احتمال ظاهر شدن هر عدد متناسب با مربع همان عدد است. اگر این تاس را یک بار پرتاب کنیم با چه احتمالی عدد ظاهر شده اول خواهد بود؟

۱۰۷ سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف، ۱۵ مهره قرمز دارد که ۳ تایی آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم، هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم، ۱۲ مهره داریم که ۶ تایی آن‌ها قرمز است. با چشم بسته، یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی، این مهره، قرمز است؟

۱۰۸ در جعبه A، ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و در جعبه B، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره آبی وجود دارد. یکی از این دو جعبه را به تصادف انتخاب کرده و ۱ مهره به تصادف از آن جعبه خارج می‌کنیم. چقدر احتمال دارد این مهره آبی باشد؟

۱۰۹ سه فرد A، B و C نسخه‌خوان‌های یک مؤسسه انتشاراتی‌اند که به ترتیب ۳۰، ۴۰ و ۳۰ درصد کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آن‌ها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن صفحه فرد B بوده، چقدر است؟

۱۱۰ اگر  $P(A|B) = ۰/۳$ ،  $P(B|A) = ۰/۲$  و  $P(A) + P(B) = ۰/۶$  باشند،  $P(B|A')$  را بیابید.

۱۱۱ احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد،  $\frac{1}{6}$  است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر  $\frac{1}{4}$  و در صورت بردن رقیب اصلی‌اش، این احتمال به  $\frac{1}{3}$  افزایش می‌یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو اتفاق (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

۱۱۲ دو تاس را باهم پرتاب می‌کنیم. اگر بدانیم اعداد رو شده مثل هم هستند، با چه احتمالی حاصل ضرب آن‌ها زوج خواهد بود؟

۱۱۳ درون کیسه A، سه مهره آبی و پنج مهره قرمز و درون کیسه B، چهار مهره آبی و چهار مهره قرمز موجود است. از کیسه A یک مهره خارج کرده و در کیسه B قرار می‌دهیم. حال از کیسه B یک مهره خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مهره‌های خارج شده از کیسه A و B همرنگ خواهد بود؟

۱۱۴ دو تاس باهم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط آنکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۶ است را به دست آورید.

۱۱۵ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است. گروه "پرخطر" که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه "کم‌خطر" که احتمال تصادف کردن آن‌ها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گزاران پرخطرند. اگر بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

۱۱۶ احتمال اینکه در یک فرآیند شیمیایی ماده A واکنش نشان دهد  $\frac{1}{6}$  است و همین احتمال برای ماده B برابر با  $\frac{1}{3}$  است. البته اگر ماده B واکنش نشان دهد احتمال واکنش نشان دادن ماده A به  $\frac{1}{4}$  می‌رسد. با چه احتمالی فقط یکی از این دو ماده واکنش نشان می‌دهند؟

۱۱۷ از بین سه دانش‌آموز تجربی و چهار دانش‌آموز ریاضی، یک گروه ۴ نفری انتخاب می‌کنیم. اگر در گروه از هر دو رشته داشته باشیم، چقدر احتمال دارد که تعداد ریاضی و تجربی‌های گروه متفاوت باشد؟

۱۱۸ سه کیسه داریم، در اولی سه سیب و چهار پرتقال، در کیسه دوم دو سیب و پنج پرتقال و در کیسه سوم یک سیب و شش پرتقال وجود دارد. کیسه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم و میوه‌ای برمی‌داریم. چقدر احتمال دارد سیب باشد؟

۱۱۹ احتمال قبولی سینا در آزمونی ۰/۴ و احتمال قبولی سیمیا در آن آزمون ۰/۵ است. اگر احتمال قبولی سیمیا به شرط آنکه سینا قبول شده باشد برابر ۰/۳ باشد، احتمال اینکه وقتی سیمیا قبول شده است، سینا قبول نشود کدام است؟

- ۱۲۰ سه تیرانداز a، b و c به سمت یک هدف تیراندازی می‌کنند. احتمال برخورد تیر به هدف به ترتیب  $\frac{1}{3}$ ،  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{5}$  است. اگر دو تیر به هدف برخورد کرده باشد، چقدر احتمال دارد تیر c به هدف نخورده باشد؟
- ۱۲۱ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو گروه به ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟
- ۱۲۲ به احتمال ۴۰٪ یک تاجر می‌تواند کالایی را خریده و ظرف مدت یک هفته با سودی مشخص بفروشد. شانس خرید کالا برای این تاجر ۹۰٪ است. اگر این فرد کالا را خریده باشد چقدر احتمال دارد بتواند آن را ظرف مدت یک هفته بفروشد؟
- ۱۲۳ فرض کنید در یک سال، احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا، برابر ۰/۶ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا، برابر ۰/۷ باشد. با چه احتمالی، حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان آسیا خواهد شد.
- ۱۲۴ یک تاس را دو بار پرتاب می‌کنیم. اگر پیشامد A ظاهر شدن عدد ۶ در پرتاب اول و B پیشامد مجموع ۷ در دو پرتاب باشد، با محاسبات لازم بررسی کنید A و B مستقل هستند یا وابسته؟
- ۱۲۵ احتمال قبولی کیمیا و گیانا در کنکور ۰/۷ و ۰/۶ است. احتمال اینکه حداقل یکی از این دو نفر در کنکور قبول شوند چقدر است؟
- ۱۲۶ سکه سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم اگر A پیشامد برآمدهایی باشد که در آن دومین پرتاب رو است و B پیشامد برآمدهایی باشد که در آن فقط دو رو به صورت متوالی ظاهر شده است. آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ چرا؟ (فضای نمونه و هر یک از پیشامدها را مشخص کنید.)
- ۱۲۷ اگر  $P(B) = \frac{1}{4}$  و  $P(A|B) = \frac{1}{6}$  و دو پیشامد A و B مستقل باشند،  $P(A \cup B)$  را به دست آورید.
- ۱۲۸ در کیسه‌ای هفت مهره به شماره ۱ تا ۷ وجود دارند. دو مهره را به طور تصادفی و پی‌درپی بدون جایگذاری خارج می‌کنیم. با کدام احتمال دو مهره با شماره‌های زوج و فرد خارج می‌شود؟
- ۱۲۹ سه فرد A، B و C به هدفی تیراندازی می‌کنند. احتمال به هدف نخوردن تیر آن‌ها به ترتیب  $\frac{5}{6}$ ،  $\frac{3}{4}$  و  $\frac{2}{3}$  است. اگر بدانیم فقط دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد، چقدر است؟
- ۱۳۰ یک سکه و یک تاس را می‌اندازیم. A پیشامد رو آمدن سکه و B پیشامد زوج آمدن تاس می‌باشد. آیا A و B مستقل هستند؟
- ۱۳۱ در کیسه‌ای ۵ مهره سفید و ۴ سیاه هست. مهره‌ای از کیسه برمی‌داریم و رنگش را ثبت کرده و به کیسه برمی‌گردانیم و دوباره این کار را تکرار می‌کنیم. احتمال اینکه حداقل ۲ آزمایش لازم باشد تا مهره سفید مشاهده شود چقدر است؟
- ۱۳۲ ۹ نفر که ۴ نفر آن‌ها مرد و ۵ نفر زن هستند به ترتیب از یک در وارد می‌شوند. هر کدام که وارد می‌شوند جنسیت او یادداشت می‌شود. احتمال اینکه حداقل ۳ نفر وارد شوند تا اولین مرد وارد شود چقدر است؟

نمرات ۲۰ دانش‌آموز یک کلاس بین ۸ تا ۲۰ است که طبق جدول زیر دسته بندی شده‌اند.

| فرآوانی نسبی | f فرآوانی | x                   |
|--------------|-----------|---------------------|
|              | ۳         | $8 \leq x < 11$     |
|              | ۶         | $11 \leq x < 14$    |
|              |           | $14 \leq x < 17$    |
|              | ۴         | $17 \leq x \leq 20$ |
|              | $n = 20$  | جمع                 |

۱۳۳ ستون مربوط به فرآوانی نسبی را تکمیل کنید.

۱۳۴ بافت‌نگاشت فرآوانی آن را رسم کنید.

۱۳۵ نمودار دایره‌ای آن را رسم کنید.

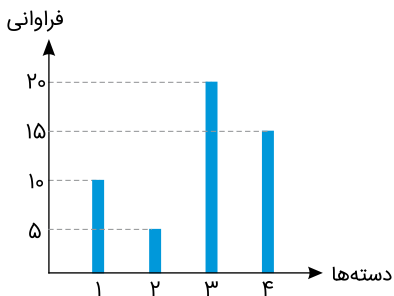
درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۱۳۶ برای متغیرهای کمی پیوسته نمودار میله‌ای مناسب‌تر است.

۱۳۷ در جدول فرآوانی مجموع فرآوانی‌های نسبی برابر عدد یک است.

۱۳۸ در یک نمودار دایره‌ای که نشانگر مدرک تحصیلی ۴۸ کارمند یک اداره می‌باشد، زاویه مرکزی مربوط به لیسانس‌ها ۴۵ درجه است. تعداد آنان چند نفر است؟

۱۳۹ نمودار میله‌ای یک جامعه به‌صورت زیر است:



الف فرآوانی نسبی دسته دوم را حساب کنید.

ب چند درصد اعضا در دسته سوم قرار دارند؟

نمودار زیر مربوط به فروش یک کالای خاص در یک فروشگاه در روزهای مختلف یک هفته است. اگر کل فروش ۱۸۰ مورد باشد و درصد فروش در روز جمعه ۱۰٪ باشد، چه تعداد از این کالا در روز پنجشنبه فروخته شده است؟



قد ۱۰ نفر از دانش‌آموزان برحسب سانتی‌متر به‌صورت زیر گزارش شده است:

۱۵۰, ۱۶۱, ۱۶۲, ۱۵۷, ۱۵۳, ۱۵۴, ۱۵۹, ۱۶۵, ۱۵۲, ۱۶۱

آن‌ها را در سه دسته طبقه‌بندی کنید و جدول فراوانی و فراوانی نسبی داده‌ها را رسم کرده و نمودار بافت‌نگاشت فراوانی را رسم کنید.

نمرات ۶۰ نفر از دانشجویان یک درس از ۱۰۰ نمره در جدول زیر داده شده است. ستون‌های فراوانی و فراوانی نسبی را به دست آورید و نمودار بافت‌نگاشت آن را رسم کنید.

| درصد فراوانی نسبی | کرانه دسته‌ها |
|-------------------|---------------|
| ۲۰                | [۰, ۵۰)       |
| ۳۰                | [۵۰, ۷۰)      |
| ۴۰                | [۷۰, ۹۰)      |
| ۱۰                | [۹۰, ۱۰۰]     |

در جدول توزیع فراوانی زیر ۱۰ داده دیگر اضافه می‌کنیم. زاویه مرکزی دسته دوم در نمودار دایره‌ای اش  $۲۴^\circ$  اضافه می‌شود. فراوانی این دسته در حالت جدید چقدر است؟

| فراوانی | داده‌ها |
|---------|---------|
| ۵       | A       |
| ۲       | B       |
| ۳       | C       |
| ۷       | D       |
| ۳       | E       |

۱۴۴ در یک جدول توزیع فراوانی، زاویه مرکزی مربوط به یک سطر در نمودار دایره‌ای  $20^\circ$  است. فراوانی مربوط به این سطر را  $x$  برابر کرده ولی بقیه فراوانی‌ها را ثابت نگه می‌داریم. زاویه مرکزی این سطر در حالت جدید  $240^\circ$  می‌شود.  $x$  را بیابید.

۱۴۵ در جدول زیر، زاویه مرکزی در نمودار دایره‌ای برای داده‌های  $c$  و  $d$  چقدر است؟

| داده              | a  | b  | c        | d        |
|-------------------|----|----|----------|----------|
| درصد فراوانی نسبی | ۲۰ | ۳۰ | $3x + 1$ | $7x - 1$ |

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۱۴۶ داده‌ها، واقعیت‌هایی هستند که درباره یک شیء یا فرد هستند و از آن‌ها در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی استفاده می‌شود.

۱۴۷ مشاهده یعنی عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود.

۱۴۸ عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود متغیر نام دارد.

۱۴۹ هر ویژگی از اشیاء یا اشخاص را که در اعضاء یک جامعه یکسان نیست، متغیر نامند.

۱۵۰ تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را فراوانی نسبی آن داده گویند.

۱۵۱ با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کل داده‌ها، فراوانی نسبی آن داده به دست می‌آید.

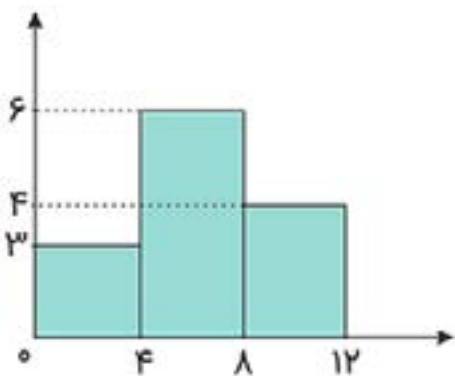
۱۵۲ نمودار بافت نگاشت برای متغیرهای پیوسته استفاده می‌شود.

۱۵۳ فصل‌های هر سال یک متغیر کیفی اسمی است.

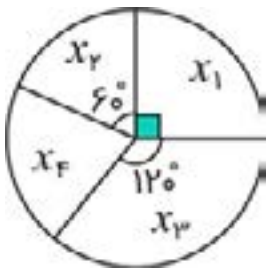
۱۵۴ تعداد غیبت‌های دانش‌آموزان یک کلاس در ماه یک متغیر گسسته است.

۱۵۵ رنگ چشم افراد مختلف یک متغیر کمی پیوسته است.

۱۵۶ در بافت نگاشت داده‌های آماری زیر، داده‌های با مقدار ۱، ۶، ۷، ۸ و ۱۲ را اضافه می‌کنیم. فراوانی نسبی دسته اول در شرایط جدید، نسبت به قبل چقدر است؟



۱۵۷ نمودار دایره‌ای زیر، مربوط به چهار داده  $x_1$  تا  $x_4$  است. اگر  $\sum_{i=1}^4 x_i = 40$  باشد، فراوانی مربوط به داده  $x_4$  را بیابید.



۱۵۸

جدول آماری زیر مربوط به نمرات ریاضی دانش‌آموزان یک کلاس موجود است. اگر مساحت کل نمودار بافت نگاشت فراوانی ۷۹ باشد، فراوانی نسبی دسته سوم را به دست آورید.

| فراوانی | حدود نمره |
|---------|-----------|
| ۲       | ۰ - ۱۰    |
| ۵       | ۱۰ - ۱۲   |
| x       | ۱۲ - ۱۵   |
| ۵       | ۱۵ - ۲۰   |

۱۵۹

باتوجه به جدول فراوانی زیر مقادیر a، b، x و y را بیابید.

| فراوانی نسبی | فراوانی | داده‌ها |
|--------------|---------|---------|
| ۰/۱          | a       | ۰       |
| x            | b       | ۱       |
| ۰/۲          | ۱۶      | ۲       |
| y            | ۱۰      | ۳       |
|              | n       |         |

۱۶۰

بر اساس نظرسنجی که از ۵۰ نفر مختلف انجام شده، نتایج زیر به دست آمده است:

الف) کسانی که از وسایل نقلیه عمومی برای رفت‌وآمد استفاده می‌کنند: ۱۲ نفر

ب) کسانی که از وسایل نقلیه شخصی برای رفت‌وآمد استفاده می‌کنند: ۳۱ نفر

ج) کسانی که از دوچرخه برای رفت‌وآمد استفاده می‌کنند: ۷ نفر

جدول فراوانی این افراد را رسم کنید، سپس نمودار میله‌ای فراوانی نسبی را نیز رسم کنید.

۱۶۱

میانگین داده‌های زیر، برابر ۲۲ است.

۱۵، ۲۰، ۲۱، ۲۴، ۲۵، a، ۲۲، ۳۰، ۲۵، ۲۰

الف

مقدار a را به دست آورید.

ب

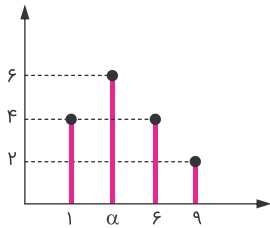
میانگین داده‌ها را تعیین کنید.

نوتروپیل



۱۶۲ داده‌های ۱, ۲, ۴, ۱, ۳, ۲, ۱, ۴, ۵, ۲, ۸, ۷, ۱ مفروض‌اند. مد، میانه و چارک‌های اول و سوم را به دست آورید.

۱۶۳ در نمودار میله‌ای فراوانی زیر اگر میانگین داده‌ها ۱ واحد بیشتر از میانه باشد، میانگین، میانه و مُد را حساب کنید.



۱۶۴ نمرات ۶ درس دانش‌آموزی اعلام شده که میانگین آن‌ها ۱۸ بوده است؛ سپس نمرات ۴ درس دیگر او نیز اعلام شد که میانگین آن ۴ درس ۱۵ بوده است.

میانگین ۱۰ درس او را حساب کنید.

۱۶۵ اگر میانگین داده‌های آماری  $x_1, \dots, x_5$  برابر ۶ و میانگین داده‌های آماری  $y_1, \dots, y_8$  برابر ۳ باشد، میانگین کل داده‌های آماری  $x_1, \dots, x_5$  و  $y_1, \dots, y_8$  را بیابید.

۱۶۶ مد و میانه را در داده‌های زیر به دست آورید.

۹, ۱, ۱۲, ۲, ۱۳, ۳, ۱۷, ۵, ۱, ۵, ۷, ۸, ۱۰, ۱۴, ۵, ۱۵

۱۶۷ میانگین داده‌های آماری ۱, ۵, ۱۰,  $x$  و  $y$  برابر ۱۲ است. میانگین داده‌های ۷, ۱۳,  $3x$  و  $3y$  را حساب کنید.

مفاهیم زیر را تعریف کنید.

۱۶۸ مد:

۱۶۹ اگر میانگین داده‌های ۳, ۷, ۶,  $x$ , ۵ برابر ۵/۸ باشد، میانگین داده‌های  $x+2$ ,  $x+1$ ,  $x$  چقدر است؟

۱۷۰ اگر میانگین داده‌های  $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \dots, 3x_n - 1$  برابر ۲۰ باشد، میانگین داده‌های  $\frac{1}{3}x_1 + 3, \frac{1}{3}x_2 + 3, \dots, \frac{1}{3}x_n + 3$  چقدر است؟

۱۷۱ اعداد زیر تعداد بهبودیافتگان روزانه بیمارستان مسیح دانشوری از بیماری کرونا در ۱۸ روز متوالی است. اگر داده‌های کمتر از چارک اول و بیشتر از چارک سوم را حذف کنیم، میانگین داده‌های باقی‌مانده چقدر است؟

۴۰, ۴۰, ۴۵, ۳۱, ۳۵, ۳۴, ۳۸, ۳۷, ۳۹, ۳۸, ۴۵, ۵۶, ۵۷, ۵۶, ۴۶, ۵۲, ۵۳, ۴۴

۱۷۲ داده‌های زیر، میزان حقوق ماهیانه (برحسب میلیون تومان) کارمندان یک شرکت خصوصی را نشان می‌دهد:

۸, ۶, ۶, ۵, ۱۱, ۲۰, ۹, ۸, ۳۵, ۱۲, ۱۰

الف آیا میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی برای توصیف این داده‌ها است؟ چرا؟

۱۷۳ داده‌های جمع‌آوری‌شده زیر مربوط به تراکنش‌های مالی شعبه بانکی در بازه زمانی ۹ تا ۱۰ صبح (به میلیون تومان) می‌باشد. میانه و چارک سوم آن‌ها را مشخص کنید.

۳۴, ۳۰, ۲۰, ۸۰, ۳۰, ۷۰

۱۷۴ اگر میانگین داده‌های  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  برابر ۲۰ باشد، میانگین داده‌های  $(5x_1 - 7, 5x_2 - 7, \dots, 5x_n - 7)$  را به دست آورید.

۱۷۵ معدل کل یک کلاس در درس آمار  $12/2$  است. اگر میانگین معدل نفراتی که نمره زیر ۱۰ دارند ۷ و میانگین معدل نفراتی که نمره بالای ۱۰ دارند ۱۵ باشد، مشخص کنید چند درصد دانش‌آموزان نمره زیر ده دارند؟

۱۷۶ اگر میانگین داده‌های  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  برابر ۵ و میانگین داده‌های  $x_1^2, x_2^2, \dots, x_{10}^2$  برابر ۲۰ باشد، میانگین داده‌های  $(x_1 - 2)^2, (x_2 - 2)^2, \dots, (x_{10} - 2)^2$  را بیابید.

۱۷۷ اگر میانگین  $n$  داده آماری  $x_1, x_2, \dots, x_n$  برابر با  $a$  باشد، ثابت کنید میانگین داده‌های  $kx_1 + c, kx_2 + c, \dots, kx_n + c$  برابر با  $ka + c$  است.

۱۷۸ تعداد زوجی داده داریم که چارک اول آنها داده پنجم شده است و مجموع کل آنها ۹۰۰ است میانگین این داده‌ها را به دست آورید.

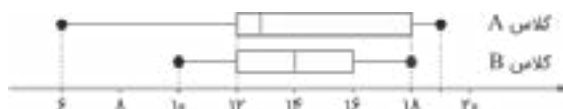
۱۷۹ میانگین، انحراف معیار و واریانس داده‌های زیر را به دست آورید.

۲, ۵, ۸, ۹

۱۸۰ میزان سود محاسبه شده برای دو شرکت A و B در طی ۵ سال به صورت جدول زیر است. سرمایه‌گذاری در کدام شرکت ریسک کمتری دارد؟

| شرکت | میزان سود |    |    |    |    |
|------|-----------|----|----|----|----|
| A    | ۲۰        | ۵۰ | ۳۰ | ۴۰ | ۷۰ |
| B    | ۳۵        | ۹۰ | ۲۵ | ۸۵ | ۵  |

۱۸۱ نمودارهای جعبه‌ای رسم شده، مربوط به نمرات درس ریاضی و آمار دو کلاس A و B می‌باشد. باتوجه به نمودارها، به سؤالات پاسخ دهید.



الف دامنه تغییرات کلاس A را مشخص کنید.

ب میانه و دامنه میان‌چارکی کلاس B را مشخص کنید.

پ در کدام یک از این دو کلاس، استفاده از شاخص‌های میانگین و انحراف معیار، ممکن است گمراه‌کننده باشد؟ چرا؟

۱۸۲ اگر میانگین و واریانس داده‌های آماری  $x_1, x_2, \dots, x_n$  به ترتیب برابر ۴ و ۳ باشد، میانگین و واریانس داده‌های  $3x_1 + 1, 3x_2 + 1, \dots, 3x_n + 1$  را به دست آورید.

۱۸۳ انحراف معیار ۷ داده با میانگین ۵ برابر ۳ و انحراف معیار ۳ داده با میانگین ۵ برابر  $\sqrt{3}$  است. واریانس کل داده‌ها با هم چقدر است؟

۱۸۴ قیمت یک کالا در دو بازار A و B به صورت زیر است. در کدام بازار پراکندگی کمتری مشاهده می‌شود؟ بهتر است از کدام بازار خرید کنیم؟

A : ۲۲, ۲۳, ۲۴, ۲۷, ۲۹

B : ۲۱, ۲۴, ۲۵, ۲۷, ۲۸

۱۶, ۱۸, ۱۳, ۲۰, ۱۷, ۱۵, ۱۴, ۱۷, ۱۱, ۱۹

میانه و انحراف معیار را برای این جامعه آماری به دست آورید.

۱۸۶ تعدادی داده آماری با ضریب تغییرات  $0/25$  و میانگین ۴ موجود است. داده‌ها را سه برابر کرده و با عددی جمع می‌کنیم، ضریب تغییرات داده‌ها  $0/2$  می‌شود. مشخص کنید داده‌ها با چه عددی جمع شده‌اند؟

۱۸۷ واریانس ۱۱ داده با میانگین ۹ برابر ۵ است. یکی از داده‌ها که برابر با میانگین است را حذف می‌کنیم، واریانس داده‌های دیگر چه مقدار می‌شود؟

۱۸۸ ثابت کنید واریانس را می‌توان از رابطه  $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2$  نیز به دست آورد.

۱۸۹ باتوجه به جدول زیر، ضریب تغییرات را حساب کنید.

|                 |    |   |   |   |
|-----------------|----|---|---|---|
| $x_i$           | a  | b | ۵ | d |
| $x_i - \bar{x}$ | -۲ | ۱ | c | . |

۱۹۰ اگر مجموع ۴۰ داده آماری برابر ۱۰۰ و مجموع مربعات آن ۳۴۰ باشد، مطلوب است:

الف) واریانس

ب) ضریب تغییرات

۱۹۱ در داده‌های آماری ۱۴، ۱۴، ۱۳، ۱۲، ۱۲، ۱۲، ۱۱، ۱۱، ۹ ضریب تغییرات را به دست آورید.

۱۹۲ میانگین و واریانس داده‌های  $\frac{x_1}{p} + 3, \frac{x_2}{p} + 3, \dots, \frac{x_n}{p} + 3$  به ترتیب ۹ و ۱ می‌باشد. ضریب تغییرات داده‌های  $6x_1 - 1, 6x_2 - 1, \dots, 6x_n - 1$  کدام است؟

۱۹۳ انحراف معیار داده‌های ۶۴،  $x_1$ ،  $x_2$ ،  $x_3$  برابر صفر است. واریانس داده‌های  $1 - x_1, \sqrt[3]{x_2}, \sqrt{x_3}$  را به دست آورید.

۱۹۴ روش‌های گردآوری داده‌ها را نام ببرید.

۱۹۵ پارامتر جامعه در چه صورتی قابل محاسبه است؟

۱۹۶ بهترین روش جمع‌آوری داده‌ها برای هر یک از موضوعات زیر را بنویسید.

الف) تعداد افراد استفاده‌کننده از پل عابر در یک روز و خیابان مشخص

ب) ساعات خواب دانش‌آموزان کلاس شما در شب گذشته

پ) سن همه دانش‌آموزان پایه دهم مدرسه شما برحسب ماه

درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

۱۹۷ هر زیرمجموعه از جامعه آماری که به روش مشخصی انتخاب شده باشد را آماره می‌نامند.

۱۹۸ در یک شهر ۷۰ کلاس در رشته ریاضی وجود دارد و تعداد کلاس‌های رشته تجربی سه برابر رشته انسانی در کل شهر است. در یک نمونه‌گیری طبقه‌ای برای انتخاب ۳۰ کلاس، ۱۴ کلاس رشته ریاضی انتخاب شده است. مشخص کنید چند کلاس رشته تجربی و چند کلاس رشته انسانی انتخاب شده است؟

۱۹۹ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف قد دانش‌آموزان یک مدرسه

ب پلاک منازل

۲۰۰ می‌خواهیم به روش سیستماتیک از بین ۱۵۲ نفر، ۸ نفر به تصادف انتخاب کنیم. اگر شماره آخرین فرد انتخابی ۱۴۰ باشد، تعیین کنید چه شماره‌هایی انتخاب شده‌اند.

۲۰۱ فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

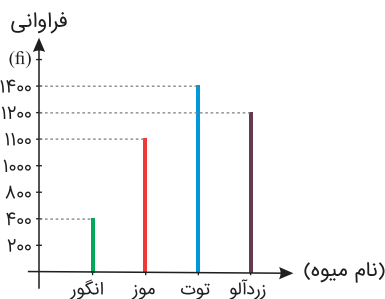
۲۰۲ به متن زیر توجه کنید.

"در یک کارخانه، روزانه ۴۰۰۰ عدد شامپو تولید می‌شود. به‌طور تصادفی ۱۰۰ شامپو را انتخاب کرده و می‌خواهیم کیفیت آن‌ها را بررسی کنیم (خوب - بد - متوسط). در این نمونه، نسبت شامپوهای با کیفیت بد برابر  $\frac{۳۰}{۱۰۰}$  است." به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف نام و نوع متغیر در متن بالا چیست؟ جامعه و نمونه را مشخص کنید.

ب نسبت  $\frac{۳۰}{۱۰۰}$  آماره است یا پارامتر؟ چرا؟

۲۰۳ می‌خواهیم از بین میوه‌های انگور، موز، توت و زردآلو، میوه‌ای که بیشتر مورد علاقه مردم شهر تهران است را بررسی کنیم تا واردات آن میوه به این شهر را افزایش دهیم. برای این کار یک نمونه تصادفی از مردم شهر تهران را انتخاب کرده و داده‌های مربوطه را جمع‌آوری کرده‌ایم. سپس نمودار میله‌ای زیر را برای آن رسم کرده‌ایم. با توجه به آن، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف جامعه چیست؟

ب در اینجا چه روشی برای گردآوری داده‌ها مناسب‌تر است؟

۲۰۴ برای نمونه‌گیری از یک جامعه از روش سامانمند استفاده می‌کنیم. اعضای جامعه به تعداد ۱۶۰ است و شماره سومین عضو انتخابی از بین اعضای جامعه ۴۷ می‌باشد. اگر تعداد اعضای نمونه ۸ باشد، شماره آخرین عضو انتخابی را بیابید.

۲۰۵ روش‌های نمونه‌گیری تصادفی را نام ببرید و نمونه‌گیری خوشه‌ای را توضیح دهید.

۲۰۶ یک شرکت تولید کنسرو می‌خواهد میانگین وزن قوطی‌های کنسرو خود را بررسی کند. بنابراین از بین تولیدات روزانه، هر روز ۱۰۰ قوطی را انتخاب کرده و مورد بررسی قرار می‌دهد. مشخص کنید در این بررسی واحد آماری، متغیر، آماره، پارامتر و جامعه کدام‌اند؟

جاهای خالی زیر را کامل کنید.

۲۰۷ به هر یک از افراد یا اشیاء که داده‌های مربوط به آن‌ها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود، ..... گویند.

۲۰۸ فرآیند انتخاب نمونه‌ای از یک جامعه را ..... می‌نامند.

۲۰۹ روش نمونه‌گیری که در آن همه واحدهای آماری برای انتخاب شدن، احتمال یکسان دارند ..... است.

۲۱۰ نمونه‌گیری که همه واحدهای آماری دارای احتمال معلوم برای انتخاب در نمونه باشند، ..... گفته می‌شود.

۲۱۱ تلاش آمارشناسان بر این است که نمونه‌گیری تا جایی که ممکن است ..... باشد.

۲۱۲ گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن را ..... می‌نامند.

۲۱۳ هر ویژگی از اشخاص یا اشیاء که قرار است بررسی شود را ..... نامند.

۲۱۴ فرآیند نتیجه‌گیری درباره پارامترهای جامعه بر اساس نمونه ..... است.

۲۱۵ ساعات مطالعه ۵ دانش‌آموز در یک روز تعطیل به‌صورت زیر است:

۷, ۲, ۱۲, ۵, ۴

میانگین ساعات مطالعاتی این جامعه را به دست آورده و با انتخاب نمونه‌های یک عضوی، قدرمطلق اختلاف میانگین ساعات مطالعاتی هر نمونه را با میانگین جامعه مشخص کنید.

۲۱۶ در سطح اطمینان ۹۵٪ برای برآورد میانگین یک جامعه با واریانس ۴، حداقل چند داده به عنوان نمونه باید انتخاب شود تا طول بازه کمتر از ۴/۵ باشد؟

۲۱۷ مدیر مدرسه‌ای علاقه‌مند است میانگین نمره ریاضی دانش‌آموزان سال جاری را بداند. او نمونه‌ای تصادفی شامل ۱۶ نفر انتخاب می‌کند که میانگین نمره ریاضی آن‌ها ۱۷ است. انحراف معیار بررسی نمره ریاضی در قبل ۱/۵ بوده است. در بازه اطمینان ۹۵٪ میانگین نمره ریاضی را محاسبه کنید.

۲۱۸ برای نمونه‌ای با تعداد ۶۴، اگر حد بالا و پایین بازه برآورد میانگین جامعه، ۲۸ و ۱۲ باشد، مطلوب است تعیین میانگین نمونه و واریانس جامعه.

۲۱۹ یک نمونه ۲۵ عضوی از یک جامعه را انتخاب می‌کنیم. حدود پایین و بالای فاصله اطمینان ۹۵ درصدی به ترتیب ۱۲ و ۱۸ می‌باشند. میانگین نمونه و واریانس جامعه را به دست آورید.

۲۲۰ در یک نمونه ۵۰ نفری از دانش‌آموزان، ۸ نفر از آنها علاقه‌مند به کارهای پژوهشی می‌باشند. در فاصله اطمینان ۹۵٪ نسبت علاقه‌مندان به کارهای پژوهشی را به دست آورید.

۲۲۱ دو تاس را هم‌زمان ۱۰ بار پرتاب کرده‌ایم که دو بار اعداد رو شده تاس‌ها یکسان شده‌اند. در سطح اطمینان ۹۵٪ اگر دو تاس را هم‌زمان ۲۵ بار پرتاب کنیم، تعداد بارهایی که دو تاس برابر می‌آیند در چه بازه‌ای است؟

۲۲۲ رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سن دانشجویانی که در سال جاری ثبت‌نام کرده‌اند را بداند. برای این منظور، او یک نمونه تصادفی از سن ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند. میانگین سن آن‌ها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار سن دانشجویان این دانشگاه برابر ۲ سال باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه را محاسبه کنید.

جاهای خالی را پر کنید.

۲۲۳ با افزایش اندازه نمونه، برآوردها به میانگین جامعه، که پارامتر است ..... می‌شوند.

۲۲۴ دقت برآورد میانگین به ..... و ..... بستگی دارد.

۲۲۵ تعداد نمونه‌های  $k$  عضوی از جامعه  $n$  عضوی برابر ..... است.

۲۲۶ نمونه‌ای به صورت اعداد  $۱, ۲, ۳, \dots, ۶۴$  از جامعه‌ای با انحراف معیار ۵ انتخاب شده است. در سطح اطمینان ۹۵٪ میانگین داده‌های جامعه در چه بازه‌ای برآورد می‌شود؟

۲۲۷ برای بررسی میانگین وزن نفرات یک کلاس، ۴ نفر آن‌ها را انتخاب می‌کنیم. وزن این ۴ نفر به صورت ۵۱، ۴۹، ۶۰ و ۴۰ کیلوگرم است. اگر انحراف معیار وزن کل کلاس ۲ باشد، بازه اطمینان ۹۵٪ را برای میانگین وزن نفرات کلاس به دست آورید.

۲۲۸ یک نمونه تصادفی به اندازه ۶۲۵ نفر از بین رانندگان تاکسی استان تهران انتخاب کرده‌ایم. میانگین سنی این افراد ۴۵ سال بوده و انحراف معیار سن این رانندگان در کل استان ۵ است. بازه اطمینان بیش از ۹۵٪ را برای میانگین سن رانندگان تاکسی به دست آورید.

۲۲۹ مشخص کنید اندازه نمونه را باید چندبرابر کنیم تا انحراف معیار برآورد میانگین  $۰/۰۱$  برابر شود؟

۲۳۰ از اعداد ۰ تا  $N$ ، ۵ عدد به تصادف انتخاب شده‌اند. اعداد انتخابی عبارت‌اند از: ۸، ۲، ۳، ۷، ۵. برآوردی از  $N$  به دست آورید.

۲۳۱ مشخص کنید اندازه نمونه را باید چندبرابر کنیم تا انحراف معیار برآورد میانگین  $۰/۲$  برابر شود؟

۲۳۲ دریافت ماهیانه شش کارگر یک کارگاه برحسب میلیون تومان به صورت ۴، ۳، ۲، ۱، ۱، ۱ است. احتمال اینکه در برآورد میانگین دریافت ماهیانه در نمونه‌های سه‌تایی، میانگین دریافت ماهیانه جامعه ۲ میلیون تومان برآورد شود چقدر است؟

۲۳۳ مدرسه‌ای کلاً ۱۰ دانش‌آموز رشته ریاضی دارد که نمرات ریاضی آن‌ها به صورت زیر است:

۵، ۱۸، ۱۴، ۱۶، ۱۵، ۱۹، ۹، ۱۰، ۱۲، ۱۱

احتمال اینکه با انتخاب نمونه دوتایی نمرات، میانگین ریاضی جامعه دانش‌آموزی مدرسه ۱۵ برآورد شود چقدر است؟

به سؤالات زیر پاسخ کوتاه دهید.

۲۳۴ با زیاد شدن اندازه نمونه، انحراف معیار برآوردهای پارامتر کمتر می‌شود یا بیشتر؟

۲۳۵ برای داشتن برآورد دقیق‌تر چه کاری می‌توانیم انجام دهیم؟

۲۳۶ به درصدی که برای پارامتر جامعه اختصاص می‌دهیم تا میزان اطمینان را نشان دهد چه می‌گویند؟

۲۳۷ اگر تعداد نمونه‌ها را صد برابر کنیم، دقت محاسبات نسبت، چقدر بهتر می‌شود؟

۲۳۸ در بازه  $(a, b)$  مقدار میانگین  $\bar{x}$  کدام است؟

۲۳۹ برآورد به چند شکل انجام می‌گیرد؟

۲۴۰ اگر تعداد اعضای نمونه را  $k$  برابر کنیم، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟

۲۴۱ اگر قبل از آمارگیری، برآوردی از نسبت در جامعه نداشته باشیم،  $p$  را چند می‌گیریم؟

۲۴۲ دو نمونه به اندازه‌های ۱۶ و ۴۹ را از یک جامعه انتخاب می‌کنیم، نسبت انحراف معیار برآوردهای میانگین آن‌ها را بیابید.



# پاسخنامه

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

$$\underbrace{p \wedge q}_n \Rightarrow \underbrace{r}_{\text{دیا ن}}$$

۱

ارزش کلی گزاره درست است.

پاسخ سؤالات ۲ تا ۹

۲ نادرست است، چون ۲ عددی اول است اما فرد نیست.

۳ نادرست است، چون جوابهای معادله  $2x^2 + 3x + 1 = 0$  برابر با  $-1$ ،  $-\frac{1}{2}$  هستند که هیچ کدام عددی طبیعی نیستند.

۴ درست است، چون اگر  $x = -1$ ، آنگاه  $2x^2 + 3x + 1 = 0$  و بنابراین مجموعه جواب تهی نیست.

۵ درست است، زیرا به ازای هر عدد طبیعی  $n$ ، فاکتوریل آن هم طبیعی است و از آنجاکه هر عدد طبیعی عددی گویا می باشد، پس  $n!$  گویاست.

۶ درست است.

۷ درست است.

۸ نادرست است.  $0 \leq P(A) \leq 1$

۹ نادرست است. زیرا اگر  $0 < \Delta$  معادله ریشه حقیقی ندارد.

۱۰ الف

این گزاره درست نیست، چون به ازای  $x = 1$  تساوی  $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$  برقرار نیست و مجموعه جواب گزاره‌نما برابر  $\mathbb{R}$  نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x - 1} \neq x + 1$$



ب این گزاره درست نیست چون اگر  $n = 5$  باشد، آنگاه:

$$2^n + 1 = 2^5 + 1 = 33 = 11 \times 3$$

بنابراین  $2^5 + 1$  عددی اول نیست و این به این معنی است که مجموعه جواب گزاره‌نما برابر با  $\mathbb{N}$  نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists n \in \mathbb{N} : (2^n + 1) \notin P$$

پ این گزاره درست نیست چون اگر  $x = \frac{-1}{2}$ ، آنگاه:

$$x - \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

این به این معنی است که مجموعه جواب این گزاره‌نما برابر با  $(-\infty, 0)$  نیست. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\exists x \in (-\infty, 0) : x - \frac{1}{x} > -2$$

ت این گزاره درست است چون اگر  $y = 3$ ، آنگاه:

$$\frac{y-3}{5} = 0$$

بنابراین مجموعه جواب این گزاره‌نما ناتهی است. نقیض این گزاره به صورت زیر است:

$$\forall y \in \mathbb{R} : \frac{y-3}{5} \neq 0$$

الف ۱۱ این گزاره نادرست است چون:

$$x + 4 = 10 \Rightarrow x = 6 \notin A$$

یعنی مجموعه جواب آن تهی است.

ب این گزاره درست است چون به ازای هر  $x \in A$  داریم:

$$x \leq 5 \Leftrightarrow x + 2 \leq 7 \Rightarrow x + 2 \leq 9$$

پس مجموعه جواب آن برابر با  $A$  است.

پ این گزاره درست است چون:

$$x + 3 \leq 4 \Leftrightarrow x \leq 1$$

بنابراین به ازای  $x = 1$  نامساوی  $x + 3 \leq 4$  برقرار است، یعنی مجموعه جواب آن تهی نیست.

$$x + 1 \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 5$$

لذا به ازای مقادیر ۱، ۲، ۳ و ۴ نامساوی  $x + 1 \geq 6$  برقرار نیست و مجموعه جواب آن برابر با A نیست.

**۱۲**

| عبارت با زبان ریاضی                                   | عبارت با زبان طبیعی                                      |
|-------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0$                | برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$                  |
| $\forall a \in \mathbb{E}; a = 2k (k \in \mathbb{Z})$ | برای هر عدد زوج a داریم:<br>$a = 2k$ که k عددی صحیح است. |
| $\exists p \in \mathbb{P}; p = 2k (k \in \mathbb{Z})$ | عدد اول p وجود دارد که $p = 2k$ و k عددی صحیح است.       |
| $\exists o \in \mathbb{O}; o \in \mathbb{P}$          | بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.                        |

**۱۳**

| p | q | $\sim p$ | $p \Rightarrow q$ | $\sim p \vee q$ |
|---|---|----------|-------------------|-----------------|
| د | د | ن        | د                 | د               |
| د | ن | ن        | ن                 | ن               |
| ن | د | د        | د                 | د               |
| ن | ن | د        | د                 | د               |

هم‌ارزند

**۱۴**

گزاره p درست و گزاره q نادرست است.

توجه: در گزاره شرطی اگر مقدم نادرست باشد گزاره شرطی به انتفای مقدم، درست است.

$$\underbrace{q}_{\downarrow F} \Rightarrow \underbrace{\sim p}_{\downarrow F} \equiv T$$

و در گزاره دوشرطی اگر یکی درست و دیگری نادرست باشد، ارزش کل گزاره دوشرطی نادرست است.

$$\underbrace{p}_{\downarrow T} \Leftrightarrow \underbrace{q}_{\downarrow F} \equiv F$$

| p | q | $\sim q$ | $p \Leftrightarrow q$ | $p \Leftrightarrow \sim q$ | $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$ | $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow p$ |
|---|---|----------|-----------------------|----------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------------|
| د | د | ن        | د                     | ن                          | د                                     | د                                          |
| د | ن | د        | ن                     | د                          | ن                                     | د                                          |
| ن | د | ن        | ن                     | د                          | د                                     | ن                                          |
| ن | ن | د        | د                     | ن                          | د                                     | د                                          |

همان‌طور که دیده می‌شود، سطر دوم جواب است و بنابراین باید p درست و q نادرست باشد.

| p | q | $\sim p$ | $\sim q$ | $\sim p \wedge q$ | $\sim q \vee p$ | $p \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ | $(\sim q \vee p) \Leftrightarrow q$ |
|---|---|----------|----------|-------------------|-----------------|---------------------------------------|-------------------------------------|
| د | د | ن        | ن        | ن                 | د               | ن                                     | د                                   |
| د | ن | ن        | د        | ن                 | د               | ن                                     | ن                                   |
| ن | د | د        | ن        | د                 | ن               | ن                                     | ن                                   |
| ن | ن | د        | د        | ن                 | د               | د                                     | ن                                   |

پس سطر آخر سطر قابل قبول می‌باشد و لازم است که p و q هر دو نادرست باشند.

$$\begin{aligned}
 \text{طرف اول : } & (p \Leftrightarrow \sim q) \wedge (q \Leftrightarrow p) \equiv [(p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p)] \wedge [(q \Rightarrow p) \wedge (p \Rightarrow q)] \\
 & \equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge (q \vee p)] \wedge [(\sim q \vee p) \wedge (\sim p \vee q)] \\
 & \equiv [(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)] \\
 & \equiv [\sim p \vee (\sim q \wedge q)] \wedge [p \vee (q \wedge \sim q)] \\
 & \equiv (\sim p \vee F) \wedge (p \vee F) \equiv \sim p \wedge p \equiv F
 \end{aligned}$$

عدد  $a$  بر ۶ بخش پذیر نیست  $p$

عدد  $a$  بر ۲ بخش پذیر نیست  $q$

عدد  $a$  بر ۳ بخش پذیر نیست  $r$

عبارت اول برابر با  $p \Rightarrow (q \vee r)$  و عبارت دوم برابر با  $q \vee (p \Rightarrow r)$  است. جدول ارزش گزاره این دو عبارت را رسم می کنیم:

| $p$ | $q$ | $r$ | $q \vee r$ | $p \Rightarrow (q \vee r)$ | $p \Rightarrow r$ | $q \vee (p \Rightarrow r)$ |
|-----|-----|-----|------------|----------------------------|-------------------|----------------------------|
| T   | T   | T   | T          | T                          | T                 | T                          |
| T   | T   | F   | T          | T                          | F                 | T                          |
| T   | F   | T   | T          | T                          | T                 | T                          |
| T   | F   | F   | F          | F                          | F                 | F                          |
| F   | T   | T   | T          | T                          | T                 | T                          |
| F   | T   | F   | T          | T                          | T                 | T                          |
| F   | F   | T   | T          | T                          | T                 | T                          |
| F   | F   | F   | F          | T                          | T                 | T                          |

ملاحظه می شود که دو عبارت  $p \Rightarrow (q \vee r)$  و  $q \vee (p \Rightarrow r)$ ، جدول ارزش یکسانی دارند، پس به یک معنی هستند. البته با تأمل روی دو عبارت در صورت سؤال نیز می توانید هم ارزی آنها را دریابید.

$p$  = تقاضا ثابت بماند

$q$  = قیمت‌ها تنزل کند

$r$  = میزان معاملات زیاد شود

$s$  = می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت

گزاره اگر تقاضا ثابت بماند و قیمت‌ها تنزل کند میزان معاملات زیاد می‌شود معادل است با:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r$$

گزاره اگر تنزل قیمت‌ها افزایش میزان معاملات را موجب شود آنگاه می‌توان نرخ‌ها را ثابت نگه داشت معادل است با:

$$(q \Rightarrow r) \Rightarrow s$$

استدلال بالا شامل سه فرض است و در آخر با واژه پس نتیجه‌گیری کرده است، لذا باید بین فرض‌ها ترکیب عطفی داشته باشیم و از همه آن‌ها نتیجه مدنظر را بگیریم. بنابراین داریم:

$$[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge [(q \Rightarrow r) \Rightarrow s] \wedge p \Rightarrow s$$

به جای اثبات این گزاره، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:  $((p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p))$

$$(n^2 \text{ عددی فرد است} \Rightarrow n \text{ عددی فرد است}) \equiv (n \text{ عددی زوج است} \Rightarrow n^2 \text{ عددی زوج است})$$

اگر  $n$  عددی فرد باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} n &= 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{k' \in \mathbb{Z}}) + 1 = 2k' + 1 \Rightarrow \text{فرد} \end{aligned}$$

$$2^n - 1 = 2^4 - 1 = 15$$

پاسخ سؤالات ۲۲ تا ۲۳

درست

درست

الف

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5 > 0$$

بنابراین دو ریشه حقیقی دارد.  $(F) \Leftarrow$  نادرست

$(F) \Leftarrow \{(1, 2), \dots, (3, 2), \dots\}$  تابع نیست.  $(F)$

$$\underbrace{(-9 < -10)}_F \vee \underbrace{(\sqrt{2} \text{ گنگ است})}_T \equiv T \Rightarrow (T)$$

$$\underbrace{(0 \in \mathbb{Z})}_T \wedge \underbrace{\left(\frac{1}{2-2} = -\frac{1}{2}\right)}_F \equiv T \wedge F \equiv F \Rightarrow (F)$$

توجه: به جای T می‌توان از "د" (درست) و به جای F "ن" (نادرست) استفاده کرد.

| p | q | $\sim p$ | $p \vee \sim p$ | $(p \vee \sim p) \wedge q$ |
|---|---|----------|-----------------|----------------------------|
| T | T | F        | T               | T                          |
| T | F | F        | T               | F                          |
| F | T | T        | T               | T                          |
| F | F | T        | T               | F                          |

| p | q | $p \Rightarrow q$ | $\sim q$ | $(p \Rightarrow q) \wedge \sim q$ | $p \wedge [(p \Rightarrow q) \wedge \sim q]$ |
|---|---|-------------------|----------|-----------------------------------|----------------------------------------------|
| T | T | T                 | F        | F                                 | F                                            |
| T | F | F                 | T        | F                                 | F                                            |
| F | T | T                 | F        | F                                 | F                                            |
| F | F | T                 | T        | T                                 | F                                            |

نادرست است؛ زیرا  $\frac{1}{p} = x$  برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

درست است، زیرا حداقل یک عضو  $x = 0$  وجود دارد که به ازای آن، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

| p | $\sim p$ |
|---|----------|
| د | ن        |
| ن | د        |

$$a, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

$$\begin{aligned} [p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q &\equiv [\sim p \vee \sim (\sim p \vee q)] \vee q \\ &\equiv [\sim p \vee (p \wedge \sim q)] \vee q \equiv [(\sim p \vee p) \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \\ &\equiv [T \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee q \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q) \equiv \sim p \vee T \equiv T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p \Leftrightarrow q &\equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \Rightarrow \sim q) \\ &\equiv (\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p) \equiv \sim p \Leftrightarrow \sim q \end{aligned}$$

در سطرهای ۱ و ۲ به ترتیب از قانونهای عکس نقیض و جابه‌جایی استفاده شده است.

$$\exists x \in \mathbb{N}; \{x \in E \wedge x \in P \wedge [\forall y \in \mathbb{N}; ((y \in E \wedge y \in P) \Rightarrow x = y)]\}$$

و نقیض آن:

$$\forall x \in \mathbb{N}; \{x \notin E \vee x \notin P \vee [\exists y \in \mathbb{N}; ((y \in E \wedge y \in P) \wedge x = y)]\}$$

باتوجه به عبارت، گزاره‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P(x) = \text{x خودکار است}$$

$$Q(x) = \text{x آبی است}$$

$$R(x) = \text{x مداد است}$$

$$S(x) = \text{x قرمز است}$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$\exists x; (P(x) \wedge \sim Q(x)) \Rightarrow \forall x; (R(x) \Rightarrow S(x))$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \text{زوج است}^3 \\ q &= \text{زوج}^3 \times 5 \text{ است} \\ r &= \text{فرد است}^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (p \Rightarrow (q \vee r))$$

| p | q | $\sim p$ | $p \Leftrightarrow q$ | $\sim p \Leftrightarrow q$ | $\sim (p \Leftrightarrow q)$ | $\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q)$ |
|---|---|----------|-----------------------|----------------------------|------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| T | T | F        | T                     | F                          | F                            | T                                                                       |
| T | F | F        | F                     | T                          | T                            | T                                                                       |
| F | T | T        | F                     | T                          | T                            | T                                                                       |
| F | F | T        | T                     | F                          | F                            | T                                                                       |

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim (p \wedge q) \vee r \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee r) \equiv (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$$

قسمت فرض یا مقدم درست می‌باشد، زیرا نامعادله  $x^2 - x + 2 > 0$  همواره مثبت است. قسمت حکم یا تالی نادرست است، زیرا هیچ عدد طبیعی نیست که مکعب آن منفی شود. پس گزاره شرطی در کل نادرست است.

گزاره موردنظر درست است، زیرا در دو حالت  $x = 0$  یا  $x = 1$  دو عبارت تعریف نشده‌اند. مثلاً وقتی  $x = 0$  باشد عبارت  $\frac{x-1}{x-1} = 1$  درست است و وقتی  $x = 1$  باشد عبارت  $\frac{x}{x} = 1$  درست می‌باشد. اگر عبارت به‌صورت زیر فرض شود:

$$\forall x \in \mathbb{R} : p \vee q$$

نقیض گزاره فوق عبارت است از:

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{R} : \sim p \wedge \sim q \\ \exists x \in \mathbb{R} : \frac{x}{x} \neq 1 \wedge \frac{x-1}{x-1} \neq 1 \end{aligned}$$

گزاره داده‌شده به‌صورت زیر است:

$$\forall x \in \mathbb{N} : x = P \Rightarrow x \neq k^2$$

یعنی:

$$\forall x \in \mathbb{N} : p \Rightarrow q$$

که نقیض گزاره فوق عبارت است از:

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N} : \sim (p \Rightarrow q) \\ \exists x \in \mathbb{N} : \sim (\sim p \vee q) \\ \exists x \in \mathbb{N} : p \wedge \sim q \end{aligned}$$

یعنی عددی طبیعی وجود دارد که اول باشد و مربع کامل باشد.

۴۱

گزاره مورد نظر را می‌توان به صورت ریاضی به شکل زیر نوشت:

$$(x > ۲) \wedge (x = ۲k ; k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x^{۲} = ۲k' ; k' \in \mathbb{W}$$

یعنی گزاره به شکل  $p \wedge q \Rightarrow r$  می‌باشد که عکس گزاره عبارت است از:

$$r \Rightarrow (p \wedge q)$$

حال عکس گزاره به زبان فارسی به صورت زیر است:

اگر مربع عددی زوج باشد، آنگاه عدد بزرگ‌تر ۲ است و زوج می‌باشد.

۴۲

در گزاره فوق که یک گزاره شرطی است. باریدن باران  $p$  و ابری بودن هوا  $q$  می‌باشد و گزاره به صورت  $p \Rightarrow q$  است که عکس آن به صورت  $q \Rightarrow p$  می‌باشد؛ پس عکس گزاره عبارت است از: اگر هوا ابری باشد، آنگاه باران می‌بارد.

۴۳

از طرف اول شروع کرده و عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\text{طرف اول} \equiv [\sim q \Rightarrow (p \wedge q)] \vee q \equiv \underbrace{[q \vee (p \wedge q)]}_q \vee q \equiv q \vee q \equiv q$$

۴۴

ریشه‌های معادله فوق عبارت‌اند از:

$$x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱, x = -۲$$

پس مجموعه جواب گزاره‌نمای فوق تهی است، یعنی:  $S = \emptyset$

۴۵

گزاره‌نمای فوق می‌تواند دارای دامنه‌ای به صورت مجموعه اعداد حقیقی باشد، پس:

$$D = \mathbb{R}$$

و مجموعه جواب عبارت است از:

$$\frac{۴x - ۱}{۵} \geq ۲ \Rightarrow ۴x - ۱ \geq ۱۰ \Rightarrow ۴x \geq ۱۱ \Rightarrow x \geq \frac{۱۱}{۴} \Rightarrow S = [\frac{۱۱}{۴}, +\infty)$$

۴۶

استدلال مسئله مشخص کرده است که هیچ عدد مربع کاملی فرد نیست و ۹ مربع کامل است، پس باید نتیجه بگیریم که ۹ فرد نیست.

۴۷

گزینه ۱

از نادرستی  $p \Rightarrow q$  متوجه می‌شویم  $p$  درست و  $q$  نادرست است. بنابراین  $p \equiv T$  و  $q \equiv F$ ، پس داریم:

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$$

$$T \Rightarrow (\underbrace{F \Rightarrow r}_T) \equiv T \Rightarrow T \equiv T$$

$$\sim [\forall x \in \mathbb{R}; (|x+1| \neq 0 \wedge |x-3| \geq 2)] \equiv (\exists x \in \mathbb{R}; (|x+1| = 0 \vee |x-3| < 2))$$

$$x = -1 \Rightarrow -1 + 1 \leq -2 \Rightarrow 0 \leq -2$$

$$\sim (\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2) \equiv \exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} > -2$$

۵۰ به جای اثبات کردن خود گزاره، عکس نقیض آن (که معادل خودش است) را ثابت می‌کنیم:  
عکس نقیض گزاره داده‌شده: اگر  $n$  مضرب ۳ نباشد،  $n^2$  نیز مضرب ۳ نخواهد بود.

$$n \neq 3k$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 = 3k' + 1 \\ n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 = 3k'' + 1 \end{cases} \Rightarrow n^2 \neq 3k$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

ب هر زیرمجموعه ۳ عضوی اعداد ۱ تا ۶.

$$A = \{1\}$$

$$y = 0, x = 2$$

$$y = 1, x = 1$$

$$\forall x \in U : x \in (A \cap C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow[A \subseteq B]{\text{چون}} x \in B \\ \wedge \\ x \in C \xrightarrow[C \subseteq D]{\text{چون}} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in B \cap D$$

بنابراین:

$$[\forall x \in U : x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cap D)] \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap D$$

$$\forall x \in U : x \in (A \cap C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow[A \subseteq B]{\text{چون}} x \in B \\ \wedge \\ x \in C \xrightarrow[C \subseteq D]{\text{چون}} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \wedge x \in D \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow x \in B \cup D$$

بنابراین داریم:

$$[\forall x \in U : x \in (A \cap C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cup D$$

می‌دانیم که:

۵۴

$$A - B = \{x \in U | x \in A \wedge x \notin B\}$$

حال توجه کنید که:

$$\forall x \in U : (x \in A \wedge x \notin B) \Rightarrow x \in A$$

بنابراین:

$$\forall x \in U : x \in A - B \Rightarrow x \in A$$

و این به این معنی است که:

$$A - B \subseteq A$$

۵۵

$$\forall x; \begin{cases} x \in A \cup C \Rightarrow \begin{cases} x \in A \xrightarrow[A \subseteq B]{\text{چون}} x \in B \\ \vee \\ x \in C \xrightarrow[C \subseteq D]{\text{چون}} x \in D \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \\ \Rightarrow x \in B \cup D \end{cases}$$

$$\forall x; [x \in A \cup C \Rightarrow x \in B \cup D] \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup D$$

برای اینکه ثابت کنیم  $B' \subseteq A'$  باید نشان دهیم که:  $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$   
بنابراین داریم:

۵۶

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \notin B) \xrightarrow[A \subseteq B]{\text{چون}} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

درنتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

مطلوب مسئله تعداد افرازهای یک مجموعه ۱۲ عضوی است به زیرمجموعه‌هایی که تعداد اعضایشان برابر است، یعنی:

$$۱۲ = ۱ + \dots + ۱ = ۲ + \dots + ۲ = ۳ + ۳ + ۳ + ۳ = ۴ + ۴ + ۴ = ۶ + ۶$$

که تعداد حالات برابر است با:

$$۱ + ۱ + \frac{۱۲!}{۲!^۶ \times ۶!} + \frac{۱۲!}{۳!^۴ \times ۴!} + \frac{۱۲!}{۴!^۳ \times ۳!} + \frac{۱۲!}{۶!^۲ \times ۲!}$$

$$۱) \{a, b, c\}, \{d\}, \{e\}$$

$$۲) \{a, b, c\}, \{d, e\}$$

$$۳) \{a, b, c, d, e\}$$

$$۴) \{a, b, c, d\}, \{e\}$$

$$۵) \{a, b, c, e\}, \{d\}$$

$\{1\}, \{2\}, \{3\}$  و  $\{1, 2\}, \{3\}$  و  $\{1, 3\}, \{2\}$  و  $\{2, 3\}, \{1\}$  و  $\{1, 2, 3\}$  کافی است که ۴ افراز از ۵ افراز نوشته شود.

ابتدا مجموعه‌های  $A - B$  و  $A \cup B$  را به دست می‌آوریم:

$$A - B = \{1, 2\}, \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

پس لازم است:

$$\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

بنابراین مجموعه  $X$  باید ۱ و ۲ را داشته باشد اما وجود ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ اختیاری است. پس تعداد  $X$  عبارت است از:

$$۲^۵ = ۳۲$$

فرض کنیم تعداد اعضای مجموعه  $A$  برابر با  $n$  باشد که  $n$  یک عدد متناهی است. تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه  $n$  عضوی، برابر با  $۲^n$  است. از این تعداد زیرمجموعه، نصف آن زیرمجموعه‌های زوج عضوی و نصف دیگر آن زیرمجموعه‌های فرد عضوی هستند. بنابراین، تعداد زیرمجموعه‌های فرد عضوی برابر با  $\frac{۲^n}{۲} = ۲^{n-1}$  است. از طرف دیگر، مجموعه  $A - \{a\}$  دارای  $n - ۱$  عضو است، پس تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر با  $۲^{n-1}$  است.

$$A = \{o, ۳, ۸\}$$

$$P(A) = \{\{o\}, \{۳\}, \{۸\}, \{o, ۳\}, \{o, ۸\}, \{۳, ۸\}, \emptyset, \{o, ۳, ۸\}\}$$



$$۱) \{1, 2\} \in A$$

$$۲) \{\emptyset, 1, \{\{3\}, 1, 4\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \{6, 7, 8\}\}\}\} \in A$$

$$۳) \{4, \emptyset, \{\{\{3, 4, 8\}\}, \{5\}\}\} \in A$$

حال برای B سه حالت داریم و اعضای این سه حالت، حالات مختلف a هستند. یعنی:

$$۱) 1, 2$$

$$۲) \emptyset, 1, \{\{3\}, 1, 4\}, \{\emptyset, \{\{\emptyset\}, \{6, 7, 8\}\}\}$$

$$۳) 4, \emptyset, \{\{\{3, 4, 8\}\}, \{5\}\}$$

با اجتماع اعضای هر سه حالت B و با حذف تکراری‌ها، ۷ حالت برای a خواهیم داشت.

$$\left. \begin{aligned} A_{10} &= \{-10, -9, \dots, 9, 10\} \\ A_7 &= \{-7, -6, \dots, 6, 7\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{10} - A_7 = \{-10, -9, -8, 8, 9, 10\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \{-1, 0, 1\} \\ A_2 &= \{-2, -1, 0, 1, 2\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_1 \cup A_2 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$A_n = (1 - 2n, n + 2) \Rightarrow A_{n-1} = (1 - 2(n-1), (n-1) + 2)$$

$$\Rightarrow A_{n-1} = (3 - 2n, n + 1)$$

مساحت ناحیه  $A_n \times A_{n-1}$  از حاصل ضرب طول بازه  $A_n$  در طول بازه  $A_{n-1}$  به دست می‌آید؛ پس:

$$130 = ((n+2) - (1-2n))((n+1) - (3-2n)) \Rightarrow 130 = (3n+1)(3n-2)$$

$$\Rightarrow 9n^2 - 3n - 132 = 0 \Rightarrow (3n-12)(3n+11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n=4 \\ n=-\frac{11}{3} \end{cases} \text{ غ.ق.ق}$$

$$\left. \begin{aligned} A \subseteq B \Rightarrow A \cap B &= A \\ A \cap B &= \{1, 2\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A = \{1, 2\} \Rightarrow A' = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow |A'| = 7$$

$$\left. \begin{aligned} A' \text{ تعداد زیرمجموعه‌های چهار عضوی} &= \binom{7}{4} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35 \\ A' \text{ تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی} &= \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 35 - 21 = 14$$

$$A = \{۲, ۴\} \quad B = \{-۱, ۰, ۱\}$$

$$A \times B = \{(۲, -۱), (۲, ۰), (۲, ۱), (۴, -۱), (۴, ۰), (۴, ۱)\}$$

$$A^۲ = \{(۲, ۲), (۲, ۴), (۴, ۲), (۴, ۴)\}$$

$$(A \times B) - A^۲ = \{(۲, -۱), (۲, ۰), (۲, ۱), (۴, -۱), (۴, ۰), (۴, ۱)\}$$

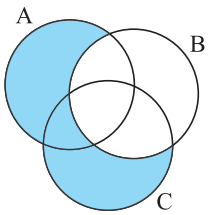
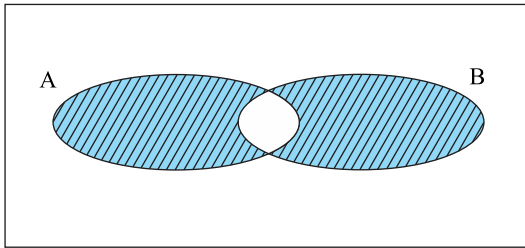
$$A = \{۱, ۲, ۳\}, B = \left\{\frac{۱}{۳}, ۱, ۳\right\}$$

$$B \times A = \left\{\left(\frac{۱}{۳}, ۱\right), \left(\frac{۱}{۳}, ۲\right), \left(\frac{۱}{۳}, ۳\right), (۱, ۱), (۱, ۲), (۱, ۳), (۳, ۱), (۳, ۲), (۳, ۳)\right\}$$

$$(A - B) \cup B = (A \cap B') \cup B = (A \cup B) \cap (B' \cup B)$$

$$= (A \cup B) \cap U = A \cup B = A$$

چون  $B \subseteq A$  در نتیجه  $A \cup B = A$  است.



$$(A \cup C) - B$$

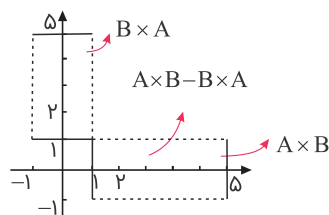
$$A = \{۱, ۲, ۳, ۶, ۹, ۱۸\}, \quad B = \{\pm ۱, \pm ۲, \pm ۵, \pm ۱۰\} \Rightarrow A \cap B = \{۱, ۲\}$$

$$|A^۲ - (A \times B)| = |A^۲| - |(A \times A) \cap (A \times B)| = |A|^۲ - |A||A \cap B|$$

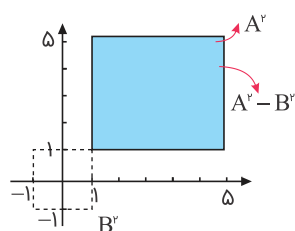
$$= ۳۶ - ۱۲ = ۲۴$$

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\} \quad , \quad B = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\} \Rightarrow A \cap B = \{1, 2\}$$

$$|(B \times A) \cup (A \times B)| = 2|A||B| - |A \cap B|^2 = 2 \times 6 \times 10 - 2^2 = 92$$



$$S = 2 \times 6 = 12$$



$$S = 2^2 = 4$$

ابتدا  $(\Rightarrow)$  را ثابت می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق فرض : } A \cup B = \emptyset \\ \text{می‌دانیم : } A \subseteq A \cup B \end{array} \right\} \Rightarrow A \subseteq \emptyset \Rightarrow A = \emptyset$$

به‌طور مشابه ثابت می‌شود که  $B = \emptyset$  است.

حال  $(\Leftarrow)$  را اثبات می‌کنیم:

$$A = B = \emptyset \Rightarrow A \cup B = \emptyset$$

اگر قرار دهیم  $A = C = \emptyset$  ,  $B = \{1\}$  داریم:

$$(A - B) \cup (B - C) = \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$$

$$A - C = \emptyset - \emptyset = \emptyset$$

ملاحظه می‌شود که سمت چپ تساوی برابر با  $\{1\}$  و سمت راست تساوی برابر با  $\emptyset$  است.

$$A = \{x + y, y - z, ۲\} \quad , \quad B = \{۱, x - z, ۷\}$$

$$A \times B = B \times A \Rightarrow A = B$$

$$\text{حالت اول : } \left\{ \begin{array}{l} x + y = ۱ \\ y - z = ۷ \\ x - z = ۲ \end{array} \Rightarrow x + z = -۶ \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -۲ \\ z = -۴ \\ y = +۳ \end{array} \Rightarrow x + y + z = -۳$$

$$\text{حالت دوم : } \left\{ \begin{array}{l} x + y = ۷ \\ y - z = ۱ \\ x - z = ۲ \end{array} \Rightarrow x + z = ۶ \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = ۴ \\ y = ۳ \\ z = ۲ \end{array} \Rightarrow x + y + z = ۹$$

$$\Rightarrow \text{Max}(x + y + z) = ۹$$

باتوجه به صورت سؤال، باید تمام زیرمجموعه‌های  $(A \cup B) - C$  را پیدا کنیم.

$$A \cup B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۱۰, ۱۱\} \quad , \quad C = \{۵, ۶, ۷, ۸, ۹\}$$

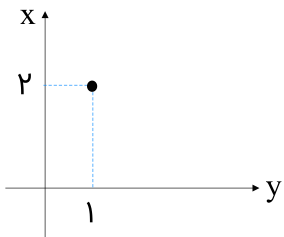
$$\Rightarrow (A \cup B) - C = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۱۰, ۱۱\} \Rightarrow \text{تعداد زیرمجموعه‌ها} = ۲^۶ = ۶۴$$

الف

$$A^۲ = A \times A = \{(۱, ۱)\}$$

$$A \times B = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$$

$$(A \times B) - A^۲ = \{(۱, ۲)\}$$

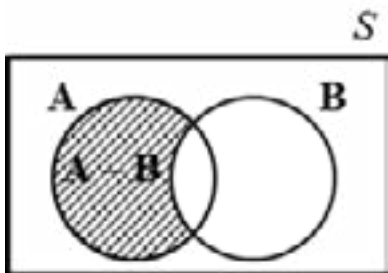


ب

$$A \cap B' = A - B \Rightarrow A = (A \cap B') \cup (A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$$

$(A - B)$  و  $(A \cap B)$  دو پیشامد متمایز و از هم جدا هستند.



$$A = ۳ \text{ بخش پذیری بر } ۳ \Rightarrow P(A) = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۳}\right]}{۱۰۰۰} = \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$$

$$B = ۵ \text{ بخش پذیری بر } ۵ \Rightarrow P(B) = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right]}{۱۰۰۰} = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}\right]}{۱۰۰۰} = \frac{۶۶}{۱۰۰۰}$$

$$P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{۲۰۰}{۱۰۰۰} - \frac{۶۶}{۱۰۰۰} = \frac{۱۳۴}{۱۰۰۰}$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۲ + ۰/۳ - ۰/۴ = ۰/۱$$

$$n(S) = ۲ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۴۸$$

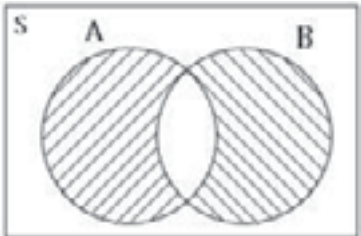
$$n(A) = ۲ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۱۲$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۴۸} = \frac{۱}{۴}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۱۰}{۸}}{۲^{۱۰}}$$

A - B هاشور پیشامد

B - A هاشور پیشامد



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\frac{۷۵}{۱۰۰} = \frac{۵۵}{۱۰۰} + \frac{۶۰}{۱۰۰} - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{۴۰}{۱۰۰}$$

$$P(۱) + P(۲) + P(۳) + P(۴) + P(۵) + P(۶) = ۱$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۲۰} + a + a = ۱ \Rightarrow a = ۰/۱$$

$$P(\{۳, ۶\}) = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۱}{۶۰}$$

$$\frac{1}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{42}$$

پ کوتاه‌ترین عضو تیم یا قبل از بلندترین عضو و یا بعد از آن وارد شده، پس این احتمال برابر با  $\frac{1}{7}$  است.

$$\frac{6}{10} = \frac{2}{10} + \frac{K}{5} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{2K + 2}{10} \Rightarrow 2K + 2 = 6 \Rightarrow K = 2$$

۹۱ ابتدا فضای نمونه را به دست می‌آوریم:

کارت وجود دارد  $4 \times 3 = 12$

$$n(S) = \binom{12}{2}$$

$$n(A) = 1 \times 3 = 3$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{\binom{12}{2}} = \frac{3 \times 2}{12 \times 11} = \frac{1}{22}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

$$P(A' \cup B) = P(A') + P(B) - P(A' \cap B)$$

$$= P(A') + P(B) - [P(B) - P(A \cap B)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

هیچ دو لنگه‌ای جفت نباشند :  $A' \Rightarrow$  حداقل یک جفت کفش باشد :  $A$

$$P(A') = \frac{\binom{5}{4} \times 2^4}{\binom{10}{4}} = \frac{5 \times 2^4}{210} = \frac{40}{210} = \frac{4}{21} \Rightarrow P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}$$

$$P(x), P(y), P(z)$$

$$P(y) = P(x) + \frac{1}{4} \quad P(x) + P(y) + P(z) = 1$$

$$P(z) = P(x) + \frac{2}{4} \quad P(x) + P(x) + \frac{1}{4} + P(x) + \frac{2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{1}{12} \quad P(y) = \frac{1}{6} \quad P(z) = \frac{5}{12}$$

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x = 1$$

$$\Rightarrow 21x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{21}$$

$$P(\{2, 3, 5\}) = P(2) + P(3) + P(5) = 2x + 3x + 5x = 10x = \frac{10}{21}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) = 1 \Rightarrow a^2 + \frac{a}{2} + a = 1$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \Rightarrow P(2) = \frac{1}{4} \\ a = -2 \end{cases}$$

غیر قابل قبول  
(طبق اصل احتمال)

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1$$

$$P(a) = \frac{1}{2}P(b)$$

$$P(b) = \frac{1}{3}P(c)$$

$$P(c) = x$$

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{9}$$

$$P(a) = \frac{1}{9}, \quad P(b) = \frac{2}{9}, \quad P(c) = \frac{6}{9}$$

$$P\{b, c\} = P(b) + P(c) = \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}$$

احتمال‌های برآمدهای a, b, c و d را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

۹۸

$$P(b) = P(a) = x \Rightarrow P(c) = \frac{x}{2}, P(d) = 2x$$

بنابراین:

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = 1 \Rightarrow x + x + \frac{x}{2} + 2x = 1 \Rightarrow 4x + \frac{x}{2} = 1$$

$$4x + x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{9}$$

برای محاسبه احتمال رخ دادن a یا b داریم:

$$P(a \cup b) = P(a) + P(b) = x + x = 2x = \frac{4}{9}$$

۹۹

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + a + a = 1 \Rightarrow a = 0/1$$

$$\Rightarrow P(\{3, 6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{11}{60}$$

۱۰۰

$$\left. \begin{aligned} P(B) = \frac{3}{5} &\Rightarrow P(a) + P(b) + P(c) + P(d) = \frac{3}{5} \\ P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{3}{5} + P(e) = 1$$

$$\Rightarrow P(e) = \frac{2}{5}$$

$$P(A) = \frac{2}{5} \Rightarrow P(a) + P(b) = \frac{2}{5}$$

$$P(C) = P(a) + P(b) + P(e) = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{10 + 14}{35} = \frac{24}{35}$$

$$P(C') = 1 - P(C) = 1 - \frac{24}{35} = \frac{11}{35}$$

۱۰۱



$$\begin{cases} P(1) = (2(1) - 1)x = x \\ P(2) = (2(2) - 1)x = 3x \\ P(3) = (2(3) - 1)x = 5x \\ P(4) = (2(4) - 1)x = 7x \end{cases}$$

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow P(S) = 1 \Rightarrow x + 3x + 5x + 7x = 1$$

$$\Rightarrow 16x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

احتمال آنکه به ناحیه اول برخورد کند:

$$P(1) = x \Rightarrow P(1) = \frac{1}{16}$$

احتمال آنکه به ناحیه دوم برخورد کند:

$$P(2) = 3x \Rightarrow P(2) = \frac{3}{16}$$

احتمال آنکه به ناحیه سوم برخورد کند:

$$P(3) = 5x \Rightarrow P(3) = \frac{5}{16}$$

احتمال آنکه به ناحیه چهارم برخورد کند:

$$P(4) = 7x \Rightarrow P(4) = \frac{7}{16}$$

$$P(\{1, 4\}) = P(1) + P(4) = \frac{1}{16} + \frac{7}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$P(\{2, 3\}) = \frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

بنابراین احتمال آنکه دارت به ناحیه اول و چهارم یا احتمال آنکه دارت به ناحیه دوم یا سوم برخورد کند برابر است.

$$P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 1 \Rightarrow 2a + a + 2a + a + 2a + a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$$

$$P(5) + P(6) = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$P(b) = x \Rightarrow P(a) = x^2, P(c) = \frac{x^2}{2}$$

بنابراین:

$$P(a) + P(b) + P(c) = 1 \Rightarrow x^2 + x + \frac{x^2}{2} = 1 \Rightarrow 2x^2 + 2x + x^2 = 2$$

$$3x^2 + 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+6}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{7}-1}{3} \text{ ق.ق} \\ x = \frac{-\sqrt{7}-1}{3} \end{cases}$$

پس احتمال رخ دادن  $b$  برابر است با:

$$P(b) = x \Rightarrow P(b) = \frac{\sqrt{7}-1}{3}$$

ابتدا احتمال‌های ظاهر شدن رو و پشت را در سکه اول به دست می‌آوریم. احتمال رو آمدن را با  $A$  و پشت آمدن را با  $B$  نمایش می‌دهیم.

$$P(A_1) = 3x, P(B_1) = x \Rightarrow x + 3x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A_1) = \frac{3}{4}, P(B_1) = \frac{1}{4}$$

همین احتمال‌ها را برای سکه دوم به دست می‌آوریم.

$$P(A_2) = y, P(B_2) = 3y \Rightarrow y + 3y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A_2) = \frac{1}{4}, P(B_2) = \frac{3}{4}$$

احتمال خواسته شده برابر است با:

$$P(A_1) \cdot P(B_2) + P(A_2) \cdot P(B_1) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

ابتدا احتمال انتخاب هرکدام از اعداد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$P(110) = 2x, P(111) = 3x, P(200) = 2x, P(201) = 3x$$

$$P(120) = 3x, P(102) = 3x$$

پس:

$$2x + 3x + 2x + 3x + 3x + 3x = 1 \Rightarrow 16x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{16}$$

بنابراین احتمال خواسته شده عبارت است از:

$$P(111, 201) = 3x + 3x = 6x = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

|       |       |       |      |      |      |              |
|-------|-------|-------|------|------|------|--------------|
| ۶     | ۵     | ۴     | ۳    | ۲    | ۱    | عدد ظاهر شده |
| $۳۶x$ | $۲۵x$ | $۱۶x$ | $۹x$ | $۴x$ | $۱x$ | احتمال       |

$$\Rightarrow 91x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{91}$$

$$P(\{۲, ۳, ۵\}) = ۳۸x = \frac{۳۸}{۹۱}$$

$$P = \left(\frac{1}{۳} \times \frac{۳}{۱۵}\right) + \left(\frac{1}{۳} \times ۰\right) + \left(\frac{1}{۳} \times \frac{۶}{۱۲}\right) = \frac{۷}{۳۰}$$

توجه: می‌توان از روش نمودار درختی هم استفاده کرد.

$$P(A) = \frac{1}{۲} \times \frac{۳}{۷} + \frac{1}{۲} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۵۸}{۱۴۰}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow \frac{۳۰}{۱۰۰} \left\{ \begin{array}{l} ۰/۹ \text{ بی غلط} \\ ۰/۱ \text{ غلط دارد} \end{array} \right. \\ B \rightarrow \frac{۴۰}{۱۰۰} \left\{ \begin{array}{l} ۰/۹۵ \text{ بی غلط} \\ ۰/۰۵ \text{ غلط دارد} \end{array} \right. \\ C \rightarrow \frac{۳۰}{۱۰۰} \left\{ \begin{array}{l} ۰/۹۹ \text{ بی غلط} \\ ۰/۰۱ \text{ غلط دارد} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\frac{۰/۴ \times ۰/۰۵}{(۰/۳ \times ۰/۱ + ۰/۴ \times ۰/۰۵ + ۰/۳ \times ۰/۰۱)} = \frac{۰/۰۲}{۰/۰۵۳} \cong ۰/۳۷$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = ۰/۳ \Rightarrow ۰/۳P(B) = P(A \cap B) \quad (I)$$

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = ۰/۲ \Rightarrow ۰/۲P(A) = P(B \cap A) \quad (II)$$

$$(II), (I) \Rightarrow ۰/۲P(A) = ۰/۳P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{۲}{۳}P(A)$$

$$P(A) + P(B) = ۰/۶ \Rightarrow P(A) + \frac{۲}{۳}P(A) = ۰/۶$$

$$\Rightarrow \frac{۵}{۳}P(A) = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow P(A) = \frac{۹}{۲۵} = ۰/۳۶$$

$$P(B) = \frac{۲}{۳}P(A) \Rightarrow P(B) = ۰/۲۴$$

$$P(A \cap B) = ۰/۰۷۲$$

$$P(B|A') = \frac{P(\overbrace{B \cap A'}^{B-A})}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{\underbrace{P(A')}_{1-P(A)}}$$

$$= \frac{۰/۲۴ - ۰/۰۷۲}{1 - ۰/۳۶} = \frac{۰/۱۶۸}{۰/۶۴} = \frac{۲۱}{۸۰}$$

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{۳} \times \frac{1}{۶} = \frac{1}{۱۸}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{۶} + \frac{1}{۴} - \frac{1}{۱۸} = \frac{۱۳}{۳۶}$$

$$\text{فضای نمونه‌ای کاهشی} = \{۱۱, ۲۲, ۳۳, ۴۴, ۵۵, ۶۶\}$$

$$\Rightarrow P(\text{مثل هم} | \text{حاصل ضرب زوج}) = \frac{۳}{۶} = \frac{1}{۲}$$

$$P(\text{هر دو قرمز}) + P(\text{هر دو آبی}) = P(\text{همرنگ بودن})$$

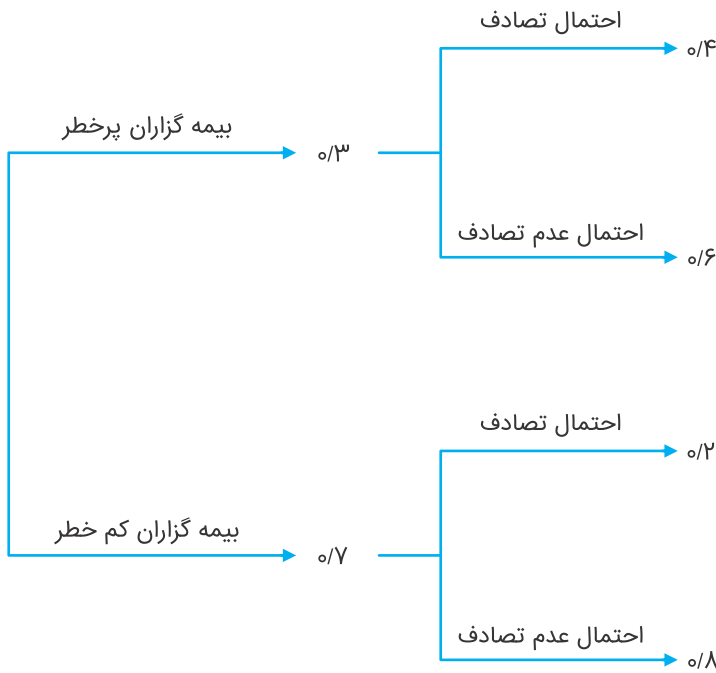
$$= \frac{۳}{۸} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۵}{۸} \times \frac{۵}{۹} = \frac{۱۵ + ۲۵}{۷۲} = \frac{۴۰}{۷۲} = \frac{۵}{۹}$$

$$B = \{(۱, ۵), (۲, ۴), (۳, ۳), (۴, ۲), (۵, ۱)\}$$

$$A = \{(۲, ۲), (۲, ۴), (۲, ۶), (۴, ۲), (۴, ۴), (۴, ۶), (۶, ۲), (۶, ۴), (۶, ۶)\}$$

$$A \cap B = \{(۲, ۴), (۴, ۲)\}$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{۲}{۵}$$



$$P = \frac{0/3 \times 0/4}{0/3 \times 0/4 + 0/7 \times 0/2} = \frac{0/12}{0/12 + 0/14} = \frac{0/12}{0/26} = \frac{12}{26} = \frac{6}{13}$$

$$P(A) = \frac{1}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A|B) = \frac{1}{4}$$

از احتمال شرطی فوق می‌توان احتمال اشتراک را تعیین نمود؛ یعنی:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

حال برای محاسبه احتمال واکنش نشان دادن فقط یکی از A و B داریم:

$$P(A \cup B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P = \frac{\binom{4}{3} \binom{3}{1} + \binom{4}{1} \binom{3}{3}}{\binom{4}{3} \binom{3}{1} + \binom{4}{2} \binom{3}{2} + \binom{4}{1} \binom{3}{3}} = \frac{4 \times 3 + 4 \times 1}{4 \times 3 + 6 \times 3 + 4 \times 1} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17}$$

فرض کنیم  $A_i$  پیشامد برداشتن از کیسه  $i$ ام باشد و  $B_i$  پیشامد انتخاب سیب از کیسه  $i$ ام باشد؛ پس:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) + P(A_2) \cdot P(B_2|A_2) + P(A_3) \cdot P(B_3|A_3) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

$$P(A) = ۰/۴, P(B) = ۰/۵, P(B|A) = ۰/۳, P(A'|B) = ?$$

پس:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow ۰/۳ = \frac{P(A \cap B)}{۰/۴} \Rightarrow P(A \cap B) = ۰/۱۲$$

برای محاسبه احتمال خواسته شده، به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\begin{aligned} P(A'|B) &= \frac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B - A)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{۰/۵ - ۰/۱۲}{۰/۵} \\ &= \frac{۰/۳۸}{۰/۵} = \frac{۳۸}{۵۰} = \frac{۱۹}{۲۵} \end{aligned}$$

فرض می کنیم احتمال برخورد دو تیر به هدف P(E) باشد. می توان P(E) را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$P(E) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4+1+2}{30} = \frac{7}{30}$$

درضمن اگر c به هدف نزد پس a و b به هدف خواهند زد که اگر این پیشامد را با D نمایش دهیم:

$$P(D \cap E) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{30}$$

باید احتمال P(D|E) را حساب کنیم، پس:

$$P(D|E) = \frac{P(D \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{4}{30}}{\frac{7}{30}} = \frac{4}{7}$$

$$P(A) = \frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} = \frac{۴۲}{۱۰۰۰}$$

اگر A پیشامد خرید کالا و B پیشامد فروش کالا در عرض یک هفته باشد، پس احتمال خواسته شده عبارت است از:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{۰/۴}{۰/۹} = \frac{۴}{۹}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۷ = ۰/۴۲$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= ۰/۶ + ۰/۷ - ۰/۴۲ = ۰/۸۸ \end{aligned}$$

$$A = \{(\epsilon, 1), (\epsilon, 2), (\epsilon, 3), (\epsilon, 4), (\epsilon, 5), (\epsilon, 6)\}$$

$$B = \{(1, \epsilon), (\epsilon, 1), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$A \cap B = \{(\epsilon, 1)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = P(A) \times P(B) \Rightarrow A \text{ و } B \text{ مستقل هستند}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \\ = 0/7 + 0/6 - 0/42 = 0/88$$

$$S = \{(r, r, r), (p, r, r), (r, p, r), (r, r, p), (p, p, r), (p, r, p), (r, p, p), (p, p, p)\}$$

$$A = \{(r, r, r), (p, r, r), (p, r, p), (r, r, p)\}$$

$$B = \{(p, r, r), (r, r, p)\}$$

$$A \cap B = \{(p, r, r), (r, r, p)\}$$

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{8}, P(A \cap B) = \frac{2}{8} \Rightarrow B \text{ و } A \text{ مستقل نیستند}$$

$$P(A|B) = P(A) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

$$n(S) = 7 \times 6 = 42$$

$$n(A) = \left( \begin{matrix} 3 \\ \downarrow \\ \text{تعداد زوج} \end{matrix} \times \begin{matrix} 4 \\ \downarrow \\ \text{تعداد فرد} \end{matrix} \right) \times \begin{matrix} 2 \\ \downarrow \\ \text{اولی فرد یا زوج} \end{matrix} = 24$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}$$

وقتی دو تیر به هدف خورده باشد، پس یک تیر به هدف نخورده است.

$$P(A') \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}$$

تیر A به هدف نخورده

$$P(A) \cdot P(B') \cdot P(C) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3}$$

تیر B به هدف نخورده

$$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C') = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

تیر C به هدف نخورده

حال مجموع این احتمالات را به دست می‌آوریم:

$$\frac{5}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{36}$$

دو تیر به هدف خورده، حال احتمال آنکه تیر شخص A به هدف خورده باشد برابر است با:

$$P = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{36}} = \frac{\frac{5}{72}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{2}$$

پیشامدهای A و B را به صورت زیر مشخص می‌کنیم:

$$A = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (1, 6)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 4), (2, 6)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 6)\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

مقادیر فوق را در رابطه مستقل بودن امتحان می‌کنیم:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

پس A و B مستقل‌اند.

چون از کلمه حداقل استفاده شده؛ یعنی یا ۲ بار یا ۳ بار یا ... که محاسبه طولانی دارد، بنابراین استفاده از متمم راحت‌تر است.

$$P(A) = P(\text{حداقل ۲ آزمایش برای دیدن سفید}) = 1 - P(\text{مهره اول سفید}) \\ = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

کلمه حداقل نشان می‌دهد که باید ورود ۳ نفر یا ۴ نفر یا ... بررسی شود که حالت‌های بسیاری را شامل می‌شود پس بهتر است از متمم استفاده شود، یعنی:

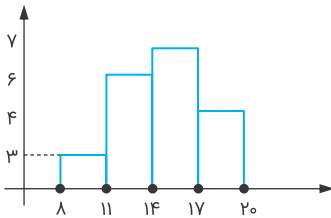
$$P(A) = P(\text{ورود حداقل سه نفر برای اولین مرد}) = 1 - P(\text{اولین نفر مرد یا دومین نفر مرد باشد}) \\ = 1 - \left( \frac{4}{9} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \right) = 1 - \frac{32 + 20}{72} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

۱۳۳

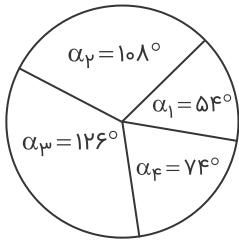
| فرایوانی نسبی         | f فرایوانی | x                   |
|-----------------------|------------|---------------------|
| $\frac{3}{20} = 0/15$ | ۳          | $8 \leq x < 11$     |
| $\frac{6}{20} = 0/30$ | ۶          | $11 \leq x < 14$    |
| $\frac{7}{20} = 0/35$ | ۷          | $14 \leq x < 17$    |
| $\frac{4}{20} = 0/20$ | ۴          | $17 \leq x \leq 20$ |
| ۱                     | n = ۲۰     | جمع                 |

۱۳۴

نمودار بافت نگاشت فرایوانی



$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{3}{20} \times 360 = 54 \\ \alpha_2 &= \frac{6}{20} \times 360 = 108 \\ \alpha_3 &= \frac{7}{20} \times 360 = 126 \\ \alpha_4 &= \frac{4}{20} \times 360 = 72 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$



پاسخ سؤالات ۱۳۶ تا ۱۳۷

۱۳۶ نادرست

۱۳۷ درست

۱۳۸

$$\frac{f_i}{n} \times 360^\circ = 45^\circ \Rightarrow \frac{f_i}{48} \times 360^\circ = 45^\circ \Rightarrow f_i = 6$$

$$\frac{f_2}{n} = \frac{5}{10 + 5 + 20 + 15} = \frac{5}{50} = 0.1$$

$$\frac{f_3}{n} \times 100 = \frac{20}{50} \times 100 = 40\%$$

۱۳۹ الف

ب

ابتدا تعداد کالای فروخته شده در روز جمعه را به دست می آوریم.

$$18 = 10\% \times 180 = \text{تعداد کالا در جمعه}$$

زاویه مربوط به روز جمعه برابر است با:

$$\alpha = \frac{18}{180} \times 360 = 36^\circ$$

پس زاویه روز پنجشنبه برابر است با:

$$30 + 40 + 60 + 90 + 20 + \beta + 36^\circ = 360 \Rightarrow \beta = 84^\circ$$

پس تعداد فروش در پنجشنبه برابر است با:

$$\frac{84}{360} = \frac{F}{180} \Rightarrow F = 42$$

ابتدا کمترین و بیشترین داده ها را مشخص می کنیم.

$$x_{\min} = 150, x_{\max} = 165$$

پس دامنه تغییرات برابر است با:

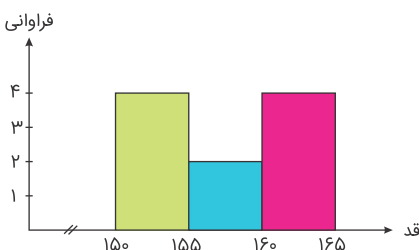
$$R = x_{\max} - x_{\min} = 165 - 150 = 15$$

تعداد دسته ها ۳ می باشد، پس طول دسته ها برابر است با:

$$\text{طول دسته ها} = \frac{15}{3} = 5$$

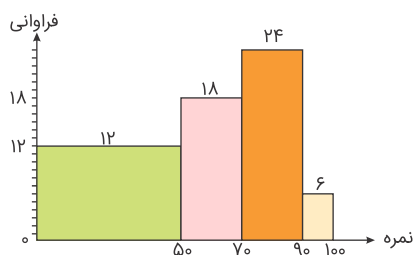
جدول توزیع فراوانی و بافت نگاشت فراوانی در زیر رسم شده اند:

| فراوانی نسبی         | فراوانی             | کرائه دسته ها |
|----------------------|---------------------|---------------|
| $\frac{4}{10} = 0.4$ | ۴                   | $[150, 155)$  |
| $\frac{2}{10} = 0.2$ | ۲                   | $[155, 160)$  |
| $\frac{4}{10} = 0.4$ | ۴                   | $[160, 165]$  |
|                      | $\overline{n} = 10$ |               |



برای تکمیل جدول فراوانی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم و سپس از روی جدول نمودار بافت‌نگاشت فراوانی را رسم می‌کنیم.

| فراوانی              | فراوانی نسبی           | درصد فراوانی نسبی | کرانه‌دسته‌ها |
|----------------------|------------------------|-------------------|---------------|
| $0/2 \times 60 = 12$ | $\frac{20}{100} = 0/2$ | ۲۰                | $[0, 50)$     |
| $0/3 \times 60 = 18$ | $\frac{30}{100} = 0/3$ | ۳۰                | $[50, 70)$    |
| $0/4 \times 60 = 24$ | $\frac{40}{100} = 0/4$ | ۴۰                | $[70, 90)$    |
| $0/1 \times 60 = 6$  | $\frac{10}{100} = 0/1$ | ۱۰                | $[90, 100]$   |



در وضعیت اولیه زاویه این دسته در نمودار دایره‌ای برابر است با:

$$\alpha_i = \frac{2}{20} \times 360 = 36$$

اگر ۲۴ درجه اضافه شود، پس زاویه جدید برابر می‌شود با:

$$\beta_i = 36 + 24 = 60$$

پس فراوانی این دسته برابر است با:

$$\frac{60}{360} = \frac{F}{30} = F = 5$$

ابتدا باتوجه به زاویه مرکزی برای داده های اولیه، رابطه زیر را می نویسیم. در این رابطه فرض کرده ایم فراوانی داده  $f$  و تعداد کل داده ها  $n$  است. پس:

$$\alpha = \frac{f}{n} \times 360^\circ \Rightarrow 20^\circ = \frac{f}{n} \times 360^\circ \Rightarrow \frac{f}{n} = \frac{1}{18}$$

حال اگر فراوانی داده  $x$  برابر شود، پس فراوانی  $xf$  می شود و بنابراین  $xf - f$  یعنی  $f(x - 1)$  داده به سطر و کل داده ها اضافه می شود. بنابراین:

$$\beta = \frac{f}{N} \times 360^\circ \Rightarrow 240^\circ = \frac{fx}{n + (x - 1)f} \times 360^\circ \Rightarrow \frac{240}{360} = \frac{x}{\frac{n}{f} + x - 1} \Rightarrow \frac{x}{18 + x - 1} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x}{17 + x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3x = 34 + 2x \Rightarrow x = 34$$

مجموع درصد فراوانی های نسبی برابر ۱۰۰ است، پس:

$$20 + 30 + 3x + 1 + 7x - 1 = 100 \Rightarrow 10x = 50 \Rightarrow x = 5$$

پس درصد فراوانی نسبی  $c$  و  $d$  به ترتیب ۱۶ و ۳۴ است.

$$c \text{ زاویه برای } \Rightarrow \alpha = \frac{16}{100} \times 360 = \frac{16 \times 36}{10} = 57.6^\circ$$

$$d \text{ زاویه برای } \Rightarrow \beta = \frac{34}{100} \times 360 = \frac{34 \times 36}{10} = 122.4^\circ$$

پاسخ سؤالات ۱۴۶ تا ۱۵۵

۱۴۶ درست

۱۴۷ درست

۱۴۸ نادرست است، عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می شود مقدار متغیر یا مشاهده نام دارد.

۱۴۹ درست

۱۵۰ نادرست است، تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می شود را فراوانی آن داده گویند.

۱۵۱ درست

۱۵۲ درست

۱۵۳ درست

۱۵۴ درست

در حال حاضر فراوانی نسبی دسته اول برابر است با:

$$\text{فراوانی نسبی دسته اول} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{کل}} = \frac{۳}{۳+۶+۴} = \frac{۳}{۱۳}$$

حال داده‌های جدید را اضافه می‌کنیم و سپس فراوانی نسبی دسته اول را به دست می‌آوریم:

$$\text{فراوانی نسبی دسته اول} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{کل}} = \frac{۴}{۱۳+۵} = \frac{۴}{۱۸}$$

نسبت حالت جدید به قدیم را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{\frac{۴}{۱۸}}{\frac{۳}{۱۳}} = \frac{۴ \times ۱۳}{۳ \times ۱۸} = \frac{۲۶}{۲۷}$$

باتوجه به اینکه مجموع زوایا باید  $۳۶۰^\circ$  باشد، در نتیجه  $\alpha_f$ ، زاویه مربوط به  $x_f$  به صورت زیر به دست می‌آید:

$$۹۰ + ۶۰ + ۱۲۰ + \alpha_f = ۳۶۰ \Rightarrow \alpha_f = ۹۰$$

در نتیجه:

$$\alpha_i = \frac{\text{فراوانی}}{\text{کل}} \times ۳۶۰ \Rightarrow ۹۰ = \frac{\text{فراوانی}}{۴۰} \times ۳۶۰ \Rightarrow \text{فراوانی} = ۱۰$$

مساحت کل بافت نگاشت از جمع مساحت‌های هر مستطیل به دست می‌آید، پس:

$$۱۰ \times ۲ + ۲ \times ۵ + ۳x + ۵ \times ۵ = ۷۹ \Rightarrow ۳x = ۷۹ - ۵۵ \Rightarrow x = ۸$$

حال فراوانی نسبی دسته سوم را به دست می‌آوریم:

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{۸}{۲۰} = ۰/۴$$

$$\text{فراوانی نسبی} = \frac{\text{فراوانی}}{\text{کل}} \Rightarrow ۰/۲ = \frac{۱۶}{n} \Rightarrow n = \frac{۱۶}{۰/۲} = ۸۰$$

سپس همین رابطه را برای سطرهای اول و چهارم می‌نویسیم:

$$\text{در سطر اول} \Rightarrow ۰/۱ = \frac{a}{۸۰} \Rightarrow a = ۰/۱۰ \times ۸۰ \Rightarrow a = ۸$$

$$\text{در سطر چهارم} \Rightarrow y = \frac{۱۰}{۸۰} \Rightarrow y = \frac{۱}{۸} \Rightarrow y = ۰/۱۲۵$$

برای محاسبه مقدار x از این نکته استفاده می‌شود که مجموع فراوانی‌های نسبی برابر ۱ است پس:

$$۰/۱ + x + ۰/۲ + ۰/۱۲۵ = ۱ \Rightarrow x = ۰/۵۷۵$$

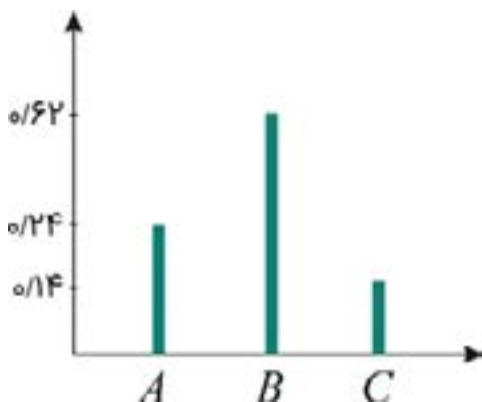
برای محاسبه b داریم:

$$۰/۵۷۵ = \frac{b}{۸۰} \Rightarrow b = ۴۶$$

برای سهولت در نگارش گروه الف را با A، گروه ب را با B و گروه ج را با C نمایش می‌دهیم.

| گروه‌ها | فراوانی | فراوانی نسبی           | درصد فراوانی نسبی |
|---------|---------|------------------------|-------------------|
| A       | ۱۲      | $\frac{۱۲}{۵۰} = ۰/۲۴$ | ۲۴                |
| B       | ۳۱      | $\frac{۳۱}{۵۰} = ۰/۶۲$ | ۶۲                |
| C       | ۷       | $\frac{۷}{۵۰} = ۰/۱۴$  | ۱۴                |
| n       | ۵۰      |                        |                   |

نمودار میله‌ای فراوانی نسبی به صورت زیر است.



$$\bar{x} = \frac{۲۰۲ + a}{۱۰} \xrightarrow{\bar{x}=۲۲} \frac{۲۰۲ + a}{۱۰} = ۲۲ \Rightarrow ۲۰۲ + a = ۲۲۰$$

$$\Rightarrow a = ۱۸$$

۱۵, ۱۸, ۲۰, ۲۰, ۲۱, ۲۲, ۲۴, ۲۵, ۲۵, ۳۰

چون تعداد داده‌ها زوج است، لذا میانه برابر میانگین دو عدد وسط است. از این رو می‌توان نوشت:

$$x = \frac{21 + 22}{2} = 21.5$$

ابتدا داده‌ها را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم:

۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۳, ۴, ۴, ۵, ۷, ۸

تعداد داده‌ها ۱۳ تا است، پس داده هفتم میانه می‌باشد. یعنی:

$$\text{میانه} = ۲$$

برای تعیین چارک‌های اول و سوم، نیمه اول و دوم داده‌ها را به صورت زیر مرتب می‌کنیم:

$$\underbrace{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 7, 8}_{Q_1 = \frac{1+1}{2} = 1} \quad \underbrace{2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 7, 8}_{Q_3 = \frac{4+5}{2} = 4.5}$$

همچنین مد برابر است با ۱.

داده‌ها طبق جدول:

۱, ۱, ۱, ۱, a, a, a, a, a, ۶, ۶, ۶, ۶, ۹, ۹

$$\text{میانه} = Q_2 = \frac{a + a}{2} = a \Rightarrow \bar{x} = a + 1$$

$$\bar{x} = \frac{\text{جمع داده‌ها}}{n} = \frac{4 + 6a + 24 + 18}{16} = a + 1 \Rightarrow 46 + 6a = 16a + 16 \Rightarrow 10a = 30 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow \bar{x} = a + 1 = 4$$

$$\text{میانه } Q_2 = a = 3$$

$$\hat{x} = a = 3$$

رابطه کلی: اگر میانگین m داده  $\bar{x}$  و میانگین n داده  $\bar{y}$  باشد، میانگین  $m + n$  داده با هم که  $\bar{z}$  می‌نامیم، از دستور زیر حساب می‌شود:

$$\bar{z} = \frac{m\bar{x} + n\bar{y}}{m + n}$$

$$m = 6, \bar{x} = 18, n = 4, \bar{y} = 15$$

$$\bar{z} = \frac{6 \times 18 + 4 \times 15}{6 + 4} = \frac{108 + 60}{10} = \frac{168}{10} = 16.8$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \dots + x_{\omega}}{\omega}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + \dots + y_{\lambda}}{\lambda}$$

$$x_1 + \dots + x_{\omega} = \bar{x} \times \omega = 30, \quad y_1 + \dots + y_{\lambda} = \bar{y} \times \lambda = 24$$

$$\bar{x}_{\text{کلی}} = \frac{x_1 + \dots + x_{\omega} + y_1 + \dots + y_{\lambda}}{13} = \frac{30 + 24}{13}$$

$$\bar{x}_{\text{کلی}} = \frac{54}{13} = 4 \frac{2}{13}$$

$$1, 1, 2, 3, 5, 5, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 17$$

$$\text{مد} = 5$$

$$M = \frac{7 + 8}{2} = 7 \frac{1}{2}$$

$$\frac{1 + 5 + 10 + x + y}{5} = 12 \Rightarrow \frac{16 + x + y}{5} = 12 \Rightarrow x + y = 44$$

$$\bar{x} = \frac{7 + 13 + 3x + 3y}{4} = \frac{20 + 3(44)}{4} = 38$$

پاسخ سؤال ۱۶۸

مد داده‌ای است که بیشترین فراوانی را داشته باشد.

$$5/8 = \frac{21 + x}{5} \Rightarrow 29 = 21 + x \Rightarrow x = 8$$

$$x = 8, \quad x + 1 = 9, \quad x + 2 = 10 \Rightarrow \bar{x} = \frac{8 + 9 + 10}{3} = \frac{27}{3} = 9$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = 3\bar{x}_{\text{قدیم}} - 1$$

$$20 = 3\bar{x} - 1 \Rightarrow 21 = 3\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 7 + 3 = \frac{7}{2} + 3 = 6 \frac{1}{2}$$

۳۱, ۳۴, ۳۵, ۳۷, ۳۸, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۰, ۴۴, ۴۵, ۴۵, ۴۶, ۵۲, ۵۳, ۵۶, ۵۶, ۵۷

$$\text{میانۀ} = \frac{۴۰ + ۴۴}{۲} = ۴۲$$

$$Q_1 = ۳۸, Q_3 = ۵۲$$

اعداد باقی‌مانده عبارت‌اند از:

۳۸, ۳۸, ۳۹, ۴۰, ۴۰, ۴۴, ۴۵, ۴۵, ۴۶, ۵۲

$$\bar{x} = \frac{۴۲۷}{۱۰} = ۴۲.۷$$

۱۷۲ الف بله، زیرا در بین داده‌ها داده‌ی دور افتاده وجود دارد.

۱۷۳ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۲۰, ۳۰, ۳۰, ۳۴, ۷۰, ۸۰

$$\text{میانۀ} = \text{میانگین دو داده‌ی وسط} = \frac{۳۰ + ۳۴}{۲} = \frac{۶۴}{۲} = ۳۲$$

$$Q_3 = ۷۰ = \text{چارک سوم}$$

$$\text{میانگین جدید} = ۵(\text{میانگین قبلی}) - ۷ = ۵ \times ۲۰ - ۷ = ۱۰۰ - ۷ = ۹۳$$

۱۷۵ فرض کنیم  $a$  درصد دانش‌آموزان نمره‌ی زیر ده داشته باشند، پس  $۱۰۰ - a$  درصد آن‌ها نمره بالای ده دارند. رابطه‌ی میانگین برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \Rightarrow ۱۲/۲ = \frac{a}{۱۰۰} \times ۷ + \frac{۱۰۰ - a}{۱۰۰} \times ۱۵ \Rightarrow ۱۲۲۰ = ۷a + ۱۵۰۰ - ۱۵a$$

$$\Rightarrow ۸a = ۲۸۰ \Rightarrow a = ۳۵ \text{ درصد}$$

از روی میانگین داده‌های سری اول می‌توان مجموع آن‌ها را به دست آورد:

$$\sum x_i = 5 \times 10 = 50$$

و برای به دست آوردن مجموع داده‌های سری دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\sum x_i^2 = 10 \times 20 = 200$$

حال میانگین داده‌های خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum X_i}{n} = \frac{(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + \dots + (x_{10} - 2)^2}{10} \\ &= \frac{x_1^2 - 4x_1 + 4 + x_2^2 - 4x_2 + 4 + \dots + x_{10}^2 - 4x_{10} + 4}{10} = \frac{\sum x_i^2 - 4 \sum x_i + 40}{10} \\ &= \frac{200 - 4 \times 50 + 40}{10} = \frac{40}{10} = 4 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{n}[(kx_1 + c) + (kx_2 + c) + \dots + (kx_n + c)] = \frac{1}{n}[k(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nc] = ka + c$$

وقتی تعداد داده‌ها زوج و چارک اول، داده پنجم باشد، داده‌ها به صورت زیر است:

$$\underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{نیمه اول داده‌ها=۹ تا}}^* \underbrace{\quad \quad \quad}_{\text{نیمه دوم داده‌ها=۹}} \Rightarrow n = 18$$

داده پنجم =  $Q_1$  :

یعنی میانگین برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{900}{18} = 50$$

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۵ + ۸ + ۹}{۴} = ۶$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(۲-۶)^۲ + (۵-۶)^۲ + (۸-۶)^۲ + (۹-۶)^۲}{۴}}$$

$$= \sqrt{\frac{۱۶ + ۱ + ۴ + ۹}{۴}} = \frac{\sqrt{۳۰}}{۲}$$

$$\text{واریانس} = \sigma^۲ = \frac{۳۰}{۴} = ۷/۵$$

روش دوم:

$$\bar{x} = \frac{۲ + ۵ + ۸ + ۹}{۴} = ۶$$

| داده‌ها | انحراف مشاهدات از میانگین | انحراف مشاهدات از میانگین به توان ۲ |
|---------|---------------------------|-------------------------------------|
| ۲       | ۴                         | ۱۶                                  |
| ۵       | ۱                         | ۱                                   |
| ۸       | ۲                         | ۴                                   |
| ۹       | ۳                         | ۹                                   |

$$\sigma = \frac{\sqrt{۳۰}}{۲} \Rightarrow \text{واریانس} = \sigma^۲ = \frac{۳۰}{۴} = ۷/۵$$

$$\bar{X}_A = \frac{۲۰ + ۵۰ + ۳۰ + ۴۰ + ۷۰}{۵} = ۴۲$$

$$\sigma_A^۲ = \frac{(۲۰-۴۲)^۲ + (۵۰-۴۲)^۲ + (۳۰-۴۲)^۲ + (۴۰-۴۲)^۲ + (۷۰-۴۲)^۲}{۵} = ۲۹۶$$

$$\sigma_A = \sqrt{۲۹۶} \cong ۱۷/۲$$

$$CV_A = \frac{\sigma_A}{\bar{X}_A} = \frac{۱۷/۲}{۴۲} = ۰/۴$$

$$\bar{X}_B = \frac{۳۵ + ۹۰ + ۲۵ + ۸۵ + ۵}{۵} = ۴۸$$

$$\sigma_B^۲ = \frac{(۳۵-۴۸)^۲ + (۹۰-۴۸)^۲ + (۲۵-۴۸)^۲ + (۸۵-۴۸)^۲ + (۵-۴۸)^۲}{۵} = ۱۱۳۶$$

$$\sigma_B = \sqrt{۱۱۳۶} \cong ۳۳/۷$$

$$CV_B = \frac{\sigma_B}{\bar{X}_B} = \frac{۳۳/۷}{۴۸} = ۰/۷$$

$CV_A < CV_B$  بنابراین ریسک در شرکت A کمتر است.

$$۱۳ = ۱۹ - ۶ = \text{دامنه تغییرات کلاس}$$

$$۱۴ = \text{میان}$$

$$۴ = ۱۶ - ۱۲ = \text{دامنه میان چارگی}$$

در کلاس A؛ زیرا نمودار، متقارن نیست و احتمالاً داده دورافتاده وجود دارد.

$$\bar{X}_{\text{جدید}} = ۳\bar{X} + ۱ = ۳(۴) + ۱ = ۱۳$$

$$\sigma^2_{\text{جدید}} = (۳)^2 \sigma^2 = ۹ \times ۳ = ۲۷$$

دقت شود که میانگین‌ها باهم برابرند و امکان انجام محاسبات وجود دارد. مجموع‌های موجود در رابطه واریانس را در هرکدام از داده‌ها به دست می‌آوریم:

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 \times n = ۹ \times ۷ = ۶۳ \text{ سری اول داده‌ها}$$

$$\Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2 \times n = ۳ \times ۳ = ۹ \text{ سری دوم داده‌ها}$$

پس کل داده‌ها باهم دارای مجموعی به‌صورت زیر هستند:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = ۶۳ + ۹ = ۷۲$$

بنابراین:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{۷۲}{۱۰} = ۷/۲$$

$$\bar{X}_A = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵, \bar{X}_B = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵$$

میانگین‌ها برابرند، پس پراکندگی در بازاری کمتر است که واریانس آن کمتر باشد.

$$\sigma_A^2 = \frac{(۲۲ - ۲۵)^2 + (۲۳ - ۲۵)^2 + (۲۴ - ۲۵)^2 + (۲۷ - ۲۵)^2 + (۲۹ - ۲۵)^2}{۵} = \frac{۳۴}{۵}$$

$$\sigma_B^2 = \frac{(۲۱ - ۲۵)^2 + (۲۴ - ۲۵)^2 + (۲۵ - ۲۵)^2 + (۲۷ - ۲۵)^2 + (۲۸ - ۲۵)^2}{۵} = \frac{۳۰}{۵}$$

چون  $\frac{۳۰}{۵} < \frac{۳۴}{۵}$  است، لذا پراکندگی قیمت‌ها در بازار B کمتر است و بهتر است از بازار B خرید کنیم.

۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۵,  $\underbrace{۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰}_{Q_v=16/5}$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{160}{10} = 16 \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X} - x_i)^2}{n}}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{25 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 1 + 4 + 9 + 16}{10}} = \sqrt{7}$$

داده‌های سری اول را  $x_i$  فرض می‌کنیم. می‌توانیم از ضریب تغییرات و میانگین آن‌ها، انحراف معیار داده‌ها را به دست آوریم.

$$CV_1 = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \Rightarrow 0.25 = \frac{\sigma_1}{4} \Rightarrow \sigma_1 = 1$$

حال داده‌های جدید را به صورت  $3x_i + n$  فرض می‌کنیم. پس میانگین و انحراف معیار جدید عبارت‌اند از:

$$\bar{x}_v = 3\bar{x}_1 + n \Rightarrow \bar{x}_v = 12 + n$$

$$\sigma_v = 3\sigma_1 \Rightarrow \sigma_v = 3$$

بنابراین ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV_v = \frac{\sigma_v}{\bar{x}_v} \Rightarrow 0.2 = \frac{3}{12 + n} \Rightarrow 2/4 + 0.2n = 3 \Rightarrow 0.2n = 0.6 \Rightarrow n = 3$$

چون داده به اندازه میانگین را حذف می‌کنیم مشکلی برای محاسبات نخواهیم داشت.

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \Rightarrow 5 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{11} \Rightarrow \sum (x_i - \bar{x})^2 = 55$$

مجموع جدید عبارت است از:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 55 - (9 - 9)^2 = 55 - 0 = 55$$

پس واریانس جدید برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2)}{n} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2}{n} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \times n\bar{x} + n\bar{x}^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2
 \end{aligned}$$

مجموع انحراف از میانگین داده های آماری برابر با صفر است، پس:

$$x_1 - \bar{x} + x_2 - \bar{x} + x_3 - \bar{x} + x_4 - \bar{x} = 0$$

$$\Rightarrow -2 + 1 + c + 0 = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$x_3 - \bar{x} = c \Rightarrow 5 - \bar{x} = 1 \Rightarrow \bar{x} = 4$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2}{4}} = \sqrt{\frac{4 + 1 + 1 + 0}{4}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

$$n = 40$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{40} = 100$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_{40}^2 = 340$$

$$\bar{x} = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}, \quad (\bar{x})^2 = \frac{25}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma^2 &= \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{340}{40} - \frac{25}{4} = \frac{17}{2} - \frac{25}{4} = \frac{34}{4} - \frac{25}{4} = \frac{9}{4} \\
 \Rightarrow \sigma^2 &= \frac{9}{4} \Rightarrow \sigma = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}$$



$$\bar{x} = \frac{1 \times 9 + 2 \times 11 + 4 \times 12 + 1 \times 13 + 2 \times 14}{1 + 2 + 4 + 1 + 2} = \frac{120}{10} = 12$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n f_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^n f_i}}$$

$$= \sqrt{\frac{1(9-12)^2 + 2(11-12)^2 + 4(12-12)^2 + 1(13-12)^2 + 2(14-12)^2}{10}}$$

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{20}{10}} = \sqrt{2}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

برای اینکه داده‌های به صورت  $\frac{x_i}{2} + 3$  به داده‌های به صورت  $6x_i - 1$  تبدیل شود باید آن‌ها را در ۱۲ ضرب کرده و ۳۷ واحد کم کنیم، زیرا:

$$12\left(\frac{x_i}{2} + 3\right) - 37 \Rightarrow 6x_i + 36 - 37 \Rightarrow 6x_i - 1$$

پس میانگین جدید برابر است با:

$$\bar{x} = 12 \times 9 - 37 = 108 - 37 = 71$$

و واریانس جدید برابر است با:

$$\sigma^2 = (12)^2 \times 1 \Rightarrow \sigma = 12$$

بنابراین ضریب تغییرات جدید برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{12}{71}$$

چون انحراف معیار داده‌ها صفر است، پس تمام داده‌ها برابرند؛

یعنی:

$$x_1 = x_2 = x_3 = ۶۴$$

بنابراین داده‌های جدید عبارت‌اند از:

$$۸, ۴, ۶۳$$

پس:

$$\bar{x} = \frac{۸ + ۴ + ۶۳}{۳} = \frac{۷۵}{۳} = ۲۵$$

واریانس برابر است با:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{(۸ - ۲۵)^2 + (۴ - ۲۵)^2 + (۶۳ - ۲۵)^2}{۳} = \frac{۲۸۹ + ۴۴۱ + ۱۴۴۴}{۳} = \frac{۲۱۷۴}{۳}$$

مشاهده، مصاحبه، پرسش‌نامه، دادگان‌ها

در صورتی که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند.

الف

مشاهده

ب

مصاحبه

پ

دادگان‌ها

پاسخ سؤال ۱۹۷

نادرست

باتوجه به اینکه تعداد کل کلاس‌ها مشخص نیست، آن را  $n$  فرض می‌کنیم؛ پس:

$$\frac{۷۰}{n} \times ۳۰ = ۱۴ \Rightarrow n = ۱۵۰$$

پس کل کلاس‌ها ۱۵۰ عدد است. چون تعداد کلاس‌های تجربی سه برابر رشته انسانی است، پس:

$$x + ۳x = ۱۵۰ - ۷۰ \Rightarrow ۴x = ۸۰ \Rightarrow x = ۲۰$$

یعنی ۲۰ کلاس انسانی و ۶۰ کلاس تجربی است، پس:

$$\begin{aligned} \text{تعداد نمونه‌های تجربی} &= \frac{۶۰}{۱۵۰} \times ۳۰ = ۱۲ \\ \text{تعداد نمونه‌های انسانی} &= \frac{۲۰}{۱۵۰} \times ۳۰ = ۴ \end{aligned}$$

قد متغیر کمی پیوسته است.

پلاک منازل متغیر کیفی ترتیبی است.

چون نمونه ۸ تایی است، پس ۸ طبقه داریم. تعداد اعضای هر طبقه برابر است با:

$$\frac{152}{8} = 19$$

شماره آخرین فرد انتخابی ۱۴۰ است، پس شماره‌هایی که انتخاب شدند، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} 140 &\xrightarrow{-19} 121 \xrightarrow{-19} 102 \xrightarrow{-19} 83 \xrightarrow{-19} 64 \\ &\xrightarrow{-19} 45 \xrightarrow{-19} 26 \xrightarrow{-19} 7 \end{aligned}$$

بنابراین شماره‌های ۷، ۲۶، ۴۵، ۶۴، ۸۳، ۱۰۲، ۱۲۱ و ۱۴۰ انتخاب شده‌اند.

آماره مشخصه‌ای عددی است که توصیف‌کننده جنبه خاصی از یک نمونه است و می‌تواند از نمونه‌ای به نمونه دیگر تغییر کند، ولی پارامتر یک مشخصه عددی است که توصیف‌کننده جنبه خاصی از جامعه می‌باشد و ثابت است.

نام متغیر کیفیت شامپوها می‌باشد و نوع آن کیفی ترتیبی  
کل شامپوهای تولیدی در یک روز (۴۰۰۰ شامپو) جامعه آماری  
۱۰۰ شامپوی انتخابی نمونه تصادفی می‌باشد.

نسبت  $\frac{30}{100}$  یک آماره است، چون وضعیت کیفیت شامپوها را در یک نمونه نشان می‌دهد؛ نه در جامعه.

مردم شهر تهران

پرسش‌نامه کتبی

$$\frac{۱۶۰}{۸} = ۲۰$$

یعنی از هر ۲۰ عضو یکی انتخاب می‌شود. پس رابطه انتخاب اعضاء به صورت زیر است:

$$a_n = ۲۰(n - ۱) + a_۱$$

اگر  $a_۳ = ۴۷$  باشد، داریم:

$$۴۷ = ۲۰ \times ۲ + a_۱ \Rightarrow a_۱ = ۷$$

یعنی:

$$a_n = ۲۰(n - ۱) + ۷ \Rightarrow a_n = ۲۰ \times n - ۱۳$$

پس:

$$a_۸ = ۲۰ \times ۸ - ۱۳ = ۱۶۰ - ۱۳ = ۱۴۷$$

روش‌های نمونه‌گیری تصادفی عبارت‌اند از: نمونه‌گیری تصادفی ساده، نمونه‌گیری خوشه‌ای، نمونه‌گیری طبقه‌ای و نمونه‌گیری سیستماتیک، نمونه‌گیری احتمالی  
نمونه‌گیری خوشه‌ای عبارت است از نمونه‌گیری که در آن واحدهای نمونه‌گیری اولیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند، سپس همه واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب‌شده را به عنوان نمونه در نظر می‌گیریم.

در این بررسی فهرست موارد خواسته‌شده به شرح زیر است:  
واحد آماری: هر قوطی کنسرو یک واحد آماری است.  
جامعه: کل قوطی‌های کنسرو تولیدی جامعه آماری هستند.  
متغیر: میانگین وزن قوطی‌های کنسرو است.  
آماره: میانگین وزن قوطی‌های کنسرو در نمونه انتخابی آماره است.  
پارامتر: میانگین وزن قوطی‌های کنسرو در کل محصولات تولیدی پارامتر است.

پاسخ سؤالات ۲۰۷ تا ۲۱۴

واحد آماری

نمونه‌گیری

نمونه‌گیری تصادفی ساده

نمونه‌گیری احتمالی

نارایب

۲۱۵ در جدول زیر ۵ نمونه یک عضوی مشخص شده‌اند و اختلاف میانگین هر نمونه با میانگین جامعه به دست آمده است. میانگین جامعه عبارت است از:

$$\mu = \frac{7 + 2 + 12 + 5 + 4}{5} = 6$$

پس:

| نمونه‌ها                                                | {۲} | {۴} | {۵} | {۷} | {۱۲} |
|---------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|------|
| میانگین نمونه $\bar{x}$                                 | ۲   | ۴   | ۵   | ۷   | ۱۲   |
| قدر مطلق اختلاف میانگین نمونه و جامعه $ \mu - \bar{x} $ | ۴   | ۲   | ۱   | ۱   | ۶    |

۲۱۶ می‌دانیم طول بازه برابر با  $\frac{4\sigma}{\sqrt{n}}$  می‌باشد؛ پس:

$$\frac{4\sigma}{\sqrt{n}} < 0.4 \Rightarrow \frac{4 \times 2}{\sqrt{n}} < 0.4 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10} \Rightarrow \sqrt{n} > 20 \Rightarrow n > 400$$

بنابراین حداقل ۴۰۱ داده باید انتخاب شود.

۲۱۷ رابطه برآورد را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 17 - \frac{2 \times 1/5}{\sqrt{16}} \leq \mu \leq 17 + \frac{2 \times 1/5}{\sqrt{16}}$$

$$17 - \frac{3}{4} \leq \mu \leq 17 + \frac{3}{4} \Rightarrow 16/25 \leq \mu \leq 17/75$$

۲۱۸

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} - (\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}) = \frac{4\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 28 - 12 = \frac{4\sigma}{\sqrt{64}}$$

$$\Rightarrow 16 = \frac{4\sigma}{8} \Rightarrow \sigma = 32 \Rightarrow \sigma^2 = 1024$$

$$\bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 28 \Rightarrow \bar{x} = 28 - \frac{2 \times 32}{8} = 28 - 8 = 20$$

$$\text{حد پایین} = \bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 12 = \bar{x} - \frac{2\sigma}{5} \Rightarrow 5\bar{x} - 2\sigma = 60$$

$$\text{حد بالا} = \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 18 = \bar{x} + \frac{2\sigma}{5} \Rightarrow 5\bar{x} + 2\sigma = 90$$

از حل دستگاه فوق مشخص می شود که:

$$10\bar{x} = 150 \Rightarrow \bar{x} = 15, \sigma = 7/5 \Rightarrow \sigma^2 = (7/5)^2 = 56/25$$

بر اساس اطلاعات مسئله، ابتدا  $p$  را به دست می آوریم:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{8}{50} = 0.16$$

سپس مقدار زیر را حساب می کنیم:

$$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.16 \times 0.84}{50}} = \frac{(0.04)\sqrt{42}}{5}$$

پس نسبت واقعی متعلق است به فاصله زیر:

$$(p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) = (0.16 - \frac{0.08\sqrt{42}}{5}, 0.16 + \frac{0.08\sqrt{42}}{5})$$

نسبت برابر آمدن تاس ها عبارت است از:

$$p = \frac{m}{n} = \frac{2}{10}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} \text{بازه جواب} &= (p - 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}) \\ &= (0.2 - 2\sqrt{\frac{\frac{2}{10} \times \frac{8}{10}}{25}}, 0.2 + 2\sqrt{\frac{\frac{2}{10} \times \frac{8}{10}}{25}}) = (0.2 - 0.16, 0.2 + 0.16) = (0.04, 0.36) \end{aligned}$$

اگر بخواهیم تعداد به دست آوریم داریم:

$$(0.04 \times 25, 0.36 \times 25) = (1, 9)$$

$\bar{x} = 22$  میانگین نمونه ،  $\sigma = 2$  انحراف معیار جامعه ،  $n = 25$

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 22 - \frac{4}{5} \leq \mu \leq 22 + \frac{4}{5} \Rightarrow 21/5 \leq \mu \leq 22/5$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1 + 2 + \dots + 64}{64} = \frac{\frac{64 \times 65}{2}}{64} = \frac{65}{2}$$

باتوجه به اینکه  $n = 64$  و  $\sigma = 5$ ، پس:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{65}{2} - \frac{5}{8} \leq \mu \leq \frac{65}{2} + \frac{5}{8}$$

$$32/5 - 1/25 \leq \mu \leq 32/5 + 1/25 \Rightarrow 31/25 \leq \mu \leq 33/25$$

$$\bar{x} = \frac{51 + 49 + 60 + 40}{4} = \frac{200}{4} = 50$$

می‌دانیم که  $n = 4$  و  $\sigma = 2$ ، پس بازه اطمینان برابر است با:

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 50 - \frac{2 \times 2}{\sqrt{4}} \leq \mu \leq 50 + \frac{2 \times 2}{\sqrt{4}} \Rightarrow 48 \leq \mu \leq 52$$

$$\bar{x} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 45 - \frac{5}{\sqrt{625}} \leq \mu \leq 45 + \frac{5}{\sqrt{625}}$$

$$45 - \frac{10}{25} \leq \mu \leq 45 + \frac{10}{25} \Rightarrow 44/5 \leq \mu \leq 46/5$$

$$\frac{\sigma_{\bar{x}} (\text{جدید})}{\sigma_{\bar{x}} (\text{قدیم})} = 0/01 \Rightarrow \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{kn}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{100} \Rightarrow \sqrt{k} = 100 \Rightarrow k = 10000$$

$$\bar{x} = \frac{5 + 7 + 3 + 2 + 8}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

پارامتر جامعه یعنی میانگین جامعه برابر است با:

$$\mu = \frac{0 + 1 + 2 + \dots + N}{N + 1} = \frac{\frac{N(N+1)}{2}}{N+1} = \frac{N}{2}$$

اگر فرض کنیم پارامتر جامعه را با آماره  $\bar{x} = 5$  برآورد کرده‌ایم، پس:

$$\frac{N}{2} = 5 \Rightarrow N = 10$$

۲۳۱ انحراف معیار جامعه ثابت و برابر  $\sigma$  است. اگر نمونه اولیه  $n$  تایی باشد، نمونه بعدی به تعداد  $kn$  است، پس:

$$\frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_{\bar{x}_1}} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{kn}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{5} \Rightarrow k = 25$$

یعنی تعداد نمونه باید ۲۵ برابر شود.

۲۳۲ انتخاب‌های سه‌تایی از ۶ عدد موجود در جامعه به صورت زیر هستند:

$$\{1, 1, 2\}, \{1, 1, 3\}, \{1, 1, 4\}, \{3, 3, 1\}, \{3, 3, 2\}, \{3, 3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}$$

پس تعداد کل یعنی  $n(S)$  برابر است با:

$$n(S) = 10$$

نمونه‌هایی که میانگین آن‌ها ۲ است عبارت‌اند از:

$$\{1, 1, 4\}, \{1, 2, 3\} \Rightarrow n(A) = 2$$

پس:

$$P(A) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$$

از بین ۱۰ عضو جامعه می‌توانیم به تعداد زیر نمونه‌های دوتایی انتخاب کنیم.

$$\binom{10}{2} = 45 \Rightarrow n(S) = 45$$

از بین ۴۵ نمونه دوتایی مفروض، نمونه‌هایی که میانگین ۱۵ دارند عبارت‌اند از:

$$\{11, 19\}, \{12, 18\}, \{16, 14\} \Rightarrow n(A) = 3$$

بنابراین احتمال موردنظر برابر است با:

$$P(A) = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

پاسخ سؤالات ۲۳۴ تا ۲۴۱

۲۳۴ کمتر

۲۳۵ افزایش اندازه نمونه

۲۳۶ ضریب اطمینان

۲۳۷ یک رقم اعشار

$$\frac{a+b}{2}$$

۲۳۹ دو شکل، نقطه‌ای و بازه‌ای.

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \text{ برابر}$$

$$\frac{1}{2}$$

۲۴۲ برای هر دو نمونه انحراف معیار برآورد میانگین را حساب می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{x}_1} &= \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \\ \sigma_{\bar{x}_2} &= \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\sigma_{\bar{x}_1}}{\sigma_{\bar{x}_2}} = \frac{\frac{\sigma}{4}}{\frac{\sigma}{7}} = \frac{7}{4}$$