



گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل



درس

حسابان دوازدهم ریاضی



نوتروبیست



$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲ امیر محمد رضائی	رتبه ۲۰ سینا راضی	رتبه ۱۶ آریا قهرمانی	رتبه ۱۴ امیر محمد کیانی
رتبه ۸۰ محمد مهدی شریفی	رتبه ۷۵ محمد صالح عارفی	رتبه ۶۱ بهار هلالی	رتبه ۵۹ ایمان انفرادی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲ امیر محمد شکوهی	رتبه ۱۶۹ هانیه خواجه	رتبه ۱۶۰ اشکان کوثری	رتبه ۱۴۷ محدثه حیدری	رتبه ۲۵۹ ابوالفضل ناصریان
رتبه ۴۳۲ سید محمد صادق حسینی	رتبه ۳۴۱ حمیدرضا بشیری	رتبه ۳۰۸ سید علی اکرمی	رتبه ۲۷۱ فاطمه سادات موسوی	رتبه ۴۷۳ زهره بابائی
رتبه ۵۳۹ نجمه کبختا	رتبه ۵۳۷ ریحانه حیدری	رتبه ۵۲۳ فاطمه شاهسونند	رتبه ۵۱۴ محمد پارسا عبدالله آبادی	رتبه ۵۴۶ حسین تقضلی نژاد
رتبه ۶۶۱ فاطمه اصغری	رتبه ۶۰۶ سجاد محمودی زاده	رتبه ۵۷۰ زهره ولی نژاد	رتبه ۵۵۷ محمد صالح زارعی	رتبه ۶۶۷ سیاوش مصطفایی
رتبه ۷۸۱ احسان قنبری	رتبه ۷۱۴ محمد یزدیان	رتبه ۶۹۱ بهار ضرغامی	رتبه ۶۷۲ محمد ماهان عنبرستانی	رتبه ۷۸۶ نیما غفاری
رتبه ۹۰۹ کیمیا فدائی	رتبه ۸۹۳ فاطمه مشاوری نجف آبادی	رتبه ۸۰۴ آرمین رضایی	رتبه ۸۰۳ ماتده رنجبر	رتبه ۹۴۷ صفورا بقائی
رتبه ۱۱۲۷ زهره بابائی	رتبه ۱۱۲۲ علی طاهر زاده	رتبه ۱۰۵۸ الینا جلالی فر	رتبه ۱۰۵۲ پویان فریور افشار	رتبه ۱۲۳۴ مطهره توحیدی
رتبه ۱۳۵۰ علی زینلی	رتبه ۱۲۸۴ فاطمه معین زاده	رتبه ۱۲۸۴ بهار امیری	رتبه ۱۲۳۶ مبینا ایزدی	رتبه ۱۳۷۲ پارسا رضایی
رتبه ۱۵۰۳ فاطمه رحیم زاده	رتبه ۱۴۹۳ محمد مهدی خرم زاده	رتبه ۱۴۸۳ سینا خاوری خراسانی	رتبه ۱۴۲۴ سید امیر حسین حسینی	رتبه ۱۵۳۴ فاطمه عبیری
رتبه ۱۶۹۶ ندا ملک شاهی	رتبه ۱۶۷۸ سجاد ینکی	رتبه ۱۶۳۹ ابوالفضل نیرومند	رتبه ۱۶۲۸ امیر محمد فکور حقیقی	رتبه ۱۷۳۱ محمد رضا محسنی
رتبه ۲۵۵۹ سارا حمزه	رتبه ۲۰۱۵ علی شیرزاد	رتبه ۱۹۶۶ مهسا رضایی مقدم	رتبه ۱۷۵۴ هلیا حاجیلوئی	رتبه ۲۶۲۵ زهره جمعی
رتبه ۲۷۹۴ مریم بادلی	رتبه ۲۷۸۱ سعید شبانی	رتبه ۲۷۵۱ فهمیه سیدآبادی	رتبه ۲۷۱۱ محمد غلامی	رتبه ۲۸۱۰ هدیه رحیمی
رتبه ۳۳۴۳ سینا ارزمانی	رتبه ۳۲۴۴ هلیا سجادی	رتبه ۳۱۳۳ صبا شایع ثانی	رتبه ۲۸۸۱ پارسا جمال امیدی	

حسابان

پیش‌نیازها

۱ اتحادهای جبری:

توان ۲ → مربع دو جمله‌ای $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

توان ۳ → مکعب دو جمله‌ای $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

مزدوج $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

چاق و لاغر $a^3 \pm b^3 = \underbrace{(a \pm b)}_{\text{چاق}} \times \underbrace{(a^2 \mp ab + b^2)}_{\text{لاغر}}$

جمله مشترک $(x + b)(x + a) = x^2 + (a + b)x + ab$

اتحادهایی که به پیشنهاد من حتماً حفظ شوند:

$$x^2 \pm 2x + 1 = (x \pm 1)^2$$

$$x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$$

$$x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$$

$$4x^2 \pm 4x + 1 = (2x \pm 1)^2$$

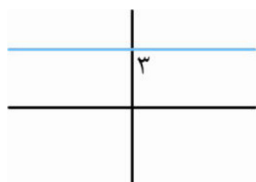
$$x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1 = (x \pm 1)^3$$

$$x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8 = (x \pm 2)^3$$

$$x^3 \pm 9x^2 + 27x \pm 27 = (x \pm 3)^3$$

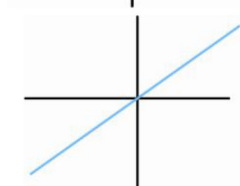
انواع توابع:

✓ تابع ثابت



$$y = 3$$

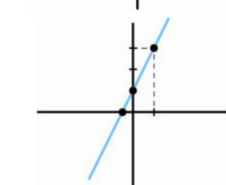
$$y = k$$



$$y = x$$

$$y = x$$

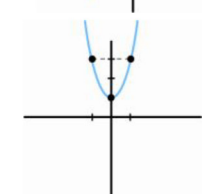
✓ تابع همانی (نیمساز ناحیه «۱» و «۳»)



$$y = 2x + 1$$

$$y = ax + b$$

✓ تابع خطی



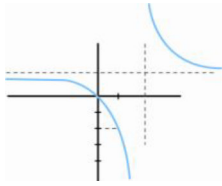
$$y = 2x^2 + 1$$

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \dots + z$$

$$n \in \mathbb{W}$$

✓ توابع چندجمله‌ای

↓
توضیح داده شود



$$y = \frac{x+3}{x-2}$$

$$y = \frac{\text{چندجمله ای}}{\text{چندجمله ای}}$$

✓ توابع گویا:

توجه، توجه: توابع چندجمله‌ای گویا هستند ولی توابع گویا چندجمله‌ای نیستند.

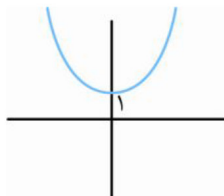
فصل ۱: تابع

انتقال توابع
عمودی ← جابجایی توابع رو محور "y" ها

افقی ← جابجایی توابعی روی محور "x" ها

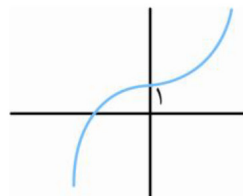
انتقال عمودی: با جمع و یا تفریق عددی با یک تابع مرجع و یا مادر اتفاق می‌افتد که باید به اندازه آن نمودار تابع را بالا و یا پایین ببریم.

مثال:



$$g(x) = f(x) + k$$

عدد تابع مادر



عددی که باعث انتقال شده است $g(x) = x^3 + 1$ عددی که باعث انتقال عمودی شده است $f(x) = x^2 - 1$

تابع مادر تابع نهایی تابع مادر تابع نهایی

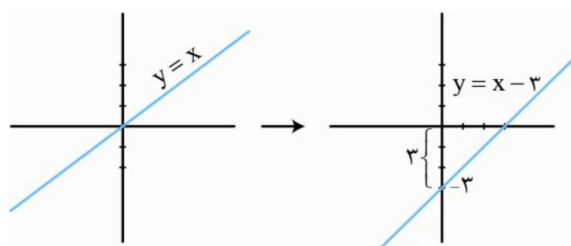
خطر! توابع مادر توابعی هستند که ما رسم آنها را می‌شناسیم و بلدیم آنها را رسم کنیم مانند "sin x" | "cos x" | "x²" | "x³"

اصطلاحاً در توابع جبری باید حداکثر یک "x" ببینیم و اگر تعداد "x" ها از یک بیشتر باشد باید آن را به یک کاهش دهیم مانند:

$$x^2 + 2x + 3 \rightarrow \underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} + 2 \Rightarrow (x+1)^2 + 2 \rightarrow \text{عددی که باعث انتقال می‌شود} \quad \text{تابع مادر}$$

طریقه رسم:

عدد -۳ x
تابع مادر



۱ رسم تابع مادر

۲ انتقال

۳ ... ادامه دارد

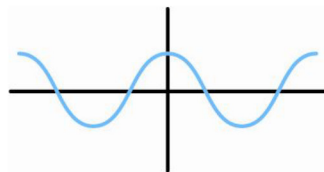
نکته فوق سری: شاید براتون سؤال شه که چرا ننوشتیم انتقال عمودی. در جواب می‌تونم بگم به دلیل اینکه ما اعمال دیگر هم داریم که روی تابع انجام می‌شوند.

نکات فوق حرفه‌ای: انتقال عمودی فقط روی برد تابع تأثیر می‌گذارد که اگر تابع کراندار باشد یعنی تابع بین دو عدد تغییر کند و یا به زبان ریاضی $|f(x)| \leq m$ باشد، می‌توانیم آن عددی که به تابع مادر اضافه یا کم شده است را با دوسر برد جمع و یا تفریق کنیم تا برد جدید نمایان شود.

اندکی مثال حل شده

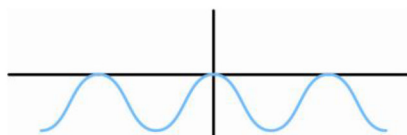
عدد $\cos x - 1$
تابع مادر

۱ تابع زیر را با کمک $\cos(x)$ رسم کنید. (امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹)



۱ رسم نمودار تابع مادر

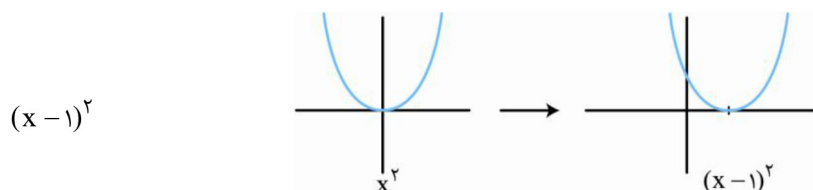
۲ انتقال



انتقال افقی: در این انتقال عدد با x جمع می‌شود نه یک تابع جدا و باعث انتقال تابع روی محور x ها می‌شود. این انتقال تأثیری روی برد توابع ندارد و صرفاً روی دامنه تابع تغییر ایجاد می‌کند.
 $g(x) = F(x + k)$

خطر! در این قسمت (انتقال افقی) برعکس انتقال عمودی تغییراتی که روی x ها انجام می‌دهیم برعکس است یعنی اگر عدد با x جمع شود تابع به جای حرکت به جلو به سمت عقب حرکت می‌کند ولی خب در انتقال عمودی ما اگر عددی را با تابع مادر جمع کنیم با توجه به علامتش اگر مثبت بود موافق با آن تابع را به سمت بالا و اگر منفی بود موافق با علامت به سمت پایین تابع را انتقال می‌دهیم.

مثال:



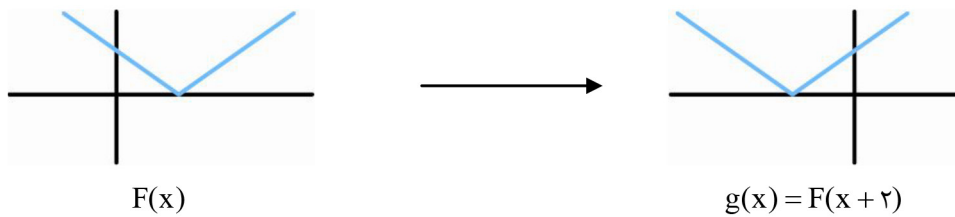
در مرحله اول چون درجه چندجمله‌ای «۲» است یعنی تابع از توابع درجه «۲» است ما نمودار x^2 را رسم می‌کنیم و بعد با توجه به جمع عدد با « x » با توجه به علامت عدد آن را یک واحد یا به سمت چپ و یا به سمت راست می‌بریم ولی حال کدام سمت؟!

به عنوان مثال تصور کنید $F(1) = 0$ است. اگر با x تابع F عددی جمع یا از آن کم شود، مثلاً $g(x) = F(x + 2)$ حال باید به g عددی بدهیم که جلوی F را ۱ کند تا ریشه‌های تابع g به دست آید.

$$x + 2 = 1 \rightarrow x = -2$$

یعنی حال اگر ما به g عدد ۱- بدهیم جلوی F عدد ۱ ظاهر می‌شود و از آنجا که ما می‌دانیم $F(1) = 0$ است، پس ریشه g عدد ۱- است.

و این یعنی تابع $g(x)$ محور x ها را در ۱- قطع می‌کند در و تابع $F(x)$ محور x ها را در «۱» قطع می‌کرد و رابطه‌ای که بین F و g داشتیم این بود که x های تابع F را با ۲ جمع کردیم تبدیل به تابع g شد.



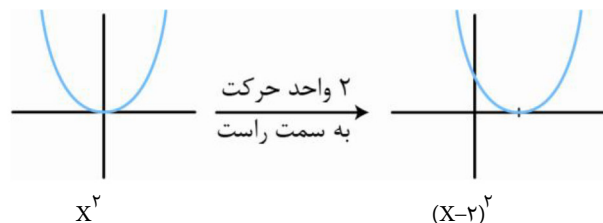
با توجه به توضیحات فوق برخلاف تصور خیلی‌ها که تابع به سمت عقب می‌رود، تابع به سمت جلو می‌رود.

روش متفاوت

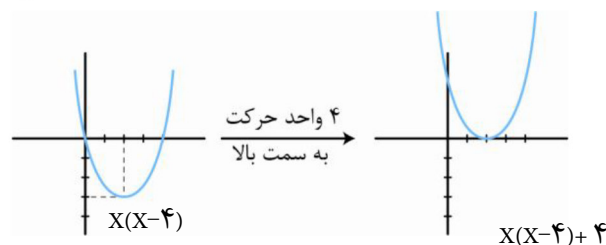
محل برخورد تابع با محور x ها در واقع جایی است که مقدار تابع «صفر» می‌شود یعنی همان ریشه تابع است. مثلاً در مثال بالا ریشه تابع x^2 ، صفر است یعنی با قرار دادن صفر در تابع صفر به ما می‌دهد ولی بعد از کم شدن «۱» از x ریشه تابع «۱» می‌شود یعنی در نقطه $x=1$ با محور x ها برخورد می‌کند.

روش ۳

وقتی تابعی را به صورت بسته به ما می‌دهند مثلاً: $(x-2)^2$ ما می‌توانیم آن را با انتقال عمودی هم رسم کنیم. برای این کار تابع را باز می‌کنیم $(x^2 - 4x + 4)$ و داخل $x^2 - 4x$ از یک x فاکتور می‌گیریم و تابع را با توجه به ریشه‌ها رسم می‌کنیم و تابع رسم شده را به اندازه ۴ واحد به بالا می‌بریم.



$$(x-2)^2 = \underbrace{x^2 - 4x}_{x(x-4)} + 4 = \underbrace{x(x-4)}_{\text{تابع مادر}} + \underbrace{4}_{\text{عدد}}$$

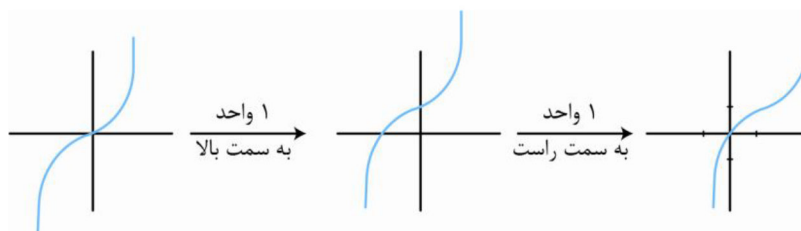


توجه توجه: این روش بیشتر اوقات برای توابع درجه ۲ کاربرد دارد و کاربرد چندانی برای توابع درجه ۳ ندارد دلیلش هم این است که در توابع درجه ۳ وقتی از x فاکتور می‌گیریم پیدا کردن ریشه‌های تابع درجه ۲ بدست آمده کار ساده‌ای نیست که کار ما را سخت می‌کند.

$$\underbrace{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}_{x(x^2 + 3x + 3)}$$

توجه توجه: توابع می توانند هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی را داشته باشند مانند:

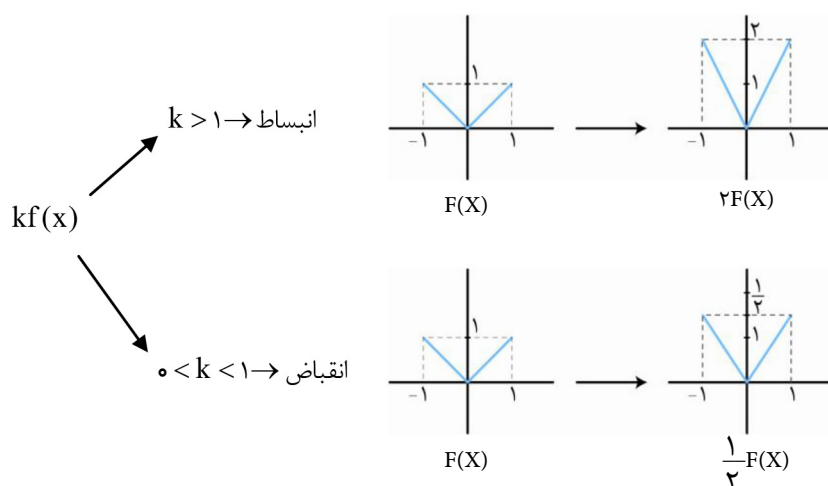
$$F(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1 - 1 \Rightarrow (x-1)^3 + 1 \quad (\text{خرداد } 1402)$$



توجه! تقدم و تأخر انتقالها را به صورت مفصل بعد از تدریس انبساط و انقباضها توضیح می دهیم.

انقباض و انقباض عمودی

در این حالت عددی در یک تابع ضرب می شود که باعث کوچک و یا بزرگ شدن تابع در راستای محور y ها شود که این بزرگ شدن برای اعداد بزرگتر از «۱» (انبساط) و کوچک شدن (انقباض) برای اعداد بین صفر و «۱» است.



یک سوال حال اگر k عددی منفی باشد چه؟! در این حالت نمودار تابع را نسبت به محور « x » ها قرینه می کنیم. یعنی x نقاطی که روی تابع هستند را دستکاری نمی کنیم و y آن نقاط را در « $-k$ » ضرب می کنیم و روی محور نشان می دهیم و نقاط جدید را به هم وصل می کنیم و تبریک می گم شما نمودار $-kF(x)$ و $k \in \mathbb{N}$ رو رسم کردین.

نکته حرفه ای: در انقباض و انقباض عمودی دامنه توابع ثابت و برد توابع k برابر می شود یعنی با داشتن سروته برد (برای توابع کراندار) تابع $F(x)$ می توانید برد تابع $kF(x)$ را بدست آورید به طوری که دامنه ثابت است.

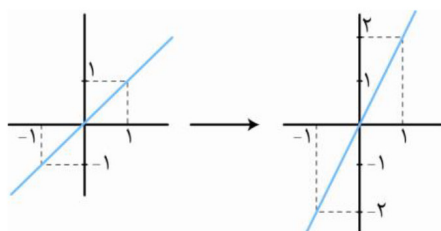
$$F(x):[a,b] \rightarrow [d,c] \quad kF(x):[a,b] \Rightarrow [kd, kc]$$

کمی مثال:

$$F(x) = x$$

$$g(x) = 2x$$

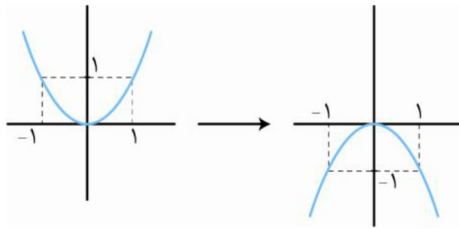
$$k = 2$$



$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2$$

$$k = -1$$

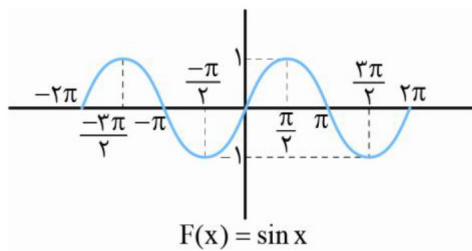


انقباض و انقباض افقی

دوستان دقیقاً مثل انتقال‌های افقی که برعکس انتقال‌های عمودی بود اینجا هم قضیه برعکسه. خودمونی بگم تغییراتی که روی x ها انجام می‌دیم، x برعکس اون تغییراتو اعمال می‌کنه ولی y ها نه! y ها دقیقاً همون تغییری که ما روشن انجام می‌دیم همون تغییرو اعمال می‌کنه.

بذارید روی یک مثال قشنگ توضیح بدم. مثلاً داریم:

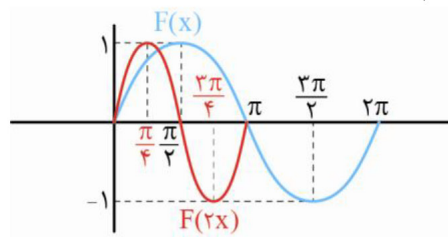
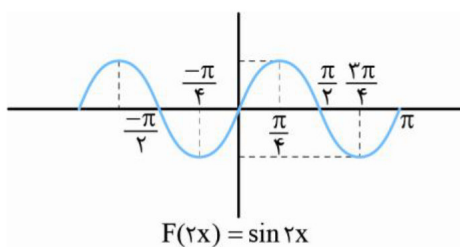
باید اول تابع $f(x)$ را رسم کنیم که به صورت زیر است:



حال برای رسم $F(2x)$ باید توجه داشته باشیم که اعمال تغییر روی x ها برعکس است که این یعنی برخلاف نظر

خیلی‌ها به جای اینکه x ها «2» برابر شوند باید « $\frac{1}{2}$ » برابر شوند ولی خب یک سوال ایجاد می‌شود که چرا؟! در باکس

پایین توضیح می‌دهم.



همان‌طور که دقت می‌کنید ضرب یک عدد در x در دوره تناوب $\sin x$ نیز تأثیر داشت که دلیل آن را در فصل بعد

بررسی می‌کنیم.

جواب سوالی که در مثال بالا پیش آمد

سوال اینه که چرا وقتی یک عدد در "x" ضرب میشه معکوسش اعمال میشه؟ درواقع این سوالو من قبلاً جواب دادم ولی

از اونجایی که خیلی برام مهمین دوباره میگم ☺

فرض کنید $F(a) = a$ وقتی عددی در "x" ضرب می‌شود مثلاً «۳» می‌شود $F(3a)$. حال اگر بخواهیم تابع F به ما عدد "a" رو بده باید جلوی تابع "a" بشه. **دقت کنید جلوی تابع "a" بشه نه "x"** و جلوی تابع F جلوی تابع F . «۳x» وجود دارد

$$3x = a \Rightarrow x = \frac{a}{3}$$

که باید برابر "a" بشه پس داریم:

یعنی باید به $F(3x)$ بدیم که به ما a بده در صورتی که قبلاً در تابع $F(x)$ با دادن a به تابع به ما a می‌داد. پس

نتیجه می‌گیریم که باید در اعمال تغییر در "x" ها برعکس عمل کنیم.

توجه توجه! خطرا!

داخل امتحان نهایی حتماً باید جدول نقطه یابی را رسم کنید و گرنه نمره‌ای به شما تعلق نمی‌گیرد. همچنین سعی کنید در امتحان هیچ چیز رو داخل ذهنتون حساب نکنید و از نوشتن زیاد نترسید چون به نوشته‌های شما نمره می‌دهند نه به تفکراتتان.

تمرین

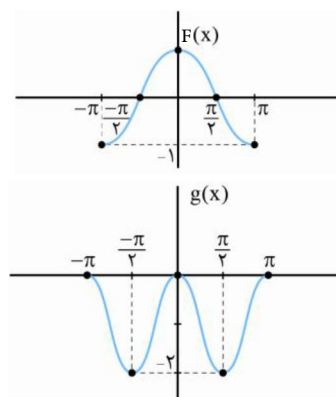
$$F(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \cos 2x - 1$$

(شهریور ۹۹)

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π
f(x)	-۱	۰	۱	۰	-۱

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π
g(x)	۰	-۲	۰	-۲	۰

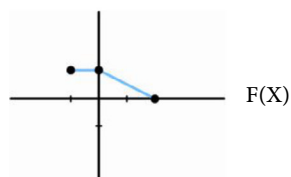


نکته: تقدم تأخر در انتقال و انبساط انقباض

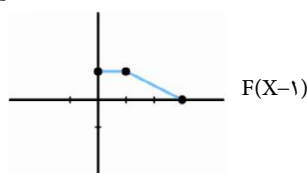
از انبساط و انقباض نه در کنکور و نه در امتحانات نهایی سوال نیامده ولی از انتقالات سوالات فراوانی آمده

نمودار $F(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = F(x-1) + 2$ را رسم کنید و دامنه آن را بنویسید. (دی ۱۴۰۰)

مرحله اول: انتخاب اینکه اول انتقال عمودی یا افقی را انجام دهیم (فرقی نداره)

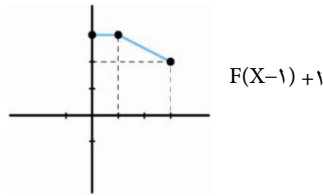


مرحله دوم: ما انتقال افقی را انتخاب می‌کنیم چون نیاز به دقت بالایی دارد.

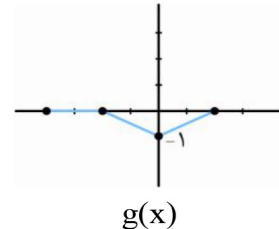
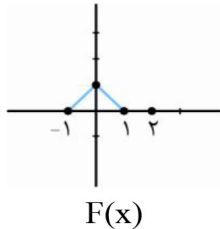


مرحله سوم: انتقال عمودی رو انجام می‌دهیم.

$$Dg(x) = [0, 3]$$



اگر نمودار تابع $F(x)$ به صورت زیر باشد نمودار تابع $g(x) = kF(k'x + a) + b$ مقادیر k و k' ، a ، b را بیابید.



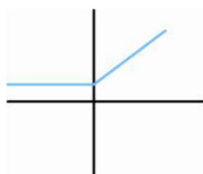
جواب: $a, b = 0$ ← $k, k' = -\frac{1}{2}$ ← منفی به دلیل قرینه شدن تابع نسبت به محور x ها و y هاست.

به دلیل اینکه نه تابع بالا و یا پایین شده و نه چپ و راست فقط نسبت به محور x ها و y ها قرینه شده و در یک ضریب ضرب شده.

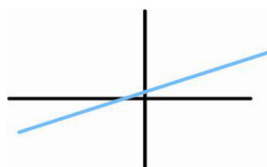
$$k = -\frac{1}{2} \leftarrow \text{چون برد تابع نصف شده}$$

$$k' = -\frac{1}{2} \leftarrow \text{چون دامنه تابع «2» برابر شده}$$

توابع صعودی و نزولی



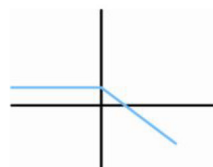
صعودی



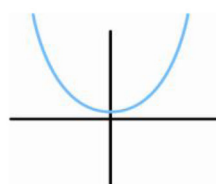
صعودی (اکید)



هم صعودی و هم نزولی



نزولی

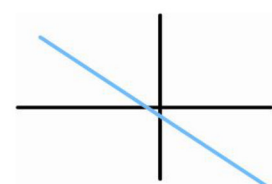


نه نزولی و نه صعودی

(باید بازه بندی بشه)

صعودی $\Rightarrow [0, +\infty)$

نزولی $\Rightarrow (-\infty, 0]$

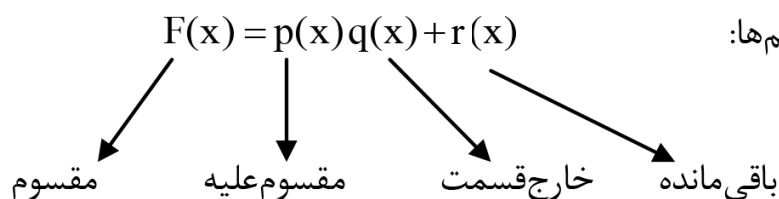


نزولی (اکید)



بخش پذیری

قضیه تقسیم ها:



توجه توجه: همیشه باید درجه باقی مانده از مقسوم کمتر باشد. در غیر این صورت تقسیم را ادامه می دهیم تا این اتفاق بیفتد.

نکته: اگر $r(x) = 0$ باشد یعنی $F(x)$ بر $p(x)$ بخش پذیر است.

نکته حرفه ای: اگر $p(x)$ درجه اول باشد، می توانید با گذاشتن ریشه آن در معادله قضیه تقسیم باقی مانده $(r(x))$ را بدست آورید.

مثال: اگر باقی مانده تقسیم چندجمله ای $F(x) = x^4 + kx^2 - 3$ بر $x + 1$ برابر ۲ باشد، k را تعیین کنید.

(شهریور ۱۴۰۱)

$$p(-1) = 0$$

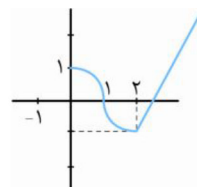
$$x^4 + kx^2 - 3 = q(x)(x + 1) + r(x) \xrightarrow{x=-1} 1 + k - 3 = 2 \Rightarrow \boxed{k = 4}$$

انقباض افقی

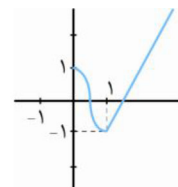
$$F(kx)$$

$$k > 1$$

طول ها $\frac{1}{k}$ برابر می شوند



$F(x)$



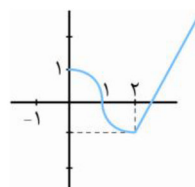
$F(2x)$

انبساط افقی

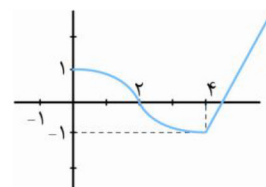
$$F(Kx)$$

$$0 < k < 1$$

طول ها $\frac{1}{k}$ برابر می شوند



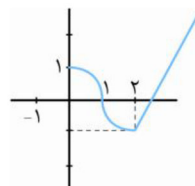
$F(x)$



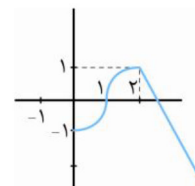
$F(\frac{1}{2}x)$

$$-F(x)$$

نسبت به محور x ها قرینه می شود



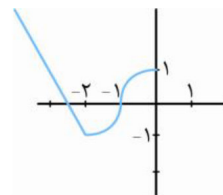
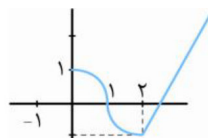
$F(x)$



$-F(x)$

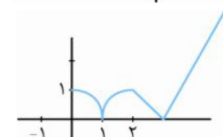
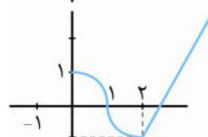
$$F(-x)$$

نسبت به محور y ها قرینه می‌شود



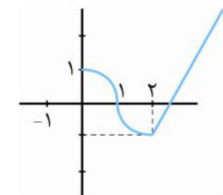
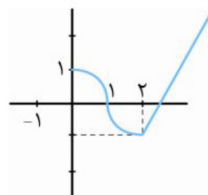
$$|F(x)|$$

بخشی که زیر محور x هاست را قرینه کرده و در بالای محور x ها می‌کشیم



$$F(|x|)$$

بخشی که سمت چپ محور y هاست را پاک کرده و قرینه بخش سمت راست را در سمت چپ می‌کشیم

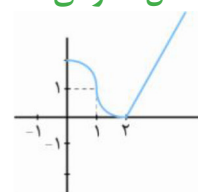
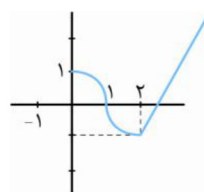


جمع‌بندی ۱

$$F(x) + k$$

$$k > 0$$

k واحد به سمت بالا



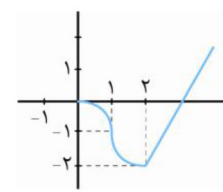
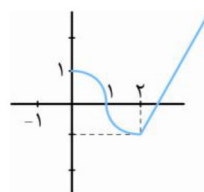
$$F(x)$$

$$F(x) + 1$$

$$F(x) - k$$

$$k > 0$$

k واحد به سمت پایین



$$F(x)$$

$$F(x) - 1$$

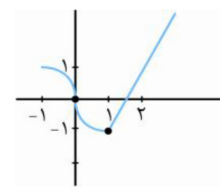
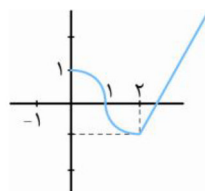
انتقال عمودی فقط روی برد تأثیر می‌گذارد

انتقال افقی

$$F(x + k)$$

$$k > 0$$

k واحد به سمت چپ

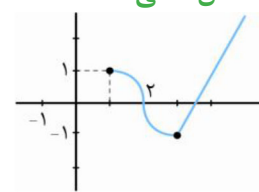
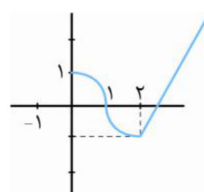


انتقال افقی

$$F(x - k)$$

$$k > 0$$

k واحد به سمت راست



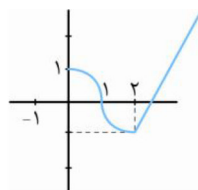
انتقال افقی فقط روی دامنه تأثیر می‌گذارد

انبساط عمودی

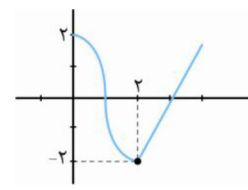
$$kF(x)$$

$$k > 1$$

عرض‌ها k برابر می‌شوند



$F(x)$



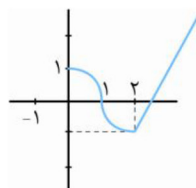
$2F(x)$

انقباض عمودی

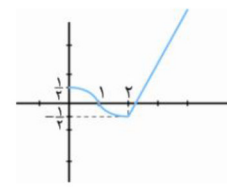
$$kF(x)$$

$$0 < k < 1$$

عرض‌ها k برابر می‌شوند



$F(x)$



$\frac{1}{2}F(x)$

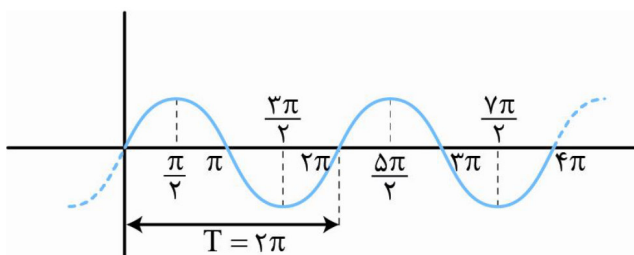
مفاهیم

دوره تناوب: دوره تناوب معمولاً برای توابع مثلثاتی کاربرد دارد. به طور کلی و هر تابعی که یک واحد تکرارشونده داشته باشد دوره تناوب دارد به کوچکترین واحد تکرارشونده دوره تناوب می‌گویند. خواص آن به دامنه باشد مخصوصاً در توابع $\tan$ و $\cot$

به زبان ریاضی

$$\forall T \in \mathbb{R} \quad \text{s.t} \quad F(x) = F(x + T) = F(x.T)$$

اگر شرط مقابل برقرار باشد می‌گوییم که تابع دوره تناوب T را دارد. حال تعریف بالا چه می‌گوید. می‌گوید که T به شرطی دوره تناوب است که اگر $F(x)$ را به اندازه T به سمت راست یا چپ انتقال دهیم باز روی خود تابع قرار بگیرد.

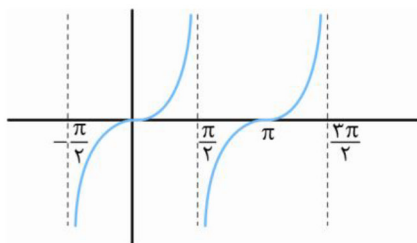


دوره تناوب توابع مثلثاتی به صورت زیر حساب می‌شوند:

	T	Max	Min
$a \sin(bx) + c$	$\frac{2\pi}{ b }$	$ a + c$	$- a + c$
$a \cos(bx) + c$	$\frac{2\pi}{ b }$	$ a + c$	$- a + c$
$a \tan(bx) + c$	$\frac{\pi}{ b }$	$+\infty$	$-\infty$
$a \cot(bx) + c$	$\frac{\pi}{ b }$	$+\infty$	$-\infty$

توابع تانژانت tan و کتانژانت cot

در کتاب فقط نمودار تابع تانژانت و دامنه آن آمده است و خوب مسلماً نیازی هم به آن نیست ولی خوب نمودار cot را نیز رسم می‌کنیم.

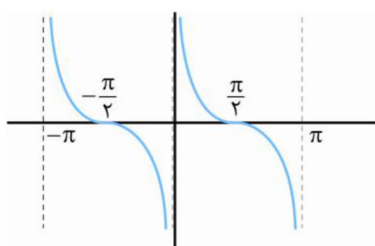


$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$T = \pi$$

$$f(x) = \tan(x)$$



$$g(x) = \cot(x)$$

$$D_g = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$$

معادلات مثلثاتی

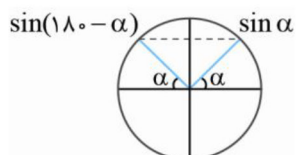
تعداد جواب‌ها رو خواست ← رسم نمودار و شمارش تعداد نقاط برخورد
معادلات مثلثاتی
جواب‌ها رو خواست ← بدست آوردن معادله کلی جواب و عددگذاری

مفاهیم

معادلات مثلثاتی همانند همان معادلات جبری هستند فقط در آنها توابع مثلثاتی وجود دارد.

معادله کلی جواب‌های توابع مثلثاتی:

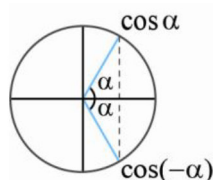
$$\sin x = \sin \alpha$$



$$x = 2k\pi + \alpha$$

$$x = 2k\pi + \pi - \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

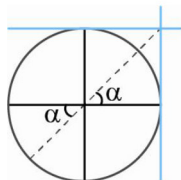
$$\cos x = \cos \alpha$$



$$\begin{aligned} x &= 2k\pi + \alpha \\ x &= 2k\pi - \alpha \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan \alpha$$

$$\cot x = \cot \alpha$$



$$x = k\pi + \alpha \quad k \in \mathbb{Z}$$

نکات کمکی

سعی کنید در معادلات مثلثاتی، عبارت را جوری ساده کنید که به ضرب دو عبارت مساوی صفر و یا به برابری دو تابع مثلثاتی برسید و خب این مهارت با تمرین زیاد بدست می آید.

فرمول هایی که باید حفظ باشید

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

مثال: معادله $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.

$$\cos 3x = \cos x$$

$$3x = 2k\pi + x \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi$$

$$3x = 2k\pi - x \Rightarrow 4x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

k	۱	۲	۳	۴
x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

جواب های معادله مثلثاتی $4 \sin x + 2\sqrt{3} = 0$ را در بازه $[0, 2\pi]$ بدست آورید. (خرداد ۹۹)

$$4 \sin x = -2\sqrt{3} \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3}$$

$$x = (2k+1)\pi - \frac{4\pi}{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{3} \quad x = \frac{4\pi}{3}$$

معادله $\sin x \cos x = \frac{1}{4}$ را حل کنید.

(خرداد ۱۴۰۲)

$$\sin x \cos x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

(دی ۱۴۰۱)

معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

برای ساختن معادله ساده‌ای از این معادله پیچیده باید عدد «۱» رو از بین ببریم و درنتیجه از فرمولی برای $\cos 2x$ استفاده می‌کنیم که در آن «-۱» دارد.

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0$$

$$\cos x (2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2} \\ 2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{2} \end{cases}$$

تذکر: خطر: هیچ‌وقت در معادله‌ها ساده نکنید چون باعث حذف بعضی از جواب‌ها می‌شود.

حدهای نامتناهی:

حدهای نامتناهی از اسمشان معلوم است که حدهایی هستند که پایان و انتهای آن‌ها معلوم نیست و یا به زبان ریاضی " x " به چه عددی باید میل کند و یا نزدیک شود که مقدار " y " به ∞ میل کند، که در حد کتاب دوازدهم $\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ می‌شود.

تذکر: صفری که در مخرج کسری است که جواب حد آن بی‌نهایت است، صفر حدی است و خود صفر نیست چون اگر خود صفر باشد:

(۱) کسر تعریف نشده است؛

(۲) ما در حد هستیم و عددی که در حد هستند خود آن عدد نیستند؛ فقط اعدادی هستند که به شدن به آن عدد نزدیک می‌شوند و به خاطر نزدیک بودن آن خود آن عدد را می‌گیریم.

بگذارید با یک مثال روشن‌تون کنم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 2x = 4$$

«۴» خود «۴» نیست، فقط عددی هست که خیلی به «۴» نزدیک می‌شود.

x خود «۲» نیست، یک عددی نزدیک به «۲» هست.

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{(x - 1)} \quad \begin{cases} \rightarrow 1^+ : \frac{2}{\cdot+} = +\infty \\ \rightarrow 1^- : \frac{2}{\cdot-} = -\infty \end{cases}$$

تذکر: باید حساب کنید که صفری که در مخرج هست، صفر مثبت است یا صفر منفی؛ چون در علامت ∞ تأثیر دارد. مثلاً:

$$\frac{\text{عددی} +}{\cdot+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عددی} +}{\cdot-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عددی} -}{\cdot+} = -\infty$$

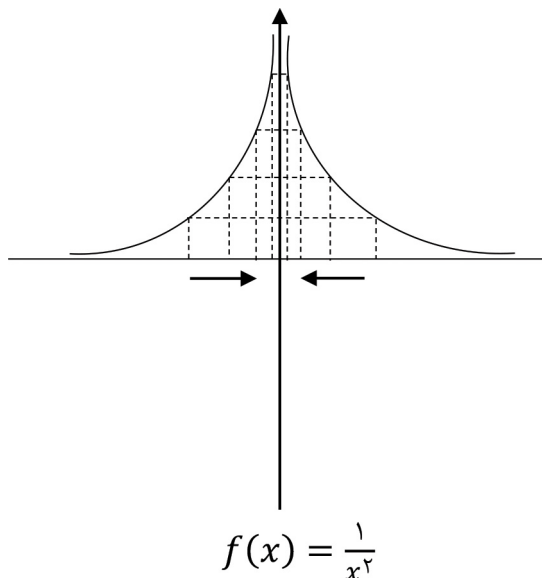
$$\frac{\text{عددی} -}{\cdot-} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\cdot} = \text{تعریف نشده}$$

مثال: حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad \begin{cases} \rightarrow \cdot^- \rightarrow \frac{1}{(\cdot-)^2} = \frac{1}{\cdot+} = +\infty \\ \rightarrow \cdot^+ \rightarrow \frac{1}{(\cdot+)^2} = \frac{1}{\cdot+} = +\infty \end{cases} \rightarrow +\infty$$

هرچه x به سمت صفر میل می‌کند، $\frac{1}{x}$ به سمت ∞ می‌رود.



مجانِب قائم: وقتی جواب حدی می شود ∞ (چه مثبت و چه منفی) می گوییم که آن تابع در آن نقطه مجانب قائم دارد.

$$\forall x \in R \text{ s.t. } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$$

در نتیجه: $f(x)$ در a دارای مجانب قائم است.
یا $x = a \leftarrow$ مجانب قائم.

مثال: حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$(1401 \text{ شهریور}) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[2^-] - 2}{2^- - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[1] - 2}{2^- - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$(1402 \text{ شهریور}) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[x] - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[1^-] - 1}{(1^- - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[0] - 1}{(1^- - 1)^2} = \frac{-1}{(0^-)^2} = \frac{-1}{0^+} = +\infty$$

$$(1401 \text{ دی}) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax - 3}{(2 - x)^3} = +\infty \quad a = ? \quad \frac{2a - 3}{0^-} = +\infty$$

از آنجا که 0^- و جواب $+\infty$ پس صورت نیز باید عددی منفی باشد که بشود $+\infty = \frac{\text{عددی}^-}{0^-}$ پس داریم:

$$2a - 3 < 0 \rightarrow a < \frac{3}{2}$$

حد در بی نهایت:

مفاهیم: یعنی وقتی " x " میل می کند به سمت ∞ ، تابع $f(x)$ به سمت چه عددی نزدیک می شود و برای محاسبه این حد از هم ارزی پرتوان استفاده می کنیم که یعنی از هر عبارت، عبارتی را برمی داریم که بزرگترین توان یا درجه را داشته باشد. بعد از ساده سازی اگر به عدد رسیدیم، گوییم که تابع حد در بی نهایت دارد ولی اگر به ∞ رسیدیم گوییم تابع حد در بی نهایت ندارد.

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 3x + 4} \sim \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 + 3x^3 + x^2 - x + 1}{3x^4 + x^3 + x^2 + 5x - 8} \sim \frac{2x^4}{3x^4} = \frac{2}{3}$$

$$(شهریور ۱۴۰۲) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x - 1}{2 + x - x^4} \sim \frac{x^4}{-x^4} = -1$$

$$(شهریور ۱۴۰۱) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 2x + 1}{4x - 1} \sim \frac{-x^2}{4x} = \frac{-x}{4} = \frac{+\infty}{4} = +\infty$$

مجانِب افقی: هرگاه حد در بی‌نهایت تابعی موجود بود، گوییم که تابع دارای مجانب افقی است و مجانب افقی آن را همان عددی که به سمت آن ∞ در میل می‌کند، گوییم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 4}{x - 4} \sim \frac{x}{x} = 1$$

$y = 1 \leftarrow$ مجانب افقی
مثال: اگر $y = 2$ مجانب افقی تابع $f(x) = \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 3x}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (شهریور ۱۴۰۱)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^2 + 1}{2x^2 - 3x} = 2 \rightarrow \frac{ax^2}{2x^2} = 2 \rightarrow \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$$

هنگامی $y = 2$ مجانب افقی تابع است که حد تابع در بی‌نهایت وجود داشته باشد. پس حد تابع در بی‌نهایت را مساوی "۲" قرار می‌دهیم و از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم.

اگر $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2 + x}{2x^2 + 3} = 7$ باشد، مقدار m را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{mx^2 + x}{2x^2 + 3} = 7 \rightarrow \frac{mx^2}{2x^2} = 7 \rightarrow \frac{m}{2} = 7 \rightarrow m = 14$$

وقتی حد تابع در بی‌نهایت وجود دارد، یعنی بزرگترین درجه بالا با بزرگترین درجه مخرج برابر است؛ پس $m \neq 0$ و از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم و $m = 14$ بدست می‌آید.

فصل ۴: مشتق

فرض کنید نمودار تابع $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر باشد. نقطه P را با مختصات $P = (x_0, F(x_0))$ روی نمودار تابع F در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط L خطی است که بر نمودار تابع F مماس است. بدین معنی که خط L فقط در نقطه P تابع F را قطع می‌کند. حال چطور می‌توان به خط L معنا بخشید و آن را تعریف کرد.

به عبارت دیگر چطور می‌توان شیب این خط را تعریف کرد؟

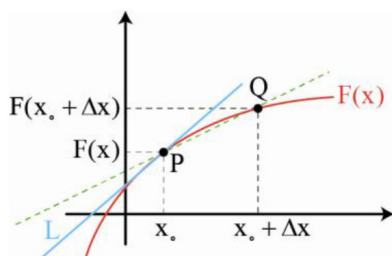
برای این کار فرض کنید نقطه $Q(x_0 + \Delta x, F(x_0 + \Delta x))$ یک نقطه دیگر باشد که روی F قرار دارد. می‌دانیم که شیب

$$M_{PQ} = \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \text{ خط } PQ \text{ برابر است با:}$$

نکته آن است که با نزدیک شدن نقطه Q به نقطه P شیب خطوط PQ به شیب خط L نزدیک می‌شود. با این ملاحظه

شیب خط متصور شده L را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

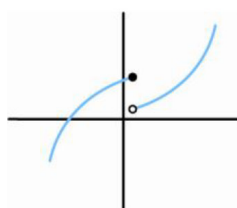
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} \text{ برای تابع } F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ شیب خط مماس بر تابع } F \text{ در نقطه } (x_0) \text{ را به صورت}$$



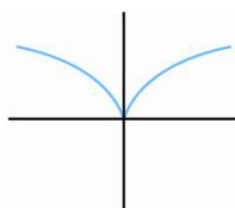
به زبون خودمونی: اگر از یک تابع مشتق بگیریم و داخل مشتق نمودار یک x جایگذاری کنیم عددی که مشتق به ما می‌دهد شیب خط مماس است که از نقطه x بر تابع مماس شده.

شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است ولی کافی نیست یعنی تابعی که مشتق‌پذیر است حتماً پیوسته هم هست ولی تابعی که پیوسته است لزوماً مشتق‌پذیر نیست.

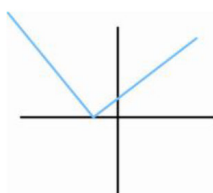
نقاط مشتق‌پذیر



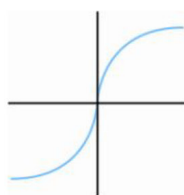
ناپیوسته



نقاط گوشه‌ای



نقاط زاویه‌دار



مماس قائم

$$F(x) = x^n$$

$$F'(x) = nx^{n-1}$$

$$(n \in \mathbb{R})$$

یک حالت عمومی تر حالتی است که همیشه برای فرمول مشتق نوشت یعنی شما هر نوع تابعی که دارید که بتوان آن را به صورت توان دار نوشت به راحتی با فرمول بالا می توان مشتق آن را حساب کرد.

مثال:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$۱) F(x) = x^n \rightarrow F'(x) = nx^{n-1}$$

$$۲) F(x) = u^n \rightarrow F'(x) = n \times u' \times u^{n-1}$$

u یک تابع دلخواه

$$۳) F(x) = v \times u \rightarrow F'(x) = v' \times u + v \times u'$$

که در آن v و u توابعی مجزا هستند.

$$۴) F(x) = \frac{u}{v} \rightarrow F'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$۵) (F \pm g)' = F'(x) \pm g'(x)$$

$$۶) (kF(x))' = kF'(x) \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$۷) y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$۸) F(x) = \sqrt[3]{x} \rightarrow F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$۹) \left(\frac{1}{F(x)}\right)' = \frac{-F'(x)}{F^2(x)}$$

همه توابعی که در اینجا مشتق آنها را می نویسیم می توان با فرمول تعریف مشتق: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ یا

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \text{ می توان آنها را ثابت کرد.}$$

$$۱۰) (F \circ g)' = g'(x) \times F'(g(x))$$

$$۱۱) F(x) = x^n \Rightarrow F'(x) = nx^{(n-1)} \Rightarrow F''(x) = n(n-1)x^{(n-2)}$$

↓
مشتق مرتبه ۲

$$۱۲) F(x) = \sin x \rightarrow F'(x) = \cos x$$

$$۱۳) F(x) = \sin u \rightarrow F'(x) = u' \cos x$$

$$۱۴) F(x) = \cos x \rightarrow F'(x) = -\sin x$$

$$۱۵) F(x) = \tan x \rightarrow F'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$۱۶) F(x) = \tan u \rightarrow F'(x) = u'(1 + \tan^2 u)$$

$$۱۷) F(x) = \cot x \rightarrow F'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

$$۱۸) F(x) = \cot u \rightarrow F'(x) = -\sin x u'(1 + \cot^2 u)$$

مثال: اگر $F(x) = x^2 - 3x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $F'(1)$ را حساب کنید. (شهریور ۱۳۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

مشتق آنها صفر است ولی نقاط اکسترمم حساب نمی شود.

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)} = \boxed{-1} \quad \checkmark$$

$$F'(x) = 2x - 3 \Rightarrow \boxed{F'(1) = -1} \quad \checkmark$$

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$F(x) \sin^3(\Delta x) = 3 \sin^2(\Delta x) \times \cos(\Delta x) \times \Delta = 1 \cdot \sin^2(\Delta x) \times \cos(\Delta x) \quad (\text{دی } 1400)$$

$$F(x) = 1(x^2 - 6)^3 \left(\frac{1}{4}x + 1\right) = 3(x^2 - 6)(2x) \left(\frac{1}{4}x + 1\right) + \left(\frac{1}{4}\right)(x^2 - 6)^3 \quad (\text{دی } 1400)$$

$$F(x) = \frac{9x + 1}{x - x^2} = \frac{(9)(x - x^2) - (1 - 2x)(9x + 1)}{(x - x^2)^2} \quad (\text{شهریور } 1401)$$

مثال: مشتق پذیری تابع $F(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases}$ را در $x = 1$ بررسی کنید.

$$\text{پیوسته است} \quad \begin{cases} 1^+ \rightarrow 2 \\ 1 \rightarrow 2 \\ 1^- \rightarrow 2 \end{cases} \quad \text{اول پیوستگی}$$

$$\text{از ضوابط مشتق می‌گیریم} \quad \begin{cases} 2x & x > 1 \\ 3 & x < 1 \end{cases}$$

$$F'_+(1) \neq F'_-(1) \quad \text{تابع در } x = 1 \text{ مشتق پذیر نیست.}$$

اگر $F(x) = \cos(2x)$ باشد مقدار $F''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را بدست آورید.

$$F(x) = \cos(2x) \rightarrow F'(x) = -\sin(2x) \times 2 \rightarrow F''(x) = -2 \times \cos(2x) \times 2$$

$$F''(x) = -4 \cos(2x) \rightarrow F''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{F''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}}$$

مفاهیم

فصل ۵: کاربرد مشتق

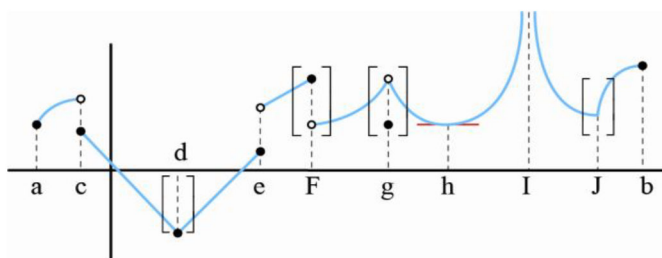
بحرانی: نقاطی هستند که یا مشتق پذیر نیستند و یا مشتق در آن نقاط صفر است.

اکسترمم نسبی: نقاطی که مشتق در آن نقاط صفر و یا وجود ندارد و آن نقطه یا نسبت اطراف خود بالاتر یا پایین تر است. (نمودار F' باید تغییر علامت بدهد).

اکسترمم مطلق: نقاطی هستند که نسبت به تمام نقاط تابع یا بالاتر هستند یا پایین تر. (سروته باز، جز این نقاط قبول هستند).
تذکر: نقاط بحرانی باید حتماً عضو دامنه باشند مثلاً:

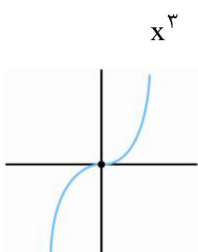
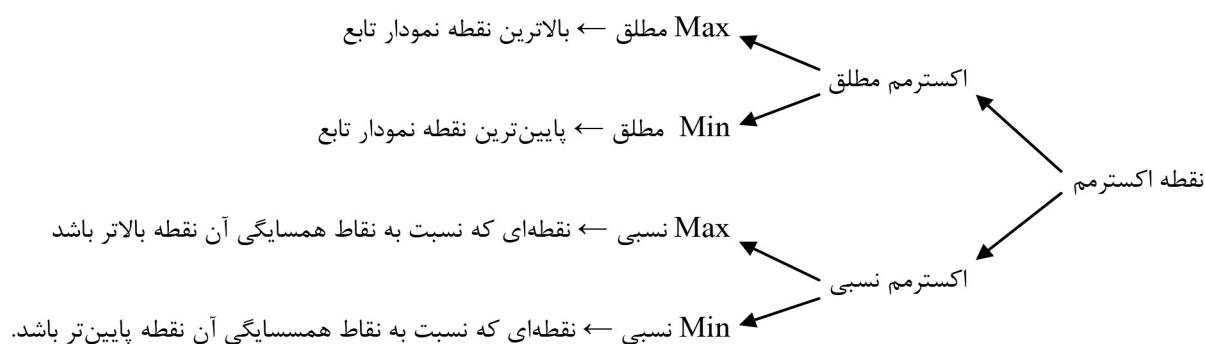
در $x = 0$ بحرانی نیست در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. $F(x) = \frac{1}{x}$

توجه: نقاط اکسترمم بحرانی هستند ولی نقاط بحرانی الزاماً اکسترمم نیستند یا به زبانی دیگر همه نقاطی که اکسترمم هستند حتماً بحرانی هستند ولی نقاطی که بحرانی هستند حتماً اکسترمم نیستند.



نقاط اکسترمم نسبی: d, h, J, F, g و

بحرانی: $a, c, d, e, F, g, h, J, b$



خطر: نقاطی هستند که مشتق آنها صفر است ولی اکسترمم نیستند مانند نمودار تابع x^3 به صورت روبرو
است که در $x = 0$ مشتق آنها صفر است ولی نقطه اکسترمم حساب نمی شود.

نکته حرفه ای: بحرانی تمام ریشه های F' هستند ولی اکسترمم نسبی ریشه های غیرمکرر زوج F' هستند.

محانب قائم

$$F'(x) = (x-3)^3(x-4)^4(x+2)^2(x-1)$$

۱ و ۲ و ۳ و ۴ : نقاط بحرانی

۳ و ۴ و ۱ : نقاط ext نسبی

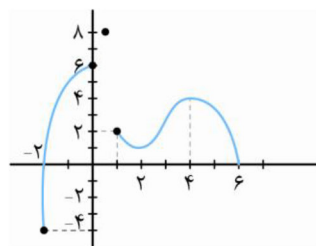
	-2	1	3	4
F'	-	-	+	-
	بحرانی	ext	ext	ext
	بحرانی	بحرانی	بحرانی	بحرانی

توجه: ما برای نقاط ext نسبی مقدار "x" را اعلام می‌کنیم ولی برای ext مطلق مقدار "y" را اعلام می‌کنیم.

اگر $F(x)$ در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و $F(a) = F(b)$ باشد، تابع F حتماً در این بازه هم Max مطلق و هم Min مطلق دارد.

(خرداد ۱۴۰۱)

با توجه به نمودار داده شده، سوالات زیر را پاسخ دهید.



Max مطلق ۸

Min مطلق -۴

Max نسبی ۴

Min نسبی ۲

ضرایب a و b را در تابع $F(x) = x^3 + ax - b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(1, 2)$ اکسترمم نسبی تابع باشد.

(شهریور ۱۴۰۱)

$$F(1) = 2 \Rightarrow 1 + a - b = 2 \Rightarrow \boxed{b = -4}$$

$$F'(1) = 0 \Rightarrow F'(x) = 3x^2 + a \Rightarrow 3 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که $x^3 - 12x + 4$ در آن بازه نزولی اکید است؟ (۲ و -۲)

$$F'(x) = 3x^2 - 12 = \frac{3(x^2 - 4)}{(x-2)(x+2)}$$

	-2	2
F'	+	-
	+	+

نکته: اگر تابع مشتق را تعیین علامت کنید، ۳ حالت پیش می‌آید:

$F'(x) = 0$ تابع ثابت است $\Leftarrow$ شیب $= 0$ هم نقاط ext نسبی و مطلق هستند.

$F'(x) \geq 0$ تابع صعودی است و اگر $F'(x) > 0$ باشد تابع صعودی اکید است.

$F'(x) \leq 0$ تابع نزولی است و اگر $F'(x) < 0$ باشد تابع نزولی اکید است.

(خرداد ۱۴۰۰)

Ext های مطلق تابع $F(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ را در بازه $[-1, 1]$ تعیین کنید.

	-1	1
F'	+	-
	+	+

$$F'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$\left. \begin{array}{l} F(-1) = -1 - 3 + 1 = -3 \\ F(0) = 1 \\ F(1) = 1 - 3 + 1 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Min مطلق} = -3 \\ \text{Max مطلق} = 1 \end{array}$$

بهینه‌سازی

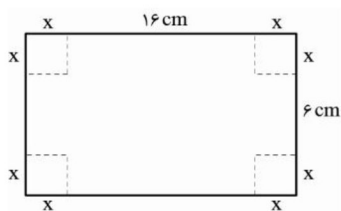
تابع فرض ← تابعی هست که از اطلاعات سوال می‌توان آن را نوشت. (رابطه بین دو متغیر رو دربیار)

تابع هدف ← تابعی هست که سوال از ما آن را سوال می‌کند. (یک متغیرش کنید)

وقتی که تابع هدف تک متغیره شد از آن مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم.

مثال: ورق فلزی مستطیل شکلی به طول ۱۶cm و عرض ۶cm در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های به ضلع x برش دهیم و آنها را کنار گذاریم. سپس لبه‌ی جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن شود. (شهریور ۱۴۰۰)

$$x \in (0, 1) \quad (1)$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{طول: } 16 - 2x \\ \text{عرض: } 6 - 2x \\ \text{ارتفاع: } x \end{array} \right\} V = (16 - 2x)(x)(6 - 2x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$$

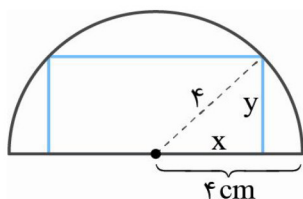
$$V' = \frac{12x^2 - 88x + 96}{4} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 22x + 24 = 0$$

$$x_1 = 6 \notin (0, 3) \quad \times$$

$$x_2 = \frac{4}{3} \quad \checkmark$$

(۱) اگر x خارج این محدوده باشد عرض مکعب صفر می‌شود و مکعب نمی‌تواند طول صفر داشته باشد

یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴cm باشد، طول و عرض مستطیل را طوری بدست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.



$$\begin{aligned} \text{طول} &= 2x \\ \text{عرض} &= y = \sqrt{16 - x^2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 16 \Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2} \end{aligned}$$

$$x \in (0, 4)$$

$$S(x) = 2x\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow \sqrt{64x^2 - 4x^4}$$

$$S'(x) = \frac{128x - 16x^3}{2\sqrt{64x^2 - 4x^4}} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} 128x - 16x^3 &= 0 & x_1 &= 0 & \times \\ 16x(8 - x^2) &= 0 & x^2 &= 2\sqrt{2} & \checkmark \\ (2\sqrt{2} - x)(2\sqrt{2} + x) & & x_2 &= -2\sqrt{2} & \times \end{aligned}$$

$$\text{طول} = 4\sqrt{2}$$

$$\text{عرض} = 2\sqrt{2}$$

نقطه عطف و جهت تقعر

نقطه عطف ← نقطه‌ای از تابع است که جهت تقعر در آن نقطه عوض می‌شود.

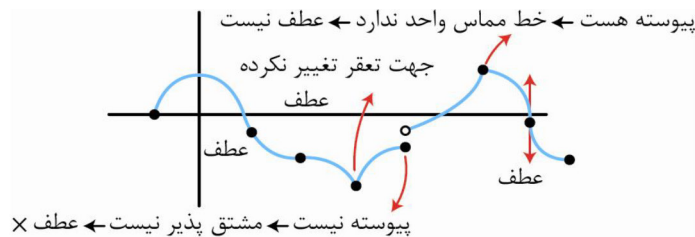
تقعر ← جهت گودی تابع رو تقعر می‌گویند، مثلاً «[U]» تقعر رو به بالا «[∩]» تقعر رو به پایین است.

$$-x^2$$

$$x^2$$

$$F''(x) < 0 \quad \checkmark$$

$$\searrow F''(x) > 0$$



توجه: در نقطه عطف تابع باید پیوسته و خط مماس واحد داشته باشد، در غیر این صورت گوییم

از نکته بالا نتیجه می‌گیریم که همه نقاط عطف وجود دارند به شرطی که یا $F''(x) = 0$ یا موجود نباشد ولی هر جایی که $F''(x) = 0$ بود و یا موجود نبود لزوماً نقطه عطف نیست.

جهت تقعر و نقطه عطف نمودار تابع $F''(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ را بدست آورید. (دی ۱۳۹۷)

$$F'(x) = -3x^2 + 6x \rightarrow F''(x) = -6x + 6 \xrightarrow{F''(x)=0} -6x + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+	0	-
y	∪	∩	∪

$x=1$ نقطه عطف

اگر نقطه $A(-1, 1)$ نقطه‌ی عطف منحنی $F(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ باشد، مقادیر a و b را بدست آورید.

$$F'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow F'(-1) = 0 \xrightarrow{\text{چون نقطه عطف هست}} -6 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a=3}$$

$$F(-1) = 1$$

$$= -1 + a - b - 1 \Rightarrow \boxed{b=0}$$

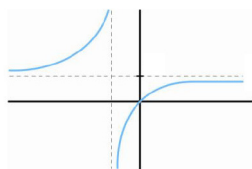
رسم نمودار تابع

برای توابع هموگرافیک اول مجانب‌های قائم و مجانب‌های افقی آن را بدست می‌آوریم و آنها را روی صفحه مختصات رسم می‌کنیم بعد از تابع یک بار مشتق می‌گیریم و تعیین علامت می‌کنیم تا وضعیت یکنوایی تابع مشخص شود. بعد تابع را رسم می‌کنیم.

جدول رفتار و نمودار تابع $x=1$ را رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+2} = 1 \rightarrow \text{مجانب افقی}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{-4}{0} = \infty \begin{matrix} \nearrow x^+ \rightarrow -\infty \\ \searrow x^- \rightarrow +\infty \end{matrix}$$



$x=-2$ مجانب قائم

x	-2
y'	+
y	∪

$$y' = \frac{4}{(x+2)^2} > 0 \text{ همیشه صعودی هست}$$

برای توابع درجه ۳

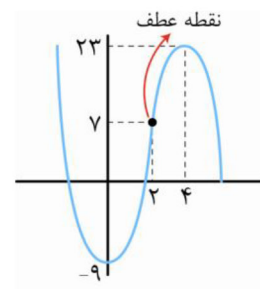
از تابع ۲ بار مشتق می‌گیریم و جهت تفکر تابع را مشخص می‌کنیم و با تعیین علامت $F'(x)$ رفتار یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم و با توجه به علامت x^3 نمودار را رسم می‌کنیم.

جدول رفتار و نمودار تابع $F(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x$ را رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

$$F'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x-4)$$

$$F''(x) = -6x + 12 = -6(x-2)$$

X	0	2	4
F'(x)	↘	↗	↘
F''(x)	+	0	-
F(x)			



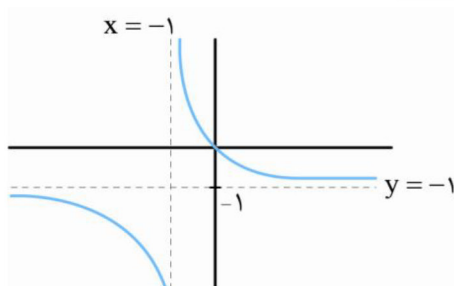
جدول رفتار و نمودار تابع $F(x) = \frac{-x}{x+1}$ را رسم کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \Rightarrow \boxed{y = -1} \text{ مجانب افقی}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x}{x+1} = \infty \Rightarrow \boxed{x = -1} \text{ مجانب قائم}$$

$$F'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} < 0 \leftarrow \text{همیشه نزولی اکید}$$

X	-1
F'(x)	-
F(x)	↘ ↘
	$-\infty$ $+\infty$



فصل اول: تابع

سوال ۱

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(ux)$ از انبساط (انقباض) نمودار تابع $y = f(x)$ در راستای محور x ها به دست می‌آید. $\times$ (خرداد ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$f(x) \xrightarrow{\text{دامنه نمودار } f(x) \text{ در } \frac{1}{p} \text{ ضرب می‌شود}} f(px)$$

* گفتیم که تغییرات روی دامنه همیشه برعکس اعمال می‌شوند؛ مثلاً:

ب) نقطه $(-8, 6)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطه $(-8, 12)$ $((-8, 3))$ روی نمودار $y = \frac{1}{3}f(x)$ متناظر است. $\times$

(دی ماه ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$f(-8) = 6 \quad \frac{1}{3}f(-8) = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

درسنامه: روشی که من برای این نمونه سؤالات استفاده میکنم به این صورت است که ابتدا نقطه مورد نظر را به دست می‌آورم، بعد مقدار f آن را نیز به دست می‌آورم؛ بعد اعمال را روی نقاط انجام میدهم. در مثال واضح‌تر است. به عنوان مثال:

$$f(6) = 2 \quad \frac{1}{3}f(6) = ? \Rightarrow \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

پاسخ:

سوال ۲ اگر نقطه $(2, 6)$ روی تابع $f(3x)$ باشد، با چه نقطه‌ای روی نمودار $\frac{1}{3}f(3x)$ متناظر است؟

ابتدا نقطه اصلی را که روی $f(x)$ است پیدا میکنیم. در این سؤال گفته که نقطه $(2, 6)$ روی $f(3x)$ هست؛ یعنی به « x »، « 2 » می‌دهیم و « 6 » می‌گیریم؛ یعنی:

$$f(\underbrace{3x}_2) = 6 \Rightarrow f(4) = 6$$

به دست آوردیم که $f(4) = 6$ است. حال از این داشته استفاده می‌کنیم.

به این صورت که جلوی $f(3x)$ را، یعنی $3x$ را مساوی « 4 » می‌گذاریم و « x » نقطه متناظر را به دست می‌آوریم.

$$3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow f(3x) \xrightarrow{x=\frac{4}{3}} f\left(3\left(\frac{4}{3}\right)\right) \Rightarrow f(4) = 6$$

$$\frac{1}{3}f(3x) \Rightarrow \frac{1}{3} \times 6 = 2 \quad \text{پس نقطه متناظر } \left(\frac{4}{3}, 2\right) \text{ است.}$$

سوال ۳

اگر بازه $[-2, 1]$ دامنه تابع $f(x)$ باشد، دامنه تابع $f(3x+1)$ برابر است. (شهریور ۱۳۹۹)

پاسخ:

f بین $[-2, 1]$ تعریف شده است؛ یعنی اگر عددی خارج از این بازه به f نسبت بدهیم، f در آن نقاط تعریف نشده است. پس یعنی $3x+1$ باید اعدادی بین $[-2, 1]$ به ما بدهد؛ چون f در بین آن اعداد $[-2, 1]$ تعریف شده است.

$$-2 \leq 3x+1 \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow x \in [-1, 0]$$

$\leq$: چون دامنه بسته است، به همین دلیل اکید نیست.

پس دامنه تابع $f(3x+1)$ به صورت $[-1, 0]$ است.



سوال ۴ نقطه $(۲-۱)$ در تابع $y = f(2x+1) - ۱$ متناظر با چه نقطه‌ای روی تابع $y = f(x)$ است؟ (خرداد ۱۳۹۹- خارج)

پاسخ:

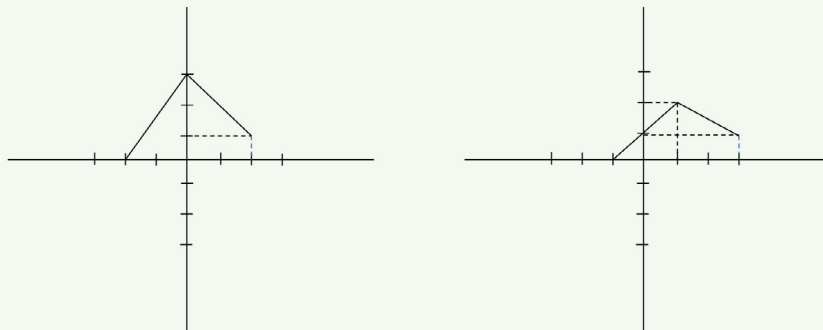
ابتدا در تابع $f(2x+1) - ۱$ به جای «X» ۲ می‌گذاریم؛ چون ۲ دامنه $f(2x+1) - ۱$ است.

$$f(2(2)+1) - ۱ = -۱ \Rightarrow \boxed{f(5) = ۰}$$

حال فهمیدیم که متناظر نقطه $(۲-۱)$ روی تابع $f(2x+1) - ۱$ ، روی تابع $f(x)$ ، $(5, ۰)$ است؛ که سؤال همین را نیز از ما خواسته است

سوال ۵ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-1)$ را رسم کرده و دامنه تابع g را تعیین کنید. (خرداد- ۱۴۰۱)

پاسخ:



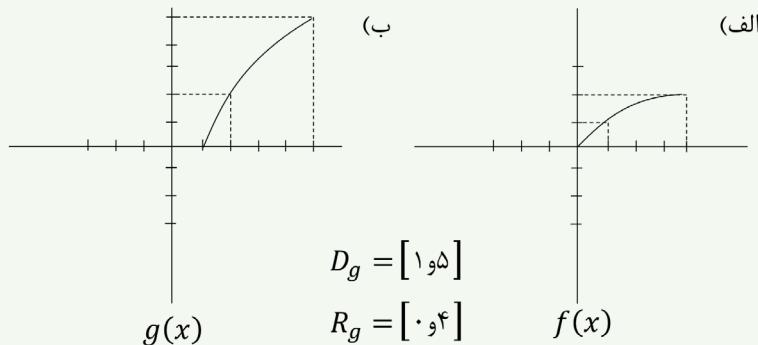
$$D_y = [-۱, ۳]$$

* همانگونه که قبلاً خواندیم، انتقالات روی x ها به صورت برعکس هستند؛ اما انتقالات روی محور y ها نه، به صورت مستقیم انجام میشوند.

سوال ۶ الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در بازه $[۰, ۴]$ رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = ۲f(x-1)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.

پاسخ:

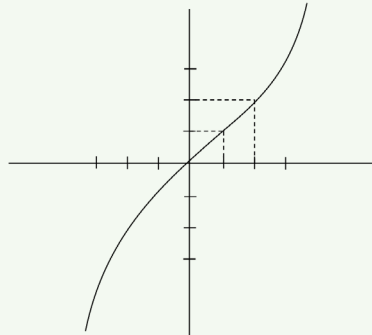


$$D_g = [۱, ۵]$$

$$R_g = [۰, ۴]$$

سوال ۷ نمودار تابع $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x) = x^3$ رسم کنید، سپس اکیداً یکنواختی تابع $g(x)$ را در تمام دامنه خود بررسی کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:



ضابطه تابع $g(x)$ با اضافه و کم کردن عدد «۱»، می‌تواند به یک ضابطه زیبا تبدیل شود. به گونه زیر:

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1}{(x-1)^3} \Rightarrow (x-1)^3 + 1$$

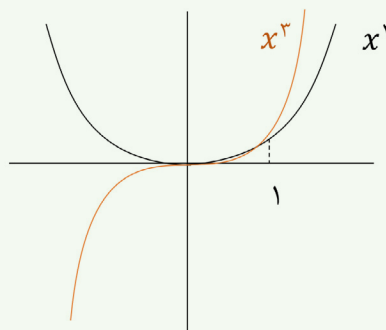
از آنجا که تعریف روبه‌رو برای g صادق است و یا $\forall a > b \Rightarrow g(a) > g(b)$

با توجه به شکل نمودار خواهیم فهمید که تابع $g(x)$ در $\mathbf{R}$ که دامنه‌اش است صعودی اکید است.

سوال ۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۳۹۹)

نمودار تابع $y = x^3$ در بازه $[0, 1]$ ، پایینتر از نمودار $y = x^3$ قرار دارد.

پاسخ:



سوال ۹ اگر $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125}$ باشد، حدود x را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

ابتدا پایه‌ها را به صورت توان‌دار و به صورت یک عدد در بازه $(1, +\infty)$ می‌نویسیم:

$$(\frac{1}{5})^{2x+1} \leq (\frac{1}{5})^{-3} \Rightarrow 5^{-2x-1} \leq 5^{-3}$$

حال که پایه‌ها با هم برابرند و پایه‌ها بزرگتر از «۱» هستند، می‌توان نامساوی را برای توان‌ها نوشت.

$$-2x - 1 \leq -3 \Rightarrow -2x \leq -2 \Rightarrow \boxed{x \geq 1}$$

سوال ۱۰ اگر $\log^{(x+1)} \leq \log^{(2x-3)}$ ، حدود x را بیابید. (شهریور ۱۳۹۸)

پاسخ:

از آنجا که مبناهای $\log$ با هم برابر و بزرگتر از یک است [یعنی تابع صعودی است]، می‌توان عبارات در پیرائز را با آن نامساوی آورد؛ یعنی به صورت زیر:

$$x + 1 \leq 2x - 3 \Rightarrow \boxed{4 \leq x}$$

سوال ۱۱ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای $P(x) = x^3 - ax^2 + bx + 2$ بر $x + 2$ و $x - 1$

بخشپذیر باشد. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

طبق قضیه تقسیم که در کتاب درس بود، ما اگر ریشه مقسوم‌علیه ما را در تابع مقسوم بگذاریم، جواب باید صفر شود؛ پس:

$$P(1) = 0 \Rightarrow 1 - a + b + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{b - a = -3} \quad (I)$$

$$P(-2) = 0 \Rightarrow -8 - 4a - 2b + 2 = 0 \xrightarrow{\div (-2)} +4 + 2a + b - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{2a + b = -3} \quad (II)$$

$$(II) - (I) \Rightarrow 2a + b - b + a = -3 + 3 \Rightarrow \boxed{a = 0}, \boxed{b = -3}$$

سوال ۱۲ اگر چند جمله‌ای $\frac{x^2 + ax - 8}{P(a)}$ بر $x - a$ بخشپذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$P(a) = 0 \Rightarrow a^2 + a^2 - 8 = 0 \Rightarrow 2a^2 = 8 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -2 \end{cases}$$

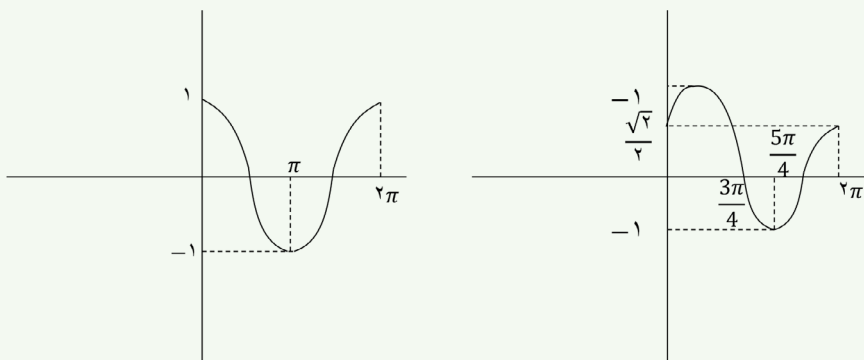
* نکته: اگر عبارت $P(a)$ بر $x - a$ بخشپذیر باشد، داریم که $P(a) = 0$ چون:

$$P(a) = (x - x)(a(x)) + y \rightarrow 0 \rightarrow \text{چون بخش پذیره}$$

$$P(a) = 0$$

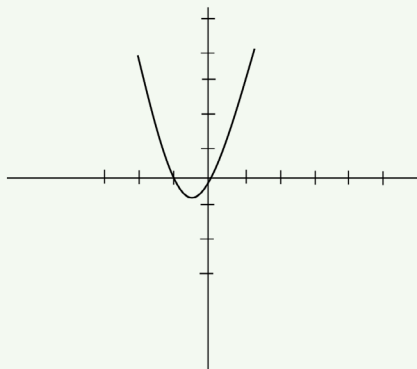
سوال ۱۳ نمودار تابع $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y = \cos(x)$ رسم کنید. $\left[2\pi\right]$ (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:



سوال ۱۴ ابتدا با رسم نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2x$ را رسم نمائید. سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازه‌های اکیداً صعودی و در چه بازه‌های اکیداً نزولی است. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:



نزولی اکید $\rightarrow (-\infty, -1)$

صعودی اکید $\rightarrow (-1, \infty)$

$$f(x) = x(x + 2)$$

* برای رسم نمودار ابتدا آن را به ساده‌ترین عاملها تجزیه میکنیم و سعی کنید به عوامل درجه یک یا عوامل درجه یک بتواند تبدیل کنید که آن عوامل همان ریشههای تابع هستند. مثلاً

$$f(x) = x^2 + x^2 \rightarrow f(x) = x^2(x + 1)$$

فصل دوم: مثلثات

سوال ۱۵ ضابطه تابع به فرم $y = a \cos(bx) + c$ را بنویسید که دوره تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن ۲- باشد.

پاسخ:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 2 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = \pi$$

$$\begin{cases} |a| + c = 4 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow c = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$|a| = \begin{cases} \cos(\pi x) + 2 \\ -\cos(\pi x) + 2 \\ \cos(-\pi x) + 2 \\ -\cos(+\pi x) + 2 \end{cases}$$

سوال ۱۶ دوره تناوب تابع $y = 8 \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر 6π است.

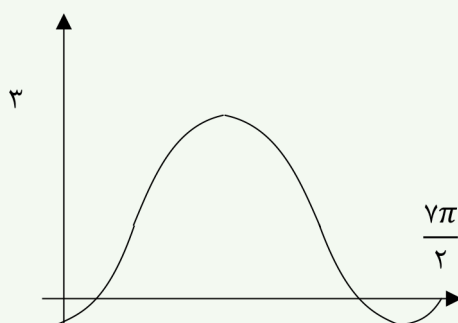
پاسخ:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$$

دوره تناوب یک تابع مثلثاتی از فرمول $T = \frac{2\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

سوال ۱۷ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع یا ضابطه $y = \frac{a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)}{a + b \cos(x)}$ است. a و b را بیابید؟ (کنکور ۱۴۰۱)

پاسخ:



$$|b| + a = 3$$

این سؤال دشوارتر از سؤال‌های امتحان نهایی است ولی برای تمرین در خانه مناسب است.

ابتدا دقت میکنیم که تابع "cos" به صورت نزولی، ($x = 0$) شروع به حرکت می‌کند ولی در این نمودار تابع به صورت صعودی شروع کرده؛ پس یعنی نمودار نسبت به محور "x" ها قرینه شده که لازمه این، این است که $b < 0$ باشد. نقطه‌ای را که به ما داده شده است را نیز می‌توانیم در تابع بگذاریم و تابع را مساوی صفر قرار دهیم تا دو معادله بر حسب a و b به‌دست بیاریم.

$$a + b \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

$$|b| + a = 3 \xRightarrow{b < 0} -b + \frac{a}{-\frac{b}{2}} = 3 \Rightarrow -\frac{3b}{2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} b = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

سوال ۱۸ ضابطه یک تابع سینوس با دوره تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینم ۳ را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$T = 3 \quad Max = 5 \quad Min = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \frac{2\pi}{|b|} = 3 \\ |a| + c = 5 \\ -|a| + c = 3 \end{array} \right\} 2c = 8 \Rightarrow \begin{array}{l} c = 4 \\ |a| = 1 \end{array}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 4 = -\sin\left(-\frac{2\pi}{3}x\right) + 4$$

$$-\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right) + 4 = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}x\right) + 4$$

* یادآوری: فرمولهایی که مقادیر Max و Min و دوره تناوب را حساب کردیم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \rightarrow \sin, \cos$$

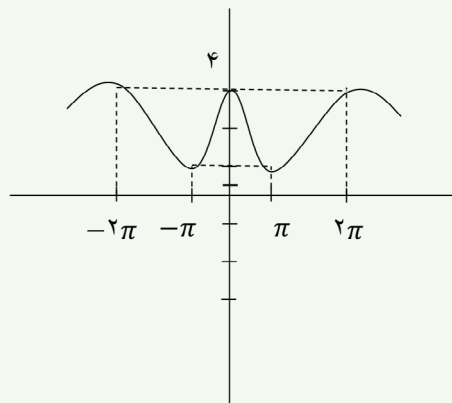
$$|a| + c = Max$$

$$T = \frac{\pi}{|b|} \rightarrow \tan, \cot$$

$$-|a| + c = Min$$

سوال ۱۹ نمودار تابع به صورت زیر است. حاصل $a+b$ را به دست آورید. ($b > 0$) (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:



$$Max = 4 \rightarrow |1| + a = 4 \rightarrow \boxed{a=3} \checkmark$$

$$Min = 2 \rightarrow -|1| + a = 2 \rightarrow \boxed{a=3} \checkmark \quad f(x) = a + \cos(bx)$$

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 2\pi = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 1 \quad \begin{array}{l} \nearrow \boxed{b=1} \checkmark \\ \searrow b=-1 \times \end{array} \quad \boxed{a+b=4}$$

سوال ۲۰ اگر دوره تناوب $y = \sin(bx)$ برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد، مقدار b برابر ± 6 است. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

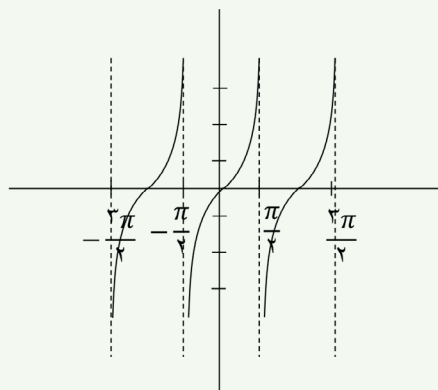
$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 6 \Rightarrow b = \pm 6$$

سوال ۲۱

دامنه تابع $y = \tan 3x$ برابر است با (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

* با توجه به تعریف تابع $\tan$ که برابر است با $\frac{\sin}{\cos}$ در بعضی نقاط مانند $\frac{\pi}{2}$ مخرج این کسر به سمت صفر میل میکند ولی صورت کسر به سمت «۱»؛ و به همین دلیل مقدار تابع به سمت « ∞ » میل میکند و چون ∞ عددی تعریف نشده است، میگوییم که تابع $\tan$ در این نقاط (نقاطی که $\cos$ برابر صفر می شود) تعریف شده نیست.



از روی نمودار زیر میتوان این برداشت را کرد.

همانگونه که مشاهده میشود در نقاط $k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$ تابع $\tan$ تعریف نشده است. برای به دست آوردن این نقاط کافی است $\cos$ را مساوی صفر قرار دهید و معادله را حل کنید.

$$\tan 3x = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Rightarrow \cos 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}; k \in \mathbb{Z}$$

سوال ۲۲

درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (دی ۱۳۹۷)

تابع $\tan$ در دامنه خود صعودی است. ✓

* حال اگر سؤال را دستکاری کنیم و بگیم:

تابع $\tan$ در $\mathbb{R}$ صعودی است. ✗

پاسخ:

در این حالت عبارت، عبارتی غلط است؛ زیرا تابع در $\frac{\pi}{2}$ از $+\infty$ به $-\infty$ میرود، که این خودش نوع نزولی است؛ یعنی تابع تنازانت فقط در دامنه خودش صعودی است و نه $\mathbb{R}$

سوال ۲۳

دوره تناوب تابع برابر است. (دی ۱۳۹۷، خرداد ۱۳۹۹، شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$T_{\tan} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{1} \Rightarrow T = \pi$$

* یادآوری: گفتیم که دوره تناوب $\tan$ از فرمول $T = \frac{\pi}{|b|}$ به دست می آید.

سوال ۲۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

در بازه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ مقدار $\tan \theta$ از مقدار $\sin \theta$ کوچک تر است. ✓

پاسخ:

* برای فهم بهتر اینکه چرا $\tan \theta$ بزرگتر از $\sin \theta$ در بازه $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ است، می توان اینگونه تفکر کرد که:

$$\sin \theta = \sin \theta \xrightarrow{\text{تقسیم یک طرف به } \cos \theta} \sin \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \sin \theta \leq \tan \theta \quad \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

: چون تابع $|\cos \theta| \leq 1$ است و هر عدد بر یک عدد بین بازه (۰ و ۱) تقسیم شود، عدد بزرگتر می شود، میتوان دریافت که $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ بزرگتر مساوی $\sin \theta$ است.

سوال ۲۵ معادله $\sin 3x = \sin 2x$ را حل کنید. (شهریور ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$\sin 3x = \sin 2x \begin{cases} 3x = 2k\pi + 2x \rightarrow x = 2k\pi & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = 2k\pi + \pi - 2x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

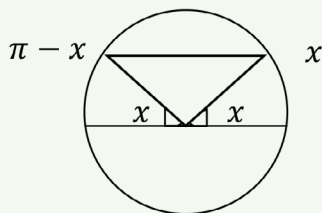
* برای حل معادلات مثلثاتی ابتدا باید سعی کنید معادله را به فرم (برای $\sin$):

$$\sin kx = \square \quad \sin kx = \sin k'x$$

و همچنین این فرمها را برای $\cos$ به دست آورید. حال برای به دست آوردن نقاط دقیق برای $\sin$:

به این صورت است که با توجه به دایره مثلثاتی، تمام نقاطی که روی دو خط آبی قرار میگیرند جواب هستند.

$$\begin{cases} \sin kx = \sin k'x \\ kx = 2k\pi + k'x \end{cases} \quad \boxed{kx = 2k\pi + \pi - k'x} \quad \text{برای } \sin$$

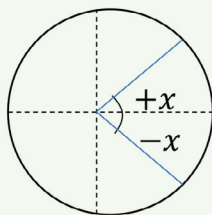


برای $\cos$:

$$\begin{cases} \cos kx = \cos k'x \\ kx = 2k\pi + k'x \end{cases} \quad \boxed{kx = 2k\pi - k'x}$$

به این صورت است که باز با توجه به دایره مثلثاتی خواهیم داشت:

دو خط آبی و همه نقاطی که در تناوبهای بعدی روی این نقاط قرار میگیرند جواب هستند.



توجه کنید: معادلات $\tan$ تا به حال در امتحان نهایی نیامده است؛ ولی من یک اشاره کوچک بعداً به آن خواهیم کرد.

سوال ۲۶ معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید. (خرداد ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$2\sin 3x - \sqrt{2} \Rightarrow \sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \begin{matrix} \nearrow 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \searrow 3x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{matrix}$$

$$x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

سوال ۲۷ معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید. (دی ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\frac{1}{2}(\sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x &= 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{8} \\ 2x &= 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{8} \end{aligned} \right\} \forall k \in \mathbb{Z}$$

* یادآوری: فرمول مثلثاتی دو برابر کمان به صورت زیر بود.

$$2\sin \cos x = \sin 2x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

سوال ۲۸ معادله $\cos 3x = \cos x$ را حل کنید. (دی ۱۳۹۷ و شهریور ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\cos 3x = \cos x \begin{matrix} \nearrow 3x = 2k\pi + x \rightarrow x = k\pi \quad (1) \\ \searrow 3x = 2k\pi - x \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (2) \end{matrix}$$

به دلیل اینکه رابطه ۲ نقاطی که از رابطه ۱ نیز به دست می‌آید را نیز شامل می‌شوند؛ پس رابطه ۲ کلی‌تر است و آن را به عنوان جواب نهایی قبول می‌کنیم.

$$x = \frac{k\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

سوال ۲۹ معادله $2\cos^2 x + \cos x = 0$ را حل کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\cos x(2\cos x + 1) = 0 \begin{matrix} \nearrow \cos x = 0 \\ \searrow 2\cos x + 1 = 0 \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \end{matrix}$$

سوال ۳۰ معادله $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ در بازه $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x - \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (1) \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

مجموع جواب‌های ۱ و ۲ هر دو یک سری نقاط را نمایش می‌دهند؛ پس هر کدام را که بگوییم جواب معادله است.

$$\cos x = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \quad x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{3}} \text{ و } \boxed{x_2 = \frac{\pi}{3}} \quad x_1, x_2 \in [0, \pi]$$

خطر: هیچگاه در حل معادله در دو عبارت را ساده نکنید، زیرا باعث حذف جواب می‌شود. مثلاً:

$x^2 = x \leftarrow$ ما اگر یک x را از طرفین ساده کنیم، جواب $\boxed{x=0}$ حذف می‌شود. فقط در صورتی می‌توان ساده کرد که ریشه عبارت ساده شده را اعلام کنیم.

سوال ۳۱ معادله $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید. (خرداد ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x - 1 + \cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0$$

$$\begin{aligned} \nearrow \cos x = \frac{\cos \frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} &\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\ \searrow 2\cos x + 1 = 0 &\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\cos \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} \\ x &= 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{aligned} \right\} \forall k \in \mathbb{Z}$$

معادلات تانژانتی (اختیاری):

فرمول «تانژانت جمع دو کمان» را به خاطر داشته باشید، بهتر است: ولی تا به حال از معادلات تانژانتی در امتحانات نهایی سؤال نیامده است.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}$$

$$\xrightarrow[\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos \alpha \cos \beta]{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{1 - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \boxed{\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}}$$

سوال ۳۲ تساوی $\tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$ را ثابت کنید.

پاسخ:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \begin{matrix} \alpha = \frac{\pi}{4} \\ \beta = x \end{matrix} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

سوال ۳۳ (تمرین) مقادیر $\tan 75^\circ$ و $\tan 15^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ: * نکته: برای $\tan(\alpha - \beta)$ کافی است به جای « β »، « $-\beta$ » بگذارید.

$$\begin{aligned} 15^\circ &= \overbrace{45^\circ}^{\alpha} - \overbrace{30^\circ}^{\beta} \\ 75^\circ &= 45^\circ + 30^\circ \end{aligned}$$

فصل سوم: حدهای نامتناهی

تذکر خیلی مهم: جواب حدهایی که ∞ می‌شود؛ یعنی حد تابع وجود ندارد، چون مقدار تابع به عدد مشخص میل نمی‌کند و $+\infty$ فقط نمادی است که نشان می‌دهد حد این تابع از هر عدد مثبتی بزرگتر است؛ پس جواب حدهایی که ∞ می‌شوند، حد آن توابع وجود ندارد در آن نقطه

سوال ۳۴ مقدار a را طوری بیابید که $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax-3}{(2-x)^3}$ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

ابتدا صفر مثبت بودن یا منفی بودن مخرج را محاسبه میکنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{ax-3}{(2-x)^3} = \frac{2a-3}{0^-} = +\infty \Rightarrow 2a-3 < 0 \Rightarrow a < \frac{3}{2}$$

* از ۲ از یک مقدار بیشتر از ۲ کم میشود؛ مثلاً $(2 - 2/1)$ که عدد منفی است، کمتر از صفر است.

برای ∞ شدن جواب، وقتی مخرج صفر است باید صورت به سمت عدد میل کند، که در این سؤال عددی منفی است؛ چون صفر، صفر منفی است و برای $+\infty$ شدن نیاز به یک عدد منفی داریم.

سوال ۳۵ حاصل $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x+1}{\tan x} \right)$ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x+1}{\tan x} \right) = \left. \begin{array}{l} \nearrow \frac{\pi^+}{2} \rightarrow \frac{\pi^+}{2} \rightarrow \frac{\pi^+}{2} = \infty \\ \searrow \frac{\pi^-}{2} \rightarrow \frac{\pi^-}{2} \rightarrow \frac{\pi^-}{2} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{x+1}{\tan x} \right) = 0$$

* یادآوری:

$$\frac{\text{عدد}}{\text{عدد}^+} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\text{مطلق}^+} = \text{تعریف نشده}$$

$$\frac{\text{عدد}}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0 \quad \frac{0}{0} = \text{مبهم}$$

سوال ۳۶ حد زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x] - 2}{x - 2} = \frac{[2^-] - 2}{2^- - 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

پاسخ:

میتوانید به جای عددی کوچکتر از ۲ بگذارید. مثلاً $1/9$ ، که اگر جواب مثبت شد یعنی $+$ است و اگر جواب منفی شد یعنی $-$ است.

سوال ۳۷ حد تابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2}{x-2} = \frac{2+2}{2^+ - 2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

سوال ۳۸ حد زیر را به دست آورید. (خرداد ۱۳۹۹)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 1 + 0 = 1$$

سوال ۳۹ حد تابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{5x}{|2x - 1|} = \frac{5 \cdot \frac{1}{2}}{0^+} = +\infty$$

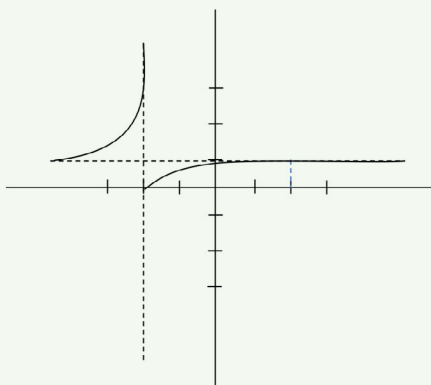
چون مخرج در قدر مطلق است و جواب قدر مطلق همیشه عددی مثبت است؛ پس بدون محاسبه کمتر یا بیشتر بودن صفر مخرج آن را صفر بیشتر میگذاریم.

سوال ۴۰ با توجه به شکل، حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۳۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

پاسخ:



سوال ۴۱ حد تابع زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۳۹۸)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 1}{2x^3 - 4x} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

* یادآوری: برای محاسبه حد در بینهایت از همارزی پر توان استفاده میکنیم؛ یعنی از جملات صورت و مخرج آن عبارت که بزرگترین درجه را داراست برمیداریم و هم ارز با تابع قرار میدهیم و حد آن تابع جدید را محاسبه میکنیم.

سوال ۴۲ حاصل حد تابع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2}$ برابر است با۳..... (خرداد ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+5}{x-2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

سوال ۴۳

مجانبهای قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{3x-5}{x^2+2}$ را در صورت وجود بیاید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-5}{x^2+2} \sim \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \frac{3}{\infty} = 0$$

مجانب افقی $y = 0 \rightarrow$

ریشه نمی‌دهد یعنی تابع مجانب قائم ندارد. $x^2 + 2 = 0 \rightarrow$

* یادآوری: هر تابع وقتی به سمت ∞ میل میکرد، میگوییم مجانب قائم دارد که معمولاً در ریشههای مخرج که صورت را صفر نمیکنند. این اتفاق میافتد و هر وقت حد تابع در ∞ را محاسبه کنیم؛ عدد به دست آمده (در صورت وجود) مجانب افقی تابع گفته میشود.

سوال ۴۴

مجانبهای قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{3x}{x^3-1}$ را محاسبه کنید. (دی ۱۳۹۷)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^3-1} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x^3} = \frac{3}{\infty} = 0 \Rightarrow \boxed{y=0} \rightarrow \text{مجانب افقی}$$

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x}{x^3-1} = \left. \begin{array}{l} \nearrow 1^+ \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty \\ \searrow 1^- \rightarrow \frac{3}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{x=1} \rightarrow \text{مجانب قائم}$$

سوال ۴۵

مجانبهای قائم و افقی تابع $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2+x}$ را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{x^2+x} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow y = -1 \rightarrow \text{مجانب افقی}$$

$$x^2 + x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-x^2}{x^2+x} \nearrow \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \searrow \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \boxed{x=0} \text{ مجانب قائم}$$

$$x = -1 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-x^2}{x^2+x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(1-x)(1+x)}{x(x+1)} = -2 \text{ مجانب قائم نیست}$$

فصل چهارم: مشتق

سوال ۴۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (دی ۱۴۰۱)

اگر $f'_{(1)} = 2$ و $g'_{(1)} = -3$ باشند، حاصل $(3f + g)'_{(1)}$ برابر ۹ است. ×

$$(3f_{(1)})' + g'_{(1)} = 3f'_{(1)} + g'_{(1)} = 6 - 3 = 3$$

پاسخ:

سوال ۴۷ اگر دو تابع با هم جمع شوند و مشتق مجموع دو تابع را می‌خواست، می‌توان جدا جدا مشتق توابع را بگیریم و بعد از مشتق‌گیری مجموع آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

$$(x^n)' = n x^{n-1} \quad (kx^n)' = k(n)x^{n-1} \quad k \in R \quad k' = 0$$

پاسخ:

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - b'a}{b^2} \quad b \neq 0 \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

برای راحتی کار با توابع رادیکالی بهتر است رادیکال را به صورت توان کسری بنویسید و با استفاده از فرمول مشتق‌گیری $[kx^n = knx^{n-1}]$ مشتق آن را بگیرید.

سوال ۴۸ فرمولهای مشتق‌گیری با استفاده از تعریف مشتق $\left[\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right]$ قابل اثبات است؛ آنجا که توابع $y = x$ و یا توابع $y = x^n$ راحتی برای مشتق‌گیری هستند. اثبات فرمول مشتق این توابع را بر عهده شما واگذاری می‌کنم و خود تابع $y = \sqrt{x}$ را در فرمول مشتقی اثبات می‌کنم.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad f(x_0) = \sqrt{x_0}$$

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

[سؤال «۱۰» امتحان نهایی] (خرداد ۱۴۰۲)

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

سوال ۴۹ اگر $f'_{(2)} = -1$ و $g'_{(2)} = 3$ باشد، در این صورت $(2f + 3g)'_{(2)}$ برابر با ۷ است. (دی ۱۳۹۸)

$$(2f)'_{(2)} + (3g)'_{(2)} = \underbrace{2f'_{(2)}}_{-2} + \underbrace{3g'_{(2)}}_9 = 7$$

پاسخ:

سوال ۵۰ اگر f و g توابعی مشتق پذیر باشد و $\begin{cases} g'(x) = 2 \text{ و } f(x) = 3 \\ g(x) = -3 \text{ و } f'(x) = 1 \end{cases}$ مقادیر $(fg)'(x)$ و $(f+g)'(x)$ را به دست آورید. (دی ۱۳۹۷)

پاسخ:

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$1 \times (-3) + 2 \times 3 = -3 + 6 = 3$$

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 1 + 2 = 3$$

* مشتق ضرب، تقسیم، جمع و تفریق توابع به صورت زیر است.

$$(fg)' = f'g + g'f \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \quad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

مشتق ترکیب توابع نیز با فرمول زیر به دست می آید.

$$f(g(x)) = g'(x) \times f'(g(x))$$

در صورتی می توان از فرمول مشتق گیری روبه‌رو استفاده کنید که g در نقطه‌ای که در آن مشتق می‌گیریم، مشتق پذیر باشد و f نیز در نقطه g (آن نقطه) مشتق پذیر باشد. مثال:

$$f(x) = |x| \quad g(x) = x^2 \quad x = 0 \quad [f(g(x))]'$$

اگر توجه کنید در نقطه $x = 0$ مشتق پذیر است ولی f در نقطه $g(0)$ مشتق پذیر نیست؛ پس نمیتوان مشتق تابع $f(g(x))$ را به دست آورد.

سوال ۵۱ مشتق هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست). (شهریور ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\begin{aligned} \text{الف) } g(x) = (x^2 + 3x + 1)^2 \rightarrow \left. \begin{aligned} g(x) &= x^2 \\ U(x) &= x^2 + 3x + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow h(x) = f'(u(x)) \Rightarrow u'(x) \times f'(u(x)) \\ \Rightarrow (2x + 3)(2(x^2 + 3x + 1)) \end{aligned}$$

$$\text{ب) } h(x) = \frac{x^2 - 5x + 7}{-2x + 9} = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{(2x - 5)(-2x + 9) - (-2)(x^2 - 5x)}{(-2x + 9)^2}$$

روش دیگر مشتق گیری که بیشتر خودمونی هست، اینگونه است که از خارجی ترین تابع شروع به مشتق گیری می‌کنیم و به سمت داخل حرکت می‌کنیم

و به این نکته هم توجه کنیم که توان همیشه خارجیت‌ترین است. برای مثال: قسمت الف سؤال بالا.

$$(x^2 + 3x + 1)^2 \Rightarrow \underbrace{2(x^2 + 3x + 1)}_{1*} \times \underbrace{2x + 3}_{2*}$$

۱* مشتق یک چیز به توان ۲، می‌شه هفت ضرب در اون چیز به توان ۱

۲* وقتی تابع‌های خارجی تمام شد و به چیز رسیدیم، مشتق اون چیز رو هم ضرب می‌کنیم.

* داخلی ترین تابع را بگیرید که کارتون راحت تر بشه.

$$\left(\frac{3x^2 + 4}{4x - 2}\right)^4 \Rightarrow \underbrace{4\left(\frac{3x^2 + 4}{4x - 2}\right)^3}_{1*} \times \underbrace{\frac{(6x)(4x - 2) - (4)(3x^2 + 4)}{(4x - 2)^2}}_{2*}$$

۱* چیز به توان ۴ مشتق میشه، چهار ضرب در چیز به توان ۳

۲* به چیز رسیدیم؛ پس مشتق چیز رو ضرب می‌کنیم.

سوال ۵۲ مشتق توابع را حساب کنید.

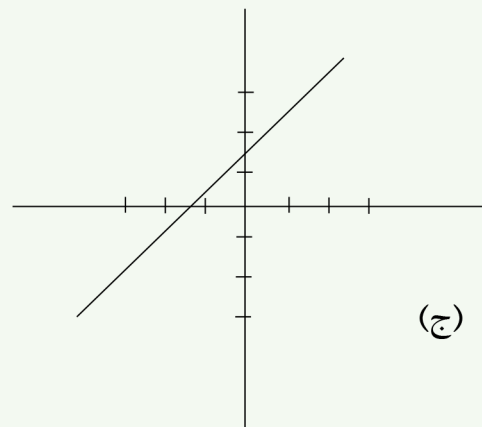
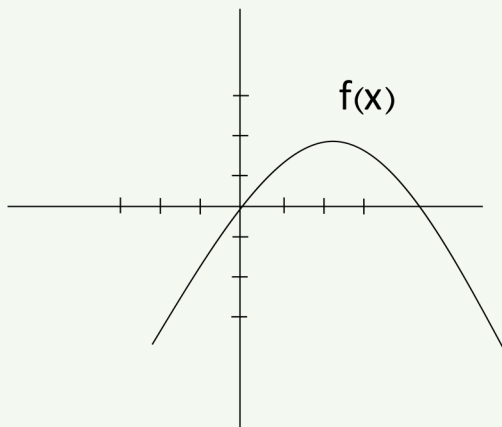
سوال ۵۳ (خرداد ۱۳۹۸) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(2x)(x^2 + 2x + 1) - (3x^2 + 2)(x^2 - 1)}{(x^2 + 2x + 1)^2}$

سوال ۵۴ (خرداد ۱۳۹۸) $y = \cos^2(2x) = 2\cos^2(2x) \times -\sin(2x) \times 2 \rightarrow$

سوال ۵۵ (خرداد ۱۳۹۹) $y = \sin^3 x + \cos^2 x = 3\sin^2 x \times \cos x + (2 \cos x \times (-\sin x))$

سوال ۵۶ (شهریور ۱۴۰۱) $(4x^2 - 5x)^3(\sqrt{x} + 1) = 3(4x^2 - 5x)^2(8x - 5)(\sqrt{x} + 1) + \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)(4x^2 - 5x)^3$

سوال ۵۷ (شهریور ۱۴۰۱) $\sin(2x^2) \Rightarrow 2x \times \cos(2x^2)$



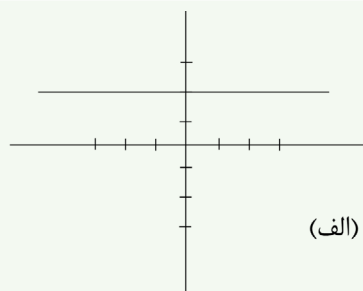
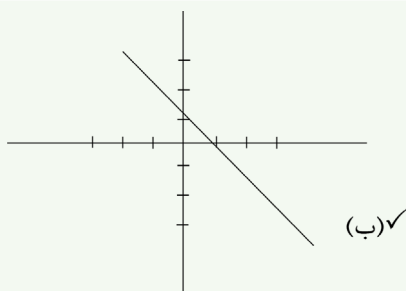
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sin(x) \\ g(x) = 3x^2 \end{array} \right\} f \circ g \Rightarrow g'(x) = 6x \Rightarrow f'(g(x)) = \cos(3x^2)$$

سوال ۵۸ (تیر ۱۳۹۸) $\sin^2(2x + 1) = 2\sin^2(2x + 1) \times \cos(2x + 1) \times 2$

سوال ۵۹ (دی ۱۴۰۱) $\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}(3x^2 + 2) = \sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + 2) + (6x)(\sqrt{2x})$

سوال ۶۰ (دی ۱۴۰۱) $\cos^3(2x) - \frac{1}{x} = 3\cos^2(2x) - \sin(2x) \times 2 - \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

سوال ۶۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. با بیان دلیل مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر نمودار مشتق تابع است. (خرداد ۱۳۹۸)



پاسخ:

نمودار مشتق تغییرات شیب نمودار را به ما نشان می‌دهد و از روی شکل نمودار f میتوان فهمید در ابتدا شیب تابع مثبت بوده و تابع صعودی است و در یک عدد مثبت شیب نمودار صفر شده و تغییر علامت داده؛ یعنی شیب نمودار از صعودی بودن به نزولی بودن تغییر فاز داده است. پس تنها شکلی که ویژگیهای فوق را دارد قسمت (ب) است.



سوال ۶۲ مشتق تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\Delta \tan x + \sin(x^2) \Rightarrow \Delta(\tan^2 x + 1) + \cos(x^2) \times 2x$$

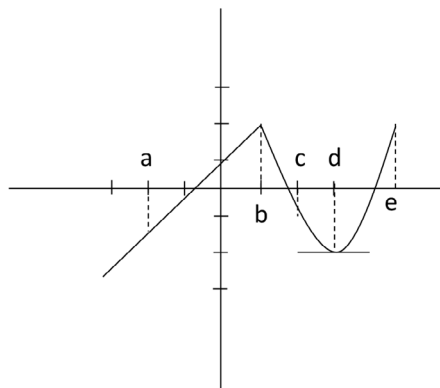
پاسخ:

* مشتق توابع $\tan$ و $\cot$ به صورت زیر است.

$$\tan x \xrightarrow{' } (1 + \tan^2 x) \quad \cot x \xrightarrow{' } -(1 + \cot^2 x)$$

سوال ۶۳ با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است: طول

نقطه‌های که: (شهریور ۱۴۰۱)



الف) تابع در آن پذیر نیست. b

ب) مماس در آن موازی محور طولها است. d

ج) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است. e

پاسخ:

توضیحات تکمیلی:

الف) توابع در جاهایی مشتقناپذیرند که یا در آنها پیوسته نباشند، یا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نباشند و یا وجود نداشته باشد (به بینهایت میل کند {جواب تعریف مشتق بینهایت شود.}); که در شکل بالا به دلیل برابر نبودن مشتقات چپ و راست تابع مشتقپذیر نیست.

ب) اگر به ما بگویند که خط مماس موازی محور x ها و یا عمود بر محور y ها باشد، یعنی جایی که شیب خط مماس بر آن نقطه صفر است.

ج) در جاهایی که تابع در حال صعود است، گوییم که مشتق تابع مثبت است و در جاهایی که نمودار بالای محور x ها است، تابع مقدار مثبت اختیار میکند؛ یعنی ما دنبال جایی هستیم که هم بالای محور x ها و هم در حال صعود باشد که نقطه e جواب مسئله است.

سوال ۶۴ معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^2 + 10x$ در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع

بنویسید. (خرداد ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} \text{شیب خط مماس در نقطه} \\ f'(x) = -2x + 10 \rightarrow f'(2) = 6 \rightarrow \\ f(2) = -4 + 20 = 16 \end{array} \right\} \begin{array}{l} h(x) = \overset{6}{m}x + \overset{4}{h} = \boxed{6x + 4} \\ m = 6 \\ f(2) = h(2) \Rightarrow h = 4 \end{array}$$

* وقتی میگوییم یک خط در یک نقطه بر منحنی مماس است؛ یعنی در آن نقطه مقدار تابع با مقدار خط مماس برابر است؛ زیرا در این نقطه خط با منحنی در تماس است.

سوال ۶۵ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ متوسط آن در بازه $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\left. \begin{array}{l} m(0) = 0 \\ m(4) = 10 \end{array} \right\} \text{شیب متوسط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

در بازه $[0, 4]$ و

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \rightarrow m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{1}{2\sqrt{t}} + \frac{4}{2} = \frac{1 + 4\sqrt{t}}{2\sqrt{t}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t}} = 1 \rightarrow \boxed{t=1}$$

* آهنگ متوسط در یک بازه یعنی سر و ته بازه را با یک خط به هم وصل کنیم و شیب آن خط را محاسبه کنیم. آن شیب میشود شیب متوسط تابع در آن بازه.

سوال ۶۶ اگر $f(x) = \cos 2x$ باشد مقدار $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$ را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$f(x) = \cos 2x \rightarrow f'(x) = -2 \sin(2x) \rightarrow f''(x) = -2 \cos(2x) \times 2$$

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(2 \times \frac{\pi}{4}\right) = -4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 \times 0 = 0$$

سوال ۶۷ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$98) \frac{4 \tan x}{3x^2 - 1} = \frac{4 \times (1 + \tan^2 x)(3x^2 - 1) - (6x)(4 \tan x)}{(3x^2 - 1)^2}$$

$$99) (\Delta x^3 - x)^9 (\sqrt{2x+1}) = 9(\Delta x^3 - x)^8 \times (15x^2 - 1)(\sqrt{2x+1}) + \left(\frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \times 2\right)(\Delta x^3 - x)$$

* مشتق توابع پیچیده مثل مثال «۶۷» از تکنیک که توابع را -- در نظر بگیریم راحتتر است مشتق گیری.

سوال ۷۰ در تابعی با ضابطه $f(t) = \frac{120}{t} + 5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظه $t = 2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[4, 6]$ را بیابید.

پاسخ:

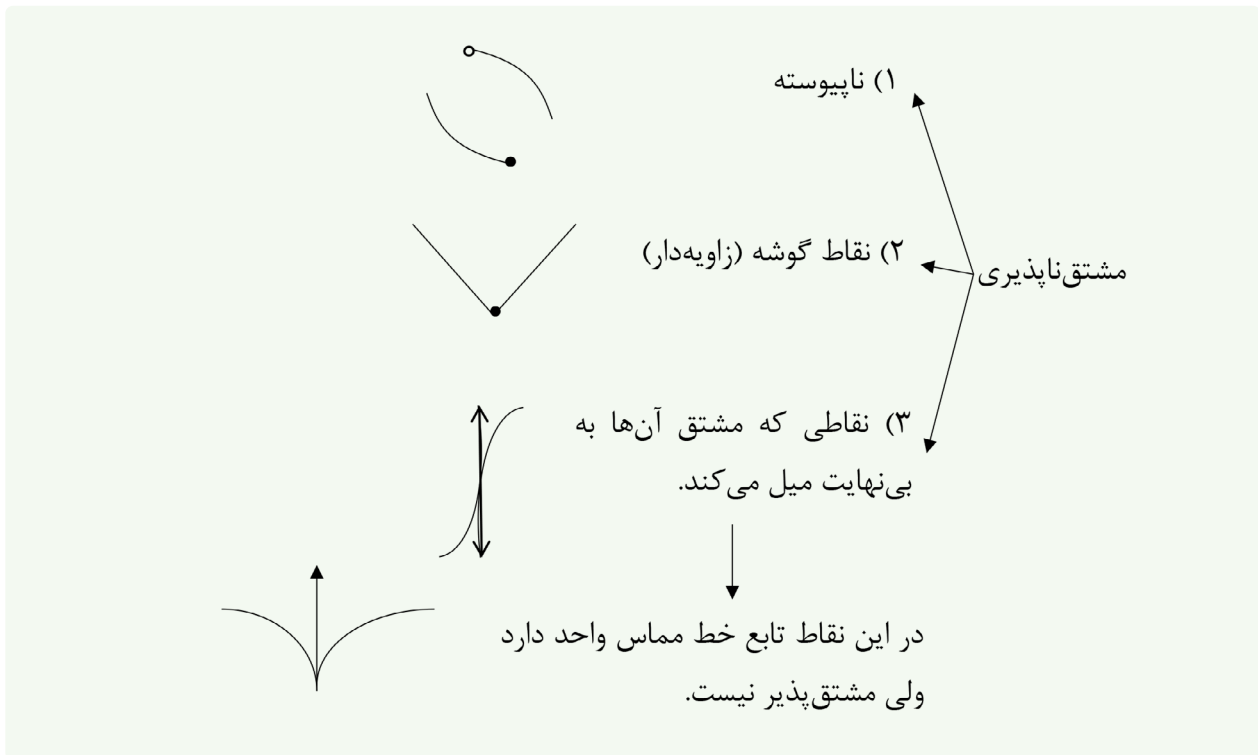
$$\left. \begin{array}{l} f(4) = 30 + 5 = 35 \\ f(6) = 20 + 5 = 25 \end{array} \right\} \text{میانگین} m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{25 - 35}{6 - 4} = -5$$

$$f'(t) = 120 \times \frac{-1}{t^2} \rightarrow f'(2) = \frac{-120}{4} = -30$$



سوال ۷۲ جای خالی را پر کنید.

اگر f در $x=a$ پیوسته ^{نباشد}، آنگاه f در $x=a$ مشتق ناپذیر است.

سوال ۷۳ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را بررسی کنید. (شهریور ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 \quad f(0) = 0$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$$

پس تابع پیوسته است در؛ حال مشتق تابع را میگیریم.

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = 0 \quad f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = 0$$

به دلیل برابر نبودن مشتقات چپ و راست تابع، تابع در $x=0$ مشتق پذیر نیست.سوال ۷۴ مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه $x=1$ بررسی کنید. (دی ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4$$

پس تابع در f پیوسته است در $x=1$ ؛ حال مشتق تابع را محاسبه میکنیم.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 3 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$$

$$f'_+(1) = 2 \neq f'_-(1) = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x + 1 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x-1)}{(x-1)} = 3$$

پس تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست؛ به دلیل اینکه مشتقات آن (راست و چپ) با هم برابر نیست.

سوال ۷۵

خط مماس بر منحنی $y = x^2 - 4x + 5$ در کدام نقطه:

الف) موازی خط $3x - 2y = 1$ است؟

پاسخ:

$$3y = 2x + 1 \rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6} \rightarrow m = \frac{1}{3}$$

$$y = x^2 - 4x + 5 \rightarrow y' = 2x - 4 \rightarrow 2x - 4 = \frac{1}{3} \rightarrow 2x = \frac{13}{3} \rightarrow x = \frac{13}{6}$$

برای این که موازی باشد باید شیب‌ها با هم برابر باشند

اگر عمود بر یک خط را می‌خواست شیب باید قرینه و معکوس باشد.

سوال ۷۶

مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2a - 4 & x < 1 \\ 2x^2 - 3 & x \geq 1 \end{cases}$ را در نقطه $a = 1$ بررسی کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

در $x = 1$ تابع پیوسته است $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 3 - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\Rightarrow 2(2) = 4 \Rightarrow f'_+(1) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x - 4 - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x-1) - 3}{x-1} = -3 \Rightarrow f'_-(1) = -3$$

چون مشتقات چپ و راست با هم برابر نیستند پس تابع در $f'_+(1) \neq f'_-(1) \Rightarrow$

$x = 1$ مشتق پذیر نیست.

سوال ۷۷

درست یا نادرست عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

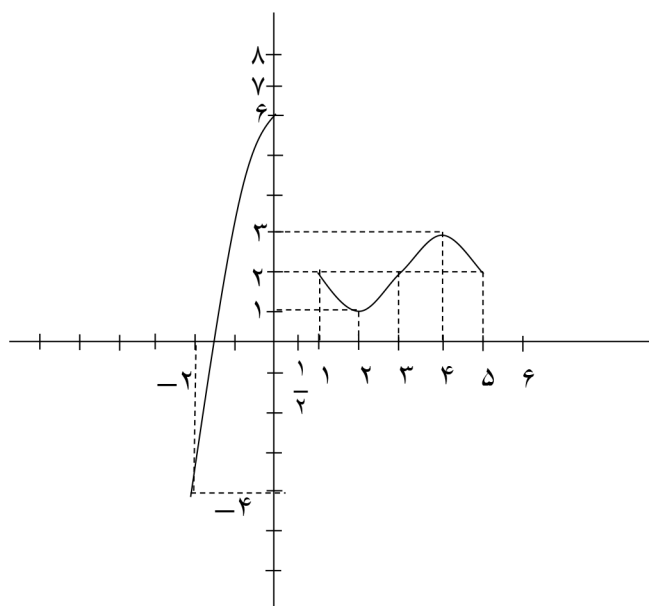
تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = 1$ مشتق پذیر است. ×

پاسخ:

* از آنجا که می‌دانیم تابع $[x]$ در $x = 1$ اصلاً پیوسته نیست که بتواند مشتق پذیر باشد.

فصل پنجم: نقاط بحرانی

سوال ۷۸ با توجه به نمودار $f(x)$ به سؤالات داده شده پاسخ دهید. (خرداد ۱۴۰۱)



الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید ۸

ب) مقدار مینیمم را بنویسید. -۴

پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید. ۴

ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید. ۲

پاسخ:

* برای اکسترمم های مطلق حتماً باید y یا عرض نقطه اعلام شود اما برای اکسترمم های نسبی حتماً x یا طول نقاط را اعلام کنید.

* نقاطی که در یکی از همسایگی های چپ و یا راست خود تعریف شده نیستند نمی توانند اکسترمم نسبی باشند ولی برای اکسترمم مطلق شدن (در صورت بودن) مشکلی ندارند. مثلاً در مثال بالا نقطه $(\frac{1}{2}, 1)$ به دلیل این که تابع در همسایگی آن نقطه تعریف نشده است نمی تواند ماکزیمم نسبی اعلام شود و فقط ماکزیمم مطلق اعلام می شود.

سوال ۷۹ جاهای خالی را کامل کنید.

الف) اگر تابع $f(x)$ در بازه (a, b) صعودی باشد، علامت مشتق $f'(x)$ در این بازه مثبت است. (تیر ۹۸)

اگر $f'(x) > 0$ باشد تابع صعودی است / اگر $f'(x) \geq 0$ باشد صعودی / اگر $f'(x) < 0$ باشد نزولی / اگر $f'(x) \leq 0$ باشد نزولی است.

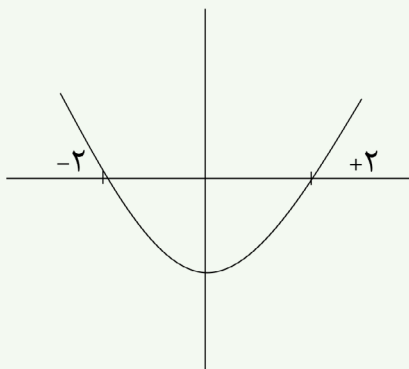
ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای از $\mathbb{R}$ که تابع $h(x) = x^2 - 12x + 4$ در آن نزولی است، بازه $(-2, +2)$ است.

(خرداد ۹۹ خارج)

پاسخ:

$$h'(x) = 2x - 12 \Rightarrow 2(x - 6) \Rightarrow 2(x - 2)(x + 2)$$

برای به دست آوردن وضعیت صعودی نزولی بودن یک تابع ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و بعد مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.



* دقت کنید با توجه به سؤال که گفته نزولی است باید نقاطی را که مشتق صفر می‌شود را محاسبه کنیم یعنی بازه باید باز باشد.

سوال ۸۰ ضرایب a, b را طوری بیابید که نقطه $(2, 1)$ اکسترم نسبی تابع شود. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

وقتی نقطه‌ای اکسترم نسبی می‌شود که آن نقطه ریشه مشتق تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ باشد یعنی خواهیم داشت که:

$$f'(x) = x^3 + a \xrightarrow[\text{نسبی}]{\text{اکسترم (۱, ۲)}} 2^3 + a = 0 \Rightarrow a = -8$$

نقطه باید روی تابع باشد که اکسترم آن تابع باشد یعنی آن نقطه در تابع صدق کند یعنی

$$f(2) = 1 \Rightarrow 8 - 8 - b = 1 \Rightarrow b = -1$$

نمودار تابعی را بنویسید که مشتق آن:

سوال ۸۱ در یک نقطه برابر صفر شود $y = x^2$ تابعی می‌خواهد که یک اکسترم نسبی داشته باشد در یک نقطه نمودار تابع با محور x موازی باشد.

سوال ۸۲ در تمام نقاط مثبت باشد $y = x$ تابعی صعودی یا اکیداً صعودی می‌خواهد.

سوال ۸۳ در تمام نقاط منفی باشد $y = -x$ تابعی نزولی یا اکیداً نزولی می‌خواهد.



سوال ۸۴ در $x = 2$ برابر ۳ باشد. $y = x^2 - x$ تابعی مثال بزنید که در نقطه $x = 2$ شیب خط مماس برابر ۳ باشد.

سوال ۸۵ در تمام نقاط یکسان باشد $y = 2x$ و $y = 2$ مشتق توابع ثابت و یا توابعی که شیب خط مماس بر آنها در تمام نقاط برابر است را می گوید.

سوال ۸۶ مقدار اکسترممهای مطلق تابع $f(x) = x^3 + 3x^2 - 12x$ را در بازه $[-1, 2]$ مشخص کنید.

(دی ۹۸) (شهریور ۹۹ با اندکی تغییر)

پاسخ:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 \Rightarrow 6x^2 + 6x - 12 \stackrel{\div 6}{\Rightarrow} x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 2) = 0$$

$$f(-1) = 13 \text{ مطلق}$$

$$f(2) = 4$$

$$f(1) = -7 \rightarrow \min \text{ مطلق}$$

$$\sqrt{x_1} = 1$$

نقاط بحرانی $x_2 = -2 \leftarrow x$ در بازه نیست

* برای سؤالاتی که از ما اکسترممهای مطلق را می خواهد باید نقاط بحرانی را محاسبه کنید و در تابع بگذارید علاوه بر اینها نقاط ابتدایی و انتهایی بازه را نیز در تابع گذاشته و مقدار آن را محاسبه کنید حال بیشترین مقدار را max و کمترین را min مطابق می نامیم

سوال ۸۷ مقادیر اکسترممهای نسبی و مطلق تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ را در بازه $[-2, 3]$ به دست آورید.

پاسخ:

$$f'(x) = x^2 + 2x \rightarrow x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x + 2) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{ نقاط بحرانی}$$

	-2	0	3
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

نسبی Min

$$f(-2) = \frac{-8}{3} + \frac{12}{3} = \frac{4}{3}$$

$$f(0) = 0 \rightarrow \min \text{ مطلق}$$

$$f(3) = 18 \rightarrow \max \text{ مطلق}$$

$$y = 18 \rightarrow \max \text{ مطلق}$$

$$x = 0 \rightarrow \min \text{ مطلق و نسبی}$$

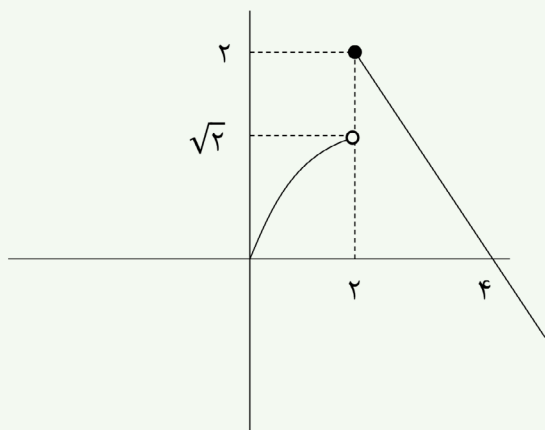
Max نسبی هم ندارد

* برای بدست آوردن اکسترممهای نسبی $\leftarrow$ جدول تعیین علامت f' و تعیین صعودی نزولی f

برای بدست آوردن اکسترممهای مطلق $\leftarrow$ نقاط بحرانی را محاسبه و بدست آوردن مقادیر سر و ته نقاط بحرانی تابع

سوال ۸۸ اکسترممهای مطلق و نسبی تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 2 \\ 4-x & x \leq 2 \end{cases}$ را به دست آورید.

پاسخ:



$\sqrt{x}$ $[0, 2) \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \times$ ریشه ندارد

$4-x$ $[2, +\infty) \Rightarrow -1 = 0 \times$ ریشه ندارد

$f(0) = 0$	$f(2) = 2$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
Min نسبی نمی‌تواند باشد چون چپ صفر	Max مطلق	بینهایت عددی تعریف نشده است و نمی‌تواند Min یا Max باشد

سوال ۸۹ جهت تقعر و نقطه عطف نمودار تابع $f(x) = x^3 + 3x + 1$ را بدست آورید. (تیر ۱۳۹۸)

پاسخ:

نقاط بحرانی

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \Rightarrow \overbrace{f'(x)}^{\text{نقاط بحرانی}} = 0 \Rightarrow 3x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \times$$

$$f''(x) = 6x \Rightarrow f'' = 0 \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

نقطه عطف $f(0) = 1 \rightarrow$

	-	+
$f''(x)$	n	u



سوال ۹۰ جهت تقعر و مختصات نقطه عطف تابع $f(x) = x(x^2 - 3) + 1$ را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \rightarrow f''(x) = 6x \Rightarrow 6x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

(۱, ۰): نقطه عطف

		.
f''	-	+
$f(x)$	∩	∪

سوال ۹۱ اگر نقطه عطف $A(-1, 1)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 2$ باشد. مقادیر a, b را بدست

آورید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$f''(x) = 3ax^2 + 2bx \rightarrow f''(x) = 6ax + 2b \xrightarrow{x=-1} \boxed{-6a + 2b = 0} \quad I$$

$$-3a + b = 0$$

$$f(-1) = 1 \Rightarrow -a + b + 2 = 1 \Rightarrow \boxed{b - a = -1} \quad II$$

$$I - II \Rightarrow (-3a + b) - (b - a) = (0) - (-1)$$

$$-2a = 1 \Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{2}} \quad \boxed{b = \frac{-3}{2}}$$

سوال ۹۲ با رسم جدول تغییرات تابع زیر نشان دهید که تابع در چه بازه‌های صعودی و در چه بازه‌های نزولی است؟

(خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = x^2 + 2x = x(x + 2)$$

$\boxed{x_1 = 0}$ بحرانی نقطه

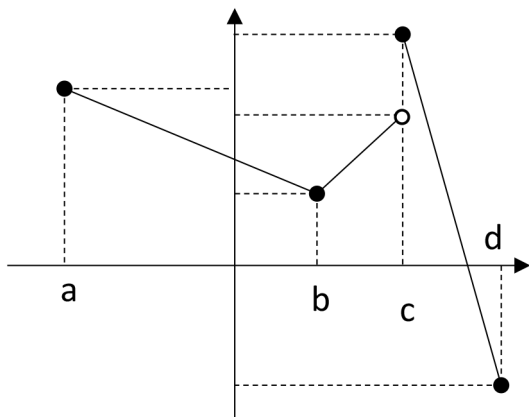
		.
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗

نزولی $\rightarrow (-\infty, 0]$

صعودی $[0, +\infty)$

* اضافی: در نقطه $x = 0$ سوال بالا ما یک اکسترمم داریم که نسبی هم است [نسبت به اطراف خود پایینتره] و هم مطلق [نسبت به تمام نقاط پایین تره] هست. این نقطه هم مینیمم مطلق هست هم نسبی

سوال ۹۳ در شکل مقابل طول نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را مشخص کنید (خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ:

مینیمم مطلق $d \rightarrow$

ماکزیمم مطلق و نسبی $c \rightarrow$

مینیمم نسبی $b \rightarrow$

سوال ۹۳ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

سوال ۹۴ (خرداد ۱۴۰۱) $\frac{2x-1}{x-2}$

پاسخ:

$x = 2 \rightarrow$ مجانب قائم

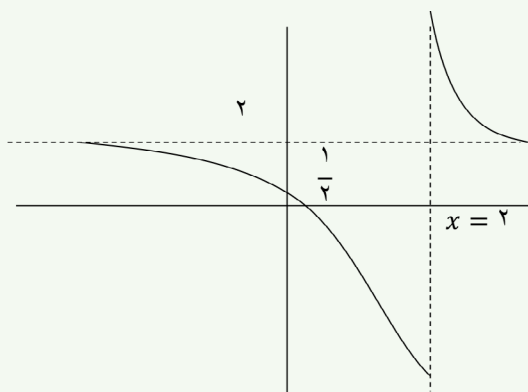
$y = 2 \rightarrow$ مجانب افقی

$$f'(x) = \frac{2x-4 - (-2x+1)}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{3}{0^-} = -\infty$$

	۲	
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow$



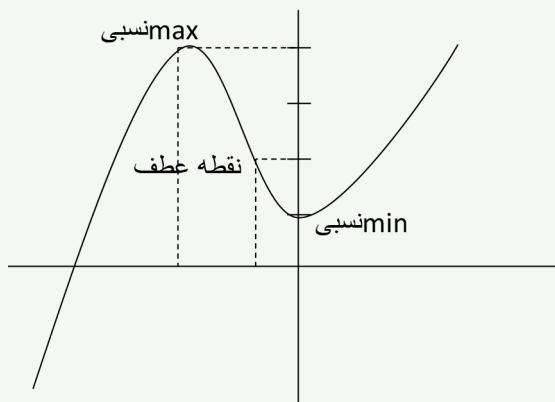
* برای رسم یک نمودار مجانب‌های آن را مشخص کنید. بعد از تابع مشتق بگیرید تا وضعیت صعودی / نزولی تابع را به دست آورید. اگر تابع درجه ۳ بود باید مشتق مرتبه دوم آن را نیز بگیرید تا وضعیت تقعر تابع به دست آید.

سوال ۹۵ (خرداد ۱۳۹۹ خارج) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

پاسخ:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow 3x(x+2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ نقاط بحرانی}$$

$$f''(x) = 6x + 6 \Rightarrow 6(x+1) \Rightarrow \boxed{x = -1} \text{ نقطه عطف}$$



	-2	-1	0	
$f'(x)$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗
	∩		∪	
	Max نسبی		عطف نقطه	Min نسبی

$\boxed{(-1, 3) \text{ نقطه عطف}}$

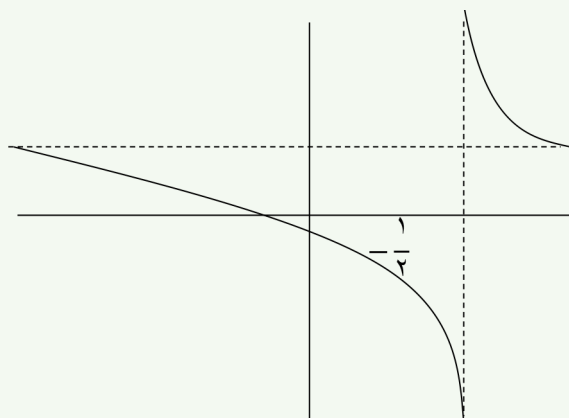
سوال ۹۶ (دی ۱۳۹۷) $\frac{x+1}{x-2}$

پاسخ:

مجاانب قائم $\rightarrow x = 2$

مجاانب افقی $\rightarrow y = 1$

$$f'(x) \frac{(x-2) - x - 1}{(x-2)^2} = \frac{-3}{(x-2)^2} < 0$$



f'	2	
f	-	-
	↘ -∞	↘ +∞

سوال ۹۷ (شهریور ۱۴۰۱) $\frac{x+3}{1-x}$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2}$$

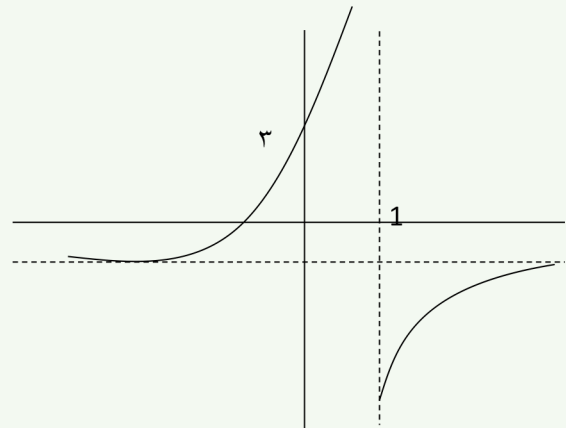
$$= \frac{4}{(1-x)^2}$$

$$> 0$$

مجاانب قائم $x = 1 \rightarrow$

مجاانب افقی $y = -1 \rightarrow$

	۱	
$f'(x)$	+	+
f	$+\infty \nearrow$	$-\infty \nearrow$



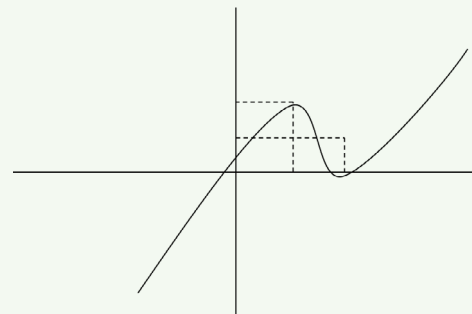
سوال ۹۸ (شهریور ۱۴۰۱) $\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$

پاسخ:

	۱	۲	۳	
f'	+	-	-	+
f''	-	-	+	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	∩		∪	

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow (x-1)(x-3) \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \end{cases} \text{ بحرانی}$$

$$f''(x) = 2x - 4 = 2(x-2) \rightarrow x = 2 \text{ نقطه عطف}$$



$$f(2) = \frac{8}{3} - 8 + 6 = \frac{2}{3} \Rightarrow (2, \frac{2}{3}) \text{ نقطه عطف}$$

سوال ۵۷ (شهریور ۱۴۰۱) $\frac{2x-x}{x+1}$

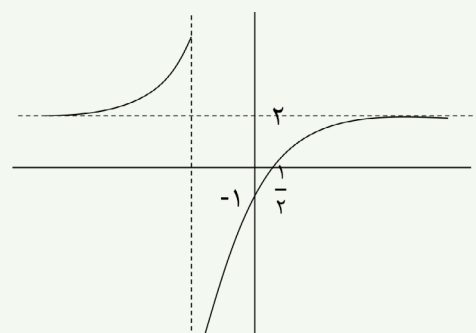
پاسخ:

$$f'(x) = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} > 0$$

مجاانب قائم $x = -1$

مجاانب افقی $y = 2$

	-۱	
f'	+	+
f	$+\infty \nearrow$	$-\infty \nearrow$



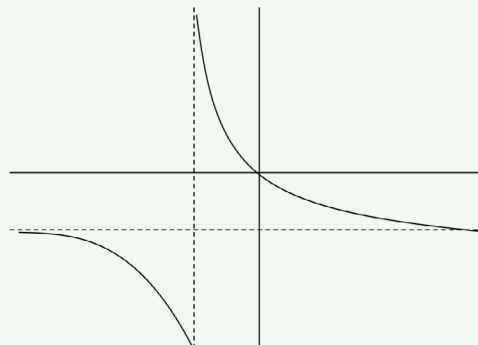
سوال ۵۷ (خرداد ۱۴۰۲) $\frac{-x}{x+1}$

پاسخ:

$$f'(x) = \frac{-x - 1 + x}{(x+1)^2} < 0$$

مجانِب قائم $x = -1$ مجانِب افقی $y = -1$

	-1	
f'	-	-
f	$-\infty$	$+\infty$



درجه ۳:

- ۱- پیدا کردن مشتق تابع و وضعیت صعودی و یا نزولی تابع
- ۲- پیدا کردن مشتق مرتبه ۲ تابع و تعیین وضعیت مقعرهای تابع
- ۳- مساوی صفر قرار دادن مشتقات مرتبه ۱ و ۲ برای بدست آوردن نقاط بحرانی و نقطه عطف
- ۴- کشیدن نمودار

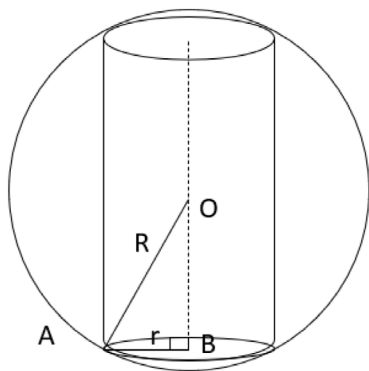
جمع‌بندی رسمی نمودارها:

توابع گویا:

- ۱- پیدا کردن مجانبها
- ۲- پیدا کردن مشتق تابع و مشخص کردن صعودی نزولی تابع
- ۳- کشیدن جدول رفتار تابع
- ۴- کشیدن نمودار

سوال ۱۰۱ در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ارتفاع استوانه را h مینماییم و از آنجا که o وسط h است.



پاسخ:

$$OB = \frac{h}{2} \text{ داریم:}$$

$$AO^2 = OB^2 + AB^2$$

$$R^2 = \frac{h^2}{4} + r^2$$

$$V = \pi r^2 h = \pi \left(R^2 - \frac{h^2}{4} \right) h \Rightarrow V(h) = \pi R^2 h - \frac{\pi}{4} h^3$$

حجم استوانه برابر است با:

$$0 \leq h \leq 2R$$

برای به دست آوردن نقاط بحرانی از تابع مشتق میگیریم:

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4} h^2$$

$$0 = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4} h^2 \Rightarrow \pi R^2 = \frac{3\pi}{4} h^2 \Rightarrow \frac{4\pi R^2}{3\pi} = h^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{2R}{\sqrt{3}}}$$

این یعنی اگر ارتفاع استوانه $\frac{2}{\sqrt{3}}$ برابر R باشد بیشترین حجم استوانه را خواهیم داشت.

سوال ۱۰۲ ورق فلزی مستطیل شکل، به طول ۱۶ سانتی‌متر و عرض ۶ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه a برمی‌گردانیم تا یک جعبه سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن گردد؟ (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

طول جعبه = $(۸ و ۰) \in x و ۱۶ - ۲x$

عرض جعبه = $(۲ و ۰) \in x و ۶ - ۲x$

حجم جعبه:

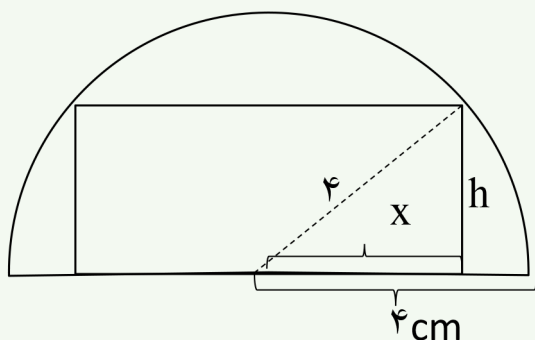
$$V(x) = x(16 - 2x)(6 - 2x) \rightarrow V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x و x \in (۰, ۳)$$

$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 96 \xrightarrow{+2} 6x^2 - 44x + 48 \xrightarrow{+2} 3x^2 - 22x + 24 = 0 \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

از آنجا که $(۰, ۳) \notin ۶$ نیست پس قابل قبول نیست و فقط $x = \frac{4}{3}$ قابل قبول است که بیشترین مقدار حجم ممکن را جعبه دارد.

سوال ۱۰۳ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد؟ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:



$$x^2 + h^2 = 16 \rightarrow h = \sqrt{16 - x^2}$$

$$s = h \times 2x \rightarrow (\sqrt{16 - x^2}) \times 2x$$

$$s'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} \times 2x + 2 \times \sqrt{16 - x^2} = 0$$

$$2\sqrt{16 - x^2} = \frac{4x^2}{2\sqrt{16 - x^2}} \Rightarrow 16 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 8 \\ x = \pm 2\sqrt{2}$$

از آنجا که کمیت طول نمی‌تواند منفی باشد یعنی $2\sqrt{2}$ قابل قبول نیست.



سوال ۱۰۴ جدول تغییرات تابع زیر را رسم کنید و نمودار تابع را بکشید.

$$f(x) = 3x^3 - 2x + 5$$

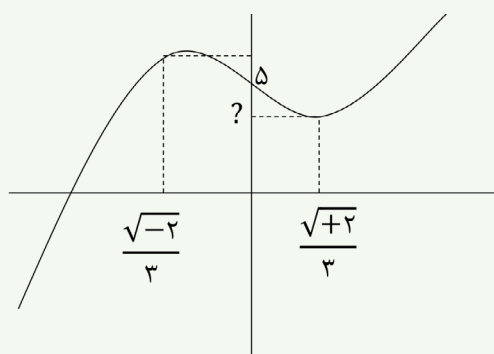
$$f'(x) = 9x^2 - 2$$

$$f''(x) = 18x \rightarrow \frac{x = 0}{\text{نقطه عطف}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{3} \text{ نقاط بحرانی}$$

پاسخ:

	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{2}}{3}$	0	$+\frac{\sqrt{2}}{3}$	$+\infty$
	+	-	-	+	+
f'	-	-	+	+	+
f''	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
	n			u	



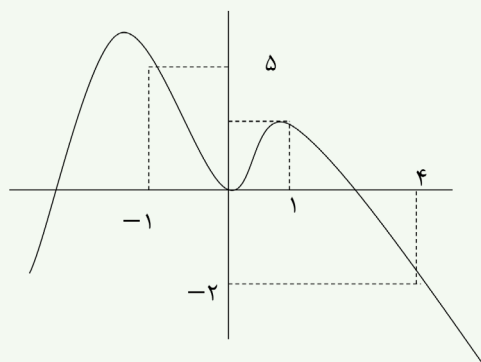
(0, 5) نقطه عطف

سوال ۱۰۳ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که شرایط زیر را داشته باشد.

پاسخ:

$$f(0) = 0 \quad f(-1) = 5 \quad f(4) = -2$$

(۱ و ۱) اکسترمم نسبی از نوع ماکزیمم



* باید حواسمان باشد که نقطه‌ای را بالاتر از «۱» قرار دهیم تا نقطه (۱ و ۱) ماکزیمم نسبی شود اگر نقطه‌ای با عرقی بیشتر از «۱» نباشد نقطه (۱ و ۱) ماکزیمم مطلق می‌شود که به ماکزیمم نسبی ارجحیت دارد.