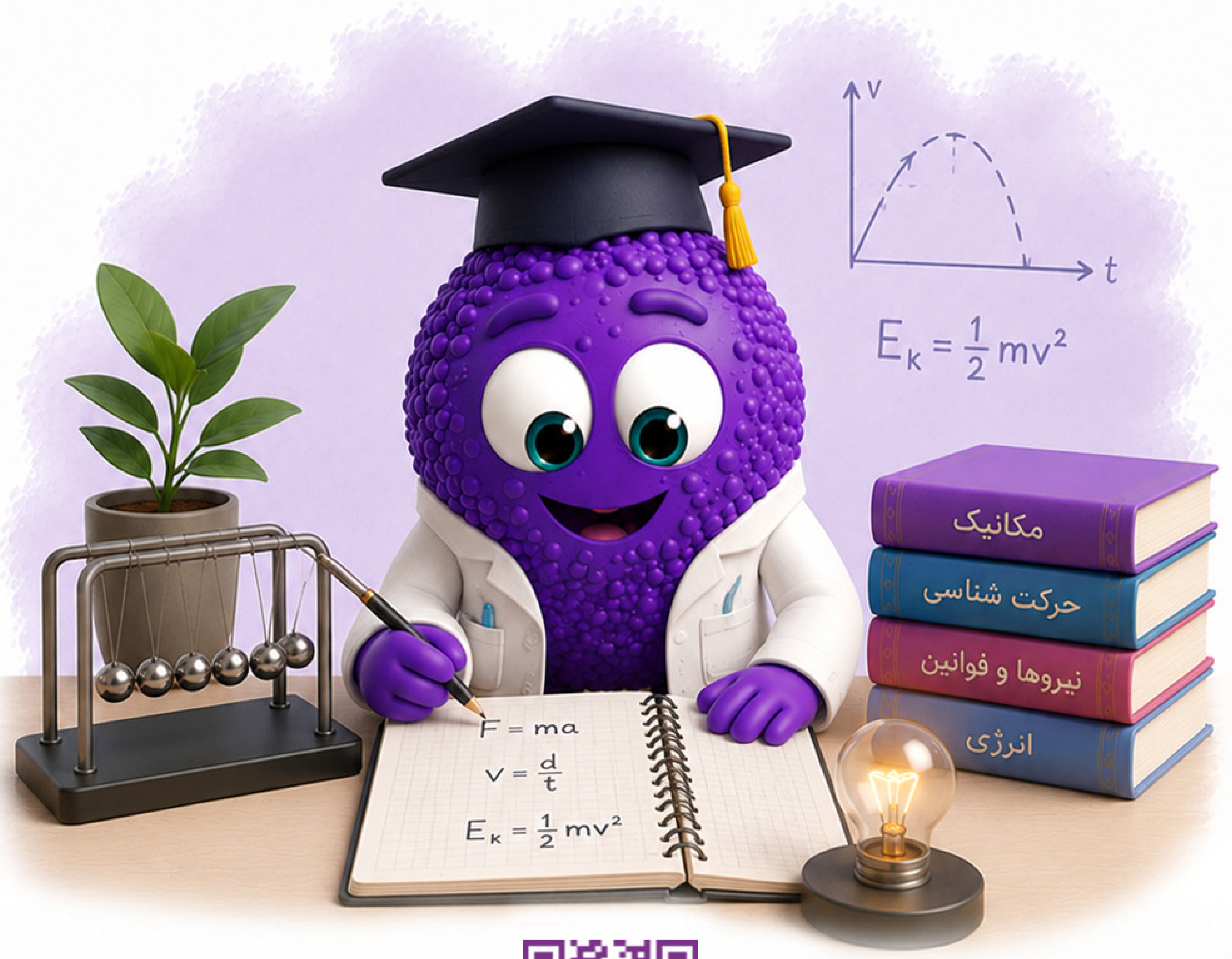
گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

درس

حسابان یازدهم

نوتروبیست



نوتروفیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۴

. تک رقمی نوتروفیل

- رتبه ۸ — ایمان نیک‌نام جهرمی

. دو رقمی های نوتروفیل

- رتبه ۱۴ — امیرمحمدکیانی
- رتبه ۱۶ — آریا قهرمانی
- رتبه ۲۰ — سینا راضی
- رتبه ۳۲ — امیرمحمد رضائی
- رتبه ۵۵ — مهسا سیاوشی
- رتبه ۵۹ — ایمان انفرادی
- رتبه ۶۱ — بهار هلالی
- رتبه ۷۵ — محمدصالح عارفی
- رتبه ۸۰ — محمدمهدی شریفی

. سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل

- رتبه ۱۴۷ — محدثه حیدری
- رتبه ۱۶۰ — اشکان کوثری
- رتبه ۱۶۹ — هانیه خواجه
- رتبه ۲۲۲ — امیرمحمد شکوهی
- رتبه ۲۵۹ — ابوالفضل ناصریان
- رتبه ۲۷۱ — فاطمه سادات موسوی
- رتبه ۳۰۸ — سید علی اکرمی
- رتبه ۳۴۱ — حمیدرضا بشیری
- رتبه ۴۳۲ — سید محمدصادق حسینی
- رتبه ۴۷۳ — زهرا بابائی
- رتبه ۵۱۴ — محمدپارسا عبداله آبادی
- رتبه ۵۳۲ — فاطمه شاهسوند
- رتبه ۵۳۷ — ریحانه حیدری
- رتبه ۵۳۹ — نجمه کیخا
- رتبه ۵۴۶ — حسین تفضلی نژاد
- رتبه ۵۵۷ — محمدصالح زارعی
- رتبه ۵۷۰ — زهرا ولی نژاد
- رتبه ۶۰۶ — سجاد محمودی زاده
- رتبه ۶۶۱ — فاطمه اصغری
- رتبه ۶۶۷ — سیاوش مصطفایی
- رتبه ۶۷۲ — محمدماهان عنبرستانی
- رتبه ۶۹۱ — بهار ضرغامی
- رتبه ۷۱۴ — محمد یزدیان
- رتبه ۷۸۱ — احسان قنبری
- رتبه ۷۸۶ — نیما غفاری
- رتبه ۸۰۳ — مائده رنجبر
- رتبه ۸۰۴ — آرمین رضایی
- رتبه ۸۹۳ — فاطمه مشاوری نجف آبادی
- رتبه ۹۰۹ — کیمیا فدائی
- رتبه ۹۴۷ — صفورا بقائی
- رتبه ۱۰۵۲ — پویان فریور افشار
- رتبه ۱۰۵۸ — الینا جلالی فر
- رتبه ۱۱۲۲ — علی طاهر زاده
- رتبه ۱۱۲۷ — زهرا بابائی
- رتبه ۱۲۳۴ — مطهره توحیدی
- رتبه ۱۲۳۶ — مبینا ایزدی
- رتبه ۱۲۸۴ — بهار امیری
- رتبه ۱۲۸۴ — فاطمه معین زاده
- رتبه ۱۳۵۰ — علی زینلی
- رتبه ۱۳۷۲ — پارسا رضایی
- رتبه ۱۴۲۴ — سید امیرحسین حسینی
- رتبه ۱۴۸۳ — سینا خاوری خراسانی
- رتبه ۱۴۹۳ — محمد مهدی خرم زاده
- رتبه ۱۵۰۳ — فاطمه رحیم زاده
- رتبه ۱۵۳۴ — فاطیما عبیری
- رتبه ۱۶۲۸ — امیرمحمد فکور حقیقی
- رتبه ۱۶۳۹ — ابوالفضل نیرومند
- رتبه ۱۶۷۸ — سجاد ینکی
- رتبه ۱۶۹۶ — ندا ملکشاهی
- رتبه ۱۷۳۱ — محمدرضا محسنی
- رتبه ۱۷۵۴ — هلیا حاجیلوئی
- رتبه ۱۹۶۶ — مهسا رضایی مقدم
- رتبه ۲۰۱۵ — علی شیرزاد
- رتبه ۲۵۵۹ — سارا حمزه
- رتبه ۲۶۲۵ — زهره مجمعی
- رتبه ۲۷۱۱ — محمد غلامی
- رتبه ۲۷۵۱ — فهیمه سیدآبادی
- رتبه ۲۷۸۱ — سعید شبانی
- رتبه ۲۷۹۴ — مریم بادلی
- رتبه ۲۸۱۰ — هدیه رحیمی
- رتبه ۲۸۸۱ — پارسا جمال امیدی
- رتبه ۳۱۳۳ — صبا شایع ثانی
- رتبه ۳۲۴۴ — هلیا سجادی
- رتبه ۳۳۴۳ — سینا ارزمانی

فصل ۱: جبر و معادله

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی:

سوال ۱ مجموع n جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از رابطه‌ی $S_n = n(7n-3)$ به‌دست می‌آید. مجموع جملات دهم و یازدهم این دنباله کدام است؟

حل: مجموع جملات دهم و یازدهم برابر است با: $S_{11} - S_9$

$$\left.\begin{array}{r} S_{11} = 11(7(11)-3) = 11 \times 74 = 814 \\ S_9 = 9(7(9)-3) = 9 \times 60 = 540 \end{array}\right\} S_{11} - S_9 = 814 - 540 = 274$$

سوال ۲ در یک دنباله‌ی حسابی مجموع 5 جمله‌ی اول 55 و مجموع 5 جمله‌ی آخر 215 و مجموع همه‌ی جملات 351 است. جمله‌ی اول دنباله کدام است؟

حل:
$$\text{مجموع 5 جمله‌ی اول}: \underbrace{t_1}_{\text{جمله‌ی اول}} + \underbrace{(t_1+d)}_{\text{جمله‌ی دوم}} + \underbrace{(t_1+2d)}_{\text{جمله‌ی سوم}} + \underbrace{(t_1+3d)}_{\text{جمله‌ی چهارم}} + \underbrace{(t_1+4d)}_{\text{جمله‌ی پنجم}} = 55$$

$$\text{مجموع 5 جمله‌ی آخر}: \underbrace{t_n}_{\text{جمله‌ی آخر}} + \underbrace{(t_n-d)}_{\text{دو جمله‌ی آخر}} + (t_n-2d) + (t_n-3d) + \underbrace{(t_1+4d)}_{\text{پنج جمله‌ی آخر}} = 215$$

دو معادله را با هم جمع می‌کنیم (dها (قدرنسبت‌ها) از هم کم شوند از بین می‌روند)

$$(t_1+t_n)+(t_1+t_n)+(t_1+t_n)+(t_1+t_n)+(t_1+t_n) = 270$$

$$\Longrightarrow 5(t_1+t_n) = 270 \Rightarrow \boxed{t_1+t_n = 54}$$

$$S_n = \frac{n}{2}[t_1+t_n] \xrightarrow[S_n=351]{\text{طبق گفته‌ی سؤال}} 351 = \frac{n}{2}[54] \Rightarrow \boxed{n = 13}$$

$$\begin{cases} S_5 = 55 \Rightarrow \dfrac{5}{2}[2t_1+4d] = 55 \\ S_8 = 351-215 \Rightarrow \dfrac{8}{2}[2t_1+7d] = 136 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t_1+2d = 11 \xrightarrow{\times(-2)} \\ 2t_1+7d = 34 \xrightarrow{\text{خودش}} \end{cases} \begin{cases} -t_1-4d = -22 \\ 2t_1+7d = 34 \end{cases} \to 3d = 12 \to \boxed{d=4}, \boxed{t_1=3}$$

نکته وقتی‌که جمله‌ی اول رو از ما می‌خواهند باید با پیدا کردن تمامی مجهولات ابتدا از n سپس به d و بعد t را پیدا کنیم.

سوال ۳ اگر مجموع n جمله‌ی نخست از یک دنباله‌ی هندسی به‌صورت $S_n = 3(1-2^n)$ باشد، قدرنسبت این دنباله را به‌دست آورید.

$$S_n = a_1 + a_2 \xrightarrow{n=2} a_1 + a_2 = 3\underbrace{(1-2^{-2})}_{1-\frac{1}{4}} = \frac{9}{4}$$

$$S_1 = a_1 \xrightarrow{n=1} a_1 = 3\underbrace{(1-2^{-1})}_{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

نکته برای پیدا کردن قدرنسبت در دنباله‌های هندسی کافیست متوجه شویم هر جمله به ازای چه مقدار جمله‌ی بعد آن به‌دست می‌آید.

$$a_1 + a_2 = \frac{9}{4} \xrightarrow{a_1=\frac{3}{2}} \frac{3}{2} + a_2 = \frac{9}{4} \to \boxed{a_2 = \frac{3}{4}} \to \text{قدرنسبت } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3/4}{3/2} = \frac{1}{2}$$

یعنی تصاعد به ازای ضرب در $\frac{1}{2}$ جملات بعدی آن به‌دست می‌آید.

سوال ۴ در یک دنباله‌ی هندسی که جملات آن یکی در میان منفی است، جمله‌ی سوم برابر 5 و جمله‌ی هفتم برابر 80 است، مجموع شش جمله‌ی اول این دنباله کدام است؟

حل: $\frac{t_7}{t_3} = \frac{t_1 q^6}{t_1 q^2} = q^4$

$$\frac{a_7}{a_3} = \frac{80}{5} = q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \to \boxed{q = \pm 2} \xrightarrow[\text{پس قابل قبوله}]{\text{جملات یکی درمیان منفی}} \boxed{q = -2}$$

$$\frac{t_3}{t_1} = q^2 \Rightarrow \frac{5}{t_1} = 4 \to \boxed{t_1 = \frac{5}{4}} \to S_6 = \frac{\frac{5}{4}(63)}{-3} = \frac{-105}{4}$$

نکته وقتی‌که میگه جملات یکی در میان منفی است پس قدرنسبت حتماً یک عدد منفی است از طریق جملات سوم و هفتم قدرنسبت را حساب می‌کنیم و سپس از طریق مجموع جملات S_6 را محاسبه می‌کنیم.

سوال ۵ اگر مجموع جملات پنجم، دهم، بیستم یک دنباله‌ی حسابی با جملات متمایز به‌ترتیب جملات اول تا سوم یک دنباله‌ی هندسی با جمله‌ی پنجم 16 باشند، مجموع 10 جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی کدام است؟

حل: فرض کنیم جمله‌ی پنجم a_5 و جمله‌ی دهم a_{10} و جمله‌ی بیستم a_{20} ؛ یعنی a_{20} و a_{10} و a_5 این جملات قراره جملات اول تا سوم دنباله‌ی هندسی باشند. طبق مفهوم به حل می‌پردازیم:

$$a, b, c$$

$$b^2 = ac \qquad a_{10}^2 = a_5 \times a_{20}$$

$$(a_1 + 9d)^2 = (a_1 + 4d)(a_1 + 19d)$$

$$\cancel{a_1^2} + 18a_1d + 81d^2 = \cancel{a_1^2} + 23a_1d + 76d^2 \rightarrow \boxed{5a_1d = 5d^2}$$

$$\rightarrow \begin{cases} d = 0 \rightarrow \text{غقق} \\ d = a_1 \end{cases}$$

$$a_5 = a_1 + 4d \xRightarrow{a_1=d} \boxed{a_5 = 5d} \rightarrow \boxed{a_{10} = 10d} \rightarrow \boxed{a_{20} = 20d}$$

سه جمله‌ی اول یک دنباله هندسی‌اند.

$$t_5 = t_1q^4 \Rightarrow 16 = t_1 \times (2)^4 \longrightarrow \boxed{t_1 = 1}$$

$$S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q} \longrightarrow S_{10} = \frac{1 \times (1-2^{10})}{1-2} = 1023$$

توضیح: ابتدا باید ارتباط بین جملات را به‌دست می‌آوردیم و سپس با پیدا کردن جمله‌ی اول مجموع جملات را حساب می‌کردیم.

سوال ۶ در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول 136 و مجموع شش جمله‌ی اول آن 153 است. جمله‌ی اول چند برابر جمله‌ی پنجم است؟

حل: خب طبق اینکه در هر دنباله‌ی هندسی $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$، بنابراین:

$$S_3=136 \quad S_6=153 \quad \begin{cases} S_3=a_1\times\dfrac{1-q^3}{1-q}=136 \\ S_6=a_1\times\dfrac{1-q^2}{1-q}=153 \end{cases} \Rightarrow \frac{S_3}{S_6}=\frac{136}{153}$$

$$\to \frac{S_3}{S_6}=\frac{1-q^3}{1-q^6}=\frac{1-q^3}{(1-q^3)(1+q^3)}=\frac{8}{9}\to\frac{1}{1+q^3}=\frac{8}{9}$$

$$q^3=\frac{1}{8}\to q=\frac{1}{2} \qquad \xrightarrow{\text{خواسته‌ی سؤال}} \frac{a_1}{a_5}=\frac{a_1}{a_1q^4}=\frac{1}{q^4}=\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=16$$

معادلات درجه دوم

سوال ۷ اگر جواب معـــــــــادله‌ی $x^2+bx+c=0$ از مربع جـــــــــواب‌های معادله‌ی $x^2+6x+1=0$ یک واحد بیشتر باشند، b کدام است؟

حل:

$$x^2+bx+c=0\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-b}{a}=-b\\ x_1x_2=\frac{c}{a}=c\end{cases}$$

$$x^2+6x+1=0 \quad \begin{cases}\alpha+\beta=\dfrac{-b}{a}=-6\\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}=1\end{cases}$$

نکته جواب‌های معـــــــادله $x^2+bx+c=0$ را x_1 و x_2 و جواب‌های معادله $x^2+6x+1=0$ را β,α در نظر می‌گیریم.

چون گفته مربع معادله اول یک واحد بیشتر است داریم:

$$\begin{cases}x_1=\alpha^2+1\\ x_2=\beta^2+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=\alpha^2+\beta^2+2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2=36\\ \Rightarrow x_1+x_2=36=-b\Rightarrow \boxed{b=-36}\end{cases}$$

سوال ۸ اگر α و β جواب‌های معادله درجه دوم $3x^2 + x - 1 = 0$ باشند حاصل عبارت $\frac{3\alpha^2+\alpha-5}{6\beta^2+2\beta-4}$ کدام است؟

حل: چون‌که α و β صفرهای معادله‌اند پس در معادله صدق می‌کنند. بنابراین داریم:

$$3\alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را با}(-4)\text{ جمع می‌کنیم}} 3\alpha^2 + \alpha - 1 - 4 = -4$$

$$\boxed{\to 3\alpha^2 + \alpha - 5 = -4}$$

از معادله داده شده به کمک α و β صورت و مخرج کسر را می‌سازیم.

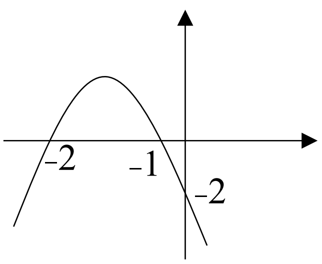
$$3\beta^2 + \beta - 1 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله}(\times 2)} 6\beta^2 + 2\beta - 2 = 0 \xrightarrow{\text{طرفین معادله را با}(-2)\text{ جمع می‌کنیم}}$$

$$6\beta^2 + 2\beta - 2 - 2 = -2 \to 6\beta^2 + 2\beta - 4 = -2 \xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} \frac{3\alpha^2 + \alpha - 5}{6\beta^2 + 2\beta - 4}$$

$$= \frac{-4}{-2} = 2$$

سوال ۹ نمودار $y = ax^2 + bx + c$ به‌صورت مقابل است. مقدار $a - 2b + c$ کدام است؟

در واقع نقاط عرض از مبدأ را برای به‌دست آوردن a به ما داده که بتوانیم بفهمیم سهمی روبه‌بالاست یا پایین.



حل: صفرهای تابع درجـــــه دوم $y = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -1$ و $x = -2$ پس می‌توان معادله را به این‌صورت دید:

$$y = a(x+1)(x+2)$$

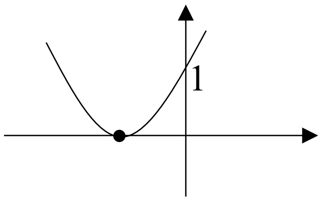
همچنین تابع از نقاط $(0,-2)$ می‌گذرد. پس این مختصات در تابع صدق می‌کند، یعنی: $y = a(x+1)(x+2) \xrightarrow[x=0]{y=-2} a(0+1)(0+2) = -2 \to \boxed{a = -1}$

$$\to y = -(x+1)(x+2) = -x^2 - 3x - 2 \to \begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{خواسته سؤال}} a - 2b + c = -1 - 2(-3) + (-2) = -1 + 6 - 2 = 3$$

سوال ۱۰ اگر نمودار سهمی $f(x) = 2x^2 + ax + b - 1$ به‌صورت مقابل باشد، حاصل $f(\sqrt{2})$ کدام است؟

حل: 1) طبق نمودار، سهمی از نقطه‌ی $(0,1)$ می‌گذرد. پس داریم:



$$1 = 2(0)^2 + a(0) + b - 1 \to \boxed{b = 2}$$

2) طبق نمودار سهمی، معادله $f(x) = 0$ ریشه مضاعف دارد. پس $\Delta = 0$ است و داریم: $f(x) = 2x^2 + ax + 1$

$$\xrightarrow{\Delta=0} a^2 - 8 = 0 \to a = \pm 2\sqrt{2}$$

3) از طرفی چون‌که طول رأس سهمی منفی است پس $\frac{-a}{4} < 0$ و داریم $a > 0$ و در نتیجه $a = \pm 2\sqrt{2}$

$$f(x) = 2x^2 + 2\sqrt{2} + 1 \xrightarrow{f(\sqrt{2})} 4 + 4 + 1 = 9$$

سوال ۱۱ اگر حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $(m-1)x^2 + 6x + 4 = m$ برابر 2 باشد، آنگاه مجموع مربعات این ریشه‌ها را به‌دست آورید.

خود سؤال گفته حاصل ضرب ریشه‌ها یعنی $\frac{c}{a}$ آن را حساب می‌کنیم تا m به‌دست آید.

حل: $(m-1)x^2 + 6x + 4 - m = 0 \xrightarrow{\alpha\beta = \frac{c}{a}} \frac{4-m}{m-1} = 2$

$$\to 4 - m = 2m - 2 \Rightarrow 3m - 6 = 0 \to \boxed{m = 2}$$

با قرار دادن m معادله به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 36 - 8 > 0 \to 28 > 0 \to$ پس دو ریشه داریم

مجموع مربعات ریشه‌ها یعنی اگر α و β ریشه باشند توان 2 باشند و جمع شده یعنی:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P \xrightarrow[P=\frac{c}{a}=2]{S=-\frac{b}{a}=-6} 36 - 4 = 32$$

سوال ۱۲ ریشه‌های معادله درجه دوم $2x^2+ax+b=0$ قرینه و معکوس ریشه‌های معادله $x^2-2x-2=0$ هستند. حاصل $a+b$ کدام است؟

حل: α و β را ریشه‌های معادله $x^2-2x-2=0$ فرض کنیم.

در این‌صورت ریشه‌های معادله $2x^2+ax+b=0$ باید قرینه و معکوس α و β شود، یعنی به‌صورت: $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ پس داریم:

$$x^2-2x-2=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}S=\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=2\\P=\alpha\beta=-2\end{cases}\Rightarrow S'=-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=-\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)=-\left(\frac{2}{-2}\right)=1$$

$$P'=\left(-\frac{1}{\alpha}\right)\left(-\frac{1}{\beta}\right)=\frac{1}{\alpha\beta}=-\frac{1}{2}\to x^2-S'x+P=0\to$$

$$x^2-x-\frac{1}{2}=0\xrightarrow{\times(2)}2x^2-2x-1=0\to a+b=-2-1=-3$$

معادلات گویا و گنگ

سوال ۱۳ مجموعه جواب‌های معادله $3x-2x^2=\sqrt{6x-4x^2-1}$ کدام است؟

برای حل معادلات گویا ابتدا باید سعی کنیم مخرج کسرها را از بین	برای حل معادلات گنگ باید رادیکال را یک‌طرف معادله قرار دهیم و بقیه عبارت را سمت دیگر و با به توان رساندن رادیکال آن را از بین ببریم.

می‌توان

$3x-2x^2$ را به t تبدیل کرد. در عبارت زیر رادیکال اگر از 2 فاکتور بگیریم همـــان $3x-2x^2$ داریم:

$$3x-2x^2=\sqrt{2(3x-2x^2)-1}\xrightarrow{3x-2x^2=t}t=\sqrt{2t-1}\xrightarrow{\text{توان }2}t^2=2t-1$$

$$\to t^2-2t+1=0\to(t-1)^2=0\to t=1\xrightarrow{t=3x-2x^2}3x-2x^2=1$$

$$3x-2x^2-1=0\xrightarrow{\text{طرفین }\times(-1)}2x^2-3x+1=0\to(x-1)(2x-1)=0$$

$$\to x=1\,,x=\frac{1}{2}\to \text{مجموع جواب‌ها}:1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

سوال ۱۴ حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله $\sqrt{36x^2-24x+4}=2x+4$ کدام است؟

حل:

$$\sqrt{36x^2-24x+4}=2x+4 \to \sqrt{4\underbrace{(9x^2-6x+1)}_{(3x-1)^2}}=2x+4$$

$$\to \cancel{2}\sqrt{(3x-1)^2}=\cancel{2}(x+2) \to |3x-1|=x+2 \xrightarrow[u=\pm a]{|u|=a}$$

$$\begin{cases}3x-1=x+2\\3x-1=-(x+2)\end{cases} \to \begin{cases}2x=3\to x=\dfrac{3}{2}\\4x=-1\to x=-\dfrac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow x_1.x_2=-\frac{3}{8}$$

سوال ۱۵ مجموع جواب‌های معادله $x=\sqrt{3x-2}$ کدام است؟

حل:

$$x=\sqrt{3x-2}\xrightarrow{\text{توان } 2}x^2=3x-2\to x^2-3x+2=0\to$$

$(x-1)(x-2)=0\to\begin{cases}x=1\\x=2\end{cases}$ مجموع جواب‌ها : $1+2=3$

سوال ۱۶ تعداد جواب‌های معادله $\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x+3}=0$ کدام است؟

مجموع دو عبارت رادیکالی با فرجه زوج صفر است. پس معادله زمانی جواب دارد که هر دو رادیکال همزمان صفر شوند.

$$x^2+3x=0\Rightarrow x(x+3)=0\to\begin{cases}x=0\\x=-3\end{cases}$$

$$x^2+4x+3=0\to(x+1)(x+3)=0\to\begin{cases}x=0\\x=-3\end{cases}$$

پس تنها $x=-3$ می‌تواند جواب معادله باشد.

سوال ۱۷ اگر معادله $\frac{x-4}{x^2+3x}=\frac{m-3}{x}$ فاقد جواب حقیقی باشد m کدام می‌تواند باشد؟

$$\frac{m-3}{x}=\frac{x-4}{x^2+3x}\rightarrow mx^2+3mx-3x^2-9x=x^2-4x$$

$$\rightarrow (m-4)x^2+(3m-5)x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\dfrac{-3m+5}{m-4}\end{cases}$$

دامنه معادلات گویا برابر $\mathbb{R}-\{$ریشه‌های مخرج$\}$ است.

دامنه این معادله $\mathbb{R}-\{0,-3\}$ است و از طرفی دیگر چون معادله هیچ جوابی ندارد، $x=\frac{-3m+5}{m-4}$ باید برابر با $x=-3$ یا $x=0$ باشد.

$\frac{-3m+5}{m-4}=-3\rightarrow -3m+5=-3m+12\rightarrow$ جواب ندارد

$$\frac{-3m+5}{m-4}=0\rightarrow -3m+5=0\rightarrow \boxed{m=\frac{5}{3}}$$

همین‌طور اگر $m-4=0$ باشد یعنی $m=4$ پس معادله جواب حقیقی ندارد.

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

سوال ۱۸ مجموعه جواب معادله $|2+x-x^2|+|x+2|=x^2$ با شرط $x<1$، شامل چند عدد صحیح است؟

اگر $|2+x-x^2|=a$ و $|x+2=b|$ باشد

آن‌گاه $a+b=\underbrace{x^2}_{\text{همواره مثبت}}$ در نتیجه:

می‌دانیم $|a|=|-a|$

$\leftarrow |a|+|b|=|a+b|$

این تساوی زمانی برقرار است که $ab\geq 0$

$$\underbrace{|x^2-x-2|}_{a}+\underbrace{|x+2|}_{b}=\underbrace{|x^2\cancel{-x}-2\cancel{+x}+2|}_{a+b}=x^2$$

$$\xrightarrow{ab\geq 0}(x^2-x-2)(x+2)\geq 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)(x+2)\geq 0$$

$$\xrightarrow[\text{شرط سؤال}]{x<1}(x+1)(x+2)\leq 0\Rightarrow -2\leq x\leq -1$$

پس مجموعه جواب شامل 2 عدد صحیح است.

سوال ۱۹ مساحت محدود بین نمودارهای دو تابع $f(x) = |x-3| + |x+1|$ و $g(x) = 6$ را بیابید.

حل: یادآوری: $|x-a| + |x-b| = k$ فرمول تابع گلدانی است.

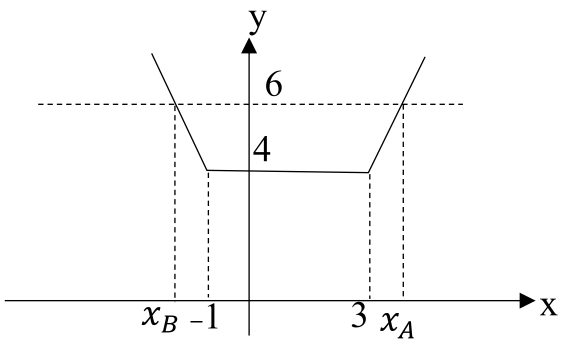
$$f(x) = \begin{cases} x-3+x+1 & ; \quad x \geq 3 \\ -x+3+x+1 & ; \quad -1 < x < 3 \\ -x+3-x-1 & ; \quad x \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 & x \geq 3 \\ 4 & 1 < x < 3 \\ -2x+2 & x \leq -1 \end{cases}$$

$$2x - 2 = 6 \Rightarrow \boxed{x_A = 4}$$

$$-2x + 2 = 6 \Rightarrow \boxed{x_B = -2}$$

$$S_{\text{ذوزنقه}} = \frac{(4+6)\times 2}{2} = 10$$

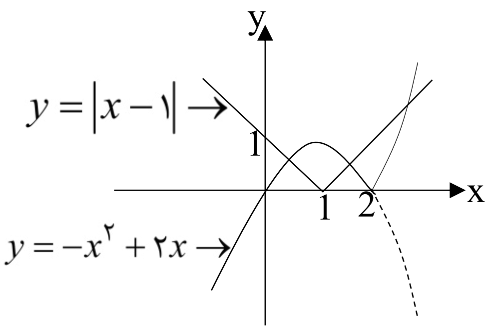
$$\boxed{\text{مساحت ذوزنقه} = \frac{\text{ارتفاع} \times \text{مجموع دو قاعده}}{2}}$$



سوال ۲۰ معادله $x|x-2| = |x-1|$ چند ریشه مثبت دارد؟

حل: از روش هندسی استفاده می‌کنیم (روش هندسی برای زمانی است که تعداد ریشه‌ها را از ما بخواهند می‌توانیم استفاده کنیم.)

$$y = x|x-2| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \\ -x^2 + 2x & x < 2 \end{cases}$$



سه ریشه دارد و هر سه ریشه مثبت هستند.

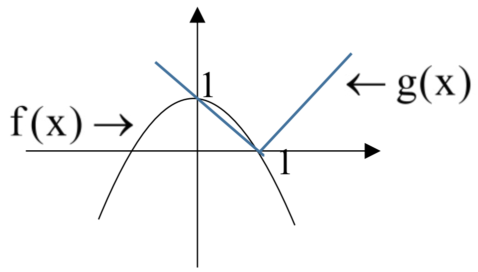
چون‌که قدرمطلق داره تصویر قرینه میشه بالا

سوال ۲۱ معادله $\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}+x^{۲}=۱$ چند جواب دارد.

حل: عبارت $\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}$ یک عبارت مربع است.

$$\sqrt{(x-۱)^{۲}}+x^{۲}=۱\rightarrow\sqrt{(x-۱)^{۲}}=۱-x^{۲}\rightarrow|x-۱|=۱-x^{۲}$$

نمودار دو تابع $f(x)=۱-x^{۲}$ و $g(x)=|x-۱|$ را رسم می‌کنیم. (روش هندسی)



f و g در دو نقطه به طول‌های $x=۰$ و $x=۱$ متقاطعند پس معادله دو جواب دارد.

سوال ۲۲ فاصله‌ی دو نقطه روی محور yها از خط $y+۳x=۵$ برابر $۳\sqrt{۱۰}$ است. طول پاره‌خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند کدام است؟

حل: طول پاره‌خط از فرمول مقابل محاسبه می‌شود: $AB=\sqrt{(x_A-x_B)^{۲}+(y_A-y_B)^{۲}}$

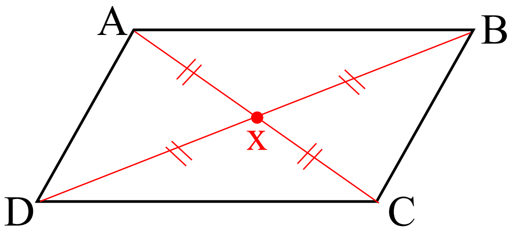
و فرمول نقطه از خط از فرمول مقابل: $d=\frac{|ax_{۰}+by_{۰}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}$ مختصات مورد نظر را به صورت $A(۰,\alpha)$ در نظر می‌گیریم کافیست فاصله‌ی این نقطه تا خط $y+۳x-۵=۰$ را برابر $۳\sqrt{۱۰}$ قرار دهیم. بنابراین:

$$d=\frac{|ax_{۰}+by_{۰}+c|}{\sqrt{a^{۲}+b^{۲}}}=\frac{|۳(۰)+\alpha(۱)-۵|}{\sqrt{۱^{۲}+۳^{۲}}}=\frac{|\alpha-۵|}{\sqrt{۱۰}}$$

$$d=۳\sqrt{۱۰}=\frac{\alpha-۵}{\sqrt{۱۰}}\Rightarrow۳۰=|\alpha-۵|\rightarrow\begin{cases}\alpha-۵=۳۰\\\alpha-۵=-۳۰\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\alpha_{۱}=۳۵\\\alpha_{۲}=-۲۵\end{cases}\rightarrow\begin{matrix}A(۰,۳۵)\\B(۰,-۲۵)\end{matrix}$$

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^{۲}+(y_A-y_B)^{۲}}=\sqrt{۰^{۲}+(۳۵+۲۵)^{۲}}=۶۰$$

سوال ۲۳ اگر $A(۱,۲), B(-۱,۳), C(۲,-۱)$ باشد، مختصات نقطه‌ی D کدام باشد تا چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشند.

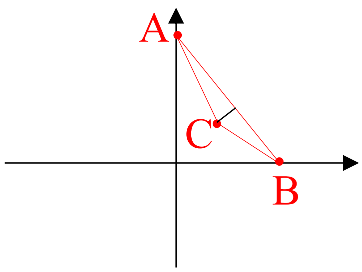


حل: قطرهای متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند یعنی وسط پاره‌خط AC وسط پاره‌خط BD نیز هست.

$$\text{مختصات وسط پاره‌خط}: \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{۲} = \dfrac{x_B + x_D}{۲} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{۲} = \dfrac{y_B + y_D}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۱ + ۲ = -۱ + x_D \\ ۲ + (-۱) = ۳ + y_D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_D = ۴ \\ y_D = -۲ \end{cases} \Rightarrow D(۴,-۲)$$

سوال ۲۴ نقاط $A(۰,۳), B(۲,۰)$ و $C(۱,۱)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟



حل: ابتدا با توجه به نقاط شکل را رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل نقاط AB را می‌یابیم سپس فاصله‌ی نقطه‌ی C را از آن به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{cases} A(۰,۳) \\ B(۲,۰) \end{cases} \Rightarrow AB \text{ معادله‌ی خط :}$$

$$y - ۰ = \frac{۳ - ۰}{۰ - ۲}(x - ۲) \to y = -\frac{۳}{۲}(x - ۲) \Rightarrow \boxed{۲y = -۳x + ۶}$$

فاصله‌ی رأس C را از این ضلع می‌یابیم $۲y + ۳x - ۶ = ۰$: معادله AB و $C(۱,۱)$

$$CH = \frac{|۲(۱) + ۳(۱) - ۶|}{\sqrt{۲^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۱۳}}$$

فصل ۲: تابع

آشنایی بیشتر با توابع

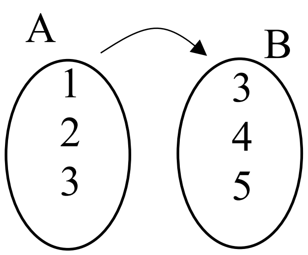
سوال ۲۵ از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{۱,۲\}$ چند تابع می‌توان نوشت به‌طوری که شامل $(a,۱)$ باشد؟

حل: در این سؤال چون‌که عضو a استفاده شد پس $۲^۲$ تابع می‌توان نوشت.

نکته‌ی سؤال: اگه A مجموعه m عضوی و B مجموعه n عضوی باشد تعداد توابع از A به B برابر است با: n^m

در این سؤال چون‌که a استفاده شده پس $۲^۲$ تابع می‌توان نوشت.

سوال ۲۶ چند تابع از مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعه $B=\{۳,۴,۵\}$ می‌توان تعریف کرد به‌طوری‌که به هیچ عضوی از A، عضو برابرش را نسبت ندهیم؟



حل: برای عدد 1 از مجموعه A، 3 انتخاب $\{۳,۴,۵\}$

برای عدد 2 از مجموعه A، 3 انتخاب $\{۳,۴,۵\}$

برای عدد 3 از مجموعه A، 2 انتخاب $\{۴,۵\}$

پس طبق اصل ضرب داریم: $۳\times۳\times۲=۱۸$

سوال ۲۷ اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ مساوی باشند، مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۲x^{۲}-a}{x-۳} & ; \ x\neq ۳\\ bx-۶ & ; \ x=۳\end{cases} \ , \ g(x)=۲x+b$$

حل: در اینجا به ازای $x=۳$ و $x=۰$ در تساوی مقدار a و b را تعیین می‌کنیم.

$$f(۳)=g(۳)\Rightarrow ۳b-۶=۶+b\Rightarrow \boxed{b=۶}$$

$$f(۰)=g(۰)\Rightarrow \frac{a}{۳}=۶\Rightarrow \boxed{a=۱۸}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{۱۸}{۶}=۳\xrightarrow{\text{خواسته سؤال}}$$

چون‌که $f(x)=g(x)$ به ازای هر x مقدار دو تابع برابر است.

سوال ۲۸ چه تعداد از جملات زیر درست می‌باشد؟

	ص	غ
الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آن‌ها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.		☑

ب) برد و هم‌دامنه تابع می‌توانند یکی باشند.

ج) هم‌دامنه تابع زیرمجموعه‌ای از برد آن است.

د) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $(-۳,۲)$ و برد آن $(۰,۴)$ است.

حل: جواب الف) غلط است چونکه دو تابع دامنه‌های یکسان و برد یکسان می‌تواند داشته باشند اما مساوی نباشند مثل

$$f(x)=|x|,f(x)=x^{۲}$$

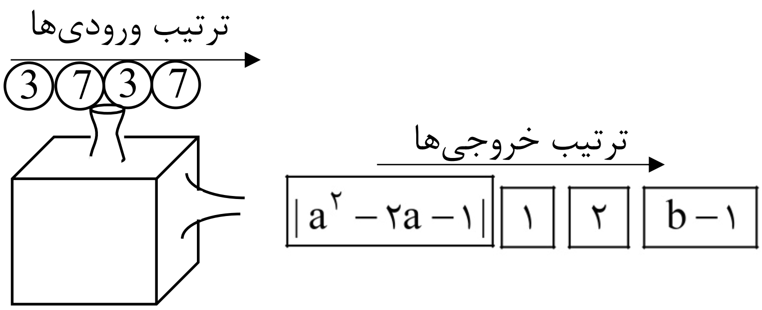
جواب ب) صحیح است.

جواب ج) غلط است چون‌که برد تابع زیر مجموعه هم‌دامنه می‌باشد.

جواب د) صحیح است.

سوال ۲۹ شکل روبه‌رو بیانگر یک ماشین است که ورودی‌هایی را تحویل گرفته و متناظراً خروجی‌هایی را تحویل داده است.

اگر این ماشین یک تابع باشد، حداکثر مقدار ممکن برای ab کدام است؟



حل: طبق تعریف تابع به عنوان یک ماشین می‌دانیم باید به ازای هر ورودی، دقیقاً یک خروجی وجود داشته باشد.

پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{۷}\Rightarrow\boxed{b-۱}\\ \boxed{۷}\Rightarrow\boxed{۱}\end{array}\right\}\to b-۱=۱\to\boxed{b=۲}$$

$$\left.\begin{array}{l}\boxed{۳}\Rightarrow\boxed{۲}\\ \boxed{۳}\Rightarrow\boxed{|a^۲-۲a-۱|}\end{array}\right\}\Rightarrow|a^۲-۲a-۱|=۲$$

تذکر: $|u|=a\to u=\pm a$

$$a^۲-۲a-۱=۲\to a^۲-۲a-۳=۰\Rightarrow(a-۳)(a+۱)=۰\Rightarrow\boxed{a=۳}\ \text{یا}\ \boxed{a=-۱}$$

$$a^۲-۲a-۱=-۲\to a^۲-۲a+۱=۰\Rightarrow(a-۱)^۲=۰\Rightarrow\boxed{a=۱}$$

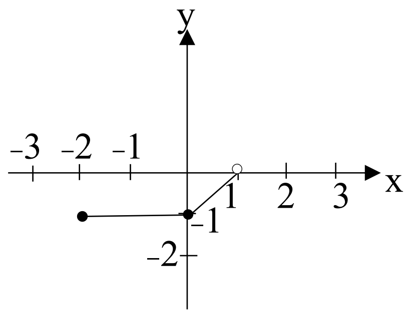
در نتیجه حداکثر مقدار a خواسته شده در بین aهای موجود $a=۳$ را انتخاب می‌کنیم.

سوال ۳۰ نمودار تابع $y=x\left[\frac{x}{۲}\right]-|x-۱|$ در بازه $[-۲,۱]$ محور xها را در چند نقطه قطع می‌کند. ([ ] نماد جزءصحیح است.)

حل: با توجه به دامنه داده شده داریم:

$$-۲\le x<۱\to\frac{-۲}{۲}\le\frac{x}{۲}<\frac{۱}{۲}\to-۱<\frac{x}{۲}<\frac{۱}{۲}\to\left[\frac{x}{۲}\right]=-۱$$

پس معادله به شکل مقابل است.



$$y = x(-۱) - (-(x-۱)) = -x + x - ۱ = \underline{-۱}$$

$$۰ \leq x < ۱ \xrightarrow[\text{مثل بالا}]{\left[\frac{x}{2}\right]=0}$$

$$y = x(۰) - (-(x-۱)) = ۰ + x - ۱ = \underline{x-۱}$$

بنابراین محور xها را قطع نمی‌کند.

سوال ۳۱ اگر دو تابع $f(x) = ۲x + ۳$ و $g(x) = \begin{cases} \dfrac{۲x^۲ + x - ۳}{x-۱} & x \neq b \\ a & x = b \end{cases}$ برابر باشند، $a + b$ کدام است؟

شرط برابری دو تابع هم‌دامنه بودن است. در توابع کسری باید به ریشه مخرج توجه شود.

حل: ضابطه g را به‌صورت مقابل می‌نویسیم

$$\begin{cases} \dfrac{(۲x+۳)(x-۱)}{x-۱} & x \neq b \\ a & x = b \end{cases}$$

نکته مهم اینجاست که اگر b در ضابطه‌ی بالا عددی غیر از یک باشد آنگاه عدد یک مخرج را صفر می‌کند و در نتیجه دامنه دو تابع برابر نمی‌شود. پس b باید یک باشد از طرفی دو تابع در $x = ۱$ برابر هستند پس:

$$\left.\begin{matrix} g(۱) = a \\ f(۱) = ۲(۱) + ۳ = ۵ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{a = ۵}$$

خواسته سؤال : $a + b = ۵ + ۱ = ۶$

سوال ۳۲ اگر عبارت $\sqrt{-x^{۲}-۳x+۱۰}$، تعریف شده و برابر عددی حقیقی باشد، عبارت $\left[\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}\right]$ چه مقادیری می‌تواند بگیرد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

عبارت زیر رادیکال با فرجه زوج نباید منفی باشد.

حل: برای آنکه $\sqrt{-x^{۲}-۳x+۱۰}$، عدد حقیقی باشد، باید زیر رادیکال عددی نامنفی باشد.

$$-x^{۲}-۳x+۱۰\geq ۰\Rightarrow x^{۲}+۳x-۱۰\leq ۰\Rightarrow (x-۲)(x+۵)\leq ۰$$
$$u\leq a\Rightarrow -a\leq u\leq a\rightarrow -۵\leq x\leq -۲$$

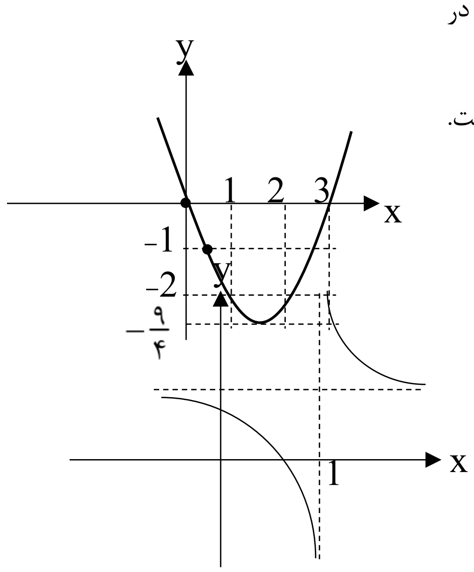
حالا باید محدوده عبارت داخل جزء صحیح را بسازیم:

$$-۵\leq x\leq -۲\xrightarrow{\times(\frac{۱}{۳})}\frac{-۵}{۳}\leq\frac{x}{۳}\leq\frac{۲}{۳}\xrightarrow{+(-\frac{۱}{۳})}-۲\leq\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}\leq\frac{۱}{۳}\Rightarrow$$

$\left[\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}\right]=-۲$ یا 1- یا 0

سوال ۳۳ معادله‌ی $\left[x^{۲}-۳x\right]=x^{۲}-۳x$ دارای چند جواب در بازه $[۰,۲]$ است؟**حل:** در شکل مقابل نمودار $x^{۲}-۳x$ تابع رسم شده است.

معادله $\left[x^{۲}-۳x\right]=x^{۲}-۳x$ متناظر است با مقادیر صحیح $x^{۲}-۳x$، با توجه به بازه $[۰,۲]$ به 4 جواب خواهیم رسید. به ازای $x=۰$ ، $x=۱$ ، $x=۲$ و عددی بین صفر و یک مقدار $x^{۲}-۳x$ عدد صحیح خواهد بود.



سوال ۳۴ اگر نمودار تابع گویای $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ به‌صورت زیر باشد، a و b را به‌دست آورید.

حل: با توجه به شکل تابع $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ از مبدأ مختصات می‌گذرد پس نقطه‌ی $(۰,۰)$ در ضابطه‌ی f صدق می‌کند.

$$f(x)=\frac{x+a}{x+b}\xrightarrow{(۰,۰)\in f}۰=\frac{۰+a}{۰+b}\Rightarrow \boxed{a=۰}\Rightarrow f(x)=\frac{x}{x+b}$$

از طرفی با توجه به شکل $x=۱$ در دامنه f قرار ندارد. پس ریشه‌ی مخرج $x=۱$ است.

$$x+b\overset{x=۱}{=}۰\Rightarrow \boxed{b=-۱}$$

سوال ۳۵ اگر $x=۱$ جواب معادله $|x+۲|-\sqrt{a-x}=۱$ باشد، این معادله چند جواب دیگر دارد.

حل: طبق گفته‌ی سؤال $x=۱$ یک جواب معادله است. پس باید در معادله صدق کند.

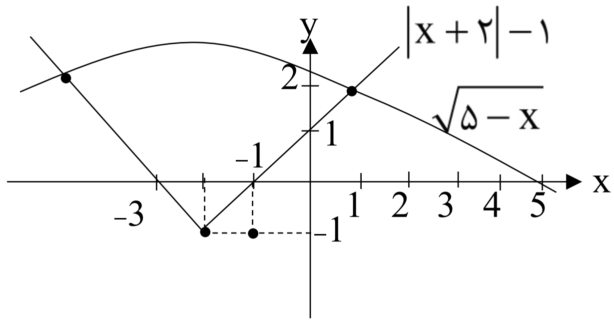
$$|x+۲|-\sqrt{a-x}=۱\xrightarrow{x=۱}|۳|-\sqrt{a-۱}=۱\rightarrow\sqrt{a-۱}=۲\xrightarrow{\text{توان 2}}$$

$$a-۱=۴\rightarrow\boxed{a=۵}$$

پس معادله به‌صورت $|x+۲|-\sqrt{۵-x}=۱$ خواهد بود.

برای پیدا کردن تعداد نقاط برخورد از روش هندسی استفاده می‌کنیم. داریم:

در دو جا برخوردارند.



وارون تابع

سوال ۳۶ نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۲x+۱}-\sqrt{x^{۲}-۱۰x+۲۵}$ در بازه $[a,b]$ وارون‌پذیر است.
بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

تذکر: $x^{۲}+۲x+۱=(x+۱)^{۲}$
$x^{۲}-۱۰x+۲۵=(x-۵)^{۲}$

حل:

$$f(x)=|x+۱|-|x-۵|=\begin{cases} ۶ & x>۵ \\ ۲x-۴ & -۱\le x\le ۵ \\ -۶ & x<-۱ \end{cases}$$

پس بزرگترین بازه‌ای که تابع در آن یک‌به‌یک است بازه $[-۱,۵]$ است. درنتیجه :

$$Max(b-a)=۵-(-۱)=۶$$

سوال ۳۷ اگر تابع $g(x)=\sqrt{x+۱}+b$ وارون تابع $f(x)=x^{۲}+۶x+a$ در بازه $[-۳,+\infty)$ باشد
مقدار $a+b$ کدام است؟

حل: نقشه راه: وارون تابع $g(x)$ را مشخص می‌کنیم و با قرار دادن آن با $f(x)$ مقادیر a و b را می‌یابیم.

$$y=\sqrt{x+۱}+b\rightarrow x=y^{۲}-۲by+b^{۲}-۱$$

$$\rightarrow g^{-۱}(x)=x^{۲}-۲bx+b^{۲}-۱\xrightarrow{\text{این عبارت برابر با } f(x)}$$

$$x^{۲}-۲bx+b^{۲}-۱=x^{۲}+۶x+a\rightarrow -۲b=۶\rightarrow \boxed{b=-۳}$$

$$b^{۲}-۱=a\xrightarrow{b=-۳}\boxed{a=۸}\quad a+b=۸-۳=۵$$

سوال ۳۸ تابع $a<0, f(x)=ax+b$ مفروض است. اگر $f^{-1}(x)=f(x)$ باشد مجموعه مقادیر b کدام است؟

حل: $f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ $\quad y=ax+b \to y-b=ax \to x=\frac{y-b}{a}$

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow ax+b=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$$

$$\begin{cases} a=\frac{1}{a} \to a^2=1 \xrightarrow{a<0} \boxed{a=-1} \\ b=-\frac{b}{a} \xrightarrow{a=-1} b=\frac{-b}{(-1)} \Rightarrow \boxed{b=b} \end{cases}$$

بنابراین به ازای هر مقدار دلخواه b برقرار است.

سوال ۳۹ اگر $f(x-1)=\frac{x^2-1}{x+1}$ باشد مقدار $f^{-1}(4)$ کدام است؟

حل: ابتدا ضابطه $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x-1)=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}=\frac{(x-1)(x-1+2)}{(x-1+2)}$$

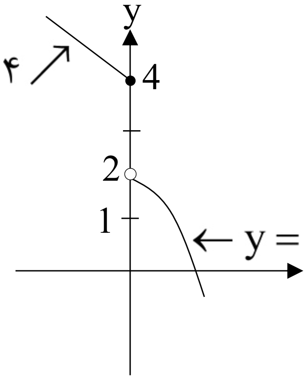
$$\overset{x-1=t}{=} f(t)=\frac{t(t+2)}{t+2} \Rightarrow f(x)=\frac{x(\cancel{x+2})}{\cancel{x+2}}=x, x\neq -2$$

هدف از سؤالات وارون به‌طورکلی به‌دست آوردن تابع و همچنین معکوس تابع است که در این سؤال پس از به‌دست آوردن تابع وارون باید مقدار را جایگذاری کنیم.

چون‌که $f(x)=x$ است پس به ازای هر $x\neq 2$ داریم $f^{-1}(x)=x$

$$f^{-1}(x)=x \xrightarrow{x=4} \boxed{f^{-1}(4)=4}$$

سوال ۴۰ تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+a & x>۰\\ -x+۴ & x\leq ۰\end{cases}$ به ازای چند مقدار طبیعی a، یک‌به‌یک است.

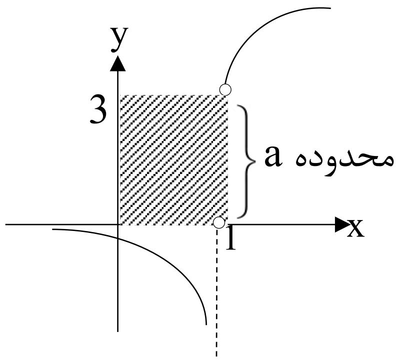


حل: نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

برای آنکه تابع یک‌به‌یک باشد باید $a\leq ۴$. پس a چهار مقدار طبیعی 4، 3، 2 و 1 را می‌تواند اختیار کند.

سوال ۴۱ اگر تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+۸} & x>۱\\ a & x=۱\\ \dfrac{۱}{x-۱} & x<۱\end{cases}$ یک‌به‌یک باشد

برای a چند مقدار صحیح وجود دارد؟



حل: با توجه به نمودار تابع a می‌تواند مقادیر زیر را اختیار کند:

$$۰\leq a\leq ۳\Rightarrow a=\{۰,۱,۲,۳\}$$

نکته برای یک‌به‌یک شدن نباید در برد توابع شاخه‌ها اشتراکی داشته باشند.

سوال ۴۲ اگر $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۷}$ و $g=\{(۲,۱),(-۱,۰),(۱,۳),(۶,۰)\}$ ، آنگاه حاصل $f^{-۱}(۲g^{-۱}(۳))$ کدام است؟

حل: از آنجا که $(۱,۳)\in g$ بنابراین $(۳,۱)\in g^{-۱}$ در نتیجه:

$$f^{-۱}(۲g^{-۱}(۳))=f^{-۱}(۲)=\sqrt{۲+۷}=۳$$

سوال ۴۳ اگر وارون تابع با ضابطه $f(x)=x^۲-mx+۱$ از نقطه $(-m,-۱)$ بگذرد مقدار m را به‌دست آورید.
$D_f=(-\infty,-۱]$

حل: هرگاه وارون تابع f از نقطه (a,b) بگذرد تابع f نیز از نقطه (b,a) می‌گذرد. بنابراین:

$$(-m,-۱)\in f^{-۱}\Rightarrow(-۱,-m)\in f$$
$$f(x)=x^۲-mx+۱\Rightarrow f(-۱)=(-۱)^۲+m(-۱)+۱=-m$$
$$\Rightarrow ۱+m+۱=-m\to ۲m=-۲\Rightarrow \boxed{m=-۱}$$

اعمال روی تابع

سوال ۴۴ اگر $f=ax+b$ و $ff(x)=۴x+۳$ آنگاه $f(-۲)$ کدام است؟ $(a>۰)$

حل:
$$\begin{cases}f(f(x)=a(ax+b)+b=a^۲x+b(a+۱)(*)\\ f(f(x)=۴x+c\ (**)\end{cases}$$

با متحد قرار دادن دو طرف خواهیم داشت:

$$\xrightarrow{*\equiv**}\begin{cases}a^۲=۴\\ b(a+۱)=۳\end{cases}\xrightarrow{a>۰}a=۲\ ,\ b=۱\Rightarrow f(x)=۲x+۱\Rightarrow f(-۲)=-۳$$

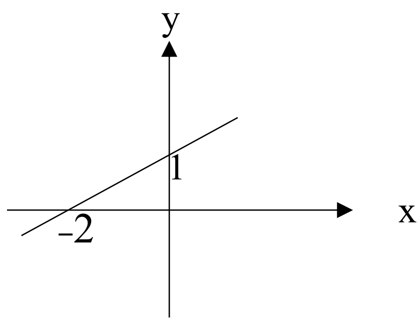
سوال ۴۵ اگر $f(x)=\sqrt{x+۵}$، $g(x)=\sqrt{۵-x}$ و $(f.g)(a)=۳$ باشد برای a چند مقدار متمایز وجود دارد؟

نقشه راه: $(f\cdot g)(u)=f(u)\times g(u)$

حل: $(f.g)(a)=۳\Rightarrow f(a)\times g(a)=۳\Rightarrow \sqrt{a+۵}\times\sqrt{۵-a}=۳$

$\Rightarrow\sqrt{۲۵-a^{۲}}=۳\Rightarrow ۲۵-a^{۲}=۹\Rightarrow \boxed{a=\pm۴}$ هر دو قابل قبول‌اند.

سوال ۴۶ نمودار تابع f به‌صورت زیر است حاصل $fof(۱۰)$ کدام است؟



حل: ابتدا معادله خطی f را می‌نویسیم:

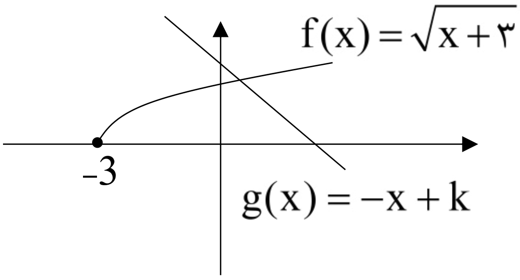
به این منظور شیب را پیدا می‌کنیم.

شیب خط $m=\frac{۱-۰}{۰-(-۲)}=\frac{۱}{۲}$

معادله خط : $y-۱=\frac{۱}{۲}(x-۰)\Rightarrow y=\frac{۱}{۲}x+۱\xrightarrow{x=۱۰}y=۵+۱=۶$

$fof(۱۰)=f(f(۱۰))=f(۶)=\frac{۶}{۲}+۱=۴\Rightarrow fof(۱۰)=۴$

سوال ۴۷ نمودار f و g به‌صورت مقابل است اگر $fog(-۲) = ۳$ باشد مقدار تابع $go(f+g)$ در $x = -k + ۲$ کدام است؟



حل: با توجه به اینکه $fog(-۲) = ۳$ داریم:

$$\left.\begin{matrix} f(g(-۲)) = ۳ \\ g(-۲) = ۲ + k \end{matrix}\right\} \to f(k+۲) = ۳ \Rightarrow \sqrt{k+۲+۳} = ۳$$

$$\Rightarrow k + ۵ = ۹ \Rightarrow k = ۴ \Rightarrow g(x) = -x + ۴$$

مقدار تابع $gof(f+g)$ در $x = -۴ + ۲ = -۲$ برابر است با:

$$(f+g)(-۲) = f(-۲) + g(-۲) = \sqrt{-۲+۳} + ۲ + ۴ = ۷$$

$$go(f+g)(-۲) = g(۷) = -۷ + ۴ = -۳$$

سوال ۴۸ اگر توابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+۲} & x \geq ۳ \\ x+۲ & x < ۳ \end{cases}$ و باشند حاصل $[fog(x)]$ در نقطه $x = g(\frac{۱}{۳})$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است)

حل:

$$x = g(\frac{۱}{۳}) = \frac{۱}{\frac{۱}{۳}} = ۳ \Rightarrow \boxed{x = ۳}$$

$$\left.\begin{matrix} fog(۳) = f(g(۳)) \\ g(۳) = ۳^۲ - ۱ = ۸ \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(g(۳)) = f(۸) = \sqrt{۸+۲} = \sqrt{۱۰} \Rightarrow [fog(۳)] = \left[\sqrt{۱۰}\right] = ۳$$

فصل ۳

توابع نمایی و لگاریتمی

سوال ۴۹ اگر توابع $f(x)=(2+a)^x$ و $g(x)=(a-1)^x$ نمایی باشند، حدود a کدام است؟

حل: تابع $y=b^x$ که در آن b عددی مثبت و مخالف یک است یک تابع نمایی است. پس:

$$f(x)=(2+a)^x \Rightarrow \begin{cases} 2+a>0 \\ 2+a\neq 0 \end{cases} \to \begin{cases} a>-2 \\ a\neq -1 \end{cases} \quad (1)$$

$$g(x)=(a-1)^x \Rightarrow \begin{cases} a-1>0 \\ a\neq 1 \end{cases} \to \begin{cases} a>1 \\ a\neq 2 \end{cases} \quad (2)$$

اشتراک (1) و (2) $\longrightarrow a>1, a\neq 2$

سوال ۵۰ در تابع نمایی $f(x)=a^{x-2}$ ، $f(1)=16f(5)$ ،آنگاه نمودار تابع f محور yها را با چه عرضی قطع می‌کند؟ $(a>0)$

حل:

$$f(1)=16f(5) \xrightarrow{f(x)=a^{x-2}} a^{1-2}=16a^{5-2} \Rightarrow a^{-1}=16a^3$$

$$\to \frac{1}{a}=16a^3 \Rightarrow a^4=\frac{1}{16} \xrightarrow{a>0} \boxed{a=\frac{1}{2}}$$

پس $f(x)=(\frac{1}{2})^{x-2}$ و داریم:

$$x=0 \text{ تلاقی با محور yها یعنی } : f(0)=(\frac{1}{2})^{0-2}=(\frac{1}{2})^{-2}=2^2=4$$

سوال ۵۱ نمودارهای دو تابع $f(x)=۳^{ax+b}$ و $g(x)=(\frac{۱}{۹})^x$ در نقطه‌ای به طول 1- متقاطع‌اند. اگر $f(۲)=\frac{۱}{۳}$ باشد مقدار $f^{-۱}(۲۷)$ کدام است؟

حل: نمودارهای دو تابع متقاطع‌اند یعنی برابر هم‌اند و داریم:

$$f(-۱)=g(-۱)\Rightarrow ۳^{-a+b}=(\frac{۱}{۹})^{-۱}\Rightarrow ۳^{-a+b}=۹\Rightarrow \boxed{-a+b=۲}\ (*)$$

از طرفی $f(۲)=\frac{۱}{۳}$ ، بنابراین:

$$۳^{۲a+b}=\frac{۱}{۳}=۳^{-۱}\Rightarrow ۲a+b=-۱\ (**)$$

از حل $(*),(**)$ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}-a+b=۲\\ ۲a+b=-۱\end{cases}\ ۳a=-۳\Rightarrow \boxed{a=-۱}\xrightarrow{(*)}\boxed{b=۱}\Rightarrow \boxed{f(x)=۳^{-x+۱}}\xrightarrow{\text{تفاضل}}$$

حال برای محاسبه $f^{-۱}(۲۷)$ کافیست معادله $f(x)=۲۷$ را حل کنیم:

$$۳^{-x+۱}=۲۷=۳^۳\Rightarrow -x+۱=۳\rightarrow \boxed{x=-۲}$$

سوال ۵۲ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=a+\log_۲^{(bx-۵)}$ از نقاط $(۳,۹),(۲,۷)$ می‌گذرد. مقدار تابع را به ازای $x=۷$ به‌دست آورید.

$$\log_c^a-\log_c^b=\log_c^{a/b}$$

$$۲=\log_۲^۴\rightarrow ۲=۲\cancel{\log_۲^۲}=۲$$

حل:

$$f(۲)=۷\Rightarrow a+\log_۲^{(۲b-۵)}=۷$$

$$f(۳)=۹\Rightarrow a+\log_۲^{(۳b-۵)}=۹$$

دو طرف معادله را از هم کم می‌کنیم. بنابراین:

$$\log_{۲}^{(۳b-۵)}-\log_{۲}^{(۲b-۵)}=۲\Rightarrow \log_{۲}^{۳b-۵/۲b-۵}=\log_{۲}^{۴}\Rightarrow \frac{۳b-۵}{۲b-۵}=۴\Rightarrow \boxed{b=۳}$$

با جاگذاری در معادله اول داریم: $a+\log_{۲}^{۱}=۷\Rightarrow a=۷$

حال $f(۷)$ را به‌دست می‌آوریم: $f(۷)=۷+\log_{۲}^{۳\times۷-۵}=۷+\cancel{\log_{۲}^{۱۶}}^{۴}=۱۱$

سوال ۵۳ تعداد جواب‌های معادله لگاریتمی $\log_{۳}^{(۵x^{۲}+۲x-۷)}-\log_{۳}^{(x-۱)}=۲$ کدام است؟

حل:

$$\log_{۳}^{(۵x^{۲}+۲x-۷)}-\log_{۳}^{(x-۱)}=۲\xrightarrow{\log_{c}^{a}-\log_{c}^{b}=\log_{c}^{a/b}}$$

$$\Rightarrow \log_{۳}^{۵x^{۲}+۲x-۷/x-۱}=۲\xrightarrow[c^{b}=a]{\log_{c}^{a}=b}\frac{۵x^{۲}+۲x-۷}{x-۱}=۹$$

$$۵x^{۲}+۲x-۷=۹x-۹\rightarrow ۵x^{۲}-۷x+۲=۰\xrightarrow[x=۱,x=\frac{c}{a}]{a+b+c=۰}\begin{cases}x=۱\\ x=\frac{۲}{۵}\end{cases}$$

هیچکدام از مقادیر x قابل قبول نیستند. زیرا هر دو مقدار x در دامنه $\log_{۳}^{(x-۱)}$ که برابر $(۱,+\infty)$ است قرار دارند.

پس معادله جواب ندارد.

سوال ۵۴ حاصل عبارت $\log_{3}^{\sqrt{243}}+\log_{\sqrt{27}}^{9}-\log_{8}^{16}$ کدام است؟

حل:

$$\log_{3}^{\sqrt{3^5}}+\log_{\sqrt{3^3}}^{3^2}-\log_{2^3}^{2^4}=\log_{3}^{3^{\frac{5}{2}}}+\log_{3^{\frac{3}{2}}}^{3^2}-\frac{4}{3}\log_{2}^{2}$$

$$\frac{5}{2}\log_{3}^{3}+\frac{4}{3}\log_{3}^{3}-\frac{4}{3}=\frac{5}{2}+\frac{4}{3}-\frac{4}{3}=\frac{5}{2}$$

تذکر:

$$\log_{b^m}^{a^n}=\frac{n}{m}\log_{b}^{a}\ /\ \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$$

$$\log_{a}^{a}=1\ (a>0,\ a\neq 1)$$

نکته در لگاریتم معمولاً چونکه با توان سر و کار داریم عبارات را طوری به ما می‌دهند که بتوان آنها را به توان رساند. مثلاً در عبارت 243 چون یکان 3 داشت می‌توان با تقسیم بر 3 بخش‌پذیری آن‌را و نوع توان آن را تشخیص داد.

سوال ۵۵ دامنه تابع $f(x)=\sqrt{1-\log(x^2-3x)}$ کدام است؟

حل: با توجه به لگاریتم داریم:

$$\log(x^2-3x): x^2-3x>0 \Rightarrow x(x-3) \Rightarrow x>3 \text{ یا } x<0\ (1)$$

با توجه به وجود رادیکال با فرجه زوج باید عبارت زیر رادیکال، بزرگتر یا مساوی صفر باشد:

$$1-\log(x^2-3x)\geq 0 \Rightarrow \log(x^2-3x)\leq 1 \Rightarrow x^2-3x\leq 10$$

$$\Rightarrow x^2-3x-10\leq 0 \Rightarrow (x-5)(x+2)\leq 0 \Rightarrow -2\leq x\leq 5\ (2)$$

از اشتراک (1) و (2) داریم: $D_f=[-2,0)\cup(3,5]$

سوال ۵۶ اگر x ریشه‌های معادله $\log_{\sqrt{۲}}^{(\sqrt{x}-۱)} - \log_{\sqrt{۲}}^{|x-۱|} = -۲$ یکی از ریشه‌های معادله $(m-۱)x^۲ + ۳x - m = ۰$ باشد، m کدام است؟

حل: بدیهی است که این معادله به ازای $x > ۱$ دارای جواب است. بنابراین داریم:

$$\log_{\sqrt{۲}}^{(\sqrt{x}-۱)} - \log_{\sqrt{۲}}^{|x-۱|} = -۲ \xrightarrow{x>۱} \frac{۱}{۲}\log_{\sqrt{x}}^{(x-۱)} - \log_{\sqrt{۲}}^{(x-۱)} = -۲ \Rightarrow$$

$$-\frac{۱}{۲}\log_{\sqrt{۲}}^{(x-۱)} = -۲ \Rightarrow \log_{\sqrt{۲}}^{(x-۱)} = ۴ \to x-۱ = (۲^{\frac{۱}{۲}})^۴ = ۲^{\frac{۴}{۲}} = ۴ \to x-۱ = ۴ \to \boxed{x = ۵}$$

چون‌که $x = ۵$ ریشه‌های معادله $(m-۱)x^۲ + ۳x - m = ۰$ می‌باشد داریم:

$$۲۵(m-۱) + ۱۵ - m = ۰ \Rightarrow ۲۴m = ۱۰ \Rightarrow m = \frac{۱۰}{۲۴} = \frac{۵}{۱۲}$$

سوال ۵۷ وارون تابع $f(x) = a + \log_۳^{(bx+۱)}$ از دو نقطه‌ی $A(۳,۱)$ و $B(۵,۱۳)$ عبور می‌کند. مقدار b کدام است؟

حل:

$$(۳,۱) \in f^{-۱} \Rightarrow (۱,۳) \in f \Rightarrow f(۱) = ۳ \Rightarrow a + \log_۳^{(b+۱)} = ۳$$

$$(۵,۱۳) \in f^{-۱} \Rightarrow (۱۳,۵) \in f \Rightarrow f(۱۳) = ۵ \Rightarrow a + \log_۳^{(۱۳b+۱)} = ۵$$

دو طرف معادله را از هم کم می‌کنیم:

$$a + \log_۳^{(۱۳b+۱)} - a - \log_۳^{(b+۱)} = ۵ - ۳$$

$$\Rightarrow \log_۳^{(\frac{۱۳b+۱}{b+۱})} = ۲ \Rightarrow \frac{۱۳b+۱}{b+۱} = ۹ \Rightarrow ۱۳b + ۱ = ۹b + ۹ \Rightarrow \boxed{b = ۲}$$

سوال ۵۸ اگر $9\sqrt{3}=9^x$ و $\log_5^{2\sqrt{x}}-\log_5^y=1$ مقدار y کدام است؟

حل:

$$9\sqrt{3}=9^x \to 3^2\times 3^{\frac{1}{2}}=3^{2x}\to 3^{\frac{5}{2}}=3^{2x}\to 2x=\frac{5}{2}\to \boxed{x=\frac{5}{4}}$$

$$\log_5^{2\sqrt{\frac{5}{4}}}-\log_5^y=\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_5^5-\log_5^y=2\log_5^5-\log_5^y=2-\log_5^y=1$$

$$\Rightarrow \log_5^y=1\Rightarrow \boxed{y=5}$$

سوال ۵۹ مجموع جواب‌های معادله $(\sqrt{x})^{\log_5^x-1}=5$ کدام است؟

حل: از طرفین تساوی لگاریتم در مبنای 5 می‌گیریم.

$$\Rightarrow (\log_5^x-1)\times\log_5^{\sqrt{x}}=\log_5^5\Rightarrow(\log_5^x-1)\times\frac{1}{2}\log_5^x=1$$

$$\xrightarrow{\times(2)}(\log_5^x)^2-\log_5^x-2=0$$

با تغییر متغیر $\log_5^x=t$ داریم:

$$t^2-t-2=0\Rightarrow(t-2)(t+1)=0\Rightarrow\begin{cases}t=2\\t=-1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}t=2\to\log_5^x=2\to\boxed{x=25}\\t=-1\to\log_5^x=-1\to\boxed{x=\frac{1}{5}}\end{cases}$$

مجموع جواب‌ها : $25+\frac{1}{5}=\frac{126}{5}$

سوال ۶۰ از تساوی $\log_x^{(3x+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)}$ ، مقدار لگاریتم x درپایه 4 کدام است؟

حل:

$$\log_x^{(3x+8)} = 2 - \log_x^{(x-6)} \xrightarrow[\text{عدد یک طرف}]{\text{لگاریتم‌ها یک طرف تساوی}} \log_x^{(3x+8)} + \log_x^{(x-6)} = 2$$

$$\xrightarrow{\log_c^a + \log_c^b = \log_c^{ab}} \log_x^{(3x+8)(x-6)} = 2 \xrightarrow{\log_c^a = b \to c^b = a} (3x+8)(x-6) = x^2$$

$$\to 3x^2 - 18x + 8x - 48 = x^2 \to 2x^2 - 10x - 48 = 0$$

$$\xrightarrow{\div(2)} x^2 - 5x - 24 = 0 \to (x-8)(x+3) = 0 \to \begin{cases} x = 8 \\ x = -3 < 0 \end{cases}$$

به ازای $x = -3$ معادله لگاریتمی تعریف نمی‌شود.

$$x = 8 \to \log_4^x = \log_4^8 = \log_{2^2}^{2^3} = \frac{3}{2} \cancel{\log_2^2}^{\,1} = \frac{3}{2}$$

فصل۴ : مثلثات

رادیان و نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

سوال ۶۱ زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۹}$ رادیان و 3 رادیان را به درجه و 60 درجه را به رادیان تبدیل کنید.

حل: برای تبدیل رادیان به درجه و درجه به رادیان از رابطه‌ی مقابل استفاده می‌کنیم: $\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$

اگر در سؤال خواسته شده π وجود نداشت که در اینجا [$(\frac{۲\pi}{۹})$ داریم و هست] آن را 180 در نظر می‌گیریم. اگر π را نداده بودند آن را در 57/3 ضرب می‌کنیم.

رادیان $\frac{۲\pi}{۹}:\frac{۲\times ۱۸۰}{۹}=۴۰^\circ$

رادیان 3 $\xrightarrow{\text{در اینجا } \pi \text{ نداریم}} ۳\simeq ۳\times ۵۷/۳\simeq ۱۷۱/۹^\circ$

درجه $۶۰^\circ:۶۰\times\frac{\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۳}\text{Rad}$

سوال ۶۲ حاصل عبارت $B=\cot(-۲۴۰^\circ)\tan(۱۵۰^\circ)-۲\sin(۱۳۵^\circ)\cos(۳۱۵^\circ)$ را پیدا کنید.

حل:

$$B=-\cot(\pi+۶۰^\circ).\tan(\pi-۳۰^\circ)-۲\sin(\frac{\pi}{۲}+۴۵^\circ).\cos(۲\pi-۴۵^\circ)$$

(ربع سوم $\cot>0$) (ربع دوم $\tan<0$) (ربع دوم $\sin>0$) (ربع چهارم $\cos>0$)

$$=[\underbrace{-\cot ۶۰^\circ}_{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}}.(\underbrace{-\tan ۳۰^\circ}_{-\frac{\sqrt{۳}}{۳}})]-[۲\underbrace{\cos ۴۵^\circ}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}.\underbrace{\cos ۴۵^\circ}_{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}]$$

مضارب $\frac{\pi}{2}$ نسبت را عوض می‌کند

$$=[(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})(-\frac{\sqrt{۳}}{۳})]-[-۲(\frac{\sqrt{۲}}{۲})(\frac{\sqrt{۲}}{۲})]=\frac{۱}{۳}-۱=-\frac{۲}{۳}$$

تذکر: مضارب π نسبت را عوض نمی‌کنند ولی مضارب $\frac{\pi}{۲}$، نسبت را عوض می‌کنند.

(این نکته در تمامی نسبت‌ها صدق می‌کند)

$$\sin\underbrace{(\pi-\alpha)}_{\sin>0\ \text{ربع دوم}}=\sin\alpha/\sin\underbrace{(\pi+\alpha)}_{\sin<0\ \text{ربع سوم}}=-\sin\alpha/\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\sin>0\ \text{ربع اول}}=\cos\alpha$$

این نکته در تمامی نسبت‌ها صدق می‌کند.

سوال ۶۳ حاصل عبارت $A=\dfrac{\sin(-۲۷۰^\circ)-۲\cos(-۴۸۰^\circ)}{\tan(-۲۲۵^\circ)}$ چقدر است؟

حل:

$$\sin(-۲۷۰^\circ)=-\sin۲۷۰^\circ=-(-۱)=۱$$

$$\cos(-۴۸۰^\circ)=\cos(۴۸۰^\circ)\ \text{کسینوس منفی خوره}=\cos(۲\pi+۱۲۰)=\cos(۱۲۰^\circ)=-\frac{۱}{۲}$$

$$(\cos۱۲۰^\circ=\cos(\frac{\pi}{۲}+۳۰^\circ)=-\sin۳۰^\circ=-\frac{۱}{۲}\ \text{یا})$$

$$\tan(-۲۲۵^\circ)=-\tan۲۲۵^\circ=-\tan(\pi+۴۵^\circ)\ (\tan>۰\ \text{ربع سوم})=-\tan۴۵^\circ=-۱$$

$$\Rightarrow A=\frac{۱-۲(-\frac{۱}{۲})}{-۱}=\frac{۱+\frac{۲}{۲}}{-۱}=-۲$$

سوال ۶۴ اگر $\cot\alpha = k$ حاصل $\dfrac{۲\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)+\sin(۵\pi+\alpha)}{\cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha)-\cos(\alpha-\pi)}$ چقدر است؟

حل: تک به تک حساب می‌کنیم و در معادله قرار می‌دهیم:

$$1)\ \sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) \xrightarrow[\text{نسبت را عوض می‌کند } \frac{\pi}{2}]{\text{ربع اول } \sin>0} \cos\alpha$$

$$2)\ \sin(۵\pi+\alpha) \xrightarrow[\sin<0]{\text{ربع سوم}} -\sin\alpha$$

$$3)\ \cos(\frac{۳\pi}{۲}-\alpha) \xrightarrow[\cos<0]{\text{ربع سوم}} -\sin\alpha$$

$$4)\ \cos(\alpha-\pi)=\cos(-(\pi-\alpha))=\underbrace{\cos(\pi-\alpha)}_{\cos<۰}=-\cos\alpha$$

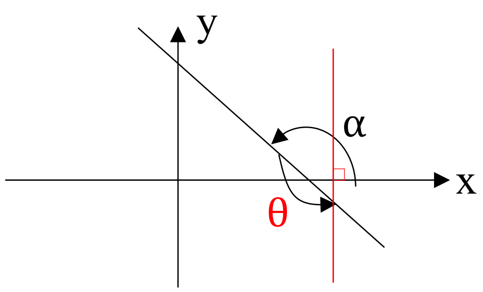
(کسینوس منفی‌خور است)

جایگذاری در معادله: $\dfrac{۲\cos\alpha-\sin\alpha}{-\sin\alpha-(-\cos\alpha)}=\dfrac{۲\cos\alpha-\sin\alpha}{-\sin\alpha+\cos\alpha}$

طرفین تقسیم بر $\sin\alpha$: $\dfrac{۲\cot\alpha-۱}{-۱+\cot\alpha}\overset{\cot\alpha=k}{=}\boxed{\dfrac{۲k-۱}{-۱+k}}$

نکته در این چونکه از $\cot$ خواسته بودند باید آن را می‌ساختیم به‌خاطر همین طرفین تقسیم بر $\sin$ شد.

سوال ۶۵ معادله خطی به‌صورت $\sqrt{۲}x+\sqrt{۸}y-۲=۰$ مقدار $\tan\theta$ چقدر می‌تواند باشد؟



حل: شیب خط $\sqrt{۲}x+\sqrt{۸}y-۲=۰$ برابر است با:

$-\dfrac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۸}}=-\dfrac{۱}{۲}$ پس $\tan\alpha=-\dfrac{۱}{۲}$ از طرفی داریم:

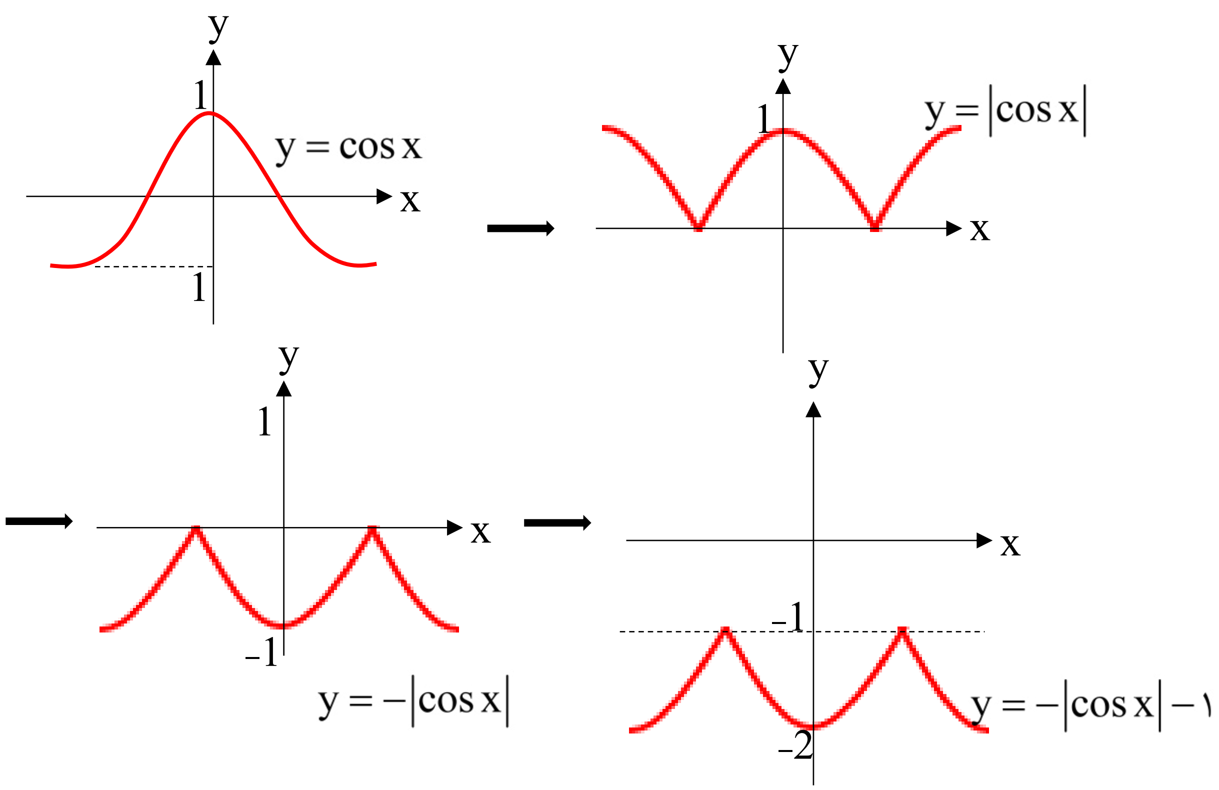
بنابراین: $\alpha+\theta=۲۷۰^\circ \Rightarrow \theta=۲۷۰^\circ-\alpha$

$$\tan\theta=\tan(۲۷۰^\circ-\alpha)=\cot\alpha=\frac{۱}{\tan\alpha}=-۲\rightarrow\tan\theta=-۲$$

توابع مثلثاتی

سوال ۶۶ اگر برد تابع $y=-|\cos x|-۱$ به‌صورت $[a,b]$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

حل: به کمک رسم نمودار برد تابع را پیدا می‌کنیم.



بنابراین برد این تابع $[-۲,-۱]$ است لذا داریم: $b-a=-۱-(-۲)=۱$

سوال ۶۷ نمودار تابع $y=-۲\cos x+۱$ در بازه $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

حل: تابع را در بازه داده شده قرار می‌دهیم:

$$x=۰\rightarrow -۲\cos(۰)+۱=-۱$$

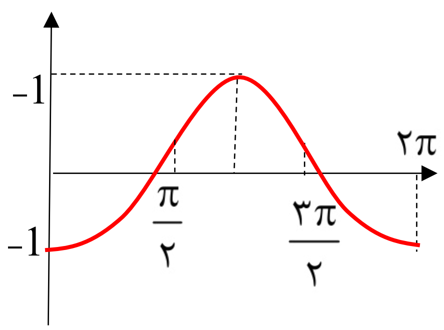
$$x=\frac{\pi}{۲}\rightarrow -۲\cos(\frac{\pi}{۲})+۱=۱$$

$$x=\pi\rightarrow -۲\cos(\pi)+۱=۳$$

$$x=\frac{۳\pi}{۲}\rightarrow -۲\cos(\frac{۳\pi}{۲})+۱=۱$$

$$x=۲\pi\rightarrow -۲\cos(۲\pi)+۱=-۱$$

x	y
۰	-۱
$\frac{\pi}{۲}$	۱
π	۳
$\frac{۳\pi}{۲}$	۱
۲π	-۱



سوال ۶۸ اگر تابع زیر در $x=\frac{\pi}{۲}$ پیوسته باشد، a را محاسبه کنید.

اتحاد چاق و لاغر:

$$a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۱-\sin^۳x}{۱-\sin^۲x} & x\neq\frac{\pi}{۲}\\ a\cos\frac{۴x}{۳}+۱ & x=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

حل:

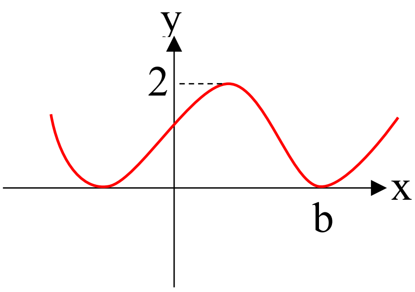
ضابطه بالا : $f(x)=\frac{۱-\sin^۳x}{۱-\sin^۲x}=\frac{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x+\sin^۲x)}{\cancel{(۱-\sin x)}(۱+\sin x)}=$

$$\frac{۱+\sin x+\sin^۲x}{۱+\sin x}\overset{x\simeq\frac{\pi}{۲}}{=}\frac{۱+۱+۱}{۱+۱}=\frac{۳}{۲}$$

ضابطه پایین : $f(\frac{\pi}{۲})=a\cos(\frac{۲\pi}{۳})+۱=a\cos(\pi-\frac{\pi}{۳})+۱=\boxed{-\frac{۱}{۲}a+۱}$

برای پیوستگی مقدار تابع با حد آن برابر باشد: $-\frac{۱}{۲}a+۱=\frac{۳}{۲}\Rightarrow-\frac{۱}{۲}a=\frac{۱}{۲}\rightarrow\boxed{a=-۱}$

سوال ۶۹ بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-\sin(x+\frac{۳\pi}{۴})$ به‌صورت زیر داده شده است. مقدار $a\times b$ را به‌دست آورید.

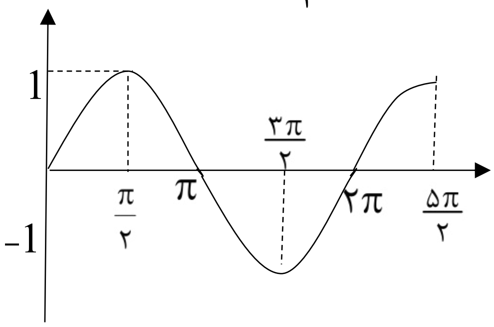


حل: بیشترین مقدار تابع برابر 2 است. پس داریم:

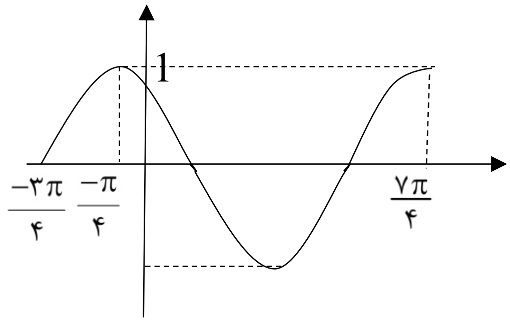
$$y=-\sin(x+\frac{۳\pi}{۴}) \Rightarrow \text{ماکزیمم تابع} = |-۱| = ۱$$

$$y=a-\sin(x+\frac{۳\pi}{۴}) \Rightarrow \text{ماکزیمم تابع} = a+۱ \Rightarrow a+۱=۲ \Rightarrow \boxed{a=۱} \quad (۱)$$

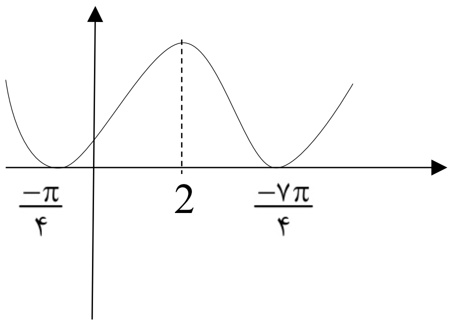
$$f(x)=۱-\sin(x+\frac{۳\pi}{۴}) \rightarrow$$ حال نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.



به چپ $\frac{۳\pi}{۴}$

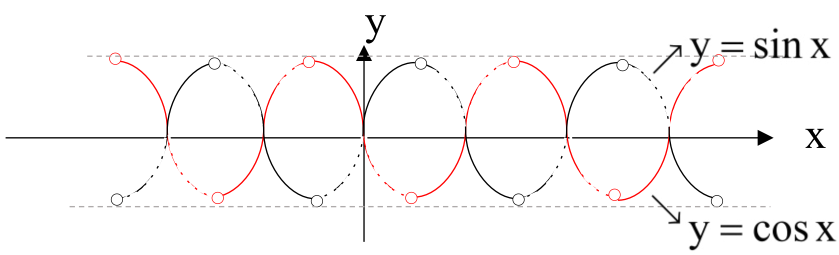


بالا



سوال ۷۰ نمودار تابع $f(x)=\cos x\left|\tan x\right|$ را رسم کنید؟

$$f(x)=\cos x\frac{\left|\sin x\right|}{\left|\cos x\right|}=\begin{cases}\sin x & ; \quad \tan x\ge ۰\\ -\sin x & ; \quad \tan x<۰\end{cases}$$

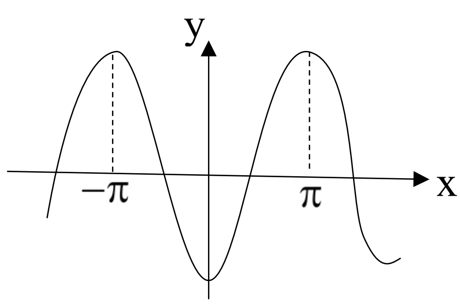


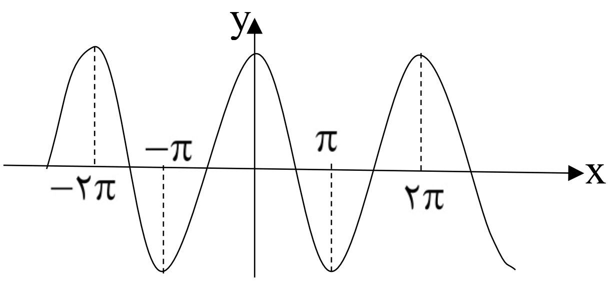
در ربع‌های اول و سوم تانژانت مثبت و ربع‌های دوم و چهارم منفی است.

سوال ۷۱ مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)$ در نقاطی با کدام طول رخ می‌دهد.

حل: ابتدا تابع را ساده می‌کنیم. $\sin(\frac{۳\pi}{۲}+x)=-\cos x$

حال نمودار $y=-\cos x$ را رسم می‌کنیم و طول نقاط ماکزیمم تابع را مشخص می‌کنیم.





پس مقدار ماکزیمم تابع در نقاطی به طول‌های $-\pi,\pi,۳\pi,\ldots$ رخ می‌دهد که به‌صورت $x=۲k\pi+\pi$ می‌توان نوشت.

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

سوال ۷۲ مقدار $\cos^{۲}۲۰ + \frac{۱-\cos ۴۰}{۲}$ کدام است؟

حل:

$$\boxed{\frac{۱-\cos ۲a}{۲} = \sin^{۲}a , \sin^{۲}a + \cos^{۲}a = ۱}$$

$$\frac{۱-\cos ۴۰}{۲} = \sin^{۲}۲۰ \qquad \boxed{\sin^{۲}۲۰ + \cos^{۲}۲۰ = ۱}$$

سوال ۷۳ حاصل $۲\sin^{۲}۱۵^{\circ} - ۱$ کدام است؟

حل: $\cos ۲a = ۱ - ۲\sin^{۲}a \xrightarrow{a=۱۵} \cos ۳۰^{\circ} = ۱ - ۲\sin^{۲}۱۵^{\circ}$

$$\rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱ - ۲\sin^{۲}۱۵^{\circ} \Rightarrow \boxed{۲\sin^{۲}۱۵^{\circ} - ۱ = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}}$$

سوال ۷۴ حاصل عبارت $\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x}$ کدام است؟

حل: تذکر: $\sin ۲x = ۲\sin x\cos x / ۱ - \cos ۲x = ۲\sin^{۲}x$

$$\frac{۱-\cos ۲x}{\sin ۲x} = \frac{\cancel{۲}\sin^{\cancel{۲}}x}{\cancel{۲}\cancel{\sin x}\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

سوال ۷۵ حاصل $\frac{\sqrt{۳}}{\cos x}-\frac{۱}{\sin x}$ عبارت به ازای $x=۱۰^\circ$ چقدر است؟

حل:

$$\frac{۱}{\sin x}-\frac{\sqrt{۳}}{\cos x}=\frac{\cos x-\sqrt{۳}\sin x}{\sin x\cos x}\overset{\text{طرفین ضربدر}\left(\frac{1}{2}\right)}{=}\frac{\frac{۱}{۲}\cos x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}$$

$$=\frac{۲(\sin\frac{\pi}{۶}\cos x-\cos\frac{\pi}{۶}\sin x)}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x}=۴\frac{\sin(۳۰^\circ-x)}{\sin ۲x}\xrightarrow{x=۱۰^\circ}\frac{۴\sin ۲۰^\circ}{\sin ۲۰^\circ}=۴$$

سوال ۷۶ اگر $\frac{\pi}{۱۲}\le x<\frac{\pi}{۳}$ باشد، آنگاه حاصل‌ضرب کمترین و بیشترین مقدار $A=(\sin x+\cos x)^۲-(\sin x-\cos x)^۲$ کدام است؟

حل:

$$A=(\sin x+\cos x)^۲-(\sin x-\cos x)^۲=۴\sin x\cos x=۲\sin ۲x$$

$$\frac{\pi}{۱۲}\le x<\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\frac{\pi}{۶}\le ۲x<\frac{۲\pi}{۳}\xrightarrow{\text{از طرفین } sin}\frac{۱}{۲}\le\sin ۲x\le ۱\Rightarrow ۱\le ۲\sin x\le ۲$$

بنابراین حاصلضرب کمترین و بیشترین مقدار عبارت A برابر $۲=۲\times۱$ می‌باشد.

سوال ۷۷ ساده شده عبارت $\tan ۲۰^\circ + \frac{\sin^۲ ۳۵^\circ}{\sin ۷۰^\circ}$ کدام است؟

حل:

$$\frac{\sin ۲۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ} + \frac{\sin^۲ ۳۵^\circ}{۲\sin ۳۵^\circ \cos ۳۵^\circ} = \frac{\cos ۷۰^\circ}{\sin ۷۰^\circ} + \frac{\sin ۳۵^\circ}{۲\cos ۳۵^\circ} = \frac{\cos^۲ ۳۵^\circ - \sin^۲ ۳۵^\circ}{۲\sin ۳۵^\circ \cos ۳۵^\circ} + \frac{۱}{۲}\tan ۳۵^\circ$$

$$\frac{\cos ۳۵^\circ}{۲\sin ۳۵^\circ} - \frac{\sin ۳۵^\circ}{۲\cos ۳۵^\circ} + \frac{۱}{۲}\tan ۳۵^\circ = \frac{۱}{۲}\cot ۳۵^\circ - \frac{۱}{۲}\tan ۳۵^\circ + \frac{۱}{۲}\tan ۳۵^\circ$$

$$= \frac{۱}{۲}\cot ۳۵^\circ = \frac{۱}{۲}\tan ۵۵^\circ$$

سوال ۷۸ اگر $f(x) = (\sin x + \cos x - ۱)(\sin x + \cos x - ۱)$ باشد، مقدار $f(\frac{۷\pi}{۱۲})$ کدام است؟

حل:

$$f(x) = (\sin x + \cos x - ۱)(\sin x + \cos x - ۱) = (\sin x + \cos x)^۲ - ۱$$

$$= \sin^۲ x + \cos^۲ x + ۲\sin x\cos x - ۱ = ۲\sin x\cos x = \sin ۲x$$

$$f(\frac{۷\pi}{۱۲}) = \sin ۲x = \sin(۲ \times \frac{۷\pi}{۱۲}) = \sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin(\pi + \frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

سوال ۷۹ اگر $x - y = \frac{۵\pi}{۴}$ و $\tan(x+y) = ۴$ باشد، حاصل‌ضرب عبارت زیر کدام است؟

$$A = \frac{\sin^۲ x\sin^۲ y - \cos^۲ x\cos^۲ y}{\sin^۲ x\cos^۲ y - \sin^۲ y\cos^۲ x}$$

حل:

$$A=\frac{(\sin x\sin y-\cos x\cos y)(\sin x\sin y+\cos x\cos y)}{(\sin x\cos y-\sin y\cos x)(\sin x\cos y+\sin y\cos x)}=\frac{-\cos(x+y)\,\cos(x-y)}{\sin(x+y)\,\sin(x+y)}$$

$$A=-\cot(x-y)\cot(x+y)=-\cot(\frac{۵\pi}{۴})\times\frac{۱}{\tan(x+y)}\Rightarrow A=-(۱)\times\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۴}$$

حدوپیوستگی

- مفهوم حد و فرآیندهای حدی

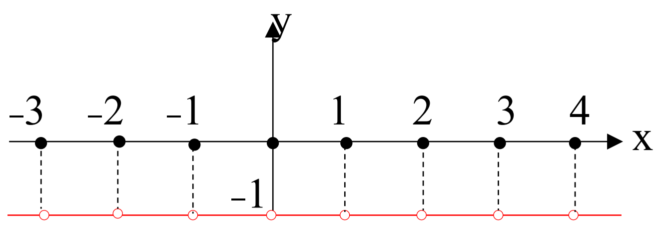
سوال ۸۰ اگر $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۱$ ، آنگاه همواره تابع f حداقل در یک همسایگی محذوف 2 چگونه است؟

حل: با توجه به اینکه تابع در نقطه‌ی 2، حدی برابر 1 دارد. پس حداقل در یک همسایگی محذوف 2 مثبت و تعریف شده است.

سوال ۸۱ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]+[-x]$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)+\lim\limits_{x\to \frac{۳}{۲}} f(x)$ کدام است؟ **حل:**

می‌دانیم $f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ و نمودار آن به‌صورت زیر است:

حد این تابع در تمام نقاط 1- است پس:



$$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)+۲\lim\limits_{x\to \frac{۳}{۲}} f(x)=-۱+۲(-۱)=-۳$$

سوال ۸۲ اگر بازه $(۲x-۱,\frac{x+۵}{x+۱})$ یک همسایگی $\frac{۱}{۲}$ باشد، حدود x کدام است؟

حل: باید $\frac{۱}{۲}\in(۲x-۱,\frac{x+۵}{x+۱})$ یعنی: $۲x-۱<\frac{۱}{۲}<\frac{x+۵}{x+۱}$

$$۲x-۱<\frac{۱}{۲}\Rightarrow x<\frac{۳}{۴}\quad(۱)\ /\ \frac{۱}{۲}<\frac{x+۵}{x+۱}\Rightarrow ۰<\frac{x+۵}{x+۱}-\frac{۱}{۲}=\frac{x+۹}{۲(x+۱)}$$

x		-9		-1	
$\frac{x+۹}{۲(x+۱)}$	+		-	ت ن	+

$$\Rightarrow(-\infty,-۹)\cup(-۱,\frac{۳}{۴})\quad(۲)$$

$$\xrightarrow{(۱),(۲)}x\in(-\infty,-۹)\cup(-۱,\frac{۳}{۴})$$

سوال ۸۳ اگر $f(x)=\begin{cases}۱ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ ، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})}f(x)+\lim\limits_{x\to۱}f(x)$ کدام است؟

حل: وقتی $x\to۱$ میل می‌کند، مقدار x با مقادیر کمتر یا بیشتر از 1 به عدد 1 نزدیک می‌شود. در نتیجه:

$\lim\limits_{x\to(-\frac{۱}{۲})}f(x)=-۱$, $\lim\limits_{x\to۱}f(x)=-۱$ در نتیجه داریم: عبارت $:-۱-۱=-۲$

سوال ۸۴ اگر $f(x)=\frac{۲x^۲+ax-۱}{x^۲+۴}$ و $\lim\limits_{x\to۲}f(x)=۱$ باشد، ثابت a را محاسبه کنید.

حل:

$$\lim_{x\to۲}f(x)=\lim_{x\to۲}\frac{۲x^۲+ax-۱}{x^۲+۴}=\frac{۸+۲a-۱}{۴+۴}=\frac{۷+۲a}{۸}=۱\to۷+۲a=۸\to a=\frac{۱}{۲}$$

سوال ۸۵ به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۲-a[-x^۲]}{x+۲} & x<۱\\ \dfrac{۱}{۲}[۲x]+۱ & x>۱\end{cases}$ در $x=۱$ حد دارد.

حل: شرط وجود حد داشتن حد چپ و راست و مقدار تابع است.

وقتی‌که $x\to ۱^-$، $x<۱$ است پس $x^۲<۱$ در نتیجه $-x^۲>-۱$ است. پس $[-x^۲]=-۱$ می‌شود.

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۲-a[-x^۲]}{x+۲}=\frac{۲-a[(-۱)^+]}{۳}=\frac{۲+a}{۳}$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+}(\frac{۱}{۲}[۲x]+۱)=\frac{۱}{۲}[۲^+]+۱=۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} f(x)\Rightarrow \frac{۲+a}{۳}=۳\Rightarrow ۲+a=۶\Rightarrow \boxed{a=۴}$$

سوال ۸۶ حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{x-[x]}{x+[x]}$ کدام است؟

حل: وقتی $x\to ۲^-$ آنگاه $۱<x<۲$ که در این‌صورت $[x]=۱$، بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-[x]}{x+[x]}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{x-۱}{x+۱}=\frac{۲-۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۳}$$

سوال ۸۷ اگر $f(x)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi x}{۸} & ; \ |x|\leq ۲\\ ۱-\dfrac{x^۲}{۲} & ; \ |x>۲|\end{cases}$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ کدام است؟

حل:

$$f(x)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi x}{۸}+۱ & ; \ -۱\leq x\leq ۲\\ ۱-\dfrac{x^۲}{۲} & ; \ x>۲ \ x \ \text{یا} \ <\end{cases}$$

برای پیدا کردن حاصل $\lim\limits_{x\to(-۲)^-} f(x)$ باید از ضابطه پایینی استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)=۱-\frac{(-۲)^۲}{۲}=۱-۲=-۱$$

برای پیدا کردن حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ باید از ضابطه بالایی استفاده کنیم.

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(\tan\frac{\pi x}{۸}+۱)=\tan^۲\frac{\pi}{۸}+۱=\tan\frac{\pi}{۴}+۱=۱+۱=۲$$

$$\lim_{x\to(-۲)^-} f(x)-\lim_{x\to ۲^-} f(x)=-۱-۲=-۳$$

سوال ۸۸ حاصل $\lim\limits_{x\to\frac{5\pi}{4}} \dfrac{[\sin x]+2}{\cos 2x-1}$ کدام است؟

حل:

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{4}} \frac{[\sin x]+2}{\cos 2x-1}=\frac{[-\frac{\sqrt{2}}{2}]+2}{0-1}=\frac{-1+2}{-1}=-1$$

سوال ۸۹ دو تابع $f(x)=\begin{cases}2x+b & x\geq 1\\ x+a & x<1\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}1-3x^2 & x\geq 1\\ -2 & x<1\end{cases}$ در نظر بگیرید اگر حد تابع

$f+g$ در نقطه $x=1$ برابر 3 باشد مقدار a کدام است؟

حل: ابتدا حد تابع $x\to 1$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to 1^+} g(x)=\lim_{x\to 1^+}(1-3x^2)=-2\to \lim_{x\to 1^-} g(x)=-2$$

پس $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-2$ می‌باشد از طرفی:

$$\lim((f+g))(x)=3\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to 1} g(x)=3$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)+(-2)=3\to \lim_{x\to 1} f(x)=5$$

بنابراین حاصل حد چپ و راست تابع f در $x=1$ برابر 5 است.

$$\lim_{x\to 1^-}(x+a)=5\to 1+a=5\to \boxed{a=4}$$

سوال ۹۰ حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x([x]+[-x])+۱}{x^{۳}-۱}$ کدام است؟

حل: می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$. با توجه به اینکه حد داریم یعنی مقدار صحیح نیست پس:

$$\lim\limits_{x\to ۱}([x]+[-x])=-۱$$

$$\lim\limits_{x\to ۱}\frac{-x+۱}{x^{۳}-۱}=\frac{۰}{۰}\text{ مبهم } \xrightarrow[x\to 1]{\text{رفع ابهام}} \lim\limits_{x\to ۱}\frac{-\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}(x^{۲}+x+۱)}=\frac{-۱}{x^{۲}+x+۱}=-\frac{۱}{۳}$$

سوال ۹۱ اگر $\dfrac{۳}{۴}=\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{x^{۲}+ax+b}{x^{۲}-۴x}$ باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

حل: چون‌که یه حد داریم که جواب دارد و با توجه به اینکه مخرج صفر می‌شود پس صورت نیز صفر است و جواب $\dfrac{۳}{۴}$ جواب حد پس از رفع ابهام است. (حتماً $(x-۴)$ عامل صفر است)

$$\lim\limits_{x\to ۴}\frac{x^{۲}+ax+b}{x^{۲}-۴x}=\frac{۰}{۰}\to\lim\limits_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(x+m)}{x(x-۴)}=\lim\limits_{x\to ۴}\frac{x+m}{x}=\frac{۳}{۴}$$

$$\to m=\frac{۳}{۴}x-x=-\frac{۱}{۴}x\xrightarrow{x=۴}\boxed{m=-۱}$$

$$x^{۲}+ax+b=(x-۴)(x-۱)\Rightarrow x^{۲}+ax+b=x^{۲}-۵x+۴$$

$$\to\begin{cases}a=-۵\\ b=۴\end{cases}\to\boxed{a+b=-۱}$$

سوال ۹۲ حاصل حد عبارت $\dfrac{۳x-۲\sqrt{x}-۱}{x^{۲}-۱}$ وقتی $x\to ۱$ کدام است؟

حل:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳x-۲\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}=\frac{۳x-۳\sqrt{x}+\sqrt{x}-۱}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۳\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)+(\sqrt{x}-۱)}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}$$

از $(\sqrt{x}-۱)$ فاکتور می‌گیریم:

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}[(۳\sqrt{x}+۱)]}{\cancel{(\sqrt{x}-۱)}(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}=\frac{۴}{۲\times ۲}=۱$$

سوال ۹۳ حاصل حد $\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{x^۲-۴}$ را بیابید.

حل: خب $(x-۲)$ حاصل صفر است و مخرج را بر این عبارت تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۲}=\frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۵)}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۲x+۵}{x+۲}=\frac{۱۳}{۴}$$

$$\begin{array}{l|l} x^۳+x-۱۰ & x-۲ \\ \hline -x^۳+۲x^۲ & x^۲+۲x+۵ \\ \hline ۲x^۲+x & \\ -۲x^۲+۴x & \\ \hline ۵x-۱۰ & \\ -۵x+۱۰ & \\ \hline ۰\quad ۰ & \end{array}$$

سوال ۹۴ اگر تابع f درنقطه‌ای $x=۱$ دارای حد باشد $\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵$ باشد آنگاه $\lim_{x\to ۱}f(x)$ کدام است؟

حل: باید $f(x)$ را به‌دست بیاوریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۲f(x)-۱}{f(x)+۱}=۵\to ۲f(x)-۱=۵f(x)+۵\to ۳f(x)=-۶\to \boxed{f(x)=-۲}$$

$$\lim_{x\to ۱}=f(x)=-۲\to \text{پیوستگی}$$

سوال ۹۵ مقدار a کدام باشد تا تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+a & x>۱ \\ ۳ & x=۱ \\ x^۲-b & x<۱ \end{cases}$ در $x=۱$ پیوستگی راست داشته باشد.

حل: شرط اینکه یک تابع پیوستگی راست داشته باشد این است که حد راست و نمودار تابع برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^+} a=۲(۱)+a=۲+a, f(۱)=۳ \Rightarrow ۲+a=۳ \Rightarrow \boxed{a=۱}$$

سوال ۹۶ اگر تابع $f(x)=a[x+۱]+[x]+۲$ در $x=۴$ پیوسته باشد، a کدام است؟

حل: باید مقدار تابع در $x=۴$ با حدهای چپ و راست تابع در این نقطه برابر باشد.

$$f(۴)=a[۴+۱]+[۴]+۲=۵a+۶$$

$$\lim_{x\to ۴^+}(a[x+۱]+[x]+۲)=۵a+۶$$

$$\lim_{x\to ۴^-}(a[x+۱]+[x]+۲)=۴a+۵$$

$$۵a+۶=۴a+۵ \Rightarrow \boxed{a=-۱}$$

سوال ۹۷ به ازای کدام مقدار a، $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\le ۲ \\ a|x-۱| & x>۲ \end{cases}$ تابع همواره پیوسته است.

حل: تابع مربوطه به هر دو ضابطه در دامنه‌شان پیوسته هستند. بنابراین:

$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$ پس پیوستگی در 2 را بررسی می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to ۲^+} a|x-۱| \\ \lim_{x\to ۲^-} ۲x-۱=۳ \end{array}\right\} a=۳ \rightarrow \boxed{f(۲)=۳}$$

سوال ۹۸ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} a[۱-۲x] & x<۲ \\ bx=۲ & \\ \dfrac{x^۲-۴}{|x^۲-۵x+۶|} & x>۲ \end{cases}$ در $x=۲$ پیوسته باشد حاصل $b-۳a$ کدام است؟

حل: وقتی‌که سؤال گفته شده پیوسته است یعنی $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} a[۱-۲x]-\lim_{x\to ۲^-} a[-۳^+]=-۳a$$

بنابراین :

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{|(x-۲)(x-۳)|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{-(x-۲)(x-۳)}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x+۲}{-(x-۳)}=\frac{۴}{۱}=۴$$

$$\Rightarrow -۳a=b=۴\Rightarrow \begin{cases} b=۴ \\ a=\dfrac{-۴}{۳} \end{cases}\Rightarrow \boxed{b-۳a=۸}$$

سوال ۹۹ به ازای کدام مقدار a تابع $f(x)=(x+a)[۲x-۵]$ در $x=۲$ پیوسته است.

حل:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x+a)[۲x-۵]=\lim_{x\to ۲^+}(x+a)(-۱)=-(۲+a)$$

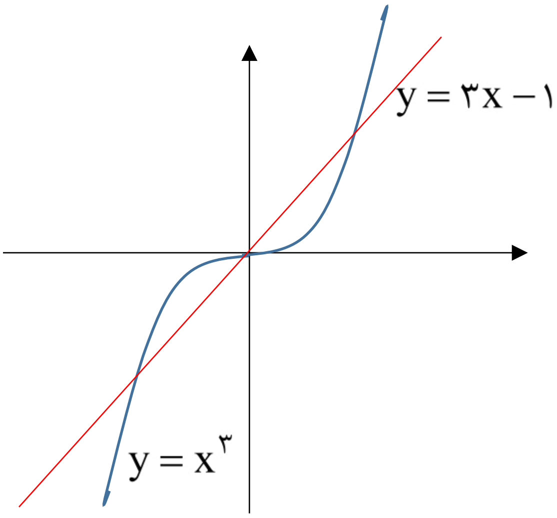
$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(x+a)[۲x-۵]=\lim_{x\to ۲^-}(x+a)(-۲)=-۲(۲+a)$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^-} f(x)\to -۴-۲a=-a-۲\to \boxed{a=-۲}$$

سوال ۱۰۰ تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۳} \;;\; x^{۳}\geq ۳x-۱ \\ ۳x-۱ \;;\; x^{۳}<۳x-۱ \end{cases}$ چند نقطه‌ی ناپیوستگی دارد؟

حل: به کمک نمودار توابع $y=x^{۳}$ و $y=۳x-۱$ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل واضح است که تابع در تمام R پیوسته است و نقطه ناپیوستگی ندارد.



سوال ۱۰۱ اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos ۲x}{\cos(x+\frac{\pi}{۴})} & x\neq \frac{\pi}{۴} \\ k & x=\frac{\pi}{۴} \end{cases}$ در نقطه‌ی $x=\frac{\pi}{۴}$ پیوسته باشد، مقدار $f(\frac{\pi}{۴})$ چقدر است؟

حل: شرط پیوستگی:

$$f(\frac{\pi}{۴})=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{+}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{-}} f(x)$$

$$f(\frac{\pi}{۴})=k=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}} f(x)=\frac{\cos^{۲}x-\sin^{۲}x}{\frac{(\cos x-\sin x)}{\sqrt{۲}}}=\sqrt{۲}\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}(\cos x+\sin x)=\sqrt{۲}(\frac{۲}{\sqrt{۲}})$$

$$\Rightarrow f(\frac{\pi}{۴})=k=۲$$