



گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل



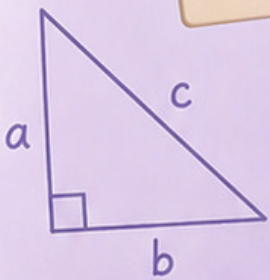
درس ریاضی دهم

نوتروپیست

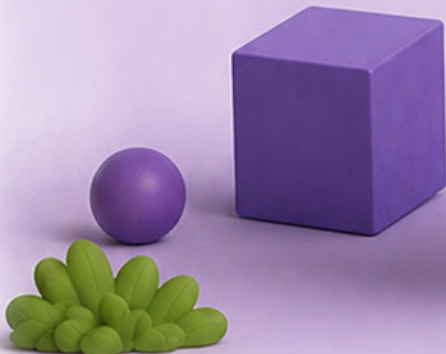


$$\sqrt{x}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رقمی نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دو رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۳۲
امیر محمد رضائی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴
امیر محمد کیانی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رقمی و چهار رقمی های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲
امیر محمد شکوهی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصریان

رتبه ۴۳۲
سید محمد صادق حسینی

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۵۳۹
نجمه کبختا

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۲
فاطمه شاهسونند

رتبه ۵۱۴
محمد پارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳
زهره بابائی

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰
زهره ولی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶
حسین تقضلی نژاد

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲
محمد ماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷
زهره بابائی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیر حسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملک شاهی

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸
امیر محمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴
هلینا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱
محمد رضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵
زهره جمعی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴
هلینا سجادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی

فصل اول

درس اول: مجموعه متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

یادآوری:

 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$: طبیعی

 $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: حسابی

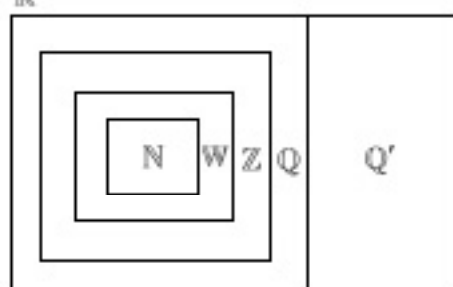
 $Z = \{\dots, -1, 0, 1, \dots\}$: صحیح

 $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$: گویا

مجموعه اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد: Q' : گنگ

 $R = Q \cup Q'$: حقیقی

روابط زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها:

 R


$$\begin{cases} N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \\ Q' \subseteq R \end{cases}$$

بازه‌ها

محدود:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in R \mid a < x < b\}$	(a, b)	باز
	$\{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$	$[a, b]$	بسته
	$\{x \in R \mid a < x \leq b\}$	$(a, b]$	نیم‌باز از چپ
	$\{x \in R \mid a \leq x < b\}$	$[a, b)$	نیم‌باز از راست

بی‌کران:

نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	بازه	نوع بازه
	$\{x \in R \mid a < x\}$	$(a, +\infty)$	باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in R \mid x < a\}$	$(-\infty, a)$	باز و از چپ بی‌کران
	$\{x \in R \mid a \leq x\}$	$[a, +\infty)$	نیم‌باز و از راست بی‌کران
	$\{x \in R \mid x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	نیم‌باز و از چپ بی‌کران
	$\{x \in R\}$ یا R	$(-\infty, +\infty)$	باز و از دو طرف بی‌کران

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

اگر تعداد اعضای یک مجموعه اعدادی حسابی باشد، آن مجموعه متناهی و در غیر این صورت نامتناهی است.
مجموعه $\emptyset$ صفر عضو دارد $\leftarrow$ پس مجموعه‌ای متناهی است.

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع (U)

مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های دیگر زیرمجموعه آن باشند.

متمم یک مجموعه (A')

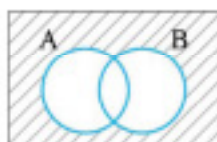
مجموعه‌ای شامل عضوهای از مجموعه مرجع که در مجموعه اولیه (A) نیستند.

$$(i) (A')' = A$$

روابط بین متمم مجموعه‌ها

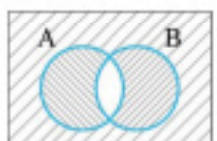
متمم متمم یک مجموعه همان خود مجموعه است.

مجموعه اعدادی که در اجتماع دو مجموعه نیستند، $\leftarrow$ همان اعدادی که در A نبودند و در B نبودند.



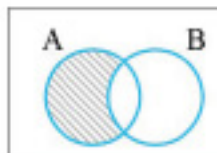
$$(ii) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

مجموعه اعدادی که در اشتراک دو مجموعه نیستند، $\leftarrow$ همان اعدادی که در A نبودند یا در B نبودند.



$$(iii) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

مجموعه اعدادی که عضو A بوده ولی عضو B نیستند $\leftarrow$ همان اعدادی که در A و در متمم B هستند.



$$(iv) A - B = A \cap B'$$

روابط ۲ و ۳ به قوانین دمورگان مشهورند.

تعداد اعضا

$$(i) n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$(ii) n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$(iii) n(A') = n(U) - n(A)$$

مجموعه‌های جدا از هم یا مجزا:

$$A \cap B = \emptyset \rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B) - 0$$

مثال: اگر $n(A \cup B) = 20$ و $n(A) = 2$ و $n(A \cap B) = 10$ باشد، $n(A)$ چند است؟

$$n(A) + n(B) - n(A \cap B) = n(A \cup B)$$

$$2n(B) - 10 = 20 \Rightarrow 2n(B) = 30 \Rightarrow n(B) = 15$$

$$n(A) = 2n(B) = 30$$

راه حل:

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

الگوهای خطی: در این الگوها، اختلاف هر دو جمله متوالی یک عدد ثابت است.

جمله عمومی: $t_n = an + b$ اختلاف بین هر دو جمله متوالی

دنباله: الگوهایی که در آن‌ها تعدادی عدد پشت هم قرار می‌گیرند.

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله جز اولی، با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل خود به دست می‌آید.

قدر نسبت (d): اختلاف هر دو جمله متوالی یک دنباله حسابی که عددی ثابت است.

مثال: جمله یازدهم یک دنباله حسابی ۳۲ و جمله نوزدهم آن ۷۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

راه‌حل:

$$d = \frac{72 - 32}{19 - 11} = \frac{40}{8} = 5$$

$$d = \frac{t_x - t_n}{x - n}$$

$$a_{11} - a_1 + 10d \Rightarrow 32 - a_1 + 50$$

$$a_1 = -18 \quad a_{20} = a_1 + 19d \quad a_{20} = -18 + 19 \times 5 = 77$$

$$t_n = a + (n-1)d$$

نکته: جمله عمومی دنباله‌های حسابی:

دنباله هندسی

دنباله‌ای که در آن هر جمله جز اولی از ضرب جمله قبل خود در عددی ثابت به دست می‌آید.

قدر نسبت (r): عددی ثابت است که از تقسیم هر جمله قبل خود به دست می‌آید.

$$t_n = a \times r^{n-1}$$

نکته: جمله عمومی دنباله‌های هندسی:

واسطه‌های حسابی و هندسی

$$a, b, c, \dots \rightarrow \begin{cases} a + d = b \\ b + d = c \end{cases} \rightarrow a - b = b - c \rightarrow a + c = 2b \Rightarrow \frac{a+c}{2} = b$$

حسابی:

$$a, b, c, \dots \rightarrow \begin{cases} ar = b \\ br = c \end{cases} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow ac = b^2 \Rightarrow \sqrt{ac} = b$$

هندسی:

درج n واسطه‌های حسابی و هندسی

حسابی: اگر n واسطه بین دو جمله c و a درج کنیم: $d = \frac{c-a}{n+1}$

هندسی: اگر n واسطه بین دو جمله c و a درج کنیم: $r = \sqrt[n+1]{\frac{c}{a}}$

مثال: بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان قرار داده‌ایم که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی داده‌اند. قدر نسبت دنباله و سه عدد را بیابید.

راه‌حل:

$$18, \dots, \dots, \dots, 62 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 18 \\ t_5 = 62 \end{cases} \Rightarrow t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_5 - 18 + (5-1)d \Rightarrow 62 = 18 + 4d$$

$$d = \frac{62 - 18}{4} \Rightarrow d = 11 \Rightarrow 18, 29, 40, 51, 62$$

رابطه اندیسی بین جملات دنباله حسابی و هندسی

$$m, n, p, k \in \mathbb{N}, m+n=p+k \Rightarrow t_m + t_n = t_p + t_k$$

حسابی:

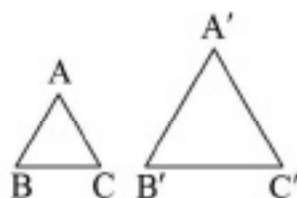
$$m, n, p, k \in \mathbb{N}, m+n=p+k \Rightarrow (t_m)(t_n) = (t_p)(t_k)$$

هندسی:

فصل دوم

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

یادآوری: تشابه



$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' : (1) \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$$

$$(2) \hat{A} = \hat{A'}, \hat{B} = \hat{B'}, \hat{C} = \hat{C'}$$



ز: دوزاویه متناظر برابر باشند.

ض ض ض: نسبت هر ۳ ضلع مثلث به ضلع متناظرشان برابر باشد.

ض ز ض: دو ضلع متناسب و زاویه بین آنها برابر باشد.

شروط تشابه دو مثلث

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

(sin و cos همواره کمتر یا مساوی یک هستند اما tan و cos محدودیت ندارند.)

$$\sin A = \frac{OB}{AB} \left(\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} \right)$$

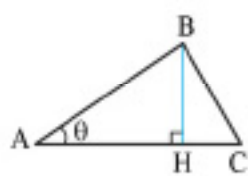
$$\cos A = \frac{OA}{AB} \left(\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} \right)$$

$$\tan A = \frac{OB}{OA} \left(\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \right)$$

$$\cot A = \frac{OA}{OB} \left(\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}} \right)$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف:

	sin	cos	tan	cot
۳۰°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
۴۵°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
۶۰°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$



$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \times BH}{2} = \frac{\sin \theta \times \frac{BH}{AB}}{BH \times \sin \theta \times AB} \rightarrow \frac{1}{2} \sin \theta \times AB \times AC$$

✓ احتساب مساحت مثلث با استفاده از سینوس:

توضیح: نصف سینوس زاویه مدختر ضرب در اندازه ضلع‌های مجاور زاویه

مثال: مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

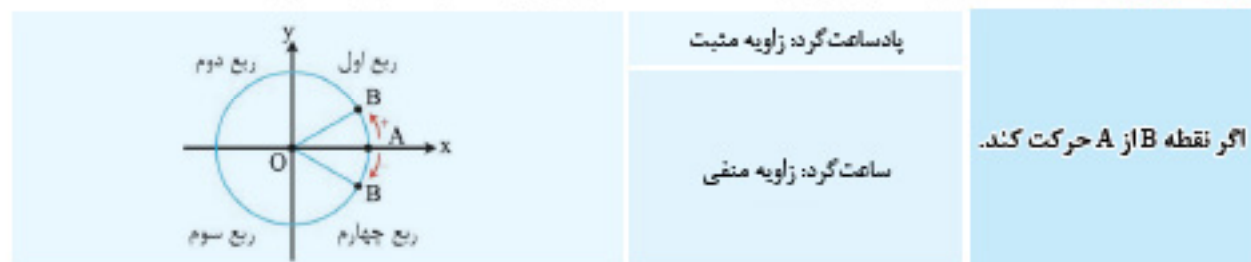
$$A = \frac{\cos^2(45^\circ) - 2 \sin(30^\circ)}{\Delta \tan^2(45^\circ) + \Delta \cos(60^\circ)}$$

راهنما:

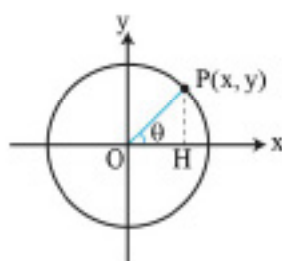
$$A = \frac{\cos^2(45^\circ) - 2\sin(30^\circ)}{\Delta \tan^2(45^\circ) + \Delta \cos(60^\circ)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Delta(1)^2 + \Delta\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\Delta + \frac{\Delta}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3\Delta}{2}} = \frac{-1}{3}$$

درس دوم: دایره مثلثاتی

تعریف و کاربرد: دایره‌ای به شعاع ۱ که مرکز آن روی مبدأ مختصات قرار می‌گیرد. ضلع OA برای تمام زوایا ثابت است.



نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ م دایره مثلثاتی



$$\begin{aligned} (1) \sin \theta &= \frac{PH}{OP} = \frac{y}{1} = y & (2) \cos \theta &= \frac{OH}{OP} = \frac{x}{1} = x \\ (3) \tan \theta &= \frac{PH}{OH} = \frac{y}{x} & (4) \cot \theta &= \frac{OH}{PH} = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

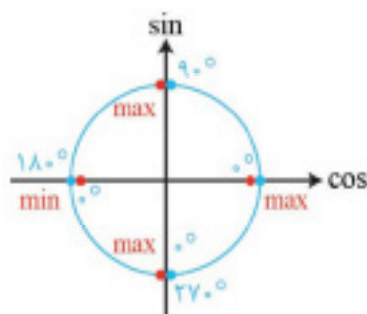
با توجه به معادلات ۲ و ۳، با داشتن مختصات نقطه P می‌توان سینوس و کسینوس زاویه آن را محاسبه کرد.

سینوس: عرض مختصات نقطه P(y) و **کسینوس:** طول مختصات نقطه P(x)

بنابراین در دایره مثلثاتی، محور افقی محور سینوس و به محور عمودی محور کسینوس هم می‌گویند.

روایای ربع دایره مثلثاتی:

✓ با توجه به اینکه sin و cos حداکثر برابر با یک و حداقل برابر با منفی یک هستند، به نمودار مقابل دقت کنید. همان‌طور که می‌بینید max و min ها و صفرها در زوایای ربع دایره پدید می‌آیند.



	Sin	cos	tan	cot
۰°	۰	۱	۰	ث ن
۹۰°	۱	۰	ث ن	۰
۱۸۰°	۰	-۱	۰	ث ن
۲۷۰°	-۱	۰	ث ن	۰

$$2\sin 45^\circ - 2\cos 60^\circ + \sin 90^\circ + \Delta \cos 180^\circ$$

مثال: حاصل عبارت رویه‌رو را بیابید.

$$2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + 1 + \Delta \times (-1) = \sqrt{2} - 1 + 1 - \Delta = \sqrt{2} - \Delta$$

راهنما:

علامت نسبت‌ها در ربع‌های مختلف: رمز رایج برای به خاطر سپردن نسبت‌های مثبت در هر ربع **هستک** است.

هستک: همه سینوس تانژانت کسینوس

	ربع اول (همه) $x, y > 0$	ربع دوم (سینوس) $x < 0, y > 0$	ربع سوم (تانژانت) $x, y < 0$	ربع چهارم (کسینوس) $x > 0, y < 0$
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tan	+	-	+	-
cot	+	-	+	-

چون که تانژانت و کتانژانت همواره هم علامت اند در رمز برای ناحیه سوم فقط تانژانت ذکر شده.



شیب خط و تانژانت

✓ اگر زاویه‌ی یک خط و جهت مثبت محور x ها، α باشد $\rightarrow$ شیب خط همان $\tan \alpha$ می‌شود.

✓ اگر α زاویه متفرجه یا باز باشد $\rightarrow$ شیب خط $(\tan \alpha)$ منفی می‌شود.

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مقدماتی:

(می‌توانید با مثلث فیثاغورسی روابط را برای خود ثابت کنید.)

$$\begin{aligned} (1) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \left\{ \begin{aligned} 1 - \cos^2 \theta &= \sin^2 \theta \\ 1 - \sin^2 \theta &= \cos^2 \theta \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$(2) (\tan \theta)(\cot \theta) = 1 \quad \left(\frac{\sin}{\cos} \right) \left(\frac{\cos}{\sin} \right) = 1$$

$$(3) (1 + \tan^2 \theta) = 1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$(4) (1 + \cot^2 \theta) = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

اتحادهای مثلثاتی:

به تساوی‌ها و روابط مثلثاتی می‌گویید که به ازای هر زاویه همواره برقرار است. برای حل و اثبات اتحادهای مثلثاتی از روابط نسبت‌ها استفاده کرده و سعی کنید دو طرف اتحاد را نزدیک و هم‌شکل کنید.

$$\cot x (1 + \tan^2 x) = \frac{1}{\sin x \times \cos x}$$

مثال: درستی اتحاد رویه‌رو را ثابت کنید.

راه‌حل:

$$\text{طرف اول} = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$$

مثال: تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{1 - \cos \theta} = 1 + \cos \theta$$

راه‌حل:

فصل سوم

درس اول: ریشه‌های دوم و سوم اعداد

$$(\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b^2 = a)$$

$$(\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a)$$

ریشه دوم: هر عدد مثبت، دو تا ریشه دوم دارد که قرینه یکدیگرند.

ریشه سوم: همه اعداد مثبت و منفی، یک ریشه سوم دارند.

یادآوری: نماد $(\Rightarrow)$ به صورت «معادل است یا» خوانده می‌شود.

این نماد یعنی طرف راست طرف چپ و طرف چپ راست را نتیجه می‌دهد.

$$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$$

نکته: در ریشه‌های فرد، منفی می‌تواند پشت، رادیکال قرار بگیرد

مقایسه تقریبی ریشه‌ها

ریشه دوم: برای محاسبه تقریبی ریشه دوم عدد a ← بررسی اینکه a بین کدام دو مربع کامل قرار می‌گیرد.

اعداد مربع کامل با به توان ۲ رساندن به اعداد حسابی تبدیل می‌شوند. $1^2, 2^2, 3^2, \dots$

ریشه سوم: برای محاسبه تقریبی ریشه سوم عدد a ← بررسی اینکه a بین کدام دو مکعب کامل قرار می‌گیرد.

اعداد مکعب کامل به توان ۳ رساندن به اعداد حسابی تبدیل می‌شوند. $1^3, 2^3, 3^3, \dots$

اگر اعداد مد نظر [مربع کامل / مکعب کامل] نباشند، [ریشه دوم / ریشه سوم] آن‌ها عددی گنگ می‌شود؛ و به‌طور دقیق قابل محاسبه نیست. برای محاسبه تقریبی با یک رقم اعشار می‌توان مانند مثال زیر عمل کرد.

مثال: ریشه دوم عدد ۲۰ را بیابید. $16 < 20 < 25 \rightarrow 4 < \sqrt{20} < 5$

راه‌حل: عدد ۲۰ فاصله کمتری با عدد ۱۶ نسبت به ۲۵ دارد پس ریشه دوم آن نیز فاصله کمتری از عدد ۴ دارد.

با این حساب، از ۴ شروع کرده و با یک رقم اعشار، مربع اعداد را محاسبه می‌کنیم.

تا نزدیک‌ترین به ۲۰ و کمتر از آن پیدا شود.

$$(4/1)^2 = 16/11 \quad (4/2)^2 = 17/64 \quad (4/3)^2 = 18/49$$

$$(4/4)^2 = 19/36 \quad (4/5)^2 = 20/25$$

ریشه چهارم و پنجم

ریشه چهارم: هر عدد مثبت، دو تا ریشه چهارم دارد که قرینه یکدیگرند. $(\sqrt[4]{a} = b \Leftrightarrow a = b^4)$

اعداد منفی نمی‌توانند ریشه زوج داشته باشند. مثلاً $[-64]$ نه ریشه دوم و نه چهارم دارد.

ریشه پنجم: همه اعداد مثبت و منفی یک ریشه پنجم دارند. $(\sqrt[5]{a} = b \Leftrightarrow a = b^5)$

همه اعداد دارای ریشه فرد هستند (یک عدد برای هر ریشه)

ریشه نمونه اعداد علامت مشابهی با آن‌ها دارند. (ریشه فرد اعداد مثبت، مثبت و ریشه فرد اعداد منفی، منفی است)

مقایسه ریشه‌ها

حالت ۱: مقایسه ریشه‌های یکسان اعداد مختلف

اگر عددی کوچک‌تر از عدد دیگری باشد ریشه‌های آن هم از ریشه‌های یکسان عدد دیگر کوچک‌ترند.

حالت ۲: مقایسه ریشه‌های مختلف یک عدد

$a < -1$	$-1 < a < 0$	$0 < a < 1$	$1 < a$
$\dots < \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a} > a$	$\dots < \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a} < a$	$\dots > \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a} > a$	$\dots < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} < a$
ریشه بزرگ‌تر ← حاصل بزرگ‌تر	ریشه بزرگ‌تر ← حاصل کوچک‌تر	ریشه بزرگ‌تر ← حاصل بزرگ‌تر	ریشه بزرگ‌تر ← حاصل کوچک‌تر

$$\sqrt[n]{a} \square \sqrt[n]{a}$$

مثال: اگر $a < -1$ باشد در جای خالی علامت ($<$ یا $>$) بگذارید.

$$\sqrt[n]{a} \square \sqrt[n]{a}$$

راه حل:

درس دوم: ریشه n امتعریف: b را ریشه n ام عدد a می‌نامیم هرگاه $n \geq 2, \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$

نکته: وقتی n زوج بوده و در معادله‌ای $\sqrt[n]{a}$ نوشته شود ← فرض این است که عبارت تعریف شده می‌باشد و A عددی مثبت است. ($a \geq 0$)

قواعد ریشه‌گیری

$$(1) \sqrt[n]{x^n} = |x|$$

اگر n زوج باشد:

✓ هر عددی را می‌توان با توان زوج مثبت خواهد شد و ریشه زوج عدد مثبت همواره مثبت است.

$$(2) \sqrt[n]{x^n} = x$$

اگر n فرد باشد:

✓ هر عدد به توان یا ریشه فرد علامت خود را حفظ می‌کند.

۳- در ضرب و تقسیم رادیکال‌ها با فرجه یکسان، می‌توانیم آن‌ها را زیر یک رادیکال ببریم.

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, (\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{ab}$$

دقت داشته باشید: $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}, \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a-b}$

نکته: اگر n زوج باشد: $1 - \sqrt[n]{x^n} = |x|$ اما $2 - (\sqrt[n]{x^n}) = x$ ←

۱) $\sqrt[n]{x^n} = |x|$
۲) $(\sqrt[n]{x})^n = x$

زیرا در معادله اول x می‌تواند مثبت یا منفی باشد (توان n زوج هر عددی را مثبت می‌کند که شرط زیر رادیکال با فرجه زوج بودن است) اما در معادله دوم x به تنهایی و قبل از به توان رسیدن زیر رادیکال رفته که یعنی حتماً مثبت ($x \geq 0$) است. پس دیگه قدر مطلق احتیاج دارد.

درس سوم: توان‌های گویا

تعریف: با دو عدد طبیعی n و m با توان کسری a (که حتماً مثبت است) این گونه تعریف می‌شود.

(توان کسری برای پایه منفی تعریف نمی‌شود)

$$\begin{cases} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{cases} \quad (n \geq 2)$$

قواعد: تماماً مانند قواعد توان‌های صحیح

یادآوری:

$$(1) a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$(2) a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$(3) (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(4) (ab)^m = a^m \times b^m$$

نکته: اگر پایه (a) بزرگ‌تر از صفر باشد می‌توان فرجه و توان را در یک عدد ثابت ضرب کرد.

$$\frac{m}{a^n} = \frac{km}{kn} = k\sqrt[n]{\frac{m}{a}}$$

درس چهارم: عبارتهای جبری

اتحادها

- (i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ✓ مربع مجموع دو جمله:
- (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ✓ مربع تفاضل دو جمله:
- (iii) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ✓ مزدوج:
- (iv) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ ✓ جمله مشترک:
- (v) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ / $a^3 + 3ab(a+b) + b^3$ ✓ مکعب مجموع دو جمله:
- (vi) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ / $a^3 - 3ab(a-b) - b^3$ ✓ مکعب تفاضل دو جمله:
- (vii) $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ ✓ چاق و لاغر
- (viii) $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

مثال: حاصل عبارت مقابل را با استفاده از اتحاد به دست آورید.

$$(x-1)(x+1)(x^2+x^2+1)$$

راه‌حل:

تجزیه: تبدیل عبارتهای جبری به ضرب عبارتها با درجه کوچک‌تر!

راههای تجزیه به ترتیب اولویت:

۱. استفاده مستقیم از اتحادها $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$

۲. دسته‌بندی عبارتها به گونه‌ای که بعد از فاکتورگیری دارای عامل مشترک باشند.

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^3 + x^2) + (x + 1) = x^2(x+1) + (x+1) = (x^2+1)(x+1)$$

۳. شکستن یک جمله و سپس دسته‌بندی عبارتها

$$x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = x(x+1)(x-1) - 2(x-1) = (x-1)(x^2 + x - 2)$$

نکته: برای تجزیه عبارتهای به شکل $ax^2 + bx + c$ با روش شکستن جملات، دو عدد را پیدا می‌کنیم که جمع آنها برابر b و ضربشان برابر ac شود. پس b را به‌صورت جمع این دو عدد نوشته و دسته‌بندی می‌کنیم.

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید.

$$x^2 - 27$$

راه‌حل:

$$x^2 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 + 2x - 4 = 0$ ب) $-x^2 + 3x - 1 = 0$

راه‌حل:

$$b^2 - 4ac = 4 + 16 = 20 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = (-1 \pm \sqrt{5})$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4 = 5 \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{مثال: } 2x^2 + 7x + 2 \xrightarrow[b=y]{ac=6} 2x^2 + 6x + x + 2 =$$

$$2x(x+2) + (x+2) = (x+2)(2x+1)$$

عبارت‌های گویا

تعریف: عبارت‌هایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای بوده و متغیر توان کسری یا درون رادیکال نداشته باشد. اگر مخرج یک عبارت گویا به ازای مقدار (های) مشخصی برابر صفر شود، عبارت گویا به ازای آن مقدار (ها) تعریف نشده است.

گویا کردن مخرج کسرها

۱) اگر مخرج به صورت $\sqrt[n]{x^m}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

نکته: برای از بین بردن رادیکال، مجموع توان‌های x باید برابر با فرجه رادیکال باشد.

۲) اگر مخرج به صورت $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ یا $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ باشد، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم. به‌طور کل اگر بخش مجزایی از مخرج ما را به یاد یک اتحاد انداخت، صورت و مخرج را در ادامه اتحاد ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

مثال: مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

راه‌حل:

ساده کردن عبارت‌های گویا

✓ برای یک عبارت یا ضرب و تقسیم عبارت‌ها، صورت و مخرج را قریته و عبارت‌های یکسان را حذف می‌کنیم.
✓ برای جمع و تفریق عبارت‌ها، ابتدا مخرج‌ها را تجزیه کرده و سپس از تمام آن‌ها k م می‌گیریم و آن را به عنوان مخرج مشترک قرار می‌دهیم.

فصل چهارم

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

درجه عبارت جبری: درجه عبارت، بزرگ‌ترین توانی از x می‌باشد که در عبارت وجود دارد. معادله و جواب معادله: هرگاه برای یک عبارت جبری معادل عددی قرار دهیم تبدیل به معادله می‌شود.

جواب معادله مقداری از x است که به ازای آن معادله صادق و برقرار باشد.

معادله درجه دوم: در حالت کلی $ax^2 + bx + c = 0$ با ضرایب a و b و c ($a \neq 0$)

تعداد جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله می‌تواند حداکثر ۲ یا ۱ یا صفر عدد باشد.

یادآوری: تجزیه عبارت درجه دوم با اتحاد جمله مشترک:

باید دو عدد پیدا کرد که جمع آن‌ها b و ضرب آن‌ها c شود.

نکته: برای تجزیه به کمک این اتحاد ضریب a باید حتماً ۱ باشد. در مواردی می‌توانید کل معادله را به ضریب a تقسیم کنید تا ضریب a تبدیل به ۱ شود.

روش‌های حل معادله

$$\text{۱) تجزیه: مثال: } x^2 - 49 = 0 \rightarrow (x-7)(x+7) = 0 \Rightarrow x = \pm 7$$

$$x^2 - 27$$

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید.

$$x^2 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$$

راه‌حل:

[۲] جابجایی اعداد: به طوری که اگر $x^2 - a = 0$ یعنی $x^2 = a$ پس $x = \pm\sqrt{a}$

$$x^2 - 49 = 0 \rightarrow x^2 = 49 \rightarrow x = \pm 7$$

مثال:

توجه دارید که اگر عدد a منفی باشد معادله جواب نخواهد داشت چون x^2 همواره مثبت است.

[۳] مربع کامل: در این روش هدف این است که با کم یا اضافه کردن اعداد به یک اتحاد مربع کامل برسیم.

برای این منظور ضریب x را نصف کرده و به توان ۲ می‌رسانیم. (b^2) پس به دو طرف معادله عددی اضافه می‌کنیم که در سمت عبارت جبری عدد تنها (c) به b^2 تبدیل شود. پس ادامه اتحاد را حل می‌کنیم.

$$x^2 - 8x + 12 = 0 \xrightarrow[b^2=16]{\frac{-8}{2} \rightarrow -4 \rightarrow (-4)^2 = 16} \frac{x^2 - 8x + 16}{(x-4)^2} = 4$$

مثال:

$$(x-4)^2 = 4 \rightarrow x-4 = \pm 2$$

$$\begin{cases} x-4=2 \Rightarrow x=6 \\ x-4=-2 \Rightarrow x=2 \end{cases}$$

دقت کنید که ضریب x حتماً باید ۱ باشد.

[۴] روش Δ (دلتا) یا روش کلی: دلتا در یک معادله درجه دوم $(ax^2 + bx + c = 0)$ برابر است با: $\Delta = b^2 - 4ac$

با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است برای ریشه‌ها پیش بیاید.

A: $\Delta > 0$ در این صورت معادله دو ریشه داشته که با معادله $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند.

B: $\Delta = 0$ در این صورت معادله یک ریشه برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ دارد.

C: $\Delta < 0$ در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد.

نکته اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم $a+b+c=0$ یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

نکته اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم $a+c=b$ یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

مثال: معادله $\frac{x^2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{3}{2} = 0$ را به روش دلخواه حل کنید.

راه حل:

$$\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{12}{6} = \frac{1}{4} + \frac{2}{1} = \frac{9}{4}$$

$$x_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = \frac{3 \times 2}{2 \times 2} = 3$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{-2}{\frac{2}{3}} = \frac{-2 \times 3}{2 \times 1} = -3$$

درس دوم: سهمی

نمودار کلی و معادله سهمی نمودار معادله $y = ax^2 + bx + c$ به صورت یک سهمی است. ($a \neq 0$)

نقطه A که محل عوض شدن جهت سهمی است رأس سهمی نام دارد.

اگر $a > 0$ A پایین‌ترین نقطه سهمی و دهانه نمودار به سمت بالا است.





اگر $a < 0 \leftarrow A$ بالاترین نقطه سهمی و دهانه نمودار به سمت پایین است.

رسم سهمی با روش مربع کامل:

$$y = x^2 - 4x + 7 \xrightarrow[\frac{b^2}{4} = 4]{-\frac{4}{2} = -2 \rightarrow (-2)^2 = 4} y = \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-2)^2} + 3$$

مثال:

$$\Rightarrow y = (x-2)^2 + 3$$

اگر درون پرانتز را برابر صفر قرار دهیم، $x = 2$ می شود و $y = 3$ که این همان رأس سهمی است.

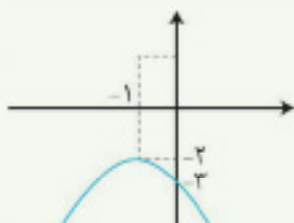
✓ حالت کلی: $y = a(x-h)^2 + k$ ($a \neq 0$)

۱. مختصات رأس سهمی (h, k) و محور تقارن سهمی، خط عمودی $x = h$ است.

۲. اگر a برابر یک نبوده از آن فاکتور بگیرید، سپس درون پرانتز را مربع کامل کنید. a را در عدد اضافه ضرب کنید تا k به دست آید، اما در عبارت مربع کامل ضرب نکتید تا معادله $a(x-h)^2 + k$ حفظ شود.

مثال: نمودار سهمی $y = -(x+1)^2 - 2$ را رسم کرده و مختصات رسمی سهمی را به دست آورید.

راه حل:



$$x+1=0 \rightarrow x=-1, y=-2 \quad S=(-1, -2)$$

$$x=0 \rightarrow -(0+1)^2 - 2 = -1 - 2 = -3$$

رأس سهمی از روی معادله استاندارد:

در معادله $y = ax^2 + bx + c$ بدون مربع کامل کردن، مختصات رأس سهمی $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ خواهد بود (از آنجا که خط تقارن سهمی از رأس آن می گذرد معادله آن $x = \frac{-b}{2a}$ خواهد بود).

دقت کنید که اکثر مواقع می توان عرض رأس سهمی را با قرار دادن طول آن در معادله به دست آورد و محاسبه Δ اجباری نیست.

معادله سهمی با استفاده از نقاط آن:

اگر نقاط متناسبی از سهمی را داشته باشیم می توانیم با استفاده از معادلات $y = a(x-h)^2 + k$ یا $y = ax^2 + bx + c$ معادله سهمی را به دست آوریم.

دقت کنید که اگر رأس سهمی داده شده بود، هم می توانید به عنوان یک نقطه در معادله آن را جایگذاری کنید و هم می توانید با توجه به $x = \frac{-b}{2a}$ و a یا با توجه به $A(h, k)$ و h و k را پیدا کنید.

تعیین علامت ضرایب و تعداد ریشه ها از روی نمودار سهمی:

۱. a : اگر دهانه سهمی به بالا $a > 0$ و اگر دهانه سهمی به پایین $a < 0$

۲. b : با استفاده از معادله $x = \frac{-b}{2a}$ و با توجه به علامت طول رأس و علامت a

۳. c : همان محل برخورد سهمی با محور y ها

۴. ریشه ها: محل برخورد (های) سهمی با محور x ها

درس سوم: تعیین علامت

عبارت‌های درجه اول:

$$ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

۱. ریشه عبارت را به دست می‌آوریم.

۲. در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

x	$-\infty$	$x < \frac{-b}{a}$	$\frac{-b}{a}$	$x > \frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax + b		مخالف علامت a		موافق علامت a	

ضرب و تقسیم چند عبارت درجه اول:

۱. ریشه هر عبارت را به دست می‌آوریم.

۲. ریشه‌های را در جدول تعیین علامت از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم.

۳. همه عبارت‌ها را در ستون سمت چپ قرار داده و در سطر خودش یا ریشه خودش تعیین علامت می‌کنیم.

۴. علامت‌های هر ستون را در هم ضرب کرده و در آخرین سطر قرار می‌دهیم.

نکته: کل عبارت به ازای ریشه (های) صورت برابر صفر و به ازای ریشه (های) مخارج تعریف نشده است.

مثال: $P(x) = \frac{(-2x-4)}{3x-9}$ ریشه: $x = -2$
 ریشه: $x = 3$

نکته: اگر عبارتی به توان زوج برسد یا کل آن قدر مطلق داشته باشد هیچ گاه منفی نمی‌شود؛ بنابراین در کل سطر چنان عبارت‌هایی

علامت + قرار می‌دهیم.

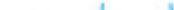
x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$-2x-4$	+	○	-	-
$3x-9$	-	-	○	+
P(x)	-	○	+	-

✓ عبارت‌های درجه دوم تعداد ریشه‌ها بستگی به علامت Δ دارد؛ بنابراین ۳ حالت داریم.

۱. $\Delta > 0$ پس معادله دو ریشه دارد. ریشه‌ها را ابتدا به دست می‌آوریم.

	<table border="1"> <tr> <th>x</th> <th>x_1</th> <th>x_2</th> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td>موافق علامت a</td> <td>مخالف علامت a</td> <td>موافق علامت a</td> </tr> </table>	x	x_1	x_2	$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a
x	x_1	x_2						
$ax^2 + bx + c$	موافق علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a					

۲. $\Delta = 0$ پس معادله یک ریشه دارد. ریشه را به دست می‌آوریم.

	<table> <tr> <th>x</th> <th>x_1</th> </tr> <tr> <td>$ax^2 + bx + c$</td> <td> a موافق علامت a موافق علامت </td> </tr> </table>	x	x_1	$ax^2 + bx + c$	a موافق علامت a موافق علامت
x	x_1				
$ax^2 + bx + c$	a موافق علامت a موافق علامت				

۳. $\Delta < 0$ پس معادله ریشه ندارد.

x	
$ax^2 + bx + c$	همواره موافق علامت a

مثال: عبارت رویه‌رو را تعیین علامت کنید. $A = \frac{x^2 + x - 2}{2 - x}$

x			
$x^2 + x - 2$			
$2 - x$			
$\frac{x^2 + x - 2}{2 - x}$			

مثال: عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید. $A = \frac{x^2 + x - 2}{x - 3}$

راه‌حل:

x	-2	1	3	
$x^2 + x - 2$	+	-	+	+
$x - 3$	+	+	+	-
$\frac{x^2 + x - 2}{x - 3}$	+	-	+	-

نامعادله درجه اول

نامعادله	می‌خوانیم	نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچک‌تر از B است.	$A > 0$	A مثبت است.
$A \leq B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.	$A \geq 0$	A بزرگ‌تر یا مساوی صفر است.
$A > B$	A بزرگ‌تر از B است.	$A < 0$	A منفی است.
$A \geq B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.	$A \leq 0$	A کوچک‌تر یا مساوی صفر است.

مراحل حل نامعادله درجه اول:

۱. با ضرب یا تقسیم‌های متناسب مخرج‌ها را از بین می‌بریم.

۲. اعداد را به یک طرف و متغیرها را به یک طرف می‌بریم. دقت کنید که شبیه تساوی‌ها، جابه‌جایی عبارت از طرفی به طرف دیگر علامت آن را عوض می‌کند.

۳. دو طرف را به ضرب مجهول تقسیم می‌کنیم.

دقت دارید که در ضرب یا تقسیم معادله بر عدد متغی جهت نامعادله را عوض می‌کند.

نامعادله‌های دوگانه:

✓ نامعادله‌های شبیه $a < x < b$ را دوگانه می‌نامند. اگر a و b عدد باشند می‌توانید با انجام اعمال ریاضی جواب را در همین نامعادله به دست بیاورید.

✓ اگر در یک نامعادله دوگانه a و b نیز عبارت‌های جبری باشند باید آن را به دو معادله $x < b$ و $x > a$ تبدیل کرده، جواب‌های هر معادله را محاسبه کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک گرفت.

مثال: هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید.

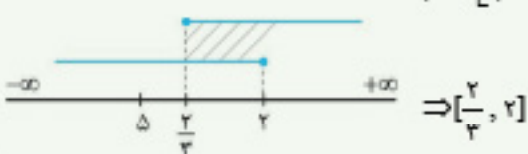
$$x + 1 \leq 5 - x \leq 2x + 3, \quad 5 - x \leq 2x + 3$$

راه‌حل:

$$x + x \leq 5 - 1, \quad -x - 2x \leq 3 - 5$$

$$2x \leq 4, \quad -3x \leq -2$$

$$(-\infty, 2], \quad x \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \left[\frac{2}{3}, +\infty \right)$$



تعیین علامت در حل نامعادله

ابتدا تمام عبارت‌ها را به یک سمت منتقل کرده و در صورت لزوم مخرج مشترک می‌گیریم تا یک صورت و یک مخرج در یک طرف نامعادله و یک صفر در طرف دیگر داشته باشیم. سپس به کمک جدول تعیین علامت بازه‌هایی که دارای شرط مدنظر صورت سؤال هستند را می‌یابیم.

$$\frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)^2(-x+4)} > 0$$

مثال: نامعادله مقابل را حل و مجموعه جواب را به صورت بازه نمایش دهید.

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \rightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$x-2=0 \rightarrow x=2$$

$$-x+4=0 \rightarrow x=4$$

راه حل:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$x^2 - 4x + 2$	+	+	-	-	+	+
$-x + 4$	+	+	+	+	-	-
	+	+	-	-	+	-

مجموعه جواب $(-\infty, 1) \cup (3, 4)$

عبارت‌های درجه دوم که همواره مثبت یا منفی هستند: در یک سهمی اگر $\Delta > 0$ نمودار به ۳ قسمت تقسیم می‌شود و علامت قسمت میانی متفاوت است.

اگر $\Delta = 0$ یا $\Delta < 0$ نمودار همواره بالا یا پایین (با توجه به علامت a) محور مختصات خواهد بود پس عبارت درجه دومی است که همواره مثبت یا همواره منفی می‌شود.

نامعادله‌های قدر مطلق

یادآوری: قدر مطلق فاصله نقطه مدنظر روی محور را از مبدأ نشان می‌دهد و همواره مثبت می‌شود.

$$|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \rightarrow x \geq a \text{ / } x \leq -a$$

به جای x می‌تواند یک عبارت جبری نیز قرار بگیرد. (A)

مثال: هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید.

$$|7 - 2x| < 1$$

راه حل:

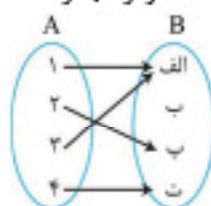
$$-1 < 7 - 2x < 1 \xrightarrow{-7} -8 < -2x < -6 \xrightarrow{\div(-2)} 4 > x > 3 \quad (3, 4)$$

فصل پنجم

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

مفهوم تابع

تعریف: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین A و B است که به هر عضو از مجموعه A، دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت می‌دهد.

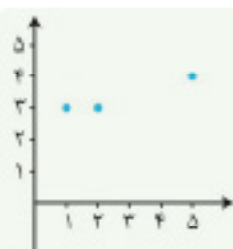


توضیح: دو مجموعه A و B داریم. از هر عضو مجموعه A باید دقیقاً یک پیکان به سمت مجموعه B برود؛ اما در مجموعه B به هر عضو می‌تواند بیش از یک پیکان وارد شود یا پیکانی وارد نشود.

زوج مرتب تابع و نمودار مختصاتی

تعریف زوج مرتب: زوجی از اعداد که ترتیب آن‌ها مهم است و یک نقطه از تابع روی نمودار مختصات را نشان می‌دهد. مثلاً زوج مرتب $(1, 3)$ یا $(3, 1)$ تفاوت دارد. برخلاف مجموعه‌ها که $\{1, 3\}$ یا $\{3, 1\}$ تفاوتی ندارد.

مثال: $f = \{(1, 2), (5, 4), (2, 2)\}$



تابع بودن مجموعه زوج‌های مرتب:
اگر مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داشته باشیم زمانی تابع است که مؤلفه‌های اول (اعداد سمت چپ) همگی متفاوت باشند.

اگر در مجموعه‌ای مؤلفه‌های اول دو زوج برابر باشند، مؤلفه‌های دوم نیز قطعاً برابر هستند وگرنه این مجموعه تابع نیست.

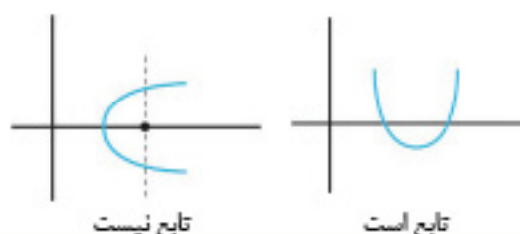
مثال: مقدار a را طوری به دست آورید که رابطه‌ی $R = \{(2, 7), (9, 2a), (9, 1-a)\}$ یک تابع باشد.

$$2a = 1 - a \Rightarrow 3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

راه‌حل:

تابع بودن مقدار

در یک نمودار محور x ‌ها شبیه مجموعه A و محور y ‌ها شبیه مجموعه B است. بدین معنی که به هر x (طول) حداکثر یک y نسبت داده می‌شود اما به هر y (عرض) می‌توان بی‌نهایت x نسبت داد.



مثال:

درس دوم: دامنه و برد تابع

تعریف دامنه: مجموعه همه مؤلفه‌های اول و زوج مرتب‌های یک تابع (D_f)

تعریف برد: مجموعه همه مؤلفه‌های دوم و زوج مرتب‌های یک تابع (R_f)

اگر همان مجموعه‌های A و B درس قبل را در نظر بگیریم، دامنه همان مجموعه A و برد همان مجموعه B است. (البته اعضای B که پیکان به آن‌ها وارد شده است)

✓ اگر دو نمودار تابع را داشته باشیم مجموعه شامل x ‌ها همان دامنه و مجموعه شامل y ‌ها همان برد است.

نمایش تابع به صورت جبری

می‌توان به تابع f مانند یک دستگاه نگاه کرد که ورودی (x) را دریافت می‌کند، اعمال جبری روی آن انجام می‌دهد و سپس خروجی (y) یا $(f(x))$ را تحویل می‌دهد.

مثال: رابطه بین یک مربع و محیط آن

$$\left. \begin{array}{l} x = \text{ضلع مربع} \\ y = f(x) = \text{محیط مربع} \end{array} \right\} y = f(x) = 4x$$

شیب خط

$$f(x) = ax + b \rightarrow \text{عرض از مبدا}$$

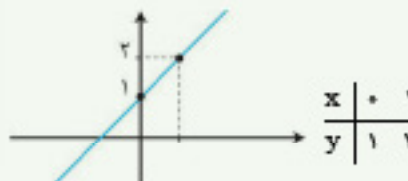
نواحی خطی: معادله کلی:

اگر تابع خطی از نقطه (c, d) عبور کند می‌توان c را به جای x و d را به جای $f(x)$ صدق داد.

مثال: نمایش جبری تابع خطی $f(1) = 2$ و $f(-5) = -4$ را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x) = ax + b$$

راه‌حل:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \rightarrow a \times 1 + b = 2 \rightarrow a + b = 2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 5a - b = +4 \end{cases} \\ f(-5) &= -4 \rightarrow -5a + b = -4 \\ 6a &= 6 \rightarrow \boxed{a=1} \\ a + b &= 2 \rightarrow \boxed{b=1} \end{aligned}$$


x	0	1
y	1	2

دامنه و برد تابع از روی نمودار

✓ دامنه تابع بازه طول نقاط تشکیل دهنده آن یعنی بازه‌ی محور x هاست.

برد تابع بازه عرض: نقاط تشکیل دهنده آن یعنی بازه‌ی محور y هاست.

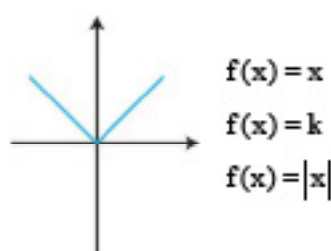
✓ اگر در صورت سؤال دامنه و برد معلوم نشده ولی ضابطه تابع وجود دارد، دامنه و برد را با توجه به شرایط سؤال بزرگ‌ترین بازه ممکن قرار می‌دهیم.

درس سوم: انواع توابع

توابع چندجمله‌ای: اگر چندین یک جمله‌ای را با هم جمع و تفریق کنیم یک چندجمله‌ای به دست می‌آید. تابع‌هایی که ضابطه آن‌ها یک یا چندجمله‌ای با متغیر یکسان است را توابع چند جمله‌ای می‌گویند.

مثال: یک تابع چندجمله‌ای درجه ۴ $f(x) = \sqrt{2}x^4 + \frac{x^2}{2} + x + 7$

توابع چندجمله‌ای خاص:



۱. **تابع همانی:** ورودی هر چه باشد خروجی همان خواهد بود.

۲. **تابع ثابت:** مقدار تابع به ازای همه ورودی‌ها یک عدد ثابت خواهد بود.

۳. **تابع قدرمطلق:** به هر عدد حقیقی x قدرمطلق آن را نسبت می‌دهد.

با توجه به نمودار روبه‌رو دامنه این تابع R اما برد آن بازه $[0, +\infty)$ است.

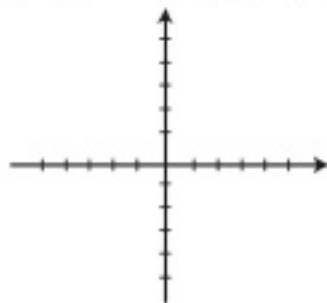
۴. **تابع چند ضابطه‌ای:** در بخش‌های مختلف دامنه خود، ضوابط متفاوتی دارد.

مثال: $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 1 \\ 2x & 1 < x \leq 10 \\ x^2 & 10 < x \end{cases}$

برای به دست آوردن مقدار این توابع باید اول بررسی کرد که ورودی خاص (x) در کدام دامنه قرار گرفته و بنابراین کدام ضابطه برای آن

تعریف می‌شود. سپس همان ضابطه را استفاده می‌کنیم.

برای رسم چتین نموداری هم به همین صورت ضوابط را در دامنه تعریف خودشان رسم می‌کنیم.



مثال: تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x < 2 \\ x+2 & x \geq 2 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

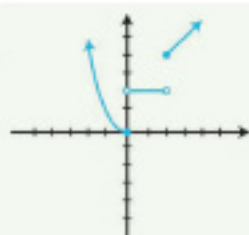
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) دامنه تابع را با استفاده از نمودار به دست آورید.

پاسخ:

x	۲	۳
y	۴	۵

ب) $D = R$



رسم توابع به کمک انتقال

۱. انتقال عمودی: $f(x) \pm k$

با اضافه کردن عدد k به کل ضابطه نمودار $f(x)$ ، نمودار در جهت محور y ها به سمت بالا (اگر $k > 0$) و یا پایین (اگر $k < 0$) منتقل می شود.

نکته: در انتقال عمودی دامنه تابع بدون تغییر مانده اما برد فرق می کند.

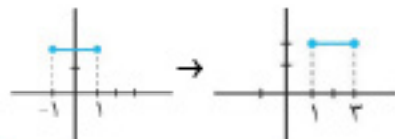
۲. انتقال افقی: $y = f(x \pm k)$

برای فهم انتقال افقی ابتدا باید توجه داشت که تابع f ضابطه خود را به هر گونه ورودی به طور تمام و کمال اعمال می کند. مثلاً اگر $f(x) = x^2$ پس $f(x+1) = (x+1)^2$. به زبان ساده تر اگر ورودی دیگری به جز x داشتیم آن را کامل و بدون جدا کردن اجزایش به جای x جایگذاری می کنیم.

با اضافه کردن عدد k به ورودی نمودار f ، نمودار در جهت محور x ها به سمت راست (اگر $k < 0$) و یا به سمت چپ (اگر $k > 0$) منتقل می شود.

مثال: نمودار $f(x)$ دامتهای با بازه $[-1, 1]$ دارد؛ یعنی تنها ورودی هایی که در این بازه باشند را قبول می کند. حالا اگر بخواهیم ورودی $(x-2)$ را به آن بدهیم، باید x را به گونه ای به دست بیاوریم که $x-2$ بین -1 و 1 باشد.

پس دامنه تابع $f(x-2)$ بازه $[1, 3]$ می شود.



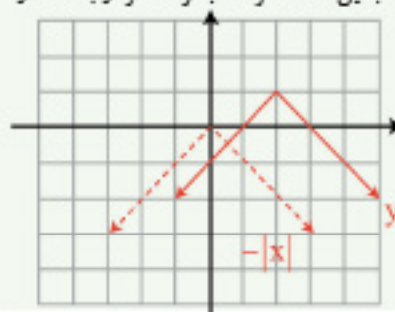
نکته: در انتقال افقی برد تابع بدون تغییر مانده اما دامنه فرق می کند.

۳. قرینگی $y = -f(x)$

برای رسم قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها کافی است کل ضابطه را در یک متفی ضرب کنیم. (دامنه ثابت مانده اما برد فرق می کند)

مثال: نمودار تابع $y = -|x-2| + 1$ به کمک انتقال رسم کنید و دامنه برد آن را تعیین کنید.

راه حل: ابتدا تابع اصلی $y = -|x|$ را به کمک نقطه یابی رسم می کنیم. سپس چون x به $x-2$ تبدیل شده 2 واحد به راست و y به $y+1$ تبدیل شده 1 واحد به بالا، نمودار را منتقل می کنیم.



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$- x $	-۲	-۱	۰	-۱	-۲

$D = R$

$R = (-\infty, 1]$

فصل ششم

درس اول: شمارش

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب داریم، برای انجام این

کار $m+n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب، ... و در روش k ام m_k انتخاب داریم، برای انجام این کار $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

✓ دقت دارید که کار مدنظر در نهایت فقط با یکی از این انتخاب‌ها انجام می‌شود.

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به گونه‌ای که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، بتوان مرحله دوم را به n روش انجام داد، برای انجام کل کار $m \times n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری را شامل k روش انجام باشد و برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای مرحله دوم m_2 روش، ... و برای مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد، برای انجام کل کار $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش وجود دارد.

☐ همزمانی اصل ضرب و جمع

در مسائلی که از اصول ضرب و جمع به صورت جداگانه استفاده می‌کنیم، اجزاء مختلف از هم مستقل هستند.

اما در برخی مسائل دیگر، حالت‌های ممکن برای یک جزء مربوط و مشروط به حالت‌هایی هستند که ممکن است در جزئی دیگر اتفاق بیفتند. برای حل چتیتی سؤالاتی ابتدا باید جزءهای مربوط را تشخیص داد، حالت‌های جزئی که دیگری به آن بستگی دارد را جدا کرد و سپس به‌طور جداگانه برای هر حالت اصل ضرب را به کار برده و در نهایت اصل جمع را روی تمام جواب‌های به دست آمده اعمال می‌کنیم.

مثال: با ارقام ۰ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ چند عدد ۴ رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟

راه حل:

صفر یکان باشد	$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$	$\rightarrow 24 + 36 = 60$
صفر یکان نباشد	$\begin{bmatrix} \square & \square & \square & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 4 \times 3 \times 2 = 24$	

متمم: گاهی آسان‌تر است که به جای محاسبه تمام حالت‌های ممکن (مطلوب)، حالت‌های نامطلوب را بشماریم و از تعداد کل حالت‌های انجام کاری کم کنیم.

درس دوم: جایگشت

فاکتوریل! به معنی ضرب n عدد پشت سر هم تا عدد یک است.

نکته: اعداد فاکتوریلی را نمی‌توان جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم کرد در واقع باید آن‌ها را گسترش داد و به عدد واقعی تبدیل کرد.

$$\frac{(2!)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \neq 6! \quad \text{مثال: } 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 120$$

نکته: هر فاکتوریل را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد و آن گونه نوشت: اعداد بزرگتر $\times$ فاکتوریل

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! = \dots$$

برای ساده کردن یک کسر فاکتوریلی، فاکتوریل بزرگ‌تر را به روش نکته قبل تا جایی تجزیه می‌کنیم که فاکتوریل کوچک‌تر ظاهر شود و سپس ساده می‌کنیم.

$$\frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 \quad \text{مثال:}$$

نکته: به صورت قراردادی $0!$ برابر با یک فرض می‌شود.

☐ جایگشت

فرض کنید می‌خواهیم ۳ مهره A، B و C را در کنار هم بچینیم. به چند حالت می‌توان این کار را کرد؟

اگر بتوسیم CAB, BCA, BAC, ACB, ABC و CBA متوجه می‌شویم که در کل ۶ حالت ممکن است. به این کار جایگشت می‌گوییم.

تعریف: به هر حالت کنار هم چیدن اشیایی متمایز که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها اهمیت داشته باشد، یک جایگشت از آن اشیاء گفته می‌شود.

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز = n!

جایگشت‌های طلایی: در یک حالت خاص جایگشت، چند شیء متمایز باید همیشه کنار هم باشند برای حل این مسائل تصور می‌کنیم این چند شیء را با طتاب به هم می‌بندیم و همه آن‌ها را به عنوان یک شیء با اشیاء دیگر جایگشت می‌دهیم. دقت کنید که گاهی باید جایگشت اشیاء طتاب پیچ شده را با هم نیز حساب کرد. (حاصل ضرب)

جایگشت‌های یک در میان

مثال: ۳ کتاب تاریخ متمایز و ۴ کتاب فلسفه متمایز داریم. به چند حالت می‌توانیم آن‌ها را یک در میان بچینیم؟

با کتاب‌های فلسفه شروع می‌کنیم و آن‌ها را با فاصله می‌چینیم. تعداد جایگشت‌ها ۴! می‌شود سپس کتاب‌های تاریخ را در ۳ فاصله بین کتاب‌های فلسفه می‌چینیم که تعداد جایگشت‌هایشان ۳! می‌شود.

با توجه به اصل ضرب تعداد جایگشت‌های نهایی این کتاب‌ها برابر $(4!)(3!)$ می‌باشد.

اگر تعداد کتاب‌های تاریخ و فلسفه برابر می‌بود اولین کتاب از چپ می‌توانست تاریخ یا فلسفه باشد (در مثال قبل اولین کتاب سمت چپ فقط می‌توانست تاریخ باشد) با احتساب این حالت در مثال دوم تعداد کل جایگشت‌ها برابر با $(2)(4!)(4!)$ می‌شود.

جمع‌بندی:

۱. تعداد جایگشت‌های یک در میان n چیز متمایز و $(n-1)$ چیز متمایز دیگر: $n!(n-1)!$

۲. تعداد جایگشت‌های یک در میان n چیز متمایز و n چیز متمایز دیگر: $(2)(n!)(n!)$

جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز

به‌طور خلاصه در این مبحث n شیء متمایز داریم که می‌خواهیم از بین آن‌ها r شیء را انتخاب کنیم و به ترتیب بچینیم. پس در این جایگشت‌ها هم ترتیب و هم انتخاب اشیاء اهمیت دارد.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز:

جایگشت اشیاء تکراری

اگر در بین n شیء، اشیایی داشتیم که تکراری بودند، یعنی اگر جای آن‌ها را با هم عوض کنیم حالت جدیدی از جایگشت پدید نمی‌آید: کل جایگشت‌ها را به جایگشت اشیای تکراری تقسیم می‌کنیم.

مثال: چند جایگشت از حروف کلمه mathematics وجود دارد؟

$$\frac{11!}{2!(m) \times 2!(a) \times 2!(t)} = \frac{11!}{(2!)(2!)(2!)}$$

مثال: با حروف کلمه "computer" و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف C شروع شوند.

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف c, o, m کنار هم باشند.

$$\text{الف)} \quad 1 \times 7! = 7! \quad 1 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

راه‌حل:

ب) سه حرف com یک حرف حساب می‌شود پس در کل ۶ حرف داریم خود سه حرف هم می‌توانند جابه‌جا شوند. پس $6! \times 3!$

مثال: با حروف جهانگردی و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حروف نقطه‌دار شروع شود؟

راهنما:

$$\begin{aligned} 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 &= 20160 \\ 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 &\Rightarrow 8 \times 7 \\ &\searrow \\ &\text{جایان یای} \end{aligned}$$

درس سوم: ترکیب

تعریف: به هر حالت انتخاب r شیء از n شیء متمایز که ترتیب انتخاب اشیاء اهمیتی نداشته باشد، ترکیب r تایی از n شیء گفته می‌شود.

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

تعداد ترکیب‌های r شیء از n شیء متمایز:

دلیل تقسیم جایگشت به $r!$ برای محاسبه ترکیب این است که r شیء با $r!$ جایگشت دارند که در $P(n, r)$ این جایگشت‌ها حالت‌های متفاوتی می‌سازند اما در ترکیب، صحبت از انتخاب است. پس ترتیب‌های متفاوت اشیاء حالت‌های متفاوتی درست نمی‌کنند. (حالت‌های ترکیب از جایگشت کمتر است)



۱ $\binom{n}{1} = n$

۲ $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

۳ $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ و $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

۴ اگر بخواهیم با مثال توضیح دهیم یعنی حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۶ نفر یا حالت‌های کنار گذاشتن ۲ نفر از ۶ نفر برابر است. برای کنار گذاشتن هم باید انتخاب کرد. پس: $\binom{6}{4} \times \binom{6}{2}$

۵ اگر در r شیء که از n تا انتخاب می‌کنیم باید حتماً k عضو از n حضور داشته باشند: $\binom{n-k}{r-k}$
چون آن k شیء را انتخاب کرده کنار می‌گذاریم و از اشیای باقی‌مانده $n-k$ دیگر انتخاب می‌کنیم.
۶ اگر در r شیء که از n تا انتخاب می‌کنیم k عضو از n حتماً نباید حضور داشته باشند. $\binom{n-k}{r}$
چون k شیء را از محدوده انتخاب خارج کرده و از اشیای باقی‌مانده n تا انتخاب می‌کنیم.

مسائل جفت‌نشدن

فرض کنید می‌خواهیم از بین ۶ زن و شوهر ۳ نفر را انتخاب کنیم به گونه‌ای که هیچ کدام با هم زن و شوهر نباشند. برای حل این گونه مسائل ابتدا به تعداد اشیاء خواسته شده جفت انتخاب می‌کنیم؛ یعنی اول باید ۳ زن و شوهر را از بین بقیه انتخاب کنیم. سپس $\binom{6}{3}$ توجه می‌کنیم که در هر جفت ۲ انتخاب برای ما وجود دارد.

مثلاً در زن و شوهر ۱ می‌توانیم یا خانم را انتخاب کنیم یا آقا؛ و این در دو زوج دیگر نیز صادق است. پس انتخاب یک نفر از بین هر زوج می‌شود: $\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1}$ سپس با توجه به اصل ضرب حالت‌های کل را محاسبه می‌کنیم. $\binom{6}{3} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 960$

مثال: در یک کیسه ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز موجود است و همه مهره‌ها متفاوت هستند. اگر سه مهره با هم تصادفی خارج کنیم، تعداد حالت‌هایی را حساب کنید که:
(الف) فقط دو مهره قرمز باشد.
(ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

راه حل:

$$\text{الف)} \quad \binom{5}{2} + \binom{7}{1} = 10 + 7 = 17$$

$$\text{ب)} \quad \binom{4}{1} \binom{8}{2} + \binom{4}{2} \binom{8}{1} + \binom{4}{3} = 4 \times 28 + 6 \times 8 + 4 = 164$$

مثال: اگر $P(n, 4) = 12C(n-2, 2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.

راه حل:

$$\left. \begin{aligned} P(n, 4) &= \frac{n!}{(n-4)!} \\ C(n-2, 2) &= \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-4)!} = 12 \times \frac{(n-2)!}{2(n-4)!} \Rightarrow n(n-1) = 6 \Rightarrow n = 3$$

مثال: در تساوی مقابل مقدار n را به دست آورید. $\binom{n}{2} = 28$

راه حل:

$$\binom{n}{2} = 28 \rightarrow \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \times (n-2)!} = 28 \rightarrow n(n-1) = 56 \rightarrow \boxed{n = 8}$$

مثال: الف) از میان شش کتاب مختلف به چند طریق می توان چهار کتاب را کنار هم در یک قفسه چید؟

ب) از بین ۴ دانش آموز دهم، ۳ دانش آموز یازدهم و ۲ دانش آموز دوازدهم به چند روش می توان انجمن علمی ۵ نفره تشکیل داد به طوری که حداقل سه دانش آموز دهمی داشته باشد.

راه حل:

الف) جابه جایی ۴ کتاب گروه جدید ایجاد می کند یعنی چیدمان $abcd$ با چیدمان $adcb$ یکی نیست. پس:

$$P(4, 4) = \frac{4!}{(4-4)!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24$$

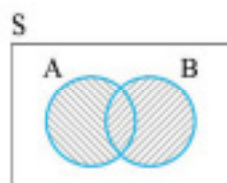
ب) یعنی می تواند انجمن شامل ۳ یا ۴ دانش آموز دهمی باشد. پس:

$$\binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{4} \binom{5}{1} = 4 \times 10 + 1 \times 5 = 45$$

فصل هفتم

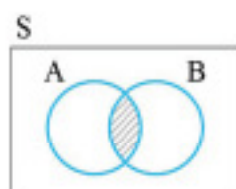
درس اول: دنبال یا اندازه گیری شانس

پدیده یا آزمایش های تصادفی: پدیده یا آزمایش هایی که تمام حالت های ممکن اتفاق افتادن آن ها را بدانیم اما نتوانیم نتیجه آن ها را به صورت دقیق پیش بینی کنیم.

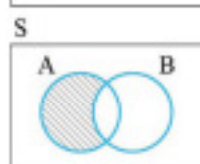
فضای نمونه ای: در یک آزمایش تصادفی، مجموعه شامل همه حالت های ممکن را فضای نمونه ای می گوئیم. فضای نمونه را با S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نمایش می دهیم.پیشامدهای تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای S را یک پیشامد تصادفی در S می نامیم.

پیشامدها و برخی اعمال روی آن ها

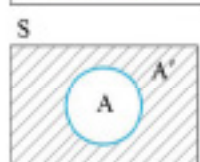
۱) اجتماع دو پیشامد $(A \cup B)$: زمانی که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد. A رخ بدهد، یا B بدهدیا هر دو رخ بدهند $(A \cap B)$



۲. اشتراک دو پیشامد $(A \cap B)$: زمانی که دو پیشامد با هم رخ بدهند (حتماً هم A رخ بدهد هم B رخ بدهد)



۳. تفاضل دو پیشامد $(A - B)$: زمانی که پیشامد A رخ بدهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

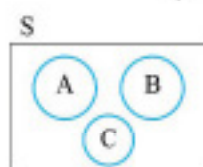


۴. متمم یک پیشامد (A') : متمم پیشامد A زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

نکته: با توجه به نمودار $A \cap A' = \emptyset$ و $A \cup A' = S$

پیشامدهای ناسازگار:

تعریف: هرگاه بین دو پیشامد، اشتراک تهی شود $(A \cap B = \emptyset)$ به A و B دو پیشامد ناسازگار گفته می‌شود. هرگاه بیش از دو پیشامد داشتیم که هر کدام با همهٔ دیگر پیشامدها ناسازگار باشد، آن‌ها را دوبعدو ناسازگار می‌گوییم.



$$A \cap B = \emptyset \quad A \cap C = \emptyset \quad B \cap C = \emptyset$$

مثال: دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم:

- الف) پیشامد A را بنویسید که در آن مجموع اعداد رو شده ۷ باشد.
ب) پیشامد B را بنویسید که در آن اعداد رو شده عدد اول باشند.
ج) آیا دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟

الف) $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

ب) $B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 3), (3, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 5)\}$

ج) خیر، زیرا $A \cap B = \{(5, 2), (2, 5)\} \neq \emptyset$

مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

- الف) فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان خانواده را بنویسید.
ب) پیشامد A که در آن "فقط دو فرزند اول هم‌جنس باشند" را مشخص کنید.

الف) $n(S) = 2^3 = 8$

ب) $A = \{(د و د و د) و (د و پ و پ)\}$

مثال: یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

- الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی
ب) پیشامد A که در آن حداقل عدد رو شده تاس ۳ باشد.

الف) $S = \{(1, ر), (2, ر), \dots, (6, ر), (1, پ), \dots, (6, پ)\}$

$$\text{ب) } A = \left\{ (3, r), (4, r), (5, r), (6, r), (3, p), (4, p), (5, p), (6, p) \right\} \quad n(A) = 8$$

▮ احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس)

تعریف: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و A یک پیشامد در فضای S باشد. احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ به صورت

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعریف می‌شود.

احتمال رخداد یک پیشامد عددی حقیقی بین یک و صفر است. هر چه احتمال رخداد A بیشتر باشد، $P(A)$ به یک نزدیک‌تر و هر چه احتمال رخداد آن کمتر باشد، $P(A)$ به صفر نزدیک‌تر است.



$$P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1 \quad \text{و} \quad P(\emptyset) = \frac{n(\emptyset)}{n(S)} = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

✓ احتمال رخداد پیشامد $A \cup B$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

✓ اگر پیشامدهای A و B ناسازگار باشند، $P(A \cap B) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} A \cup A' = S \\ P(S) = 1 \end{array} \right\} P(A) = P(A') = 1 \Rightarrow P(A') = 1 - P(A)$$

✓ احتمال رخ ندادن پیشامد A (A'):

✓ از بین رابطه در حالتی استفاده می‌کنیم که محاسبه رخداد A' و سپس کم کردن آن از S از محاسبه مستقیم A آسان‌تر باشد.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. اگر از این کیسه سه مهره به تصادف خارج کنیم چقدر احتمال دارد هر سه مهره هم‌رنگ باشد.

راه‌حل: هر سه مهره هم‌رنگ یعنی هر سه آبی یا هر سه قرمز باشند. پس

$$n(A) = \binom{4}{3} + \binom{5}{3} = 4 + 10 = 14$$

هر سه مهره هم‌رنگ یعنی هر سه آبی یا هر سه قرمز باشند. پس

$$n(S) = \binom{9}{3} = 84 \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{14}{84}$$

مثال: اگر ۸ نفر که دو نفر آن‌ها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

راه‌حل: A' : دو برادر کنار هم نباشند $\xrightarrow{\text{متمم}}$ A : هر دو برادر کنار هم نباشند.

$$n(S) = 8! \quad n(A') = 2! \times 6!$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{2 \times 6!}{8 \times 7!} = \frac{1}{4} \quad P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

مثال: یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری A و B را می‌پذیرد. اگر ۳۴٪ درصد مشتریان کارت نوع A و ۶۲٪ درصد کارت نوع B و ۱۵٪ درصد هر دو نوع کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان یا در اختیار داشتن "حقاقل" یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کنند؟

راه‌حل:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.34 + 0.62 - 0.15 = 0.81$$

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

تعریف آمار: مجموعه‌ای از ارقام، اعداد و اطلاعات

تعریف علم آمار: مجموعه روش‌هایی شامل ۱- جمع‌آوری اعداد و ارقام ۲- سازماندهی و نمایش ۳- تحلیل و تفسیر داده‌ها و ۴- نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی متناسب، در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

جامعه یا جمعیت آماری

تعریف: مجموعه همه چیزهایی که درباره ویژگی (های) آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد.

عضو جامعه آماری: هر یک از افراد و یا اشیای جامعه

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه

نمونه آماری

تعریف: بخشی از جامعه که برای مطالعه ویژگی (های) مدنظر انتخاب می‌شود.

عضو نمونه آماری: هر یک از افراد و یا اشیای انتخاب شده

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه

درس سوم: متغیر و انواع آن

تعریف: ویژگی از اعضای یک جامعه می‌باشد که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند.

مقدار متغیر: عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود.

انواع متغیر کمی: قابل اندازه‌گیری هستند. (قد، وزن، دما)

کیفی: قابل اندازه‌گیری نیستند. (گروه خونی، تحصیلات، جتسیت افراد)

انواع متغیرهای کمی

۱. **کمی پیوسته:** متغیری که اگر بتواند مقادیر x و y را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند. (طول، وزن، زمان)

۲. **کمی گسسته:** متغیری که پیوسته نباشد، یعنی فقط بتواند مقادیر مشخص و مجزایی را اختیار کند. (تعداد)

انواع متغیرهای کیفی

۱. **کیفی ترتیبی:** متغیری که در آن نوعی ترتیب طبیعی و منطقی وجود داشته باشد. (سطح تحصیلات)

۲. **کیفی اسمی:** متغیری که ترتیبی نیست، یعنی در آن نوعی رتبه‌بندی وجود نداشته باشد. (جتسیت، وضعیت هوا)

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) قد	ب) شاخص توده بدن
ج) میزان هوش	د) مراحل تحصیلی
ه) گروه خونی	و) سن
ز) رنگ چشم	ح) تعداد دوستان

راهنما:

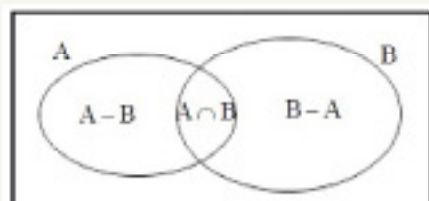
الف) کمی پیوسته	ب) کمی پیوسته
ج) کیفی ترتیبی	د) کیفی ترتیبی
ه) کیفی اسمی	و) کمی پیوسته
ز) کیفی اسمی	ح) کمی گسسته

ریاضی دهم

فصل ۱

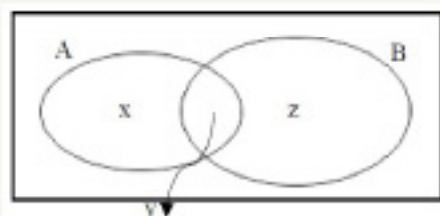
سوال ۱ با بررسی نقایص ۷۰ محصول یک کارخانه، مشخص شد تعداد محصولاتی که فقط نقص A را دارند دو برابر تعداد محصولاتی است که فقط نقص B را دارند. همچنین تعداد محصولاتی که هر دو نقص را دارند، نصف تعداد محصولاتی است که فقط نقص B را دارند. چند محصول فقط نقص A را دارند؟
(شهید بهشتی اندیشک خرماد ۱۴۰۲)

پاسخ: با توجه به نمودار ون، می‌دانیم:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad \text{یا} \quad n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B)$$

راه حل:



$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ x = 2z \\ y = \frac{1}{2}z \end{array} \right\} \Rightarrow x = 2z = 4y \Rightarrow 4y + 2y + y = 70 \Rightarrow y = 10 \rightarrow \begin{cases} x = 40 \\ z = 20 \end{cases}$$

بنابراین ۴۰ محصول فقط نقص A را دارند.

سوال ۲ در یک دنباله ی حسابی جمله ی دهم و جمله ی سوم به ترتیب ۱۱ و ۳۲ می‌باشد. این دنباله دارای چند جمله ی مثبت است؟
(فیزیکان ۱ فارس دی ۱۴۰۰)

پاسخ: جمله عمومی دنباله حسابی: $t_n = a + (n-1)d$

برای پیدا کردن تعداد جملات یک دنباله در بازه‌ای خاص، ابتدا جمله عمومی آن دنباله را پیدا کرده و سپس در بازه موردنظر قرار می‌دهیم تا بازه مطلوب n را پیدا کنیم.

راه حل:

$$\left. \begin{array}{l} t_7 = a + (7-1)d = 32 \rightarrow a + 6d = 32 \\ t_{10} = a + (10-1)d = 11 \rightarrow a + 9d = 11 \end{array} \right\} \Rightarrow 9d - 6d = 11 - 32 \Rightarrow 3d = -21 \Rightarrow d = -7$$

$$t_7 = a + (7)(-7) = 32 \rightarrow a = 32 + 49 = 81 \Rightarrow \text{جمله عمومی: } t_n = 81 - 7(n-1) = -7n + 88$$

$$t_n = -7n + 88 > 0 \rightarrow -7n > -88 \rightarrow 7n < 88 \rightarrow n < \frac{88}{7}; \quad 12 \Rightarrow$$

پس ۱۲ جمله مثبت داریم.

سوال ۳ مقدار x را طوری بیابید که سه عبارت $4x + 7, 2x - 1, x + 1$ تشکیل دنباله هندسی دهند. و جمله عمومی دنباله را بنویسید.

(برای دانش بهیمن دی ۱۴۰۱ یا تغییر)

پاسخ: اگر A و B و C سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، B واسطه حسابی A و C است.

یعنی: $A.C = B^2$

جمله عمومی دنباله هندسی: $t_n = a.r^{n-1}$

$$x + 1, 2x - 1, 4x + 7, \dots \rightarrow (x + 1)(4x + 7) = (2x - 1)^2 \rightarrow 4x^2 + 11x + 7 = 4x^2 - 4x + 1 \rightarrow 15x = -6 \Rightarrow x = \frac{-6}{15} = \frac{-2}{5}$$

دنباله به این صورت در می‌آید: $\frac{3}{5}, \frac{-9}{5}, \frac{27}{5}, \dots$

می‌دانیم قدر نسبت یک دنباله هندسی (r) از تقسیم دو جمله متوالی برهم به دست می‌آید: $\frac{-9}{\frac{3}{5}} = -3$

بنابراین: $t_n = (\frac{3}{5}).(-3)^{n-1}$

سوال ۴ حاصل عبارت $(Q' \cup W)' \cap Z$ برابر کدام مجموعه است؟

مجموعه‌های اعداد:

N : طبیعی

W : (طبیعی +) حسابی

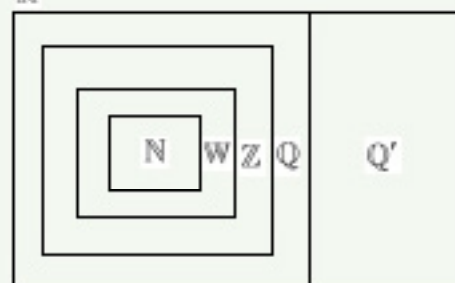
Z : صحیح

Q : گویا

Q' : گنگ

IR : حقیقی

IR



روابط بین مجموعه‌های اعداد:

روابط بین متمم مجموعه‌ها:

$$1) (A')' = A \quad 2) (A \cup B)' = (A' \cap B')$$

$$3) (A \cap B)' = A' \cup B' \quad 4) (A - B) = A \cap B'$$

پاسخ:

$$(Q' \cup W)' = Q \cap W'$$

$$(Q \cap W') \cap Z = Z - W \quad \{-1, -2, -3, \dots\}$$

سوال ۵ جملات سوم، هفتم و نهم یک دنباله حسابی می‌توانند جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند. جمله چندم

(قرن‌لکان مجلس‌لیمان دی ۱۴۰۱)

این دنباله حسابی، مساوی صفر است؟

پاسخ: اگر جملات مختلف یک دنباله حسابی، جملات متوالی یک دنباله هندسی را بسازند، معادله حسابی هر جمله را در یک دنباله هندسی قرار می‌دهیم و با آن‌ها به عنوان جملات هندسی برخورد می‌کنیم. مثلاً از روابط واسطه هندسی استفاده می‌کنیم

$$t_p, t_p, t_p, \dots \rightarrow a + 2d, a + 6d, a + 10d, \dots$$

$$(a + 6d)^2 = (a + 2d)(a + 10d) = a^2 + 12ad + 20d^2 = a^2 + 10ad + 16d^2 \rightarrow 2ad = -2 \cdot d^2 \rightarrow 2a = -2 \cdot d \Rightarrow a = -1 \cdot d$$

جمله چندم دنباله حسابی برابر صفر است؟

$$t_n = a + (n-1)d \rightarrow -1 \cdot d + (n-1)d = 0 \rightarrow (n-1)d = 1 \cdot d \rightarrow n = 11$$

سوال ۶ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی ۲۹ است. دنباله را بنویسید.

(شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: می‌دانیم که در یک دنباله حسابی مجموع ۲ جمله کناری دو برابر جمله وسطی است و جمله عمومی دنباله‌های حسابی به این شکل است:

$$t_n = a + (n-1)d$$

راه‌حل اول: تفاضل سه جمله اول با سه جمله بعدی را هم به صورت جبری و هم عددی محاسبه کرده و باهم برابر قرار می‌دهیم

$$(a_4 + a_5 + a_6) - (a_1 + a_2 + a_3) = 29 - 3 \rightarrow (3a + 12d) - (3a + 3d) = 29 - 3 = 26 \Rightarrow d = 4$$

$$3a + 3d = 3 \rightarrow a + d = 1 \quad d = 4 \quad a = -3$$

حالا مجموع جبری و عددی سه جمله اول را برابر قرار می‌دهیم:

$$-3, 1, 5, 9, 13, 17, \dots$$

پس با توجه به جمله عمومی، دنباله به این شکل در می‌آید:

(فوتبالکن فارس دی ۱۴۰۰)

سوال ۷ الف) مجموعه اعداد گویای بین $[0, 1]$ یک مجموعه است.

ب) دنباله و هم حسابی و هم هندسی است.

ج) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \cap A'$ است.

(سرای دانش بهبهان دی ۱۴۰۱)

د) واسطه هندسی بین دو عدد ۸ و ۱۸ برابر است.

پاسخ: الف) نامتناهی، یک مجموعه اعداد گویا همواره نامتناهی است.

ب) ثابت و غیرصفر.

ج) $B' \subseteq A'$ با توجه به نمودار هان ون:



د) ۱۲. در یک دنباله هندسی $ac = b^2 \leftarrow x^2 \leftarrow a \times 18 = x^2 \leftarrow x = 12$

سوال ۸ در یک کلاس ۲۵ نفره ۱۲ نفر در تیم فوتبال و ۱۸ نفر در تیم والیبال عضویت دارند. اگر ۵ نفر در هیچ تیمی عضو نباشند.

(فوتبالکن ۱ فارس دی ۱۴۰۱)

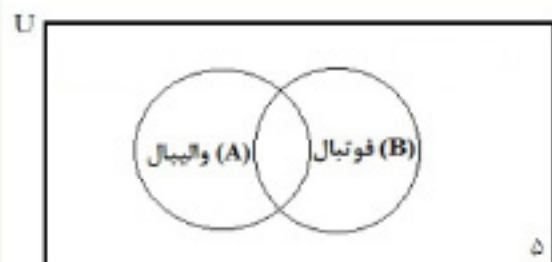
الف) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر در حداکثر یکی از دو رشته‌ی ورزشی فعالیت می‌کنند؟

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

پاسخ: تعداد اعضای اجتماع ۲ مجموعه:

راه حل: با توجه به نمودار ون:



$$U = 25$$

$$n(A \cup B) = U - 5 = 20$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 \rightarrow n(A \cap B) = 11$$

الف) افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند یعنی $n(B - A)$:

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(B - A) = 13 - 11 = 2$$

ب) «حداکثر» یکی از دو رشته یعنی یا در رشته‌ای فعالیت نمی‌کند یا فقط در یکی فعالیت می‌کند.

یعنی هم جز کسانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند:

$$n(U) - n(A \cap B) = 25 - 11 = 14$$

سوال ۹ بین دو عدد ۲۷ و $3 \cdot \frac{16}{3}$ واسطه هندسی درج می‌کنیم. دنباله تولید شده را بنویسید.

پاسخ: اگر واسطه هندسی بین دو جمله a و c درج کنیم:

$$r = \sqrt[n]{\frac{c}{a}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{16}{27}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{16}{81}} \rightarrow r = \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^4} \Rightarrow r = \frac{2}{3}$$

سوال ۱۰ در یک دنباله حسابی $t_1 + t_8 = 12$ مجموع هفت جمله اول این دنباله چیست؟

$$m, n, p, k \in \mathbb{N}, m + n = p + k \Rightarrow t_m + t_n = t_p + t_k$$

پاسخ: روابط اندیسی بین جملات دنباله حسابی:

$$m, n, p, k \in \mathbb{N}, m + n = p + k \Rightarrow (t_m)(t_n) = (t_p)(t_k)$$

• روابط اندیسی بین جملات دنباله هندسی:

$$t_1 + t_8 = t_2 + t_7 = t_3 + t_6 = t_4 + t_5 = 12$$

را حل بر طبق روابط اندیسی:

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + t_7 + t_8 = 48$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{12} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{12} \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{12} \end{array}$$

پس:

فصل ۲

سوال ۱۱ اگر $\cos \theta = \frac{3}{5}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را حساب کنید.

پاسخ: با توجه به اتحاد $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ می‌توان با داشتن $\sin$ یا $\cos$ دیگری را محاسبه کرد. با داشتن هم $\sin$ و هم $\cos$ می‌توان $\tan$ و $\cot$ را محاسبه کرد

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}, \quad \cot = \frac{\cos}{\sin}$$

راه‌حل:

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \rightarrow \sin^2 \theta = \frac{16}{25} \rightarrow |\sin \theta| = \frac{4}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{-4}{3}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{-3}{4}$$

(سرای دانش بهبهان دی ۱۴۰۱)

سوال ۱۲ مقدار عبارت روبرو را بیابید.

$$\frac{\cos 60^\circ \sin 30^\circ - \tan 45^\circ}{5 \sin 90^\circ - 4 \cos 270^\circ}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف:

	sin	cos	tan	cot
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	۱	۱
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
	sin	cos	tan	cot
0°	۰	۱	۰	ن
90°	۱	۰	ن	۰
180°	۰	-۱	۰	ن
270°	-۱	۰	ن	۰

پاسخ:

$$\frac{(\cos 60^\circ)(\sin 30^\circ) - (\tan 45^\circ)}{(\sin 90^\circ) - (\cos 270^\circ)} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - (1)}{1 - (-1)} = \frac{\frac{1}{4} - 1}{2} = \frac{-\frac{3}{4}}{2} = -\frac{3}{8}$$

سوال ۱۳ مشخص کنید هر کدام از زوایای زیر در کدام ربع مثلثاتی قرار دارند؟

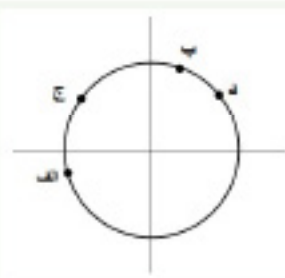
الف) 195°

ب) -28°

ج) 135°

د) 405°

پاسخ:



الف) سوم

ب) اول

ج) دوم

د) اول

اگر زاویه منفی بود کمان آن را در دایره مثلثاتی ساعتگرد حرکت می‌دهیم. اگر از 360° بیشتر بود آنقدر 360° از آن کم می‌کنیم تا عدد حاصل کمتر از 360° شود

سوال ۱۴ ثابت کنید:

(برای دانش بهیجان دی ۱۴۰۱)

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$$

پاسخ:

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}, \quad \cot = \frac{\cos}{\sin}, \quad \sin^2 + \cos^2 = 1$$

می‌دانیم:

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha \sin \alpha}$$

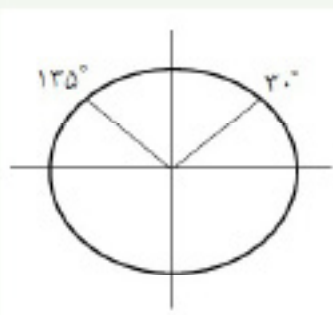
سوال ۱۵ ت) اگر $15^\circ < \beta < 67.5^\circ$ و $\sin 2\beta = \frac{2-\Delta m}{3}$ باشد. حدود m را بیابید؟

(فخرالان قاری دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

هرگاه بازه زاویه‌ای داده شده و بازه سینوس یا کسینوس آن خواسته می‌شود، نمی‌توانیم فقط $\sin$ یا $\cos$ زوایای دو طرف بازه را حساب کرده و جایگذاری کنیم. یعنی اگر $\alpha < \theta < \beta$ ، لزوماً $\sin \alpha < \sin \theta < \sin \beta$ درست نیست. اگر α و β در دو ربع متفاوت دایره مثلثاتی قرار داشته باشند، $\sin$ یا $\cos$ آن‌ها در میان بازه به ۱ یا -۱ رسیده که ماکسیمم و مینیوم $\sin$ و $\cos$ هستند و باید آنها را در بازه $\sin \theta$ یا $\cos \theta$ قرار داد

راه‌حل:



$$15^\circ < \beta < 67.5^\circ \rightarrow 30^\circ < 2\beta < 135^\circ$$

همانطور که می‌بیند $\sin$ در این بازه به ۱ (ماکسیمم) رسیده پس:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < \sin 2\beta < \frac{\sqrt{2}}{2} & \times \\ \frac{1}{2} < \sin 2\beta \leq 1 & \checkmark \end{cases}$$

$$\sin 2\beta = \frac{2-\Delta m}{3} \rightarrow 3 \sin 2\beta = 2-\Delta m \rightarrow 3 \sin 2\beta - 2 = -\Delta m \rightarrow \frac{-3 \sin 2\beta + 2}{\Delta} = m \quad [1]$$

$$[1, 2] \rightarrow -3 \leq -3 \sin 2\beta < \frac{-3}{2} \rightarrow -1 \leq -3 \sin 2\beta + 2 < \frac{+1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{\Delta} \leq \frac{-3 \sin 2\beta + 2}{\Delta} < \frac{+1}{10} \rightarrow \frac{-1}{\Delta} \leq m < \frac{+1}{10}$$

(فیزیکان فارس دی ۱۴۰۰)

سوال ۱۶ پ) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ باشد. مقدار $\tan \alpha + \cot \alpha$ را بدست آورید؟پاسخ: اتحاد مربع جمع و تفریق $\sin$ و $\cos$:

$$(\sin \pm \cos)^2 = 1 \pm 2 \sin \cos$$

$$(\sin + \cos)^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 = \frac{8}{25} = 1 + 2 \sin \cos \rightarrow 2 \sin \cos = \frac{-17}{25} \Rightarrow \sin \cos = \frac{-17}{50} \quad [1]$$

$$\tan + \cot = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos \cdot \sin} = \frac{1}{\cos \cdot \sin} \quad [1] \quad \tan + \cot = \frac{-50}{17}$$

سوال ۱۷ اگر θ زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد و $\sin \theta = \frac{-5}{13}$ حاصل $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta$ را به دست آورید

پاسخ: اتحادهای لازم:

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$

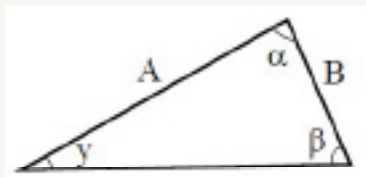
$$1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2} \quad , \quad 1 + \cot^2 = \frac{1}{\sin^2}$$

$$\begin{cases} \tan^2 + \cot^2 = \frac{1}{\cos^2} + \frac{1}{\sin^2} - 2 \\ \frac{25}{169} + \cos^2 = 1 \rightarrow \cos^2 = \frac{144}{169} \end{cases} \rightarrow \tan^2 + \cot^2 = \frac{169}{144} + \frac{169}{25} - 2$$

سوال ۱۸ اگر اندازه دو ضلع یک مثلث ۶ و ۸ و زاویه بین آن‌ها 120° باشد مساحت آن چقدر است؟

پاسخ:

محاسبه مساحت مثلث با سینوس یک زاویه و اضلاع آن:



$$\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot A \cdot B$$

راه حل:

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 \times 8 = 12\sqrt{3}$$

فصل ۳

(شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

$$\sqrt[3]{\sqrt{8}} + 2^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-16} =$$

سوال ۱۹ عبارت مقابل را ساده کنید.

پاسخ: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[n]{x}$ ۱

در رادیکال اعداد منفی با فرجه فرد، علامت منفی می‌تواند داخل یا بیرون رادیکال قرار بگیرد.

$$\left. \begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} &= \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2} \\ \sqrt[3]{\sqrt[3]{-2^3}} &= -\sqrt[3]{2^3} = -2^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{2} \end{aligned} \right\} \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} + (-2\sqrt[3]{2}) = 2\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2}$$

(تیزانکن ۱ قارس دی ۱۳۰۱)

سوال ۲۰ الف) $\sqrt[3]{(1-\sqrt{7})^2} = \sqrt[3]{1-\sqrt{7}}$ (درست / نادرست)

(تأییدی)

(ب) اگر n عددی زوج باشد، $\sqrt[n]{x^n} = \dots\dots\dots$ ، $(\sqrt[n]{x})^n = \dots\dots\dots$

پاسخ: الف) توان اعداد (عبارات) زیر رادیکال در صورت امکان با فرجه رادیکال ساده می‌شوند اما باید دقت کرد که ساده کردن‌ها تاثیری در جواب نهایی (به ویژه علامت آن) نگذارند

نادرست. زیرا $(1-\sqrt{7})^2$ یک عدد منفی است و رادیکال آن هم فرجه‌ای فرد دارد که یعنی عدد جواب نهایی منفی می‌شود اما $(1-\sqrt{7})^2$ یک عدد مثبت است که رادیکالی با فرجه مثبت دارد پس عدد جواب آن مثبت می‌شود.

$$\sqrt[3]{(1-\sqrt{7})^2} = \sqrt[3]{\sqrt{7}-1} \neq \sqrt[3]{1-\sqrt{7}}$$

در واقع:

ب) $|x|/x$. تمام اعداد با داشتن توان زوج به عددی مثبت تبدیل می‌شوند (جز صفر). هم‌طور تمام اعدادی که زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارند حتماً باید مثبت باشند

در معادله اول x می‌تواند مثبت یا منفی باشد. (توان n زوج هر عددی را مثبت می‌کند که شرط زیر رادیکال با فرجه زوج بودن است). اما در معادله دوم x به تنهایی و قبل از به توان رسیدن زیر رادیکال رفته که یعنی حتماً مثبت ($x \geq 0$) است. پس دیگر قدر مطلق احتیاج ندارد

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}}$$

سوال ۲۱ مخرج کسر مقابل را گویا کنید.

پاسخ: برای گویا کردن مخرج کسرهای معمولاً آن را به اتحاد مزدوج تبدیل می‌کنیم:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}} \times \frac{5-2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

سوال ۲۲ مقایسه کنید.

(ب) $(-1/7)^2$ $\square$ $(-1/7)^5$

(د) $(\frac{-4}{5})^7$ $\square$ $(\frac{-3}{5})^7$

الف) $\sqrt[3]{-(-1/3)}$ $\square$ $\sqrt[3]{-(-1/3)}$

ج) $\sqrt[3]{-7}$ $\square$ $\sqrt[3]{-7}$

$a < -1$	$-1 < a < 0$	$0 < a < 1$	$1 < a$
$\dots < \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a} > a$	$\dots < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} < a$	$\dots > \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{a} > a$	$\dots < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{a} < a$
ریشه بزرگتر ←	ریشه بزرگتر ←	ریشه بزرگتر ←	ریشه بزرگتر ←
حاصل بزرگتر	حاصل کوچکتر	حاصل بزرگتر	حاصل کوچکتر

پاسخ:

$$\sqrt[4]{-(-0/3)} < \sqrt[4]{-(-0/3)}$$

(الف)

$$(0/7)^7 > (0/7)^8$$

(ب)

$$\sqrt[3]{-7} < \sqrt[3]{-7}$$

(ج)

$$\left(\frac{-4}{5}\right)^7 > \left(\frac{-3}{5}\right)^7$$

(د)

(تقریباً ۱ مارس دی ۱۴۰۰)

سوال ۲۳ اگر $\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = 3$ باشد حاصل $\sqrt{a^2}\sqrt{\frac{1}{a}}\sqrt{a}$ را بیابید؟

پاسخ:

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{x}} = m\sqrt[n]{x} \quad (x^m)^n = x^{m \cdot n} \quad x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad x^{-m} = \left(\frac{1}{x}\right)^m$$

$$\sqrt{a}\sqrt{\frac{1}{a}} = 3 \rightarrow a\sqrt{\frac{1}{a}} = 9 \rightarrow \sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{9}{a} \rightarrow \frac{1}{a} = \frac{81}{a^2} \Rightarrow a = 81$$

$$\sqrt{81} = 9 \rightarrow \frac{1}{81} \times 9 = \frac{1}{9} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \times 81^7 = \frac{1}{3} \times 3^{14} = 3^{13} \rightarrow \sqrt[13]{3^{13}} = 3^7 = 2187$$

(تقریبی)

سوال ۲۴ ریشه دوم عدد ۴۲ را بیابید.

پاسخ: برای پیدا کردن ریشه تقریبی یک عدد نزدیکترین مربعهای کامل دو طرف آن را پیدا می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن ریشه‌های دوم آن‌ها اعدادی را امتحان می‌کنیم تا عدد موردنظر به صورت تقریبی به دست آید.

$$36 < 42 < 49 \rightarrow 6 < \sqrt{42} < 7$$

۴۲ به ۴۹ نزدیکتر است تا ۳۶ پس از ۶/۵ به بعد شروع به توان رساندن می‌کنیم.

$$(6/5)^2 = 42/25 \quad (6/6)^2 = 42/56$$

$$\sqrt{42}; 6/6$$

 $(6/6)^2$ فاصله کمتری تا ۴۲ نسبت به $(6/5)^2$ دارد پس:

(تقریباً ۱۴۰۲ خرداد)

سوال ۲۵ عبارت $1 - x^2$ را تجزیه کنید.

پاسخ: اگر عبارتی برای تجزیه ما را به یاد نوعی اتحاد خاص می‌اندازد، به سادگی از همان اتحاد استفاده کرده و عبارت را ساده‌تر می‌کنیم

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$x^3-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

(فهراتگان مجسلیمان دی ۱۴۰۱)

سوال ۲۶ اگر $x + \frac{1}{x} = 4$ مقدار عددی $a = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ را بدست آورید.

پاسخ: اتحاد مربع مجموع یا تفریق دو جمله:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x + 2\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} + 2 = 4 \Rightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{4} = 2$$

(فهراتگان ۱ قارس دی ۱۴۰۱)

سوال ۲۷ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{2}{\sqrt[3]{a^2}} \times \sqrt[3]{16a^2} \times \sqrt[3]{8a^5}$$

پاسخ: در عبارات توان دار و رادیکال دار، می‌توان با کسری کردن همه توان‌ها و جمع و تفریق آنها به آسانی حاصل عبارت را به دست آورد

$$\frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} \times \underbrace{\left(\frac{16}{1}\right)^{\frac{1}{3}}}_{(2^4)^{\frac{1}{3}}} \times a^{\frac{2}{3}} \times \underbrace{\left(\frac{8}{1}\right)^{\frac{1}{3}}}_{(2^3)^{\frac{1}{3}}} \times a^{\frac{5}{3}} = \frac{2}{a^{\frac{2}{3}}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{4}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \times a^{\frac{2}{3} + \frac{5}{3}} = 2^2 \times a^2 = 4a^2$$

سوال ۲۸ الف) هر عدد مثبت دارای ریشه چهارم است که یکدیگرند. (تائیدی)

ب) اگر $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک می‌نامیم هرگاه: $b^n = a$ (تائیدی)

پاسخ: الف) هر عدد مثبت همواره دارای دو ریشه زوج (گویا یا گنگ) است که قرینه یکدیگر می‌باشند.

دو / قرینه

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

ب) اگر b ریشه n ام عدد a باشد:

ریشه n ام عدد a

(فهراتگان مجسلیمان دی ۱۴۰۱)

سوال ۲۹ به کمک اتحادها عبارت مقابل را تجزیه کنید.

$$\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1 =$$

$$x^3 + 7x^2y^2 - 8y^3 =$$

پاسخ: برای تجزیه عبارت‌های به شکل $ax^2 + bx + c$ با روش شکستن جملات، دو عدد را پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر b و ضربشان برابر ac شود. پس b را به صورت جمع این دو عدد نوشته و دسته بندی می‌کنیم. اگر $x^2 = a$ و $y^2 = b$ در نظر بگیریم معادله به صورت رویه‌رو در می‌آید: $a^2 + 7ab - 8b^2$

دو عدد را پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $7b$ و ضرب آنها برابر $-8b^2$ شود $8b$ و $-b$

$$(a + 8b)(a - b) \rightarrow \underbrace{(x^2 + 8y^2)}_{\text{II}} \underbrace{(x^2 - y^2)}_{\text{I}}$$

پس بعد از تجربه، عبارت این شکلی می‌شود:

سپس با توجه به اتحادهای چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\underbrace{(x + 2y)}_{\text{I}} \underbrace{(x^2 - 2xy + 4y^2)}_{\text{II}} \underbrace{(x - y)}_{\text{I}} \underbrace{(x^2 + xy + y^2)}_{\text{II}}$$

(فرازگان مجسمیان دی ۱۴۰۱)

سوال ۳۰ مخرج کسر زیر را گویا کنید.

$$\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$$

پاسخ: برای گویا کردن مخرج کسرها ابتدا ساده کردن یا صورت را در نظر می‌گیریم و اگر همچنین امکانی نداشتیم، سپس به سراغ ضرب کردن توان‌ها و اتحادها می‌رویم

مخرج قابل ساده شدن با صورت نیست و ما را به یاد اتحاد چاق و لاغر می‌اندازد. پس به سراغ ضرب کردن می‌رویم.

$$\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1} \times \frac{\sqrt[3]{3}+1}{\sqrt[3]{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}+1} = \frac{\sqrt[3]{9}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$$

(علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران)

سوال ۳۱ تا حد امکان تجزیه کنید.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2$$

پاسخ: یکی از روش‌های تجزیه دسته‌بندی عبارت‌هاست. به طوری که پس از فاکتورگیری دارای عامل مشترک باشند.

دو جمله اول را با هم و دو جمله بعدی را نیز با هم دسته‌بندی می‌کنیم:

$$(x^3 - 2x^2) + (-x + 2)$$

می‌بینیم که اگر x^2 را از دسته اول فاکتور بگیریم به دسته دوم شباهت پیدا می‌کند:

$$x^2(x - 2) + (-x + 2)$$

اما علامت دو دسته با هم متفاوت است که برای راحتی یک علامت منفی از دسته دوم فاکتور می‌گیریم.

$$x^2(x - 2) - (x - 2)$$

و حالا تجزیه را کامل می‌کنیم:

$$x^2(x - 2) - (x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2) \Rightarrow (x - 1)(x + 1)(x - 2)$$

$$(x \neq \pm 2, -1)$$

سوال ۳۲ حاصل عبارت $\frac{x+1}{x^2-x-2} - \frac{x+1}{x^2+3x+2} + \frac{4}{4-x^2}$ را به دست آورید.

(علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران)

پاسخ: برای حل اینگونه سوالات باید ابتدا مخرج کسرها را تجزیه کرد تا عوامل مشترک پیدا شوند و بتوانیم بین مخرج‌ها کدوم بگیریم. پس هر مخرج را به کدوم میرسانیم. با یکی شدن مخرج‌ها، حاصل عبارت را با استفاده از صورت‌ها به دست می‌آوریم. دقت داشته باشد که جواب آخر معادله نباید هیچ کدام از مخرج‌های صورت سوال را صفر کند.

$$\frac{x-1}{(x-2)(x+1)} - \frac{x-1}{(x+2)(x+1)} + \frac{4}{(2-x)(2+x)} - \frac{1}{x-2} \left(\frac{x+2}{x+2} \right) - \frac{1}{x+2} \left(\frac{x-2}{x-2} \right) + \frac{-4}{\underbrace{-(2-x)(2+x)}_{x^2-4}}$$

$$= \frac{x+2}{x^2-4} - \frac{x-2}{x^2-4} + \frac{-4}{x^2-4} = \frac{x+2-x-2-4}{x^2-4} = -$$

سوال ۳۳ یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین با زاویه 30° پرتاب می‌شود. پس از طی ۳۰۰۰ متر توسط سایه آن روی زمین، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟
(علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران دی ۹۷ یا تغییر)

پاسخ: اگر زاویه بین یک خط و جهت مثبت محور x ، α باشد $\leftarrow$ شیب خط همان $\tan \alpha$ می‌شود.

اگر α زاویه منفرجه یا باز باشد $\leftarrow$ شیب خط $(\tan \alpha)$ منفی می‌شود.

$$\left. \begin{aligned} \tan 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \\ y &= ax + b \end{aligned} \right\} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 20 \rightarrow \text{سایه آن (x) ۳۰۰۰ متر از روی زمین طی کرده}$$

$$y = 100\sqrt{3} + 20$$

فصل ۴

سوال ۳۴ معادلات زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید. (علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران)

الف) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (روش مربع کامل)

ب) $3x^2 + 5x + 2 = 0$ (روش Δ)

پاسخ: مربع کامل: در این روش هدف این است که با کم یا اضافه کردن اعداد به یک اتحاد مربع کامل برسیم.

برای این منظور ضریب x را نصف کرده و به توان ۲ می‌رسانیم: b^2 . سپس به دو طرف معادله عددی اضافه می‌کنیم که در

سمت عبارت جبری عدد تنها (c) به b^2 تبدیل شود. سپس ادامه اتحاد را حل می‌کنیم

روش Δ (دلتا) یا روش کلی: دلتا در یک معادله درجه دوم $(ax^2 + bx + c = 0)$ برابر است با $\Delta: b^2 - 4ac$ با توجه به علامت

Δ سه حالت ممکن است برای ریشه‌ها پیش بیاید

A. $\Delta > 0$ در این صورت معادله دو ریشه داشته که با معادله $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند.

B. $\Delta = 0$ در این صورت معادله یک ریشه برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ دارد.

C. $\Delta < 0$ در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد. حالا این سوالو واسم حل کن!

نکته ۱) اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم: $a + b + c = 0 \leftarrow$ یکی از ریشه ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

۲) اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم: $a + c = b \leftarrow$ یکی از ریشه ها -۱ و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

سوال ۳۵ موشکی با زاویه معینی به هوا شلیک شده است و ارتفاع موشک t ثانیه پس از پرتاب از معادله

$$y = -5t^2 + 50t + 55$$

(فیزیکان قاتلشهر خرداد ۱۴۰۲)

چند ثانیه موشک به زمین برخورد می کند؟

پاسخ: هر معادله به شکل $y = ax^2 + bx + c$ نمودار یک سهمی را نشان می دهد ما کسیم یا مینیمم عرضی که در یک

سهمی وجود دارد رأس سهمی خوانده می شود. (A)

اگر علامت ضریب a مثبت $\leftarrow$ سهمی رو به بالا $\leftarrow$ رأس سهمی کمترین عرض و مینیمم

اگر علامت ضریب a منفی $\leftarrow$ سهمی رو به پایین $\leftarrow$ رأس سهمی بیشترین عرض و ماکسیمم

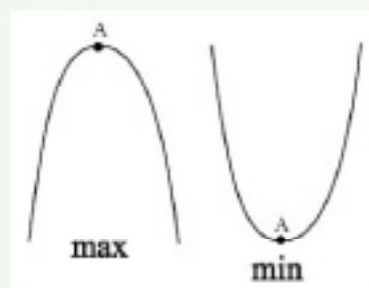
در یک معادله استاندارد، مختصات رأس سهمی به صورت $A\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ خواهد بود.

بیشترین ارتفاع موشک یعنی رأس سهمی، با توجه به معادله استاندارد داده شده رأس

سهمی را به دست می آوریم

در ثانیه ۵ موشک به بالاترین ارتفاع می رسد.

برخورد زمین و موشک یعنی ریشه های سهمی حرکت موشک.



$$\frac{-b}{2a} = \frac{-50}{-10} \Rightarrow t = 5$$

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow \Delta = 2500 - 4(-5)(55) \rightarrow \Delta = 3600 \rightarrow x = \frac{-50 \pm 60}{-10} \begin{cases} x = 11 \checkmark \\ x = -1 \text{ (غ.ق.ق)} \end{cases}$$

سوال ۳۶ ابتدا معادله سهمی را بیابید که مرکز تقارن آن (2,3) و از نقطه (3,5) بگذرد و سپس آن را رسم کنید.

(شهید بهشتی بیرجند خرداد ۱۴۰۲)

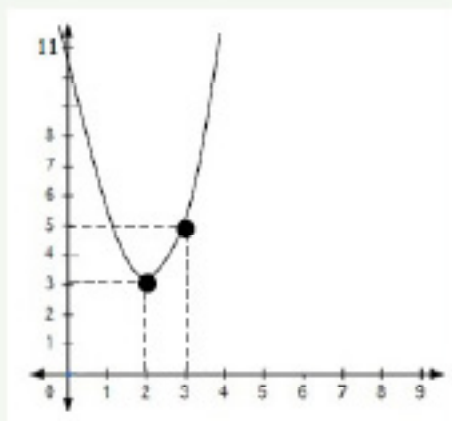
پاسخ: • معادله سهمی با استفاده از نقاط آن:

اگر نقاط مناسبی از سهمی را داشته باشیم می‌توانیم با استفاده از معادله $y = ax^2 + bx + c$ معادله سهمی را به دست آوریم. دقت کنید که اگر راس سهمی داده شده بود، هم می‌توانید به عنوان یک نقطه در معادله آن را جایگذاری کنید و هم می‌توانید با توجه به $x = \frac{-b}{2a}$ و a یا با توجه به $A(h, k)$ و h و k را پیدا کنید

$$y = ax^2 + bx + c \begin{cases} A: (r, r) \rightarrow \frac{-b}{2a} = r \Rightarrow b = -2a & [1] \\ (r, r), (r, s) \rightarrow \begin{cases} 2a + 2b + c = r \\ 2a + 2b + c = s \end{cases} \Rightarrow \Delta a + b = r & [2] \end{cases}$$

$$[1], [2] \quad \Delta a + (-2a) = r \Rightarrow a = r, b = -2, c = 11 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 11$$

در رسم نمودار مختصات تقاطع سهمی با محورها اهمیت دارد.



سوال ۳۷ اگر معادله $x^2 + 4x + m = 0$ دارای ریشه حقیقی نباشد، حدود m را حساب کنید.

(شهید بهشتی، بهمن خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: دلتا در یک معادله درجه دوم ($ax^2 + bx + c = 0$) برابر است با $\Delta: b^2 - 4ac$ با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است برای ریشه‌ها پیش بیاید

A. $\Delta > 0$ در این صورت معادله دو ریشه داشته که با معادله $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند.

B. $\Delta = 0$ در این صورت معادله یک ریشه برابر با $x = \frac{-b}{2a}$ دارد.

C. $\Delta < 0$ در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد.

نکته: اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم $a + b + c = 0 \leftarrow$ یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

نکته: اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم $a + c = b \leftarrow$ یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

$$\Delta < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0 \rightarrow b^2 < 4ac \Rightarrow 16 < 4(1)(m) \rightarrow m > 4$$

سوال ۳۸ یکی از جواب‌های معادله درجه دوم $3x^2 + Kx - 10 = 0$ برابر ۵ است مقدار K را بیابید.

(عالمه طباطبایی منطقه ۵ تهران دی ۹۷)

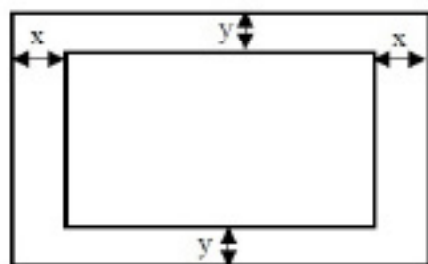
پاسخ: جواب هر معادله‌ای در آن صادق است. پس اگر در معادله‌ای مجهولی داشتیم و می‌توانستیم جواب آن را به هر صورتی به دست بیاوریم، جواب را در معادله صدق می‌دهیم

$$3(\Delta)^2 + K(\Delta) - 10 = 0 \rightarrow 75 + \Delta K - 10 = 0 \rightarrow \Delta K = -65 \Rightarrow K = -13$$

سوال ۳۹ الف) یک عکس به ابعاد 12×15 سانتیمتر را درون یک قاب مستطیلی به مساحت 204 سانتیمتر مربع قرار داده‌ایم. اگر فاصله تمام لبه‌های عکس تا قاب یکسان باشد، ابعاد قاب عکس را بیابید.

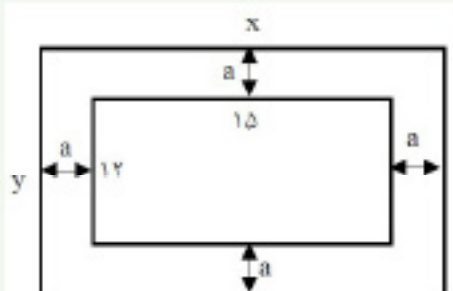
(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲ با تغییر)

پاسخ:



در سوالاتی که یک مستطیل را درون مستطیل دیگری قرار می‌دهیم (عکس درون قاب، فرش درون اتاق) فقط همین نکته را باید در نظر داشته باشیم که طول مستطیل کوچکتر $12x$ ، و عرض آن $2y$ از طول و عرض مستطیل بزرگتر، کوچک‌ترند.

شکل موردنظر صورت سوال را رسم می‌کنیم.



$$(15 + 2a)(12 + 2a) = 204 \rightarrow 4a^2 + 54a + 180 = 204 \rightarrow 4a^2 + 54a - 24 = 0 \rightarrow 2a^2 + 27a - 62 = 0$$

$$\Delta = (27)^2 - 4(2)(-62) = 1225 \rightarrow a = \frac{-27 + \sqrt{1225}}{4} = 2$$

$$y = 12 + 2a = 16, x = 15 + 2a = 19$$

$$p(x) = \frac{(3x - 2)(1 - x)}{\Delta - 2x}$$

سوال ۴۰ تعیین علامت کنید.

پاسخ: • عبارت‌های درجه اول.

۱- ریشه عبارت را به دست می‌آوریم.

۲- در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

$$ax + b = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$x < \frac{-b}{a}$	$\frac{-b}{a}$	$x > \frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$		مخالف علامت a	0	موافق علامت a	

• ضرب و تقسیم چند عبارت درجه اول:

۱- ریشه هر عبارت را به دست می‌آوریم.

۲- ریشه‌ها را در جدول تعیین علامت از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم.

۳- همه عبارت‌ها را در ستون سمت چپ قرار داده و در سطر خودش یا ریشه خودش تعیین علامت می‌کنیم.

علامت‌های هر ستون را در هم ضرب کرده در آخرین سطر قرار می‌دهیم.

$$p(x) = \frac{\overbrace{(3x-2)}^{x=\frac{2}{3}} \cdot \overbrace{(-1-x)}^{x=-1}}{\underbrace{(5-2x)}_{x=\frac{5}{2}}}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$3x-2$	-	-	+	+	+
$-1-x$	+	+	-	-	-
$5-2x$	+	+	+	-	-
$p(x)$	-	+	-	+	+

(شهید بهشتی بهمن‌ماه خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۴۱ نامعادله رویه‌رو را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید.

$$\frac{16-x^2}{x^2-6x-7} \leq 0$$

پاسخ: در تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم ممکن است عبارت قابل تجزیه به چند عبارت درجه اول باشد. اگر سرعت

و مهارت بیشتری دارید مستقیماً عبارت درجه دوم را تعیین علامت کنید.

x	$-\infty$	-4	-1	4	7	$+\infty$
$16-x^2$	-	+	+	+	-	-
x^2-6x-7	+	+	-	-	+	+
$p(x)$	-	+	-	+	-	-

$$\frac{16-x^2}{x^2-6x-7} \rightarrow x_1 = 4, x_2 = -4$$

$$x^2-6x-7 \rightarrow x_1 = -1, x_2 = 7$$

بازه‌هایی که در آن‌ها عبارت ≥ 0 است:

$$(-\infty, 4] \cup (-1, 4] \cup (7, +\infty)$$

(شهید بهشتی سبزه‌وار خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۴۲ مجموعه جواب نامعادله مقابل را بیابید.

$$\left| \frac{2x+2}{x-1} \right| \geq 2$$

پاسخ: در نامعادلات قدر مطلق دو حالت داریم:

$$|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \rightarrow x \geq a, x \leq -a$$

X	$-\infty$	۱	$+\infty$
X-۱	-	۰	+

X	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	۱	$+\infty$
$4X+1$	-	۰	+	+
X-۱	-	-	۰	+
p(x)	+	۰	-	+

$$1) \frac{2x+3}{x-1} \geq 2 \rightarrow \frac{2x+3-2(x-1)}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{5}{x-1} \geq 0$$

$$2) \frac{2x+3}{x-1} \leq -2 \rightarrow \frac{2x+3+2(x-1)}{x-1} \leq 0 \Rightarrow \frac{4x+1}{x-1} \leq 0$$

دقت کنید که خود عدد یک مخرج را صفر می‌کند.

$$1) \text{ بازه جواب: } (1, +\infty)$$

$$2) \text{ بازه جواب: } \left[-\frac{1}{4}, 1\right)$$

$$1 \cup 2 \Rightarrow \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) - \{1\}$$

در پایان دو بازه را اجتماع میگیریم:

$$\frac{x^2+2x-3}{3} > \frac{x^2-6x+5}{5}$$

سوال ۴۳ نامعادله مقابل را حل کنید.

پاسخ: برای حل نامعادلات درجه دوم دقت داشته باشید که بر عکس تساوی نمی‌توانیم عوامل مشترک دو طرف نامعادله را با هم ساده کنیم (زیرا از علامت مجهول نامطلع هستیم و می‌دانیم مجهول منفی می‌تواند جهت نامعادله را عوض کند). بعد از از بین بردن مخرج در صورت امکان، همه عبارت را به یک طرف منتقل کرده و سپس تعیین علامت می‌کنیم.

$$5(x^2+2x-3) > 3(x^2-6x+5) \rightarrow 5x^2+10x-15 > 3x^2-18x+15 \rightarrow 2x^2+28x-30 > 0$$

$$\rightarrow x^2+14x-15 > 0 \quad x_1 = 1, x_2 = -15$$

$$\Rightarrow \text{بازه جواب: } (-\infty, -15) \cup (1, +\infty)$$

x	$-\infty$	-۱۵	۱	$+\infty$
p(x)	+	۰	-	+

(تیزانگان قلم شهر خرماد ۱۴۰۲)

سوال ۴۴ نامعادله قدر مطلق بنویسید که مجموعه جواب آن بازه $(1, 9)$ باشد.

پاسخ: اگر در صورت سوال یک بازه جواب داده شده بود به احتمال زیاد معادله قدر مطلق به صورت $|x| < a$ و اگر دو بازه جواب داده شده بود به احتمال زیاد معادله به شکل $|x| > a$ خواهد بود. در این سوال داریم $1 < x < 9$ پس معادله قدر مطلق به صورت $|x| < a$ بوده است. مثال روبه‌رو را در نظر بگیرید:

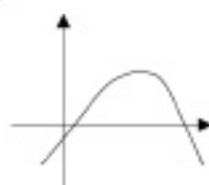
$$|x+b| < a \rightarrow -a < x+b < a \Rightarrow -a-b < x < a-b$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} -a-b=1 \\ a-b=9 \end{cases} \rightarrow -2b=10 \Rightarrow b=-5, a=4$$

$$|x+b| < a \rightarrow |x-5| < 4$$

در پایان:



سوال ۴۵ با توجه به سهمی مقابل، در معادله استاندارد آن، علامت ضرایب a ، b و c را بیابید.

پاسخ: ۱- a : اگر دهانه سهمی به بالا $a > 0$ و اگر دهانه سهمی به پایین $a < 0$

۲- b : با استفاده از معادله $x = \frac{-b}{2a}$ و توجه به علامت طول راس و علامت a

۳- c : همان محل برخورد سهمی با محور y ۱- سهمی رو به پایین پس علامت a منفی.

۲- محل برخورد با محور y منفی پس علامت c منفی.

۳- راس سهمی مثبت و a منفی پس با توجه به $A = \frac{-b}{2a}$ علامت b مثبت.

$$2 < \frac{(4x+3)^2}{2} < 8$$

سوال ۴۶ نامعادله رویه‌رو را حل کنید.

پاسخ: در نامعادله‌های دوگانه که در هر دو طرف عدد داریم نیازی به جدا کردن نامعادله‌ها نیست و فقط هر کاری که برای ساده کردن عبارت جبری انجام می‌دهیم روی آن اعداد هم پیاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} 2 < \frac{(4x+3)^2}{2} < 8 &\rightarrow 4 < (4x+3)^2 < 16 \rightarrow (2 < |4x+3| < 4) \\ &\rightarrow \begin{cases} 2 < 4x+3 < 4 \\ -4 < 4x+3 < -2 \end{cases} \end{aligned}$$

از آنجا که $(4x+3)$ به توان ۲ رسیده نمی‌دانیم

در اصل علامت مثبت داشته یا منفی. پس باید هر دو حالت را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} 2 < 4x+3 < 4 \rightarrow -1 < 4x < 1 \rightarrow \frac{-1}{4} < x < \frac{1}{4} \\ -4 < 4x+3 < -2 \rightarrow -7 < 4x < -5 \rightarrow \frac{-7}{4} < x < \frac{-5}{4} \end{cases} \rightarrow x \in \left\{ \left(\frac{-1}{4}, \frac{1}{4} \right) \cup \left(\frac{-7}{4}, \frac{-5}{4} \right) \right\}$$

$$\frac{(x^2+x+6)(x-1)^2}{x^2+|x|} \leq 0$$

سوال ۴۷ نامعادله زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نشان دهید.

پاسخ: در تعیین علامتها حواستان به ۳ چیز باشد

۱- توان فرد تأثیری در علامت عبارت ندارد اما توان زوج علامت بعد و قبل ریشه را مثبت می‌کند.

۲- علامت قبل و بعد ریشه درون قدر مطلق مثبت است.

۳- ریشه‌های مخارج کل عبارت را تعریف نشده می‌کنند.

$$\frac{\overbrace{x^2+x+6}^{\text{بدون ریشه}} \cdot \overbrace{(x-1)^2}^{x=1}}{\underbrace{x^2}_{x=0} + \underbrace{|x|}_{x=-\infty}} \leq 0$$

بازه جواب: $(-\infty, 1) - \{0\}$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$x^2 + x + 6$	+	+	+	+
$(x-1)^2$	-	-	0	+
x^2	+	0	+	+
$ x $	+	0	+	+
$p(x)$	-	ت ن	-	+

سوال ۴۸ نامعادله زیر را حل کرده و پاسخ را به صورت بازه نمایش دهید.

$$\frac{x}{x-1} \leq \frac{x+1}{x-2}$$

پاسخ: در نامعادلاتی که مخرج کسر(ها) مجهول است نمی‌توان آن را مستقیماً در صورت طرف دیگر ضرب کرد و در معادله قرار داد؛ زیرا علامت آن معلوم نیست و اگر منفی باشد جهت نامعادله باید عوض می‌شده است.

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} \leq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 2x - x^2 + 1}{(x-1)(x-2)} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2x+1}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

$$\text{بازه جواب: } \left[\frac{1}{2}, 1 \right) \cup (2, +\infty)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
$-2x+1$	+	0	-	-	-
$x-1$	-	-	0	+	+
$x-2$	-	-	-	0	+
p(x)	+	0	-	+	-
			ت ن	ت ن	

سوال ۴۹ الف) درجه عبارت جبری..... از x است که در عبارت وجود دارد.

ب) تعداد ریشه‌های یک معادله درجه دوم می‌تواند یا باشد.

ج) یا توجه به معادله $y = a(x-h)^2 + k$ محور تقارن سهمی خط عمودی می‌باشد.

د) در یک سهمی اگر $\Delta > 0$ باشد نمودار به قسمت تقسیم می‌شود که علامت قسمت متفاوت است

پاسخ: الف) بزرگترین توانی (ب) ۱، ۰ یا ۲ (ج) $x = h$ (د) ۳- مینا

سوال ۵۰ در یک لیگ فوتبال جمعاً ۱۱۰ بازی انجام شده است. اگر هر دو تیم، دوبار با یکدیگر مسابقه داده باشند.

تعداد تیمهای حاضر در این لیگ چند است و رابطه بین تعداد تیمها و تعداد بازیها چیست؟

پاسخ: اگر در یک مجموعه، تعدادی عضو داشته باشیم، و هر دو عضو یکبار با هم ارتباط برقرار کنند (دست بدهند، بازی کنند، ...)، تصور می‌کنیم با هر ارتباط بین دو عضو پلی به وجود می‌آید. پس اگر عضو ۱ به ۱۱ عضو دیگر پل بزند، عضو ۲ به ۱۰ عضو دیگر پل می‌زند. (زیرا پل بین عضو ۱ و ۲ در بین پلهای ۱ به اعضای دیگر محاسبه شده است) برای درک بهتر به شکل روبرو دقت کنید:



عضو ۲ ← ۵ پل زده

عضو ۱ ← ۶ پل زده

هر دو تیم با هم دوبار مسابقه دهند و ۱۱۰ بازی انجام شده. پس اگر هر دو تیم یک بار بازی می‌کردند ۵۵ مسابقه برگزار میشد.

$$n + n-1 + n-2 + \dots + 2 + 1 = 55 \rightarrow \frac{(1+n) \times n}{2} = 55$$

$$\rightarrow n(n+1) = 110 \rightarrow n = 10$$

پس ۱۰ تیم در این لیگ شرکت کرده‌اند.

فصل ۵

سوال ۵۱ الف) تابعی که دامنه و بردش برابر باشد یک تابع است. (شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

ب) اگر f یک تابع خطی باشد که $f(2) = 8$ و $f(3) = 5$ باشند. $f(x) = \dots$ (تصیری لارستان خرداد ۱۴۰۲)

ج) هنگامی مجموعه‌ای از زوجهای مرتب تابع میشوند که همگی باشند. (تالیفی)

د) در انتقال افقی یک تابع، دامنه آن و برد آن (از لحاظ تغییر کردن) (تالیفی)

پاسخ: الف) در تابع همانی، ورودی هر چه باشد خروجی هم همان است. (دامنه و برد برابر) اما در تابع ثابت، خروجی تابع به ازای هرگونه ورودی، ثابت است و تغییری نمی‌کند.

ب) برای پیدا کردن ضابطه توابع خطی، با داشتن دو نقطه از تابع و جایگذاری آن‌ها در معادله کلی، $f(x) = ax + b$ می‌توان به ضابطه دست یافت.

ج) دقت داشته باشید که در یک تابع، محور x ها معادل مولفه‌های اول زوجهای مرتب، و محور y ها معادل مولفه‌های دوم زوجهای مرتب هستند. از آنجا که در یک تابع باید به هر x فقط یک y تعلق بگیرد، هیچ دو زوج مرتبی با مولفه‌های دوم متفاوت نباید مولفه‌های اول یکسان داشته باشند.

د) انتقال افقی تابع یعنی حرکت آن به چپ و راست (راستای محور x ها)

میدانیم که دامنه یک تابع در محور x ها و برد آن در محور y ها تعریف می‌شود.

الف) همانی

$$\left. \begin{aligned} f(2) &= 2a + b = 8 \\ f(2) &= 2a + b = 5 \end{aligned} \right\} a = 2, b = -1 \Rightarrow f(x) = 2x - 1$$

ج) مولفه‌های اول - متفاوت

د) تغییر می‌کند - ثابت می‌ماند.

(شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۵۲ مقادیر x و y را طوری بیابید که رابطه‌ی زیر تابع شود.

$$f = \{(-1, 2x - y), (2, 4), (-1, -1), (x, x - y), (2, x + y)\}$$

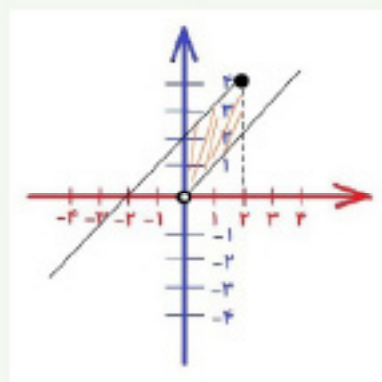
پاسخ: مجموعه زوج‌های مرتب زمانی تابع است که همه مولفه‌های اول با هم متفاوت باشند. اگر در دو زوج مرتب مولفه‌های اول یکسان داشتیم مولفه‌های دوم نیز قطعاً برابرند.

$$\left. \begin{aligned} (-1, 2x - y) &= (-1, -1) \rightarrow 2x - y = -1 \\ (2, 4) &= (2, x + y) \rightarrow x + y = 4 \end{aligned} \right\} 2x = 3 \rightarrow x = 1, y = 2$$

(غزالیان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۵۳ آیا معادله $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 0 \end{cases}$ یک تابع است؟ چرا؟

پاسخ: در حل مسائل توابع چند ضابطه‌ای بهترین راه کشیدن نمودار است. اما برای حل سریع‌تر و خلاصه‌تر، سعی کنید ثابت



کنید که به یک x دو y نسبت داده شده تا تابع نبودن ضابطه معلوم شود. با توجه به نمودار مقابل:

در بازه $[0, 2]$ به یک x می‌توان دو y نسبت داد.

(به بیان دیگر، یک خط عمودی در بازه دامنه، نمودار را در دو جا قطع می‌کند)

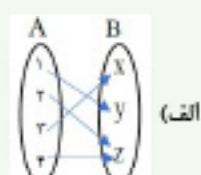
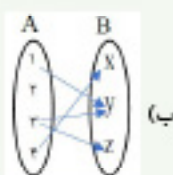
پس این معادله ضابطه یک تابع نیست.

سوال ۵۴ مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{x, y, z\}$ را در نظر بگیرید. به کمک نمودار پیکانی:

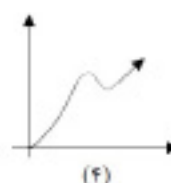
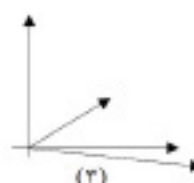
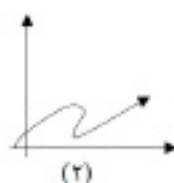
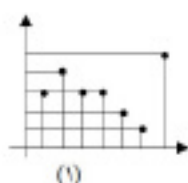
الف) رابطه‌ای از A به B یکشید که تابع باشد.

ب) رابطه‌ای از A به B یکشید که تابع نباشد.

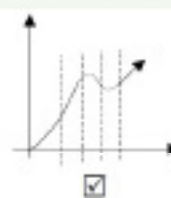
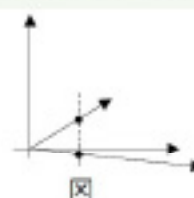
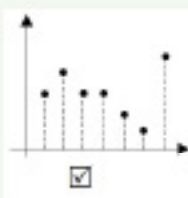
پاسخ: در رسم نمودارهای پیکانی یک تابع فقط باید توجه داشته باشید که از همه عضوهای مجموعه مبدأ (A)، یکی و فقط یکی پیکان بیرون یزند. به عضو مجموعه مقصد (B) می‌تواند پیکانی وارد نشود یا بیش از یک پیکان وارد شود.



سوال ۵۵ کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ (ممکن است بیش از یک مورد باشد)

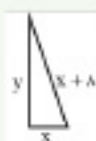


پاسخ: راحت‌ترین راه برای تشخیص تابع بودن یا نبودن یک نمودار، کشیدن خطهای عمودی روی آن است. اگر یک خط عمودی نمودار را در دو نقطه قطع کند، آن نمودار تابع نیست.



سوال ۵۶ در یک مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر ۸ واحد بیشتر از طول کوچک‌ترین ضلع قائمه است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که مساحت این مثلث را برحسب کوچک‌ترین ضلع قائمه آن بیان کند.

پاسخ: برای حل اینگونه سوالات، رسم شکل و پیاده کردن اطلاعات سوال روی آن، بهترین راه است. ضلع مجهول را براساس داده‌ها به دست می‌آوریم و سپس آن را در معادله خواسته شده قرار می‌دهیم.



$$x^2 + y^2 = (x+8)^2 = x^2 + 16x + 64 \rightarrow y^2 = 16x + 64 \Rightarrow y = \sqrt{16x + 64} \quad [1]$$

$$\text{مساحت مثلث} : \frac{xy}{2} \xrightarrow{[1]} \frac{x}{2} \sqrt{16x + 64} = 2x\sqrt{x+4}$$

سوال ۵۷ اگر در یک تابع خطی $f(1) = 3$ و $f(2) = 5$ باشد، ابتدا ضابطه این تابع خطی را بنویسید سپس $f(f(1))$ را به دست آورید. (سالانه ترم خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: توابع خطی، معادله کلی:

$$f(x) = \overset{\text{شیب خط}}{a} x + \overset{\text{عرض از مبدأ}}{b}$$

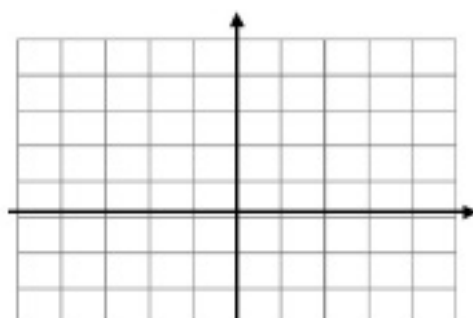
اگر تابع خطی از نقطه (c,d) عبور کند می‌توان c را به جای x و d را به جای f(x) صدق داد.

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= a(1) + b = 3 \\ f(2) &= 2a + b = 5 \end{aligned} \right\} b = 3, a = 1 \Rightarrow f(x) = x + 3$$

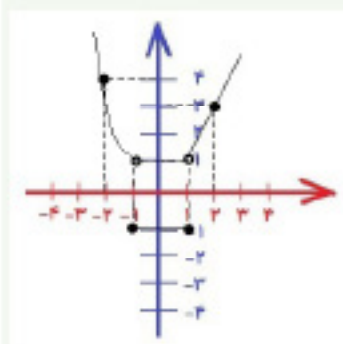
$$f(1) = 1 + 3 = 4 \rightarrow f(f(1)) = f(4) = 4 + 3 = 7$$

(سمانه جان خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۵۸ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < -1 \\ -1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 & x > 1 \end{cases}$ را رسم کنید.



پاسخ: برای رسم نمودار یک تابع، دو نقطه از دامنه را مشخص کرده و در معادله قرار می‌دهیم تا دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داشته باشیم. پس با توجه به معادله آنها را به هم وصل کرده و نمودار را تکمیل می‌کنیم. در توابع چند ضابطه‌ای این کار را برای هر بازه جداگانه در دامنه تکرار می‌کنیم.

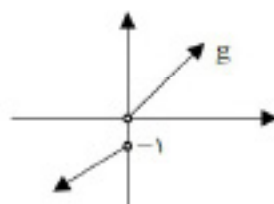


$$\begin{cases} x^2 & x < -1 \rightarrow (-1, 1), (-2, 4) \\ -1 & -1 \leq x \leq 1 \rightarrow (-1, -1), (1, -1) \\ 2x-1 & x > 1 \rightarrow (1, 1), (2, 3) \end{cases}$$

همانطور که می‌بینید در رسم توابع چند ضابطه‌ای بهترین اعداد دامنه برای نقطه‌گذاری، اعداد مشترک بین بازه‌های بین دو معادله مختلف هستند (مثلاً در این سوال ۱ و -۱). ولی اگر اعداد مشترک نداشتیم بهترین گزینه‌ها اعداد ابتدا و انتهای هر بازه است.

(اندیشه های شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۵۹ یا توجه به نمودار تابع زیر، دامنه و برد را حساب کنید.



پاسخ: محاسبه دامنه تابع از روی نمودار:

۱- ابتدا و انتهای بازه دامنه را مشخص می‌کنیم.

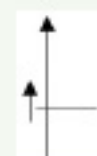
۲- در بازه این دامنه خطی عمودی را از چپ به راست حرکت می‌دهیم:



۳- اگر این خط عمودی به نقطه، یا بازه‌ای رسید، که نمودار در آن وجود نداشت، آن نقطه یا بازه را از دامنه حذف می‌کنیم. محاسبه برد تابع از روی نمودار:

کاملاً شبیه محاسبه دامنه عمل می‌کنیم. تنها تفاوت در مرحله دوم است که یک خط افقی را از پایین به بالا حرکت می‌دهیم. دامنه: خط عمودی در نقطه ۰ (صفر) روی نمودار نیست: $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$ برد: خط افقی در بازه $[-1, 0]$ روی نمودار نیست:

$$R_g = \mathbb{R} - [-1, 0]$$



سوال ۶۰ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 0 \\ -2x - 4 & -1 \leq x < 0 \end{cases}$ را رسم کرده، دامنه و برد تابع را معلوم کنید.

(فیزیکان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: محاسبه دامنه تابع بدون نمودار:

- ۱- در توابع چند ضابطه‌ای به بازه‌ها و علامت‌های $\leq$ و $<$ دقت کنید.
 - ۲- اگر در معادله تابعی کسری وجود داشت که مخرج آن دارای x بود، ریشه مخرج را از بازه دامنه حذف کنید. (چون مخرج صفر معادله تابع را تعریف نشده می‌کند).
 - ۳- به محدودیت‌های دامنه‌ای که در صورت سوال قرار داده شده توجه کنید.
- محاسبه برد تابع بدون نمودار: شکل کلی و تقریبی نمودار در بازه دامنه‌ی آن را تصور کنید. محور y ها را در نظر بگیرید تا بفهمید به صورت کلی برد تابع به چه شکلی است. سپس محاسبات لازم را از روی دامنه و معادله انجام دهید. دقت کنید که اگر نقاطی از دامنه حذف شده بودند، آن نقاط از برد نیز حذف کنید.

دامنه تابع:

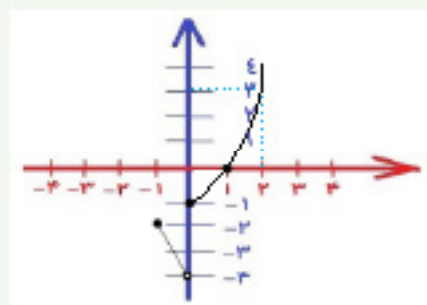
$$D_{f(x)} = [-1, +\infty) \leftarrow [-1, 0) \cup [0, +\infty)$$



تصور کلی $-2x - 4$



برد تابع: تصور کلی $x^2 - 1$



$$x^2 - 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 - 1 = -1 \Rightarrow [-1, +\infty)$$

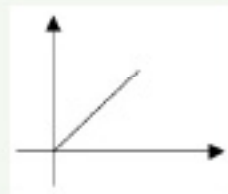
$$\begin{aligned} -2x - 4 &\xrightarrow{x \rightarrow -1} 2 - 4 = -2 \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 - 4 = -4 \end{aligned} \Rightarrow (-4, -2]$$

$$\Rightarrow R_{f(x)} = (-4, -2] \cup [-1, +\infty)$$

سوال ۶۱ تابع $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + ax + b}{g(x)}$ یک تابع همانی یا دامنه $R - \{1\}$ است. مقادیر a و b را بیابید.

(فیزیکان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در توابع همانی، ورودی هر چه باشد خروجی نیز همان خواهد بود. $f(x) = x$



با توجه به توضیحات باید تحلیل کرد که چگونه $\frac{x^3 - 2x^2 + ax + b}{g(x)}$ را می‌توان تبدیل به x کرد.

عبارت صورت کسر یک عبارت درجه سوم است، پس یعنی x در یک عبارت درجه دوم ضرب شده،

اما این عبارت درجه دوم به گونه‌ای دوباره از بین رفته (چون یک تابع همانی درجه اول است)

پس نتیجه میگیریم $g(x)$ همان عبارت درجه دومی (۱) است که در صورت هم وجود دارد (صورت با مخرج زده می‌شود و

دوباره x را تحویل میگیریم)

همچنین با توجه به صورت سوال ($D_f = R - \{1\}$) ریشه مخرج $g(x)$ برابر یک (۲) است.

تابع $g(x)$ ریشه مضاعف ۱ دارد.

$$\begin{aligned} \text{HH} \\ \rightarrow g(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow \frac{x(x^2 - 2x + 1)}{g(x)} &= \frac{x^3 - 2x^2 + x}{g(x)} \end{aligned}$$

$$a = 1, b = 0$$

با توجه به معادله به دست آمده:

سوال ۶۲ اگر تابع f ثابت و $f(2) = 5$ و تابع $g = \left\{ (5, a-1), (-1, -1), \left(\frac{b}{3}, 2\right) \right\}$ همانی باشد. حاصل $f(b-2) + g\left(\frac{a}{3}\right)$

(فهرستکن آمل خرداد ۱۴۰۲)

را بیابید.

پاسخ: در یک تابع ثابت، مقدار تابع (خروجی) به ازای همه ورودی‌ها یک عدد ثابت خواهد بود. $f(x) = k$

$$f(b-2) = 5 \Leftarrow f(x) = 5 \Leftarrow f(2) = 5 \text{ و } f(x) \text{ تابع ثابت و } \textcircled{1}$$

$g(x)$ تابع همانی $(f(x) = x)$

$$5 = a-1 \rightarrow a = 6, \quad \frac{b}{3} = 2 \rightarrow b = 6$$

$$\rightarrow \textcircled{1} \textcircled{2} \quad f(b-2) + g\left(\frac{a}{3}\right) = f(4) + g(2)$$

$$5 + 2 = 7$$

$$g\left(\frac{a}{3}\right) = g(2) = 2 \text{ و } \textcircled{2}$$

سوال ۶۳ با استفاده از نمودار $f(x) = |x|$ نمودار تابع $y = 1 - |x-2|$ را به کمک انتقال رسم کنید.

(اندیشه‌های شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: رسم توابع به کمک انتقال:

۱- انتقال عمودی:

$$f(x) \pm K$$

با اضافه کردن عدد K به کل ضابطه نمودار $(f(x))$ ، نمودار در جهت محور y ها به سمت بالا (اگر $K > 0$) و یا پایین (اگر $K < 0$) منتقل می‌شود.

نکته: در انتقال عمودی دامنه تابع بدون تغییر مانده اما برد فرق می‌کند.

$$y = f(x \pm K)$$

۲- انتقال افقی:

برای فهم انتقال افقی ابتدا باید توجه داشت که تابع f ضابطه خود را بر هر گونه ورودی به طور تمام و کمال اعمال می‌کند. مثلاً اگر $f(x) = x^2$ پس $f(x+1) = (x+1)^2$ به زبان ساده‌تر اگر ورودی دیگری به جز x داشتیم آن را کامل و بدون جدا کردن اجزایش به جای x جای‌گذاری می‌کنیم.

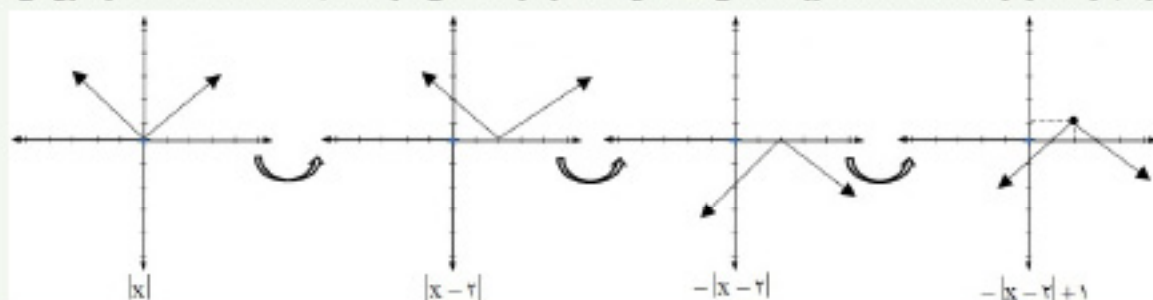
با اضافه کردن عدد K به ورودی نمودار f ، نمودار در جهت محور x ها به سمت راست (اگر $K > 0$) و یا به سمت چپ (اگر $K < 0$) منتقل می‌شود.

نکته: در انتقال افقی برد تابع بدون تغییر مانده اما دامنه فرق می‌کند.

$$y = -f(x)$$

۳- قرینگی:

برای رسم قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور x ها کافی است کل ضابطه را در یک منفی ضرب کنیم. (دامنه ثابت مانده اما برد فرق می‌کند)



(فهرستکن آمل خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۶۴ در تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \leq 1 \\ -x^2 + 2ax & x \geq 1 \end{cases}$ مقدار $f(\sqrt{2}-1)$ را بیابید.

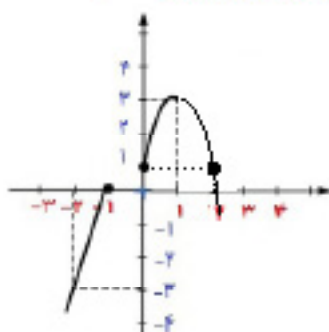
پاسخ: اگر معادله‌های یک تابع چند ضابطه‌ای دارای مجهول بودند، در اکثر سوالات بازه‌های دامنه دارای اشتراکاتی هستند که با جایگذاری آن‌ها و مساوی قرار دادن ضابطه‌ها، می‌توان مجهول را پیدا کرد در $x=1$, $f(x)$ در هر دو ضابطه صدق می‌کند یعنی هر دو به ازای ۱ خروجی یکسانی تحویل می‌دهند.

$$\begin{cases} x^2 + ax \xrightarrow{x=1} 1+a \\ -x^2 + 2ax \xrightarrow{x=1} -1+2a \end{cases} \Rightarrow 1+a = 2a-1 \Rightarrow 2=a \Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 1 \\ -x^2 + 4x & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}-1 < 1 \rightarrow f(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1)^2 + 2(\sqrt{2}-1) = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 = 1$$

(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۶۵ ضابطه و دامنه و برد تابع f را بیابید.



پاسخ: بنویشتن ضابطه تابع از روی نمودار آن:

۱- نوع تابع را مشخص می‌کنیم (خطی، درجه ۲، درجه ۳، قدر مطلق)

۲- با توجه به روش‌های انتقال تابع، نمودار را از حالت استاندارد به حالت مورد نظر می‌رسانیم.

* برای انتقال $f(x)$ ، ترتیب اعمال انتقال به این صورت است:

۱- چپ و راست کردن ۲- اعمال ضریب x ۳- اعمال قرینگی نسبت به محور y ۴- اعمال قرینگی نسبت به محور x ۵- اعمال ضریب $f(x)$ ۶- بالا و پایین کردن

$$-af(-bx+c)+d$$

البته این روش پیشرفته‌تری است که در پایه‌های بعد می‌خوانید. سوالات سهمی پایه دهم با استفاده از معادلات

$$y = a(x-h)^2 + K \text{ یا } y = ax^2 + bx + c \text{ قابل حل هستند}$$

در قسمت خطی این تابع دو نقطه را داریم که برای نوشتن ضابطه کافی هستند: $(-2, -3)$, $(-1, 0)$

$$\frac{0 - (-3)}{-1 - (-2)} = \frac{3}{1} = 3 \rightarrow f(x) = 3x + 3$$

برای قسمت سهمی می‌توانیم هم از انتقال استفاده کنیم و هم از فرمول $f(x) = a(x-h)^2 + K$ که در واقع همان فرمول

آماده انتقال است. نقطه $(0, 1)$ را داریم و برای سهمی $(1, 3)$ است

$$1 = a(0-1)^2 + 3 \rightarrow 1 = a + 3 \rightarrow a = -2 \rightarrow f(x) = -2(x-1)^2 + 3 = -2x^2 + 4x + 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 3x+3 & x \leq -1 \\ -2x^2+4x+1 & x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} D_f = R - (-1, 0) \\ D_f = (-\infty, 3] \end{cases}$$

سوال ۶۶ اگر f یک تابع خطی باشد که در آن $f(2) = 0$ و نمودار آن از نقطه $(1, 5)$ نیز بگذرد، مجموعه جواب نامعادله

(فرزادگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

$$f\left(\frac{2}{x}\right) < 0 \text{ را معلوم کنید.}$$

پاسخ: در مفهوم تابع خواندیم که تابع مانند یک دستگاه عمل می‌کند. ورودی را می‌گیرد، اعمالی روی آن انجام می‌دهد، و خروجی را تحویل می‌دهد. بنابر این به طور مثال اگر تابع f با ورودی x $ax + b$ را تحویل می‌دهد، با ورودی $ax^2 + b \cdot x^2$ را تحویل می‌دهد. به بیانی دیگر هر تقییری بر x روی ضابطه $f(x)$ اعمال می‌شود. تابع خطی داریم که دو نقطه از آن معلوم هستند: $(1, 5)$ و $(2, 0)$

$$\frac{5-0}{1-2} = -5 \rightarrow f(x) = -5x + 10$$

$$f\left(\frac{2}{x}\right) = -5\left(\frac{2}{x}\right) + 10 = \frac{-10 + 10x}{x}$$

$$\rightarrow \frac{10x - 10}{x} < 0 \rightarrow$$

$f\left(\frac{2}{x}\right)$ یعنی به جای همه x ها $\frac{2}{x}$ می‌گذاریم:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$10x - 10$	-	-	0	+
x	-	0	+	+
$f(x)$	+	ث	-	+

بازه جواب: $(0, 1) \Rightarrow$

$$\frac{f(8) - f(2)}{1 + f(-7)} =$$

سوال ۶۷ اگر $f(5x - 2) = x^2 + 1$ باشد حاصل عبارت مقابل را بیابید.

(شهید بهشتی سپهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: گاهی در تابع، ورودی x خالص نیست و قریب یا چیزهای دیگری به همراه دارد. در این صورت اگر ورودی خاصی داشتیم که جواب آن را می‌خواستیم (مثلاً اعداد)، به سادگی ورودی تابع f را برابر آن عدد قرار می‌دهیم و x خالص را به دست می‌آوریم؛ سپس x را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم. (این سوالات در اصل نوعی از ترکیب توابع هستند که در سال‌های بعد راحل زیباتر و جبری‌تر آن‌ها را یاد می‌گیرید)

$$\begin{cases} f(8) \rightarrow 5x - 2 = 8 \rightarrow x = 2 \rightarrow x^2 + 1 = 5 \\ f(2) \rightarrow 5x - 2 = 2 \rightarrow x = 1 \rightarrow x^2 + 1 = 2 \\ f(-7) \rightarrow 5x - 2 = -7 \rightarrow x = -1 \rightarrow x^2 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{f(8) - f(2)}{1 + f(-7)} = \frac{5 - 2}{1 + 2} = 1$$

فصل ۶ و ۷

سوال ۶۸ یا استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد ۹ رقمی یا ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

(شهید بهشتی بهسر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به گونه‌ای که برای انجام مرحله اول m روش، و برای هر کدام از این m روش، بتوان مرحله دوم را به n روش انجام داد، برای انجام کل کار $m \times n$ روش وجود دارد. تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k روش باشد، و برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای مرحله دوم m_2 روش، ... و برای مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد، برای انجام کل کار $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش وجود دارد. برای اولین رقم از سمت چپ ۹ گزینه داریم. یک رقم در آن جایگاه قرار می‌دهیم. پس برای دومین رقم یک گزینه را از دست داده‌ایم و ۸ گزینه دیگر داریم. به همین ترتیب تا نهمین رقم پیش می‌رویم

$$9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 9!$$

(سالانه کرج خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۶۹ یا ارقام ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ چند عدد ۴ رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟



پاسخ: در مسائلی که از اصول ضرب و جمع به صورت جداگانه استفاده می‌کنیم، اجزاء مختلف از هم مستقل هستند.

اما در برخی مسائل دیگر، حالت‌های ممکن برای یک جزء مربوط و مشروط به حالت‌هایی هستند که ممکن است در جزئی دیگر اتفاق بیفتد. برای حل چنین سوالاتی ابتدا باید جزءهای مربوط را تشخیص داد، حالت‌های جزئی که دیگری به آن بستگی دارد را جدا کرد سپس به طور جداگانه برای هر حالت اصل ضرب را به کار برده و در نهایت اصل جمع را روی تمام جواب‌های به دست آمده اعمال می‌کنیم. در این سوال، جای‌گذاری ارقام اول و دوم و سوم از چپ مشروط به رقم یکان است، چون زوج بودن عدد به یکان آن بستگی دارد. بر این اساس یکان‌های زوج را جدا می‌کنیم

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

برای هزارگان ۴ انتخاب داریم. با اصل ضرب ادامه می‌دهیم.

$$\begin{cases} 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18 \\ 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18 \end{cases}$$

برای هزارگان ۳ انتخاب داریم چون صفر نمی‌تواند اولین رقم

سمت چپ باشد. برای صدگان هم ۳ رقم داریم چون یک رقم در هزارگان استفاده شده اما حالا می‌توانیم از صفر هم استفاده کنیم. با اصل جمع کل حالت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$24 + 18 + 18 = 60$$

* کسانی که دستشان در حل این سوالات گرم شده می‌دانند که فقط صفر یک استثناست و بقیه یکان‌ها را می‌توان

$$3 \times 3 \times 2 \times 1 = 6$$

همزمان در یک خانه قرار داد:

سوال ۷۰ چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام یا اعداد ۱ تا ۶ می‌توان نوشت که در آنها ارقام ۲ و ۳ کنار هم

(شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

نیاشند.

پاسخ: • متعمم: گاهی آسان‌تر است که به جای محاسبه تمام حالت‌های ممکن (مطلوب)، حالت‌های نامطلوب را بشماریم و از تعداد کل حالت‌های انجام کاری کم کنیم

• جایگشت‌های طنابی: در یک حالت خاص جایگشت، چند شیء متمایز باید همیشه کنار هم باشند.

برای حل این مسائل تصور می‌کنیم این چند شیء را با طناب به هم می‌بندیم و همه آنها را به عنوان یک شیء با اشیاء دیگر جایگشت می‌دهیم. دقت دارید که گاهی باید جایگشت اشیاء طناب پیچ شده را با هم نیز حساب کرد (اصل ضرب) بهترین راه این است که تعداد کل حالت‌ها، و تعداد حالت‌هایی که ۲ و ۳ کنار هم هستند را محاسبه کنیم و سپس آنها را از هم کم کنیم. ۲ و ۳ را یک بسته در نظر می‌گیریم پس ۵ شیء داریم: ۵!

۲ و ۳ طناب پیچ شده ممکن است (۳، ۲) یا (۲، ۳) باشند و این اهمیت دارد: $2 \times 5!$

تعداد کل حالت‌ها ۶! است. پس: $6! - (2 \times 5!) = 720 - 240 = 480$

سوال ۷۱ یا حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف کلمه «گردی» کنار هم باشند؟

(سلاسه کرج خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $n!$

قسمت دوم، جایگشت طنابی است که در سوال قبل توضیح داده شد.

الف) ۸!

ب) اگر «گردی» را یک بسته محسوب کنیم، جایگشت اولیه می‌شود ۵! (ج، ه، ن، ا، گردی). از آنجا که ترتیب حروف در بسته

اهمیتی ندارد، جایگشت آنها می‌شود ۴! (گ، د، ر، ی) $5! \times 4!$

سوال ۷۲ ۴ دانش آموز و ۵ معلم در یک صف ایستاده‌اند. تعداد حالت‌هایی را به دست آورید که:

(الف) معلم‌ها و دانش آموزها یک در میان ایستاده باشند.

(ب) نفر وسط معلم باشد.

(ج) معلم‌ها کنار هم و دانش آموزان کنار هم باشند.

(شهید بهشتی به شهر خرداد ۱۴۰۲ با تغییر)

پاسخ: در جایگشت‌های یک در میان، عمدتاً دو نوع شی داریم. اگر تعداد یک نوع شی از تعداد نوع دیگر، ۱ واحد بیشتر باشد، نوع بیشتر را (مثلاً □) در اطراف می‌چینیم و جایگشت می‌دهیم؛ و نوع کمتر (مثلاً △) را بین آنها چیده و جایگشت می‌دهیم: □△□△□△□

اگر تعداد اعضای هر دو نوع برابر باشد، دو حالت داریم: □△□△ یا △□△□ که برای محاسبه تعداد حالت‌ها، جایگشت هر دو نوع را حساب کرده ضربدر ۲ می‌کنیم.

جمع‌بندی:

۱- تعداد جایگشت‌های یک در میان n چیز متمایز و $(n-1)$ چیز متمایز دیگر: $n!(n-1)!$

۲- تعداد جایگشت‌های یک در میان n چیز متمایز و n چیز متمایز دیگر: $(n!)(n!)(2)$

(الف) با توجه به توضیحات: $5! \times 4!$

(ب) کلاً ۹ نفر در صف داریم. نفر وسط (یعنی پنجم) که معلم است ۵ حالت دارد. ۸ جایگاه دیگر در صف می‌تواند به معلم یا دانش‌آموز اختصاص داشته باشد: 5×8

(ج) دو بسته داریم. در یک بسته جایگشت ۴ دانش‌آموز و در بسته دیگر جایگشت ۵ معلم داریم: $5! \times 4! \times 2!$

سوال ۷۳ اگر ۲ مهره قرمز، ۴ مهره آبی، ۵ مهره زرد و ۲ مهره سبز داشته باشیم: کنار هم چیدن این مهره‌ها چند

حالت به وجود می‌آورد؟

پاسخ: اگر در بین n شی، اشیایی داشتیم که تکراری بودند، یعنی اگر جای آنها را با هم عوض کنیم، حالت جدیدی از جایگشت پدید نمی‌آید: کل جایگشت‌ها را بر جایگشت تکراری تقسیم می‌کنیم

$$\text{تعداد کل مهره‌ها: } 3 + 4 + 5 + 2 = 14 \quad \text{جایگشت: } \frac{14!}{3! \times 4! \times 5! \times 2!}$$

توضیح: به عنوان مثال اگر در جایگاه چهارم مهره آبی داشته باشیم، فرقی ندارد که مهره آبی شماره ۱ باشد، یا شماره ۲ یا غیره. بنابراین حالت جدیدی به وجود نمی‌آید

سوال ۷۴ یا حروف کلمه‌ی «جمهوری» و بدون تکرار حروف، چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که:

(الف) شامل حرف نقطه دار نباشد.

(ب) شامل حرف نقطه دار باشد.

(شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: جایگشت‌های ۲ شی از ۱۱ شی متمایز:

به طور خلاصه در این بحث ۱۱ شی متمایز داریم که می‌خواهیم از بین آنها ۲ شی را انتخاب کنیم و به ترتیب بچینیم. پس در این جایگشت‌ها هم ترتیب و هم انتخاب اشیاء اهمیت دارد

تعداد جایگشت‌های ۲ تایی از ۱۱ شی متمایز:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

الف) حرف ج همیشه نقطه‌دار است بنابراین کنار گذاشته می‌شود. حرف (ی) اگر در اول یا وسط کلمه بیاید نقطه‌دار می‌شود. پس دو حالت برای انتخاب از حروف «م، ه، ر، و، ی» داریم:

$$۱- از ۴ حرف دیگر (ج، ز و ی) ۳ حرف انتخاب کرده و می‌چینیم: ۱: P(۴, ۳) = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 24$$

۲- حرف «ی» را در جایگاه آخر کلمه‌ی سه حرفی قرار می‌دهیم، و برای دو جایگاه دیگر از ۴ حرف حالت اول استفاده می‌کنیم:

$$۲: P(۴, ۲) = \frac{4!}{(4-2)!} = 4 \times 3 = 12$$

حالا دو حالت را با هم جمع می‌کنیم:

$$۱ و ۲: 12 + 24 = 36$$

ب) این بخش در واقع متمم بخش قبلی محسوب می‌شود. پس به جای حساب کردن حالت‌ها در این بخش، تعداد کل حالت‌ها و حالت‌های بخش قبل را از هم کم می‌کنیم

$$P(۶, ۳) = \frac{6!}{3!} = 6 \times 5 \times 4 = 120 \rightarrow 120 - 36 = 84$$

سوال ۷۵ در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات

علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین

داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

(شهید بهشتی بهشهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعداد ترکیب‌های ۲ شی از ۱۱ شی متمایز:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{P(n, r)}{r!}$$

در ترکیب برخلاف جایگشت ترتیب انتخاب اشیاء اهمیتی ندارد.

نکته: هر فاکتوریل را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد و آنگونه نوشت: اعداد بزرگتر $\times$ فاکتوریل عدد کوچکتر.

$$n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = n(n-1)(n-2)(n-3)! = \dots$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 28 \rightarrow (n) \times (n-1)(n-2)! = 56 \times (n-2)! \rightarrow n(n-1) = 56 \Rightarrow n = 8$$

(فوزالان امل خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۷۶ الف) در معادله $\binom{12}{2n-1} = \binom{12}{7}$ چند مقدار برای n وجود دارد؟

پاسخ:

نکته‌های ترکیب:

$$\binom{n}{1} = n \quad (1)$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad (2)$$

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad (3)$$

← اگر بخواهیم با مثال توضیح دهیم یعنی حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۶ نفر با حالت‌های کنار گذاشتن ۲ نفر از ۶ نفر برابر است. برای کنار گذاشتن هم باید انتخاب کرد پس

$$\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$$

از آنجا که $\binom{12}{5} = \binom{12}{7}$ پس دو حالت وجود دارد:

$$\left. \begin{aligned} 2n-1 &= 7 \rightarrow n=4 \\ 2n-1 &= 5 \rightarrow n=3 \end{aligned} \right\}$$

(اندیشه‌های شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۷۷ اگر $P(n, 4) = 12C(n-2, 2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.

پاسخ:

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \times r!}$$

$$\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12(n-2)!}{(n-4)! \times 2!} \rightarrow 2n! = 12(n-2)! \rightarrow (n)(n-1)(n-2)! = 6(n-2)! \rightarrow (n)(n-1) = 6 \Rightarrow n=3$$

سوال ۷۸ یک آشپز ده نوع ادویه دارد، با استفاده از هر ۲ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این

آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هر گاه دو نوع ادویه باشند که یا هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

(فیزیکان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: هرگاه نتوانیم n شیء را با هم در یک بسته قرار دهیم، از راه متمم عمل می‌کنیم. یعنی تعداد حالت‌هایی که آن n

شیء درون یک بسته باشند را از تعداد حالت‌های کل کم می‌کنیم

$$\left. \begin{aligned} \binom{10}{2} &= \frac{10!}{2! \times 8!} = \frac{10 \times 9 \times 8}{2 \times 2 \times 1} = 45 \\ 45 - 8 &= 37 \end{aligned} \right\} \quad 120 - 8 = 112$$

حالات نامطلوب: $\binom{8}{1} = 8$

حالات نامطلوب یعنی دو ادویه در بسته هستند و می‌خواهیم از ۸ تای دیگر یکی را به بسته اضافه کنیم.

سوال ۷۹ ۵ جفت کفش داریم. به چند طریق می‌توان ۳ لنگه کفش انتخاب کرد به صورتی که هیچ دو تایی یا هم جفت نباشند؟

پاسخ: برای حل اینگونه مسائل ابتدا به تعداد اشیاء خواسته شده جفت انتخاب می‌کنیم و جدا از بقیه می‌گذاریم پس توجه می‌کنیم که در هر جفت ۲ انتخاب برای ما وجود دارد. بعد با توجه به اصل ضرب تعداد حالت‌های کل را محاسبه می‌کنیم

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \times 3!} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

هر کدام از این ۳ جفت (که به ۱۰ حالت انتخاب می‌شوند) می‌توان لنگه چپ یا راست را انتخاب کرد.

$$10 \times \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 80$$

سوال ۸۰ (ب) از بین ۴ دانش‌آموز دهم، ۳ دانش‌آموز یازدهم و ۲ دانش‌آموز دوازدهم به چند روش می‌توان انجمن علمی ۵ نفره تشکیل داد به طوری که حداقل سه دانش‌آموز دهمی داشته باشد.

(سمانه خرماد ۱۴۰۲)

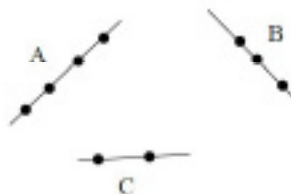
پاسخ: در سؤالاتی که از حداقل و حداکثر استفاده شده، نگاه کنید که آیا محاسبه خود حالت (حداقل و حداکثر) راحت‌تر است یا متعمم آن

محاسبه خود حالت (حداقل) راحت‌تر است چون کلاً یا ۳ دهمی داریم یا ۴ تا. برای بقیه اعضای انجمن پایه‌ای تعریف نشده پس افراد یازدهم و دوازدهم را با هم نظر می‌گیریم:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{1} \binom{5}{1} = 40 + 5 = 45$$

سوال ۸۱ چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأسهای آن روی نقاط مشخص شده در شکل زیر باشد؟

(فرزادگان قائم شهر خرماد ۱۴۰۲)



پاسخ: اگر چند خط داشتیم که روی آنها نقطه کشیده شده، و از ما می‌خواهند شکلی رسم کنیم که رئوس آن روی نقاط مشخص شده باشند. از ترکیب برای پیدا کردن حالت‌های رئوس روی هر خط استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر بیش از دو خط داشته باشیم، ممکن است در رسم شکل اصلاً از برخی خطوط استفاده نشود

$$\binom{4}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 24$$

اگر هر رأس از یک ضلع باشد:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{1} = 30$$

گر دو رأس روی A و رأس دیگر روی B یا C باشد:

$$\binom{2}{2} \binom{6}{1} = 18$$

اگر دو رأس روی B و رأس دیگر روی A یا C باشد:

$$\binom{2}{2} \binom{7}{1} = 7$$

اگر دو رأس روی C و رأس دیگر روی A یا B باشد:

سوال ۸۲ در یک تیم ۱۰ نفره، می‌خواهیم یک گروه ۵ نفره را برای مسابقات انتخاب کنیم. اگر A در گروه باشد B هم حتماً هست و C حتماً نیست. اما B و C مشکلی ندارند که همزمان در گروه باشند. به چند حالت می‌توان این گروه ۵ نفره را انتخاب کرد؟

پاسخ:

$$\binom{n-k}{r-k}$$

* اگر در r شینی که از n تا انتخاب می‌کنیم، باید حتماً k عضو از n حضور داشته باشند:

چون آن k شی را انتخاب کرده کنار می‌گذاریم و از اشیای باقیمانده $r-k$ دیگر انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{n-k}{r}$$

* اگر در r شینی که از n تا انتخاب می‌کنیم، k عضو از n حتماً نباید حضور داشته باشد:

چون k شی را از محدوده انتخاب خارج کرده و از اشیای باقیمانده r تا انتخاب می‌کنیم.

اگر A در گروه باشد B حتماً هست. پس ۲ نفر از ۵ نفر انتخاب شده‌اند. C حتماً نیست پس از لیست انتخاب‌ها کنار می‌رود. ۷ نفر در تیم

$$\binom{7}{2} = 21$$

می‌مانند که به ۳ نفرشان برای گروه احتیاج داریم:

اگر A در گروه نباشد، از لیست انتخاب‌ها کنار رفته. B و C می‌توانند با هم باشند، پس ۹ نفر در تیم می‌مانند که باید ۵ نفر از بین آنها انتخاب

$$\binom{9}{5} = 126$$

کرد.

$$21 + 126 = 147$$

تعداد کل حالات:

سوال ۸۳ از یک مجموعه سه عضوی به یک مجموعه پنج عضوی چند تابع می‌توان تعریف کرد؟

(شهید بهشتی سپهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

با توجه به فصل تابع می‌دانیم که باید از هر عضو مجموعه مبدأ یک پیکان خارج شود، اما در مجموعه مقصد

ممکن است هیچ، یا بیش از یک پیکان به اعضا وارد شود

پس از هر کدام از سه عضو مجموعه مبدأ باید ۵ پیکان خارج شود:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

مجموعه مقصد تأثیری در نتیجه نهایی ندارد.

سوال ۸۴

تاس سالمی را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف- تعداد اعضای فضای نمونه

ب- پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده برابر ۸ باشد.

پ- پیشامد B که در آن حاصل ضرب اعداد داده شده ۱۲ باشد.

ت- پیشامد آن که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

(فرزادگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

* فضای نمونه‌ای: در یک آزمایش تصادفی، مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای

نمونه را با S و تعداد اعضای آن را با $n(s)$ نشان می‌دهیم.

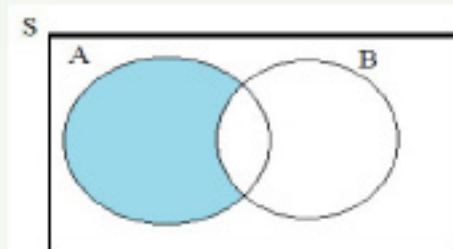
تفاضل دو پیشامد $(A - B)$: زمانی که پیشامد A رخ بدهد ولی پیشامد

B رخ ندهد (از دو پیشامد فقط A رخ بدهد)

الف- دقت اول پرتاب، ۶ حالت برای تاس وجود دارد و دقت دوم هم ۶ حالت:

$$6 \times 6 = 36$$

ب) حالت‌ها را می‌نویسیم:



$$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$$

$$B = \{(2, 6), (6, 2), (3, 4), (4, 3)\}$$

$$A \rightarrow A - B = \{(3, 5), (4, 4), (5, 3)\}$$

ت) $A \rightarrow A - B = \{(3, 5), (4, 4), (5, 3)\}$ اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

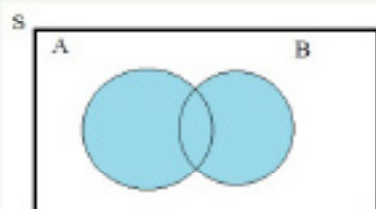
سوال ۸۵ ۲ تاس آبی و قرمز را با هم میاندازیم اگر پیشامدهای A و B را به صورت زیر معرفی کنیم: A : پیشامد آن که هر ۲ تاس زوج بیاید و B : پیشامد آن که مجموع ۲ تاس ۷ باشد.

(فروغزنگار اصل خرداد ۱۴۰۲)

الف) پیشامد $A \cup B$ را تشکیل دهید.

ب) اگر C : پیشامد آن که دو تاس فرد و مجموع ۶ باشد، بررسی کنید آیا پیشامدهای $A \cup B$ و C ناسازگارند؟

پاسخ: اجتماع دو پیشامد $(A \cup B)$: زمانی که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد. (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد، یا هر دو رخ بدهند: $(A \cap B)$)



• پیشامدهای ناسازگار:

تعریف: هرگاه بین دو پیشامد اشتراک تهی شود $(A \cap B = \emptyset)$ به A و B دو پیشامد ناسازگار گفته می‌شود.

الف)

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$A \cup B = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6), (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$$

$$C = \{(1, 5), (3, 3), (5, 1)\} \rightarrow (A \cup B) \cap C = \emptyset$$

ب) بله ناسازگارند.

(نیکن رامسر خرداد ۱۴۰۲)

سوال ۸۶ یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن حداقل عدد رو شده تاس ۳ باشد.

پاسخ: در سوالاتی که از حداقل و حداکثر استفاده شده، نگاه کنید که آیا محاسبه خود حالت (حداقل و حداکثر) راحتتر است یا متمم آن

$$S = \{(ر, ۱), (ر, ۲), (ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (پ, ۱), (پ, ۲), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\}$$

الف)

$$A = \{(ر, ۳), (ر, ۴), (ر, ۵), (ر, ۶), (پ, ۳), (پ, ۴), (پ, ۵), (پ, ۶)\} \quad (2 \times 6) - (2 \times 2) = 8$$

ب)

سوال ۸۷ خانواده‌ای دارای سه فرزند است.

الف) فضای نمونه را بیابید.

ب) پیشامد اینکه «حداقل ۲ فرزند دختر باشند» را مشخص کنید.

(سلانه کرج خرداد ۱۴۰۲)

ج) پیشامد اینکه «فقط دو فرزند اول همجنس باشند» را مشخص کنید.

(شهید بهشتی بیرجند خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: فضای نمونه را به سادگی با اصل ضرب به دست آورده و پیشامدهای خواسته شده را می‌نویسیم. بهتر است برای مطمئن شدن محاسبه ریاضی این پیشامد را هم انجام دهید

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

$$\{(g, g, b), (g, b, g), (b, g, g), (g, g, g)\}$$

الف) هر فرزند می‌تواند یا دختر و یا پسر باشد:

ب) g : دختر و b : پسر

$$\{(b, b, g), (g, g, b)\}$$

ج)

سوال ۸۸ احتمال اینکه امین در آزمون ریاضی قبول شود ۶۰ درصد و احتمال قبولی او در آزمون رانندگی ۳۰ درصد

است. در صورتی که احتمال قبولی امین در حداقل یکی از این دو آزمون برابر ۷۲ درصد باشد، با چه احتمالی در هر دو

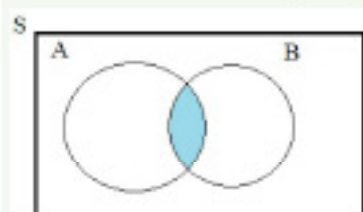
(شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

آزمون قبول خواهد شد؟

پاسخ: احتمال رخ دادن پدیده در حداقل یکی از پیشامدها، یعنی یا پیشامد A یا پیشامد B یا هر دو $(A \cap B)$ که به عبارت دیگر همان $P(A \cup B)$ است

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$۷۲\% = ۶۰\% + ۳۰\% - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cap B) = ۱۸\%$$



به احتمال ۱۸٪ در هر دو آزمون قبول می‌شود.

اشتراک دو پیشامد $(A \cap B)$: زمانی که دو پیشامد با هم رخ بدهند (حتماً هم A رخ بدهد هم B رخ بدهد)

سوال ۸۹ احتمال اینکه مریم در درس ریاضی قبول شود ۰/۴۸ و احتمال این که در فیزیک قبول شود ۰/۳۷ و احتمال قبولی در هر دو درس ۰/۲۰ است

احتمال این که فقط در یکی از دو درس قبول شود را بدست آورید.

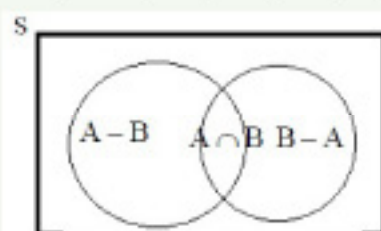
(قرن‌لکان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: اگر A و B دو پیشامد دارای اشتراک باشند، احتمال رخ دادن فقط یکی از آنها برابر است با:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \text{ و } P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = ۰/۴۸ \quad P(B) = ۰/۳۷ \quad P(A \cap B) = ۰/۲۰$$

$$\rightarrow P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = ۰/۴۸ + ۰/۳۷ - 2(۰/۲۰) = ۰/۴۵$$



سوال ۹۰ ۲۵٪ افراد یک جامعه از محصولات شرکت A و ۲۰٪ از محصولات شرکت B و ۱۵٪ از محصولات هر دو شرکت استفاده می‌کنند. فردی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن را بیابید که از هیچ یک از محصولات A و B استفاده نکند.

(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: • احتمال رخداد پیشامد $(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

اگر پیشامدهای A و B ناسازگار باشند.

$$\left. \begin{array}{l} A \cup A' = S \\ P(S) = ۱ \end{array} \right\} P(A) + P(A') = ۱ \Rightarrow P(A') = ۱ - P(A)$$

احتمال رخ ندادن پیشامد A (A'):

از این رابطه در حالتی استفاده می‌کنیم که محاسبه رخداد A' و سپس کم کردن آن از S از محاسبه مستقیم A آسانتر باشد.

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

• احتمال رخداد فقط پیشامد A ($A - B$):

$$P(S) = ۱۰۰\% \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۴۰\%$$

$$\rightarrow P(A \cup B)' = P(S) - P(A \cup B) = ۶۰\%$$



سوال ۹۱ اگر ۸ نفر که دو نفر آنها یا هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار یگیرند، چه قدر احتمال دارد دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

(انديشمای شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: بیشتر سوالهای احتمال با تسلط بر فصل قبل و انواع روشهای شماردن حل می‌شوند. مثلاً در این سوال از جایگشت‌های طناب‌بازی و قانون متمم کمک می‌گیریم

اگر پیشامد A کنار هم نبودن دو برادر باشد، پیشامد A' کنار هم بودن آنهاست و راحت‌تر محاسبه می‌شود.

$$\left. \begin{array}{l} n(s) = 8! \\ n(A') = 2 \times 7! \end{array} \right\} P(A') = \frac{2 \times 7!}{8!} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

سوال ۹۲ در کیسه‌ای ۷ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره زرد وجود دارد ۳ مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه دقیقاً دو مهره هم‌رنگ باشند چقدر است؟

(فزياتكان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

دو مهره هم‌رنگ می‌توانند سفید، سیاه یا زرد باشند.

دو مهره سفید: $\binom{7}{2} \binom{7}{1}$ دو مهره سیاه: $\binom{4}{2} \binom{10}{1}$ دو مهره زرد: $\binom{3}{2} \binom{11}{1}$

$$P(A) = \frac{\binom{7}{2} \binom{7}{1} + \binom{4}{2} \binom{10}{1} + \binom{3}{2} \binom{11}{1}}{\binom{14}{3}} = \frac{240}{364} = \frac{60}{91}$$

سوال ۹۳ کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است. می‌خواهیم از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج کنیم. احتمال آن را بیابید که حداکثر دو مهره سفید باشد.

(شهيد بهشتي سرجوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: حداکثر دو مهره سفید، یعنی یا دو مهره سفید، یا یک مهره سفید، یا هیچ مهره سفید. بهتر است که پیشامد متمم را محاسبه کرده و از پیشامد کل کم کنیم

پیشامد متمم (A') یعنی هر سه مهره سفید باشند:

$$n(A') = \binom{5}{3}$$

$$P(A') = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{22} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{22} = \frac{21}{22}$$

سوال ۹۴ در یک جعبه ۲ مهره سبز و ۴ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه وجود دارد. هر گاه ۲ مهره خارج کنیم یا کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند.

(شهيد بهشتي بيرجند خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در این سوال مقدار حل تقریباً یکسان است، چه از متمم برویم و چه خود احتمال A را محاسبه کنیم. به هر حال برای روانتر شدن داستان از راه متمم استفاده می‌کنیم

$$n(s) = \binom{8}{2}, \quad n(A') = \underbrace{\binom{2}{2}}_{s=2} \underbrace{\binom{4}{2}}_{s=2} \underbrace{\binom{2}{2}}_{s=2} \rightarrow P(A') = \frac{1+6+1}{28} = \frac{2}{7} \rightarrow P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

سوال ۹۵ در یک جعبه ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی وجود دارد. ۴ مهره انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل ۲ مهره آبی باشد؟

(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: حداقل ۲ مهره آبی یعنی ۲ یا ۳ یا ۴ مهره آبی، پیشامد متمم آن ۰ یا ۱ مهره آبی است پس باز هم از راه متمم استفاده می‌کنیم

$$n(s) = \binom{11}{4}, \quad n(A') = \binom{5}{4} + \binom{6}{1} \times \binom{5}{3} \rightarrow P(A') = \frac{65}{330} = \frac{13}{66}$$

$$\rightarrow P(A) = 1 - \frac{13}{66} = \frac{53}{66}$$

همانطور که دیدید طراحان سوالات ترم دوم علاقه خاصی به استفاده از قانون متمم، در سوالاتی به شکل‌های مختلف دارند. حتماً این قانون را در دو فصل اخیر زیاد تمرین کنید

سوال ۹۶ متغیر و انواع آن را به طور کامل تعریف کنید.

(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعریف: متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه می‌باشد که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند

+ مقدار متغیر: عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود.

انواع متغیر:

۱- کمی: قابل اندازه‌گیری هستند (قد، وزن، دما)

۲- کیفی: قابل اندازه‌گیری نیستند (گروه خونی، تحصیلات، جنسیت افراد)

سوال ۹۷ جاهای خالی را پر کنید.

علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل و در نهایت مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود.

(سمانه‌چان خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعریف علم آمار: مجموعه روش‌هایی شامل

۱- جمع‌آوری اعداد و ارقام ۲- سازماندهی و نمایش ۳- تحلیل و تفسیر داده‌ها و ۴- نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب، در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

سوال ۹۸ جامعه یا جمعیت آماری و نمونه آماری را تعریف کنید.

پاسخ:

• جامعه یا جمعیت آماری

تعریف: مجموعه همه چیزهایی که درباره ویژگی(های) آنها تحقیق صورت می‌گیرد.

+ عضو جامعه آماری: هر یک از افراد و یا اشیای جامعه

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه

• نمونه‌ی آماری

تعریف: بخشی از جامعه که برای مطالعه ویژگی(های) مدنظر انتخاب می‌شود.

+ عضو نمونه آماری: هر یک از افراد و یا اشیای انتخاب شده

+ اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه

سوال ۹۹ انواع متغیرها و زیر مجموعه‌های آنها را نوشته و توضیح دهید.

پاسخ:

♦ انواع متغیرهای کتبی

۱- کتبی پیوسته: متغیری که اگر بتواند مقادیر x و y را اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند. (طول، وزن، زمان)

۲- کتبی گسسته: متغیری که پیوسته نباشد. یعنی فقط بتواند مقادیر مشخص و مجزایی را اختیار کند. (تعداد)

♦ انواع متغیرهای کیفی

۱- کیفی ترتیبی: متغیری که در آن نوعی ترتیب طبیعی و منطقی وجود داشته باشد. (سطح تحصیلات)

۲- کیفی اسمی: متغیری که ترتیبی نیست، یعنی در آن نوعی رتبه‌بندی وجود نداشته باشد (جنسیت، وضعیت هوا)

سوال ۱۰۰ برای هر یک از متغیرهای آماری زیر یک مثال بیاورید.

(شهید بهشتی اندیشک خرداد ۱۴۰۲)

الف) کتبی پیوسته:

ب) کتبی گسسته:

ج) کیفی اسمی:

د) کیفی ترتیبی:

پاسخ:

الف) وزن اشخاص

ب) تعداد بردهای یک بازیکن

ج) گروه خونی

د) مدارج علمی (دیپلم، لیسانس و ...)