جزوهٔ ریاضی دوازدهم

گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

نوتروفیل

نوتروفیل، حامی عدالت آموزشی

سوالات ریاضی دوازدهم

سوال ۱ دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنه تابع gof را با استفاده از تعریف به دست آورید. (خرداد - ۹۸)

نکته برای به دست آوردن دامنه ترکیب توابع با استفاده از تعریف آن، ابتدا تعریف دامنه ترکیب توابع را به زبان ریاضی بنویسید و سپس در همان تعریف دامنه توابع را جاگذاری کنید و معادله یا نامعادله‌های تشکیل شده را حل کنید تا به دامنه تابع ترکیب برسید. در ضمن در حذف کردن x های غیر قابل قبول و اجتماع یا اشتراک گرفتن بین جواب‌ها دقت کنید. این روش را در چند سوال تمرین می‌کنیم

پاسخ:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۴ \mid \sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$$

سوال ۲ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد، دامنه تابع $fog(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید. (شهریور - ۹۸)

نکته دامنه ترکیب را با توجه به نکته‌ای که در سوال پیش گفته شد محاسبه می‌کنیم. فقط نکته مهم این است که هرگاه در صورت سوال رادیکال با فرجه زوج دیدیم، حواسمان به منفی نشدن زیر رادیکال باشد. در ضمن فرجه نانوشته همان فرجه دو است

پاسخ:

$D_f=[۱,+\infty)$ ، $D_g=R$

$$D_{fog}=\{x \mid x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x \mid x\in R, ۲x^۲-۱\in[۱,+\infty)\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

سوال ۳ اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x-۱$ آنگاه؛ (خرداد - ۱۴۰۲)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.

نکته در قسمت « الف » باید دامنه را با توجه به تعریف همانطور که در سوالات قبل گفته شد به دست آوریم. اما برای قسمت «ب» و پیدا کردن ضابطه تابع ترکیب اصلاً کار سختی نداریم. چرا که فقط کافی است با توجه به ترکیب خواسته شده ضابطه یک تابع را به جای x ها در ضابطه تابع دیگر بگذاریم. مثلاً در این سوال چون fog خواسته شده ضابطه تابع g یعنی $x-۱$ را به جای x در تابع f می‌گذاریم که همین کافی است اما برای مرتب شدن ضابطه به دست آمده می‌توانیم ساده‌سازی‌ها را هم انجام دهیم

پاسخ:

الف) $D_{fog}=\{x\in R \mid x-۱\geq -۱\}=[۰,+\infty)$

ب) $f(g(x))=f(x-۱)=\sqrt{x-۱+۱}=\sqrt{x}$

سوال ۴ اگر $f(x)=۷-۴x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۳}$ باشد؛ (دی - ۱۴۰۱)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(۱)$ را محاسبه کنید.

نکته قسمت اول سوال که دامنه ترکیب توابع را با توجه به تعریف خواسته که کامل به آن مسلط شدیم. اما برای حل قسمت دوم می‌توانیم با توجه به نکته گفته شده در سوال قبل ترکیب توابع گفته شده را محاسبه سپس مقدار خواسته شده را وارد آن کنیم تا خروجی بگیریم. اما کار ساده‌تر و راه حل پیشنهادی این است که طبق تعریف عمل کنیم یعنی عدد ۱ را وارد تابع f و سپس خروجی آن را وارد تابع g می‌کنیم تا پاسخ نهایی به دست آید

پاسخ: الف)

$$D_{fog}\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\in[-۳,+\infty) \mid \sqrt{x+۳}\in R\}=[-۳,+\infty)$$

ب)

$$(gof)(۱)=g(۳)=\sqrt{۶}$$

سوال ۵ با توجه به جدول زیر، مقادیر خواسته شده را به دست آورید. (شهریور - ۱۴۰۰)

الف) $(gof)(۱)$ ب) $(fo(f+g))(۰)$

x	۱-	۰	۱	۲
$f(x)$	۰	۱-	۲	۵-
$g(x)$	۲	۳	۴	۲-

نکته برای حل قسمت « الف » این سوال که طبق تعریف عمل می‌کنیم و با توجه به مقادیر گفته شده در جدول پاسخ به راحتی به دست می‌آید. (یک را وارد f می‌کنیم و خروجی وارد g می‌شود.)
اما نکته‌ای که قسمت « ب » دارد، ترکیب کردن خاصیت جمع دو تابع در دل ترکیب توابع است که برای حل آن ابتدا صفر را یک بار وارد تابع f و یک بار وارد تابع g می‌کنیم و خروجی‌ها با هم جمع شده و سپس وارد تابع f می‌شود که پاسخ نهایی به دست آید

پاسخ:

الف) $g(f(۱))=g(۲)=-۲$

ب) $(f+g)(۰)=-۱+۳=۲\Rightarrow (f((f+g)(۰))=f(۲)=-۵$

سوال ۶ اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$ تابع gof را در صورت وجود بنویسید. (شهریور - ۱۴۰۱)

نکته برای حل این سوال طبق تعریف ترکیب توابع عمل می‌کنیم. به این صورت که خروجی یا اعضای برد نقاط تابع f را وارد تابع g می‌کنیم و چک می‌کنیم خروجی کدام نقطه از تابع f با ورودی تابع g یکسان است. سپس x آن نقطه از تابع f را به عنوان ورودی ترکیب تابع و g آن نقطه از تابع g را به عنوان خروجی نهایی گزارش می‌کنیم و مجموعه این نقاط تابع gof را تشکیل می‌دهند

پاسخ: $gof=\{(۰,۴),(۳,۷),(۵,۰)\}$

سوال ۷ اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ (خرداد - ۱۴۰۱)

$$\text{ورودی } x \to 2x-2 \to \frac{x}{\sqrt{x+1}} \to \text{ خروجی}$$

نکته برای حل این سوال به جای ورودی اول عدد ۳ را می‌گذاریم. اما دقت کنید که در مراحل دیگر به جای xها ۳ جاگذاری نمی‌کنیم بلکه با توجه به فلش‌ها همان عدد محاسبه شده را می‌گذاریم

پاسخ: $x=3 \to 2(3)-2=4 \qquad \frac{4}{\sqrt{(4)}+1}=\frac{4}{3}$

سوال ۸ اگر $f(g(x))=3x^2-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ ضابطه تابع $g(x)$ را به دست آورید. (خرداد - ۹۹)

نکته در این سوال تابع خارجی یعنی f را به ما داده و تابع داخلی یعنی g را خواسته، پس با توجه به تعریف ترکیب توابع اگر g(x) را به جای x در تابع f جایگزاری کنیم به تابع $f(g(x))$ می‌رسیم، سپس این دو را مساوی هم قرار داده و سعی می‌کنیم ضابطه تابع g را به دست آوریم

پاسخ: $f(g(x))=3g(x)-4=3x^2-6x+14 \Rightarrow g(x)=x^2-2x+6$

سوال ۹ ضابطه وارون تابع $g(x)=-5-\sqrt{3x+1}$ را به دست آورید. (دی - ۹۹)

نکته برای پیدا کردن ضابطه وارون یک تابع جای x و y را عوض می‌کنیم و سپس y را تنها می‌کنیم یا به عبارتی هر عملیاتی که انجام شده را برعکس انجام می‌دهیم تا به جواب برسیم برای مثال در این سوال

$$x \xrightarrow{\times 3} 3x \xrightarrow{+1} 3x+1 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{3x+1} \xrightarrow{\times(-1)} -\sqrt{3x+1} \xrightarrow{-5} -5-\sqrt{3x+1}$$

حال برای به دست آمدن وارون:

$$x \xrightarrow{+5} x+5 \xrightarrow{\div(-1)} -5-x \xrightarrow{\quad} (-5-x)^2 \xrightarrow{-1} (-5-x)^2-1 \xrightarrow{\div 3} \frac{(-5-x)^2-1}{3}$$

پاسخ:

$$-5-\sqrt{3x+1}=y \Rightarrow 3x+1=(y+5)^2$$

$$\Rightarrow x=\frac{(y+5)^2-1}{3} \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{(x+5)^2-1}{3} \Rightarrow D_{g^{-1}}=(-\infty,-5]$$

سوال ۱۰ اگر $f(x)=x^2-5$ و $g(x)=\sqrt{x+6}$ باشد. (دی - ۹۸)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) با محدود کردن دامنه تابع f تابعی وارون‌پذیر بسازید.

نکته در به دست آوردن پاسخ قسمت «الف» که مشکلی نداریم (در سوالات قبل بررسی شد) اما در مورد قسمت « ب » نکته‌ای که باید بدانیم این است که تابع درجه ۲ برای وارون شدن باید دامنه‌اش محدود شود و مرز این محدود شدن راس سهمی است. پس ابتدا راس سهمی را پیدا کرده و بازه دامنه را از راس محدود می‌کنیم

پاسخ:

الف) $D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۶,+\infty) \mid \sqrt{x+۶} \in R\} = [-۶,+\infty)$

ب) $h(x) = x^۲ - ۵ \qquad x \geq ۰$

سوال ۱۱ اگر دامنه تابع $f(x) = x^۲ + ۴x + ۳$ برابر $[-۲,+\infty)$ باشد، ضابطه و دامنه تابع وارون را به دست آورید

(شهریور - ۱۴۰۲)

نکته برای وارون کردن این تابع درجه ۲ ابتدا باید آن را به شکل مربع کامل بنویسیم و سپس طبق روش گفته شده در سوالات قبل عمل کنیم و در مورد دامنه تابع وارون هم باید بدانیم که برد خود تابع برابر با دامنه تابع وارون است پس با داشتن دامنه تابع و قرار دادن آن درون تابع برد را به دست می‌آوریم که همان دامنه تابع وارون است

پاسخ: :

$$f(x) = (x+۲)^۲ - ۱ \rightarrow y + ۱ = (x+۲)^۲ \xrightarrow{x \geq -۲}$$
$$\sqrt{y+۱} = x + ۲ \rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt{x+۱} - ۲ \rightarrow D_{f^{-۱}} = [-۱,+\infty)$$

سوال ۱۲ اگر $f(x) = \frac{۱}{۸}x - ۳$ و $g(x) = x^۳$ باشد، مقدار $g^{-۱}of^{-۱}(۵)$ را به دست آورید. (شهریور - ۹۸)

نکته برای حل کردن این سوال ۲ راه داریم: راه اول اینکه ابتدا دو تابع را وارون کنیم که با توجه به نکات گفته شده قادر به انجام این کار هستیم و سپس طبق تعریف تابع مرکب به جواب برسیم و راه دوم اینکه به جای استفاده از وارون از خود توابع استفاده کنیم به این صورت که به جای حل کردن خواسته سوال مسیر را برعکس برویم یعنی:

سوال: $۵ \rightarrow f^{-۱} \rightarrow g^{-۱} \rightarrow \xrightarrow{\text{برعکس}} \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow ۵$

ابتدا تابع **f** را مساوی ۵ گذاشته، **x** را به دست آوریم. سپس آن را مساوی تابع **g** گذاشته و به جواب نهایی برسیم.

پاسخ:

$f^{-۱}(x) = ۸x + ۲۴ \rightarrow f^{-۱}(۵) = ۶۴$

$g^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x}$

$g^{-۱}of^{-۱}(x) = g^{-۱}(۶۴) = \sqrt[۳]{۶۴} = ۴$

سوال ۱۳ نشان دهید توابع $f(x) = ۳x - ۴$ و $g(x) = \frac{x+۴}{۳}$ وارون یکدیگرند. (دی - ۹۸)

نکته برای پاسخ دادن به این سوال از این نکته می‌توان استفاده کرد:

$$\begin{cases} fog_{(x)} = x \\ gof_{(x)} = x \end{cases}$$

اگر این دو شرط برقرار باشد یعنی دو تابع وارون هم هستند.

پاسخ:

$$fog(x)=f\left(\frac{x+۴}{۳}\right)=۳\left(\frac{x+۴}{۳}\right)-۴=x$$

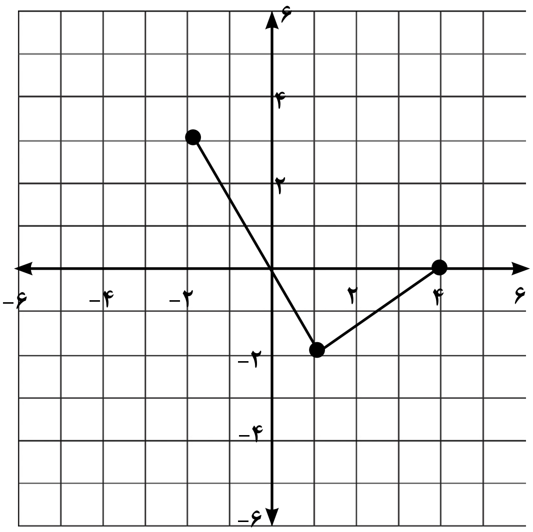
$$gof(x)=g(۳x-۴)=\left(\frac{۳x-۴+۴}{۳}\right)=x$$

سوال ۱۴ نمودار تابع f به صورت روبه رو است:

(شهریور - ۱۴۰۱)

الف) نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید.

ب) دامنه تابع g را به دست آورید.



نکته در مورد انتقال‌ها چند نکته مهم را باید بدانیم. اگر داشته باشیم:

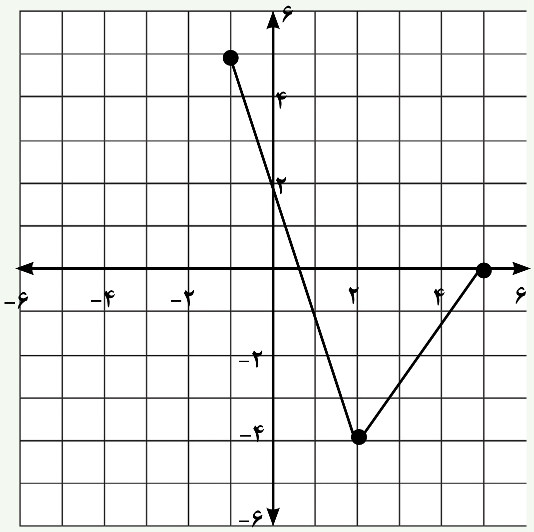
$$y=af(bx+c)+d$$

* a و d انتقال در راستای محور y هاست و همانطور که می‌بینیم.

* b و c انتقال در راستای محور x هاست و برعکس آنچه می‌بینیم.

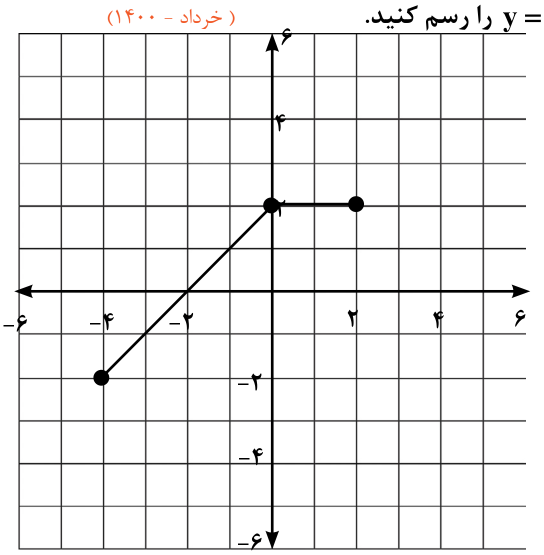
با توجه به نکات گفته شده برای انتقال این تابع کافیست y نقاط را دو برابر کرده و همه نقاط را در راستای محور x ها یک واحد جلو ببریم (برعکس) و دامنه جدید هم به دست می‌آید

پاسخ: الف) رسم دقیق نمودار



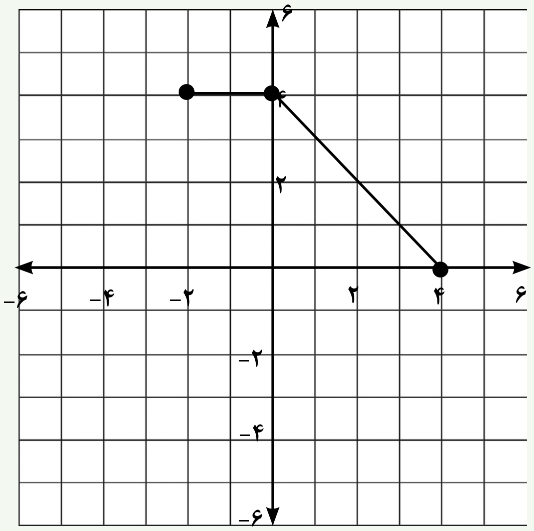
ب) $[-1,5]$

سوال ۱۵ با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$ ، نمودار تابع $y=f(-x)+2$ را رسم کنید. (خرداد - ۱۴۰۰)

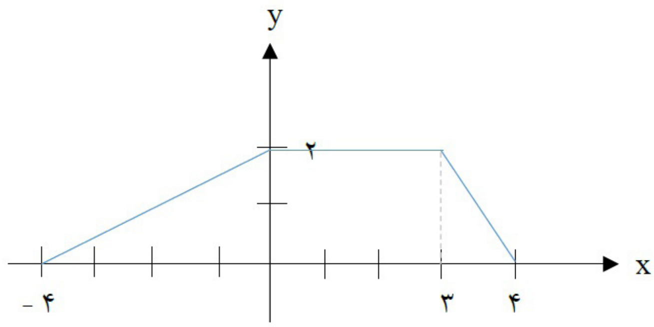


نکته مهم این سوال این است که بدانیم علامت منفی پشت کل تابع، آن را نسبت به محور x ها قرینه می‌کند و علامت منفی پشت x تابع را نسبت به محور y ها قرینه می‌کند. پس در اینجا تابع را نسبت به محور y ها قرینه و ۲ واحد به سمت بالا می‌بریم

پاسخ: رسم شکل



سوال ۱۶ با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید. (خرداد - ۹۸)



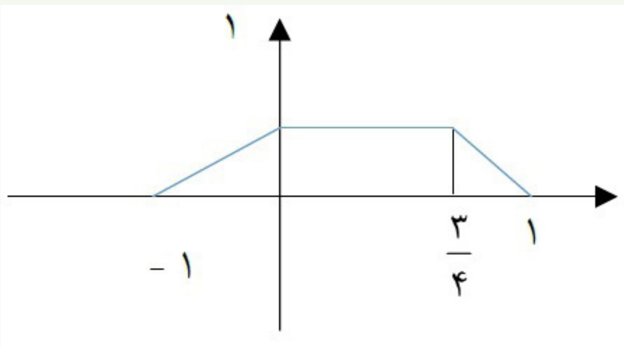
$y=f(x)$

نکته بـرای بـه دسـت آوردن راحت‌تـر تابـع انتقـال یافتـه ابتـدا نقـاط مـرزی تابـع (نقـاط ابتـدا و انتها و نقـاط شکسـتگی تابـع) را پیدا کـرده و انتقال‌هـا را روی آنهـا انجـام می‌دهیـم سـپس نقـاط حاصـل را روی دسـتگاه مختصـات پیـدا کـرده و طبق نمـودار اولیه بـه هم وصل می‌کنیـم. نقـاط مـرزی نمودار:

$(۳,۲)\rightarrow\left(\frac{۳}{۴},۱\right)$ $\qquad$ $(-۴,۰)\longrightarrow(-۱,۰)$

$(۴,۰)\rightarrow(۱,۰)$ $\qquad$ $(۰,۲)\rightarrow(۰,۱)$

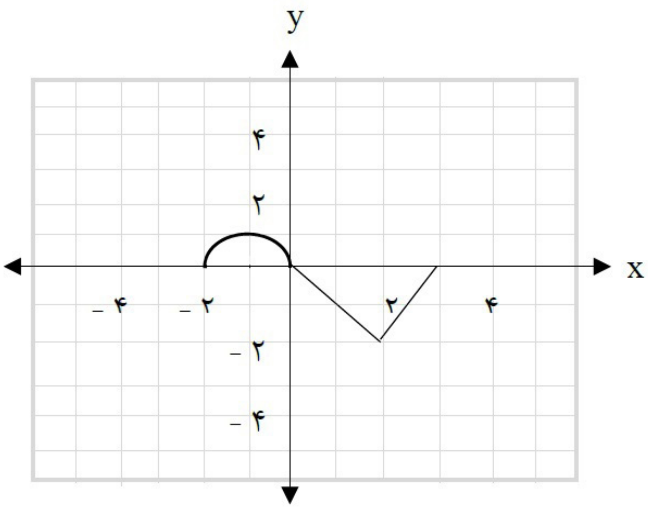
پاسخ:



سوال ۱۷ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است؛ (خرداد - ۹۹)

الف) نمودار تابع $y=۳f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ را رسم کنید.

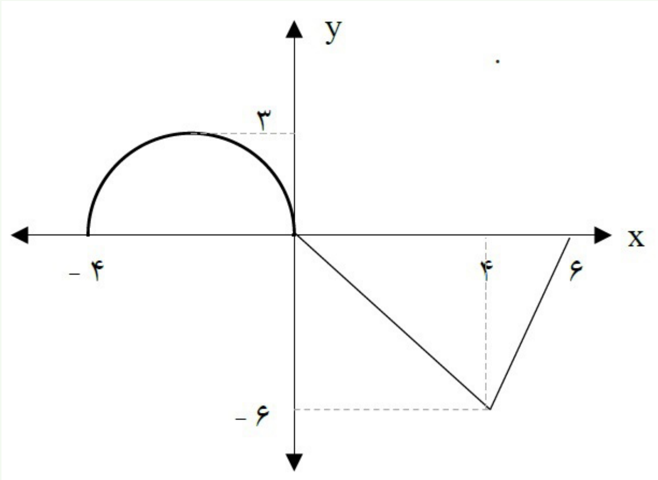
ب) دامنه تابع $y=۳f\left(\frac{۱}{۲}x\right)$ را تعیین کنید.



نکته در قسمت «الف» انتقال‌ها را طبق نکات گفته شده در سوالات قبل انجام می‌دهیم اما برای پیدا کردن دامنه تابع از روی نمودار تصویر نمودار روی محور x ها را نگاه می‌کنیم

پاسخ: الف) رسم شکل

ب) $D=[-۴,۶]$



سوال ۱۸ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^{۲}-۲x+۱$ را ابتدا دو واحد به سمت پایین سپس یک واحد به سمت چپ و در مرحله آخر نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. ضابطه نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید. (شهریور - ۱۴۰۰)

نکته در این سوال ابتدا تابع درجه ۲ را به فرم مربع کامل می‌نویسیم، سپس انتقال‌های گفته شده را به ترتیب در راستای محور x و y انجام می‌دهیم با توجه به نکات گفته شده در سوالات قبل و نکته مهم این است که انتقال در راستای محور y ها روی کل تابع و انتقال در راستای محور x فقط روی x انجام می‌شود.

پاسخ:

مرحله ۱	مرحله ۲	مرحله ۳
$f(x)-۲=(x-۱)^{۲}-۲$	$f(x+۱)-۲=x^{۲}-۲$	$-f(x+۱)+۲=-x^{۲}+۲$

سوال ۱۹ برد تابع f بازه $(-۳,۱]$ است. برد تابع $y= y=-۲f(۳x-۱)+۳$ کدام یک از موارد زیر است؟

(خرداد - ۱۴۰۱)

الف) $(-۸,۰]$ ب) $(-۱۲,۰]$ پ) $[۱,۹)$ ت) $[-۱۰,۲)$

نکته برای به دست آوردن برد جدید ابتدا انتقال‌های انجام شده در راستای محور y ها را مشخص می‌کنیم سپس انتقال‌ها را به ترتیب اولویت روی بازه داده شده انجام می‌دهیم

در این سوال برد ابتدا ضرب در عدد ۲ - و سپس با ۳ جمع شده. پس داریم:

$$(-۳,۱]\xrightarrow{\times(-۲)}[-۲,۶)\xrightarrow{+۳}[۱,۹)$$

پاسخ: گزینه پ

سوال ۲۰ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد - ۱۴۰۱)

بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است.

نکته چند نکته مهم را مرور کنیم؛

(۱) تابع هم صعودی هم نزولی: تابع ثابت

(۲) تابع نه صعودی نه نزولی: توابعی که در قسمتی صعود و در قسمتی نزول می‌کنند، مثل درجه ۲.

(۳) توابع اکیداً یکنوا: یکنوا نیز هستند اما برعکس این جمله الزاما صحیح نیست.

پاسخ: عبارت صحیح است.

سوال ۲۱ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. (دی - ۱۴۰۰)

نمودار تابع $f(x)=x^۳$ در بازه $(۰,۱)$، .... از نمودار تابع $g(x)=x^۲$ قرار دارد. (بالاتر - پایین‌تر)

نکته مقایسه نمودار درجه ۲ و ۳:

$$\begin{cases} x^۳ > x^۲ \leftarrow x>۱ \\ x^۲ > x^۳ \leftarrow ۱>x>۰ \\ x^۲ > x^۳ \leftarrow x<۰ \\ x^۲ = x^۳ \leftarrow ۱,۰ = x \end{cases}$$

پاسخ: پایین‌تر

سوال ۲۲ مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۱-۲\sin\left(\frac{-\pi}{۳}x\right)$ را به دست آورید. (خرداد - ۹۸)

نکته برای به دست آوردن مقدار Max و min در توابع سینوسی و کسینوسی کافیست از روابط زیر استفاده کنید:

$$y=a\underset{(\cos)}{\sin}(bx\pm d)\pm c \qquad \begin{array}{l} \text{Max}=|a|+c \\ \min=-|a|+c \end{array}$$

پاسخ:

$$\max=|-۲|+۱=۳ \qquad ,\min=-|-۲|+۱=-۱$$

سوال ۲۳ دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (خرداد - ۹۹)

$$y=\sqrt{۳}-\cos\frac{\pi}{۲}x$$

نکته برای به دست آوردن دوره تناوب توابع sin x و cos x از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

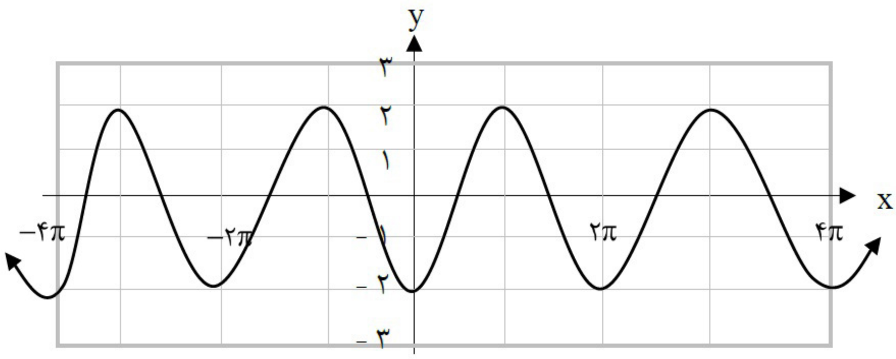
$$y=a\sin(\underbrace{bx}_{\text{تاثیر در دوره تناوب}}\pm d)\pm c \qquad T=\frac{۲\pi}{|b|}\ \text{دوره تناوب}$$

پاسخ:

$$T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$$

$$\max=|a|+c=1+\sqrt{3}$$
$$\min=-|a|+c=-1+\sqrt{3}$$

سوال ۲۴ نمودار زیر برای تابعی با ضابطه $f(x)=a\cos bx+c$ است. با دقت به شکل نمودار و تشخیص دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع، ضابطه آن را مشخص کنید. (دی - ۱۴۰۰)



نکته اگر مقدار Max و min تابع sin یا cos قرینه هم باشند، در این صورت $c=0$ است. مقدار a هم برابر Max است اما علامت آن به نحوه شروع تابع از مبدا بستگی دارد. در تابع cos اگر از بالا به سمت پایین (نزولی) آغاز شود $a>0$ و اگر از پایین به سمت بالا (صعودی) آغاز شود $a<0$ خواهد بود

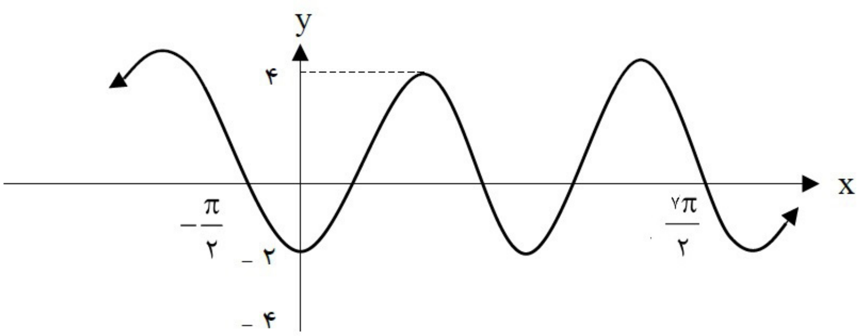
پاسخ:

$$|a|=\frac{2-(-2)}{2}=2 \qquad a=-2$$

$$|b|=\frac{2\pi}{2\pi}=1 \qquad b=1 \quad f(x)=-2\cos x$$

$$c=\frac{2+(-2)}{2}=0$$

سوال ۲۵ نمودار تابع با ضابطه $y=a\cos bx+c$ به صورت مقابل رسم شده است. مقادیر b ، a و c را به دست آورید. (دی - ۱۴۰۱)



نکته در توابع sin و cos برای به دست آوردن a و c از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$|a|=\frac{Max-min}{2} \qquad c=\frac{Max+min}{2}$$

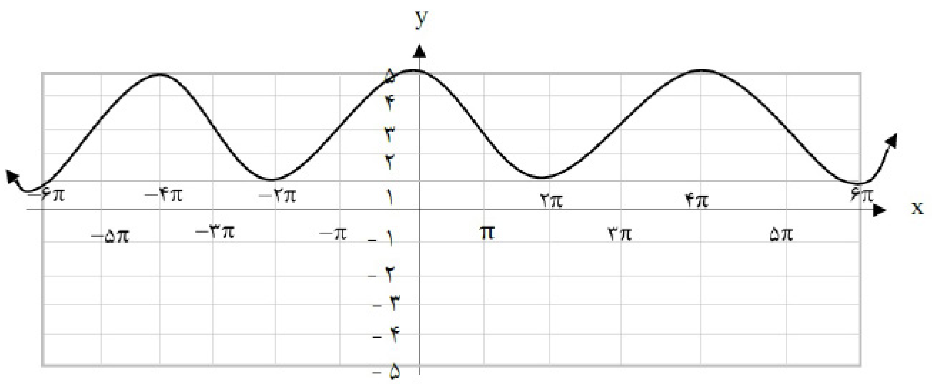
پاسخ:

$$2T=\frac{7\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})=4\pi \;\rightarrow T=2\pi \;\rightarrow \frac{2\pi}{|b|}=2\pi \;\rightarrow b=\pm 1$$

$$c=\frac{4+(-2)}{2}=1$$

$$|a|=\frac{4-(-2)}{2}=3\rightarrow a=-3$$

سوال ۲۶ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y=a\cos bx+c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید. (خرداد - ۱۴۰۰)



نکته بـرای پیـدا کـردن a و c از نـکات گفتـه شـده اسـتفاده می‌کنیـم اما برای پیدا کـردن b نیاز بـه دوره تناوب داریم. بـرای پیدا کردن دوره تنـاوب از روی نمودار از سـه روش می‌توانیم اسـتفاده کنیم

(۱) فاصله بین دو نقطه Max تابع

(۲) فاصله بین دو نقطه min تابع

(۳) از یک برخورد تا دومین برخورد و پس از آن با محور x ها

پاسخ:

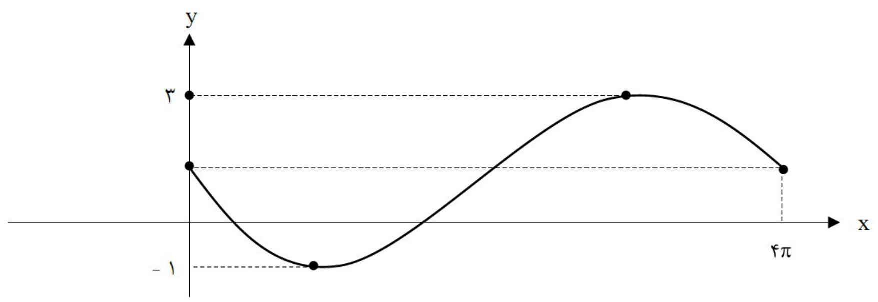
$$c=\frac{5+1}{2}=3$$

$$|a|=\frac{5-1}{2}=2 \;\; a>0, a=2$$

$$b=\frac{2\pi}{4\pi}=\frac{1}{2} \;\rightarrow y=2\cos\left(\frac{x}{2}\right)+3$$

$$\rightarrow y=2\cos\left(-\frac{x}{2}\right)+3$$

سوال ۲۷ نمودار زیر قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin bx+1$ است. حاصل ab را بیابید. (خرداد - ۱۴۰۲)



نکته در تابع sin اگر نمودار در مبدا از بالا به سمت پایین (نزولی) آغاز شود، $ab<0$ و اگر از پایین به بالا (صعودی) آغاز شود، $ab>0$ است

پاسخ:

$$\frac{2\pi}{|b|}=4\pi \Rightarrow b=\pm\frac{1}{2}$$

$$|a|=\frac{3-(-1)}{2}=2\Rightarrow a=\pm2$$

با توجه به نمودار تابع، ab باید عددی منفی شود. بنابراین $ab=-1$

سوال ۲۸ معادله یک تابع سینوسی $y=a\sin(bx)+c$ را بنویسید که برد آن $[-4,4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.
(خرداد - ۱۴۰۱)

نکته با داشتن بازه برد، Max و min را داریم که با استفاده از آن می‌توانیم a و c را به دست می‌آوریم و با داشتن دوره تناوب هم مقدار b به دست می‌آید ولی چون نمودار تابع را نداریم و از نحوه شروع شدن اطلاعی نداریم چند تابع ممکن است به دست آید

پاسخ:

$$|b|=\frac{2\pi}{2}=\pi \to b=\pm\pi$$

$$|a|=\frac{4-(-4)}{2}=4\to a=\pm4 \quad \to y=\pm4\sin(\pm\pi x)$$

$$c=\frac{4+(-4)}{2}=0$$

سوال ۲۹ مقدار عددی $\sin 15^\circ$ را محاسبه کنید.
(دی - ۹۹)

نکته برای پیدا کردن sin یا cos زوایایی که دو برابر آنها زاویه معروفی است از روابط دو برابر کمان استفاده می‌کنیم و طبیعتاً با توجه به خواسته سوال رابطه مناسب را انتخاب می‌کنیم

پاسخ:

پاسخ پیشنهادی

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x\Rightarrow$$

$$\cos 30=1-2\sin^2 15\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}=1-2\sin^2 15$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2}=\sin^2 15\Rightarrow \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}=\sin 15$$

$$\sin 15=\sqrt{\frac{1-\cos 30}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

سوال ۳۰ معادله مثلثاتی $\sin 2x=\sin x$ را حل کنید.
(خرداد - ۱۴۰۱)

نکته وقتی دو طرف تساوی یک نوع نسبت مثلثاتی داریم فقط کافی است مستقیم از روابط حل معادلات مثلثاتی مربوط به آن نسبت را استفاده کنیم که برای sin برابر است با

$$\sin\square=\sin\bigcirc\to\begin{cases}\square=2k\pi+\bigcirc\\ \square=2k\pi+\pi-\bigcirc\end{cases}$$

پاسخ:

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \qquad \to x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \to x = \dfrac{2k\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

سوال ۳۱ جواب (های) معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x = 0$ را در بازه $(0,\pi)$ مشخص کنید. (خرداد - ۱۴۰۲)

نکته وقتی دو نسبت مثلثاتی مشابه یک سمت تساوی داریم ابتدا یکی را به سمت دیگر برده که بتوانیم از روابط حل معادلات مثلثاتی استفاده کنیم. در نهایت پاسخ‌های به دست آمده که در بازه گفته شده هستند را انتخاب می‌کنیم

$$\cos\square = \cos\bigcirc \to \{\square = 2k\pi \pm \bigcirc$$

پاسخ:

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

سوال ۳۲ معادله مثلثاتی $\cos 2x - \sin x + 1 = 1$ را حل کنید. (دی - ۱۴۰۰)

نکته اگر در معادله مثلثاتی دو نسبت مختلف داشتیم ابتدا با استفاده از روابط آنها را به یک نسبت تبدیل می‌کنیم تا بتوانیم از روابط حل معادلات مثلثاتی استفاده کنیم

پاسخ:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \qquad \Rightarrow x = 2k\pi - \dfrac{\pi}{2} \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \qquad \begin{cases} x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \dfrac{\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

سوال ۳۳ معادله مثلثاتی $\cos x(2\cos x - 9) = 5$ را حل کنید. (خرداد - ۹۹)

نکته اگر در حل معادله مثلثاتی به عبارت درجه ۲ رسیدیم ابتدا با تغییر متغیر مانند تابع درجه دو ریشه‌ها را پیدا می‌کنیم سپس نسبت مثلثاتی که داشتیم را مساوی ریشه‌ها گذاشته و در صورت قابل قبول بودن با استفاده از روابط حل معادلات مثلثاتی جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم

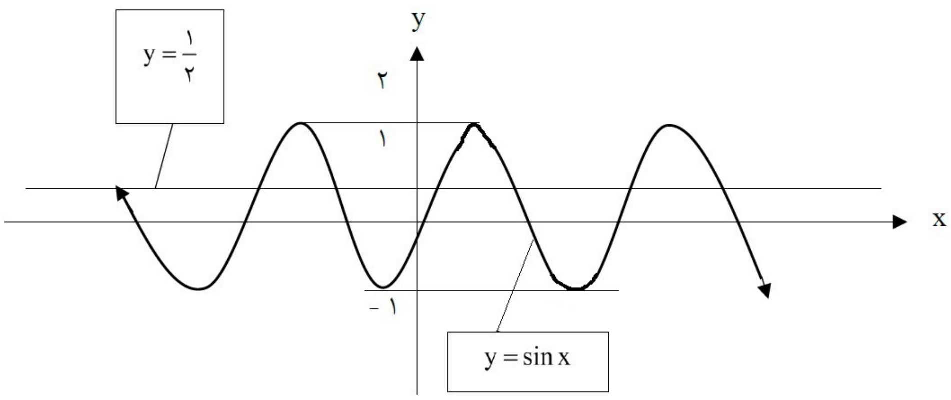
پاسخ:

$$2\cos^2 x - 9\cos x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \\ \cos x = 5 \qquad \cos x = 5 \end{matrix}$$

$\cos x = t \rightarrow 2t^2 - 9t - 5 = 0$ غ ق ق

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow t = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \begin{cases} \frac{9 + \sqrt{121}}{4} = 5 \\ \frac{9 - \sqrt{121}}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

سوال ۳۴ نمودار تابع با ضابطه $y = \sin x$ و خط به معادله $y = \frac{1}{2}$ در دستگاه مختصات زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.
(دی - ۱۴۰۱)



نکته برای پیدا کردن نقاط برخورد دو تابع باید آنها را با هم قطع بدهیم یا به عبارتی مساوی هم بگذاریم که در این صورت به یک معادله مثلثاتی خواهیم رسید که با توجه به روابط نقاط برخورد به دست می‌آید

پاسخ:

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\frac{\pi}{6} \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} (k \in Z)$$

سوال ۳۵ مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع این مثلث به ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟
(شهریور - ۱۴۰۰)

نکته : یکی از راه‌های پیدا کردن مساحت مثلث استفاده از اندازه دو ضلع و زاویه بین آنها است. به این صورت که $S = \frac{1}{2} a.b.\sin\theta \leftarrow$

حال در صورت داشتن مساحت و اندازه ضلع‌ها مجهول ما زاویه است که با جایگذاری مقادیر به یک معادله مثلثاتی می‌رسیم که زوایای ممکن به دست خواهند آمد

پاسخ:

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 \sin\theta = 8\sqrt{2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ , \theta = 135^\circ$$

دو مثلث می‌توان رسم کرد.

سوال ۳۶ حاصل عبارت $4\sin x\cos x\cos 2x$ را به ازای $x = 7/5^{\circ}$ محاسبه نمایید. (شهریور - ۱۴۰۰)

نکته در این گونه سوالات معمولاً با استفاده از رابطه $\sin 2a = 2\sin a\cos a$ رابطه داده شده را ساده می‌کنیم تا با جایگذاری x زاویه‌ای به دست آمده، زاویه‌ای شود که ما نسبت‌های مثلثاتی آن را بلدیم

پاسخ:

$$2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x = \sin 4(7/5^{\circ}) = \frac{1}{2}$$

سوال ۳۷ درستی یا نادرستی جمله زیر را مشخص کنید. (خرداد - ۹۸)

دوره تناوب تابع $y = \tan x$ برابر 2π است. (درست، نادرست)

نکته دوره تناوب تابع $\tan x$ برابر با π است و در $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ تعریف شده نیست و این تابع در هر بازه تعریف شده از دامنه اکیداً صعودی است ولی در کل دامنه، نه صعودی نه نزولی

پاسخ: نادرست

سوال ۳۸ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خرداد - ۹۹)

برد تابع $y = \tan x$ برابر .... است.

نکته برد تابع $\tan x$ برابر با R یا مجموعه اعداد حقیقی است اما دامنه آن همه اعداد حقیقی به جز $k \in Z, x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ باشد

پاسخ: R

سوال ۳۹ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. (خرداد - ۱۴۰۱)

باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2 - 5x + 1$ بر $x - 3$ برابر .... است.

نکته برای به دست آوردن باقیمانده تقسیم عبارت $f(x)$ بر $(x-a)$ کافیست ریشه عبارت $(x-a)$ یعنی a را درون $f(x)$ قرار دهیم.

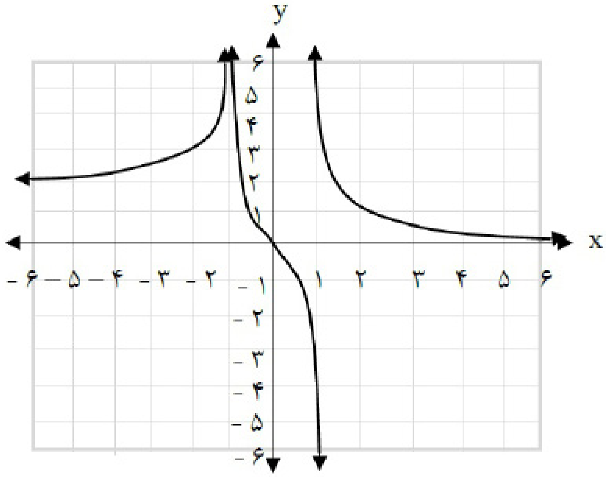
پاسخ:

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \Rightarrow 2x^2 - 5x + 1 \xrightarrow{x=3} 4$$

سوال ۴۰ نمودار تابع f به صورت شکل مقابل است. حدود خواسته شده را محاسبه کنید. (خرداد - ۱۴۰۱)

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$



نکته برای به دست آوردن حد تابع از روی نمودار زمانی که x به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، با توجه به اینکه $+\infty$ یا $-\infty$ است. سمت راست یا چپ نمودار را نگاه می‌کنیم و عددی که به آن نزدیک می‌شویم را (روی محور y ها) به عنوان پاسخ اعلام می‌کنیم

پاسخ:

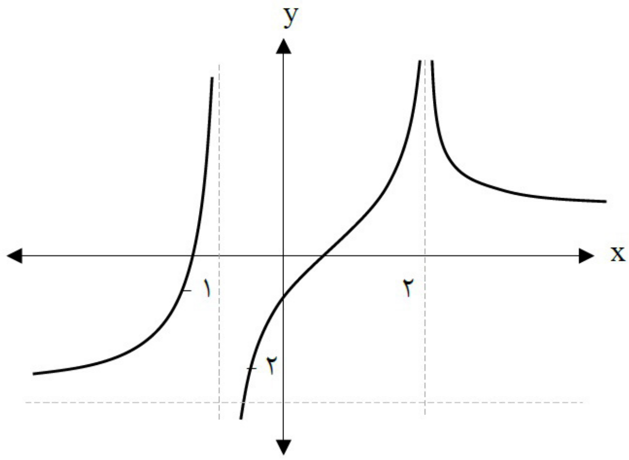
الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۲$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$

سوال ۴۱ نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید. (دی - ۱۴۰۱)

الف) $\lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to۲^-} f(x)$



نکته برای به دست آوردن حد تابع از روی نمودار وقتی x به سمت یک عدد میل می‌کند، باید توجه کنیم که از سمت کمتر یا بیشتر به آن عدد نزدیک می‌شویم. برای مثال $x\to۲^-$ یعنی از سمت چپ به ۲ نزدیک می‌شویم یا $x\to(-۱)^+$ یعنی از سمت راست به ۱ - نزدیک می‌شویم و با توجه به این نکته باید ببینیم با حرکت در این جهت در راستای محور y به چه مقداری نزدیک می‌شویم

پاسخ:

الف) $-\infty$

ب) $+\infty$

سوال ۴۲ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (خرداد - ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{3}\right)}\frac{[x]}{|3x+1|}$$

نکته برای محاسبه حد همیشه قدم اول جاگذاری است یعنی عددی که به آن نزدیک می‌شویم را درون تابع جاگذاری می‌کنیم که گاهی در همین مرحله به جواب می‌رسیم اما اگر به ابهام $\frac{0}{0}$ یا عدد تقسیم بر بی نهایت یا عدد تقسیم بر صفر رسیدیم، به دنبال رفع ابهام و ... می‌رویم. در اینجا اگر $-\frac{1}{3}$ را جاگذاری کنیم صورت کسر برابر ۱ - و مخرج کسر برابر صفر حدی می‌شود و چون درون قدر مطلق است، مقدارش مثبت است پس حاصل حد $-\infty$ می‌شود

پاسخ:

$$\lim_{x\to-\frac{1}{3}}\frac{-1}{|3x+1|}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

سوال ۴۳ حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (شهریور - ۱۴۰۱)

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$$

نکته یکی از اتحادهای پرکاربرد برای رفع ابهام کردن در سوالات حد اتحاد مزدوج است. در اکثر موارد زمانی که رادیکال در صورت یا مخرج داریم با ضرب کردن صورت و مخرج در مزدوج عبارت دارای رادیکال رادیکال از بین رفته و عامل صفر شونده را از صورت و مخرج خط می‌زنیم تا پاسخ حد با جاگذاری به دست آید

پاسخ:

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}\times\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}=\frac{1}{6}$$

سوال ۴۴ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (خرداد - ۹۹)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x-\sqrt{x+6}}$$

نکته اگر در تابعی بعد از جاگذاری ابهام $\frac{0}{0}$ ایجاد شد و در ضابطه تابع عبارت درجه ۲ داشتیم آن را تجزیه و اگر رادیکال داشتیم در مزدوجش ضرب می‌کنیم، سپس عوامل صفر شونده در صورت و مخرج ظاهر می‌شوند که با خط زدن آنها پاسخ به دست می‌آید

پاسخ:

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)\left(x+\sqrt{x+6}\right)}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)\left(x+\sqrt{x+6}\right)}{(x+2)(x-3)}=\frac{24}{5}$$

سوال ۴۵ حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. (خرداد - ۹۸)

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{[x]}{\sin x}=$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{(x-1)(x+2)}=$

نکته اگر در ضابطه تابع جز صحیح وجود داشت ابتدا آن را محاسبه و مقدارش را جایگذاری می‌کنیم سپس به ادامه حل سوال می‌پردازیم

پاسخ:

الف) $\frac{-1}{0^-}=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{(x+2)(x-1)}\times\frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{(x+2)(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)\left(x+\sqrt{x}\right)}=+\frac{1}{6}$

سوال ۴۶ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دی - ۱۴۰۰)

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{2x^2-x}{4x^2-1}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\sin^2 x}$

نکته برای محاسبه حدهای مثلثاتی مانند حدهای عددی عمل می‌کنیم مقدار نسبت مثلثاتی را به دست می‌آوریم و با توجه به اینکه از سمت کمتر یا بیشتر به آن نزدیک می‌شویم تعیین می‌کنیم که از آن مقدار کمتر هستیم یا بیشتر. البته در حل حدهای مثلثاتی استفاده از دایره مثلثاتی بسیار راهگشا خواهد بود

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(x)(2x-1)}{(2x+1)(2x-1)}=\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{(x)}{(2x+1)}=\frac{1}{4}$

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+1}{\sin^2 x}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

سوال ۴۷ آیا مقدار $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟ (خرداد - ۱۴۰۲)

نکته در این سوال چون x درون جز صحیح است، اگر 1^+ را درون آن بگذاریم عدد ۱ را به ما تحویل می‌دهد که مخرج صفر می‌شود و این صفر، صفر حدی نیست بلکه صفر مطلق است و در این صورت تابع تعریف نشده خواهد شد

پاسخ: خیر - زیرا تابع $f(x)=\frac{1}{[x]-1}$ در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده است.

سوال ۴۸ حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (شهریور - ۱۴۰۱)

الف) $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\frac{1}{\cos x}$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-x}{5x+4}$

نکته برای محاسبه حد زمانی که x به سمت ∞ می‌رود از صورت و مخرج تابع عبارت پرتوان را برمی‌داریم به اصطلاح از هم ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم، یعنی کل تابع را در صورت و مخرج معادل عبارت با توان بیشتر قرار می‌دهیم. حال اگر توان صورت و مخرج برابر باشد با هم ساده شده و پاسخ حد یک عدد خواهد شد

پاسخ:

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{5x}=-\frac{1}{5}$

سوال ۴۹ در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید. (خرداد - ۹۹)

حد تابع $f(x)=\frac{5x+4}{x^3+x-8}$ وقتی که $x\to-\infty$ برابر .... است.

نکته اگر بعد از استفاده از هم ارزی پرتوان، توان عبارت مخرج از صورت بیشتر باشد، پس از ساده شدن و جاگذاری پاسخ صفر حدی خواهد شد که + یا - بودن آن را محاسبه می‌کنیم

پاسخ: صفر یا همان 0^-

سوال ۵۰ حد تابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (شهریور - ۱۴۰۰)

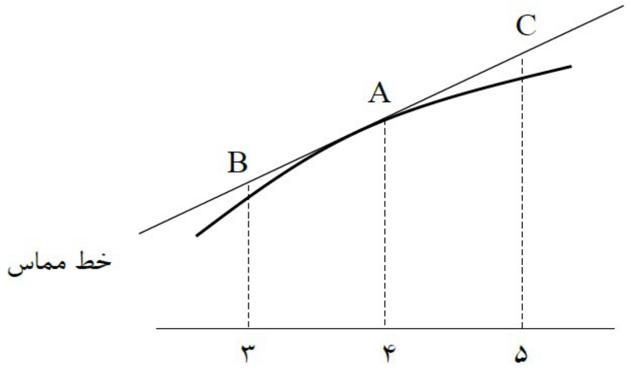
$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^7+5x^2}{2x^3+9}$$

نکته اگر بعد از استفاده از هم ارزی پرتوان، توان عبارت صورت از مخرج بیشتر باشد پس از ساده شدن و جاگذاری پاسخ بی‌نهایت خواهد شد که + یا - بودن آن را محاسبه می‌کنیم

پاسخ:

$$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^7\left(-4+\frac{5}{x^5}\right)}{x^3\left(2+\frac{9}{x^3}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2)x^4=-\infty$$

سوال ۵۱ برای تابع f در شکل روبرو داریم $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۴$ با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.
(خرداد - ۱۴۰۰)



نکته مشتق یعنی شیب خط مماس بر یک نقطه. در این سوال مختصات نقطه A که داده شده و با توجه به مشتق در نقطه A که ۱/۵ است. یعنی شیب خط رسم شده ۱/۵ بوده و دو نقطه B و C هم روی این خط هستند و با توجه به مشخص بودن x دو نقطه آنها نیز به راحتی قابل محاسبه است

پاسخ:

$$\frac{f(۴)-f(۳)}{۴-۳}=۱/۵ \Rightarrow, B(۳,۲۲/۵) \rightarrow \frac{f(۵)-f(۴)}{۵-۴}=۱/۵ \Rightarrow, C(۵,۲۵/۵)$$

سوال ۵۲ اگر توابع f, g مشتق پذیر باشند و $f(۲)=۳$، $f'(۲)=۵$، $g(۲)=۸$، $g'(۲)=-۶$ حاصل $(fg)'(۲)$ را به دست آورید.
(خرداد - ۱۴۰۱)

نکته در این سوال مشتق ضرب دو تابع خواسته شده پس ابتدا با توجه به قوانین مشتق‌گیری مشتق ضرب در نقطه ۲ را می‌نویسیم سپس مقادیر را جایگذاری می‌کنیم.

پاسخ:

$$(fg)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲)g'(۲)=۵\times۸+۳(-۶)=۲۲$$

سوال ۵۳ مشتق تابع $f(x)=x^۳-۲$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول $x=-۱$ به دست آورید.
(خرداد - ۹۸)

نکته برای محاسبه مشتق یک تابع ابتدا از رابطه تعریف مشتق استفاده کرده سپس سعی می‌کنیم ساده‌سازی را در صورت و مخرج انجام داده و مانند فصل حد در صورت لزوم عامل صفر شونده را از صورت و مخرج حذف کنیم

رابطه تعریف مشتق ←
$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

پاسخ:

$$f'(-۱)=\lim_{x\to -۱}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{x^۳-۲+۳}{x+۱}=\lim_{x\to -۱}\frac{(x+۱)(x^۲-x+۱)}{x+۱}=۳$$

سوال ۵۴ به کمک تعریف مشتق، مشتق پذیری تابع $f(x)=|x^۲-۴|$ را در نقطه $x=-۲$ بررسی کنید.

(خرداد - ۹۹)

نکته بـرای حـل ایـن سـوال نکتـه‌ای کـه باید بـه آن دقت کنیم این اسـت کـه ابتدا قدر مطلـق را حول ریشـه تعیین علامـت کنیم و یک بـار مشـتق چـپ و یک بار مشـتق راسـت را محاسـبه کنیـم اگر این دو مقـدار برابر بـود، تابع در آن نقطه مشـتق دارد

پاسخ:

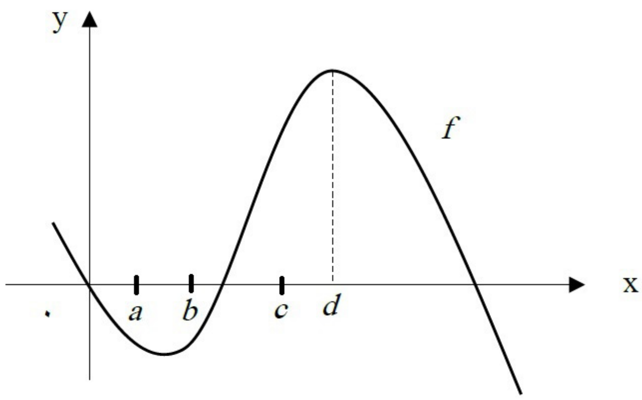
$$f'_{+}(-۲)=\lim_{x\to -۲^{+}}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=\frac{-\cancel{(x+۲)}(x-۲)}{\cancel{x+۲}}=(x-۲)=۴$$

$$\Rightarrow f'_{+}(-۲)\neq f'_{-}(-۲)$$

$$f'_{-}(-۲)=\lim_{x\to -۲^{-}}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x+۲}=\frac{\cancel{(x+۲)}(x-۲)}{\cancel{x+۲}}=x-۲=-۴$$

سوال ۵۵ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، نقاط به طول‌های a و b و c و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.

(دی - ۹۸)



x	f'(x)
	۰
	۰/۵
	۲
	-۰/۵

نکته مشـتق یعنـی شیـب خـط مماس در هـر نقطـه پس بـرای هـر نقطـه خـط مماس بـر آن را رسـم می‌کنیـم و بـا مقایسـه شیب‌ها مقـدار مشـتق هـر کـدام را در جـدول پیـدا می‌کنیـم بـرای مثال نقطه d چـون خط مماس بر آن مـوازی محور x ها اسـت، شیب و مشـتق آن صفر اسـت.

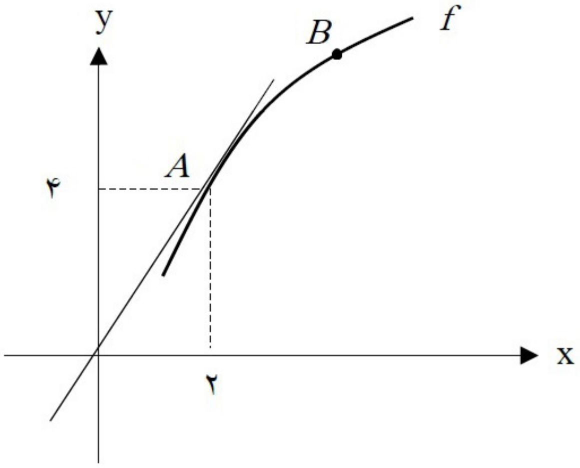
پاسخ:

x	d	b	c	a
f'(x)	۰	۰/۵	۲	-۰/۵

سوال ۵۶ نمودار تابع f به صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطه A بر نمودار تابع f مماس باشد:(دی - ۱۴۰۱)

الف) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید.

ب) شیب خطهای مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.



نکته: خط d مماس بر نقطه A و گذرنده از مبدا است، پس معادله و شیب آن را پیدا می‌کنیم. در قسمت اول سوال رابطه تعریف مشتق داده شده یعنی مشتق در نقطه ۲ را از ما خواسته که همان شیب خط d است و در قسمت ب هم مقایسه شیب خط مماس در نقطه A و B است که هرچه خط مماس به محور y ها نزدیک‌تر باشد شیب بیشتر است

پاسخ:

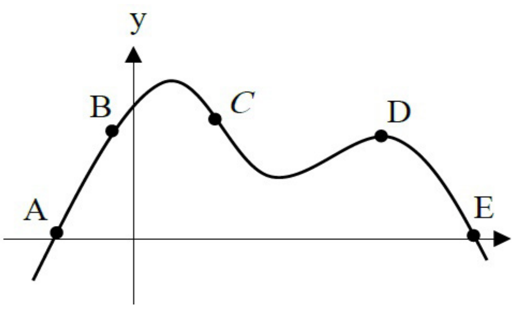
الف) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=۲$

ب) $m_A>m_B$

سوال ۵۷ از بین نقاط مشخص شده A و B و C و D و E روی نمودار مقابل، در کدام نقطه: (شهریور - ۱۴۰۱)

الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟



نکته: در قسمت « الف » سوال نقطه‌ای که مقدار آن صفر ولی مشتق آن مثبت باشد را خواسته که با توجه به نمودار ۲ نقطه A و E مقدار صفر دارند اما شیب خط مماس فقط در A مثبت است و در قسمت « ب » مقدار تابع مثبت و مشتق منفی که از بین ۳ نقطه B و C و D با مقدار مثبت فقط مشتق C منفی است. (شیب خط مماس بر B مثبت و در D صفر است.)

پاسخ:

الف) A

ب) C

سوال ۵۸ معادله نیم مماس راست تابع $f(x)=|x^{۲}-۱|$ را در نقطه‌ای به طول $x=۱$ واقع بر منحنی بنویسید.

(شهریور - ۱۴۰۱)

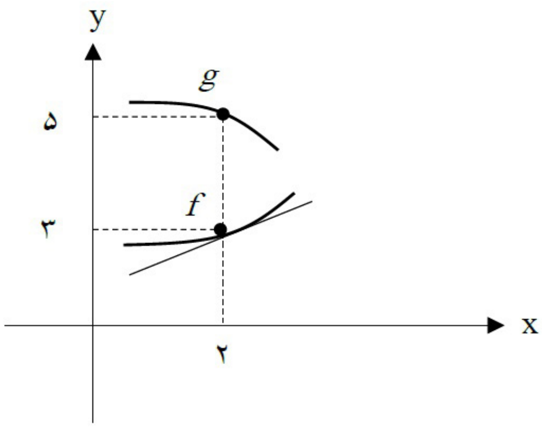
نکته معادله نیم مماس راست تابع یعنی همان مشتق راست یا همان مشتق $x=۱^{+}$ را باید محاسبه کنیم که با توجه به این نکته قدر مطلق را تعیین علامت کرده و مشتق را با استفاده از تعریف به دست می‌آوریم

پاسخ:

$$f'_{+}(۱)=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{|x^{۲}-۱|-۰}{x-۱}\lim_{x\to ۱^{+}}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^{+}}x+۱=۲$$

سوال ۵۹ با توجه به نمودارهای توابع f و g حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}$ چند برابر $f'(۲)$ است؟

(خرداد - ۱۴۰۲)



نکته اگر به رابطه داده شده در صورت سوال توجه کنیم با فاکتورگیری **g (x)** به عبارت تعریف مشتق برای تابع **f** می‌رسیم اما چون مشتق تابع **f** را نداریم خود $f'(x)$ را می‌گذاریم اما مقدار **g (x)** که فاکتور گرفتیم را جایگذاری می‌کنیم که پاسخ سوال به دست می‌آید

پاسخ:

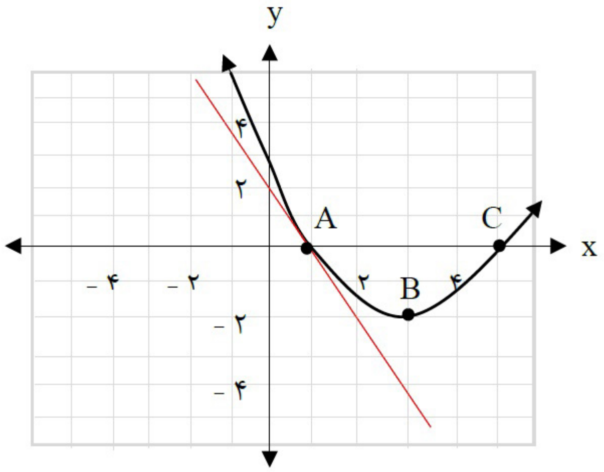
$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-f(۲)g(x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}g(x)\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}g(x)\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=۵f'(۲)$$

سوال ۶۰ در نمودار مقابل خط d در نقطه $x = ۱$ بر نمودار f مماس شده است: (دی - ۱۴۰۰)

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x = ۱$ محاسبه کنید.

ب) شیب نمودار را در نقاط B و C مقایسه کنید.



نکته در این سوال قسمت الف را با محاسبه شیب خط به دست می‌آوریم و قسمت ب هم می‌توانیم خط مماس رسم کنیم و شیب را مقایسه کنیم

پاسخ:

الف) $f'(۱) = \frac{۲-۰}{۰-۱} = -۲$

ب) $m_B < m_C$

سوال ۶۱ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطه $x = -۱$ بررسی کنید. (دی - ۱۴۰۰)

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳ & x \geq -۱ \\ ۲x + ۶ & x < -۱ \end{cases}$$

نکته توابع پیوسته مشتق پذیرند مگر در نقاط مرزی مثل نقطه $x = -۱$ که نقطه مرز ضابطه‌ها است. پس برای بررسی مشتق پذیری مشتق راست آن را از ضابطه بالا و مشتق چپ آن را از ضابطه پایین باید به دست آوریم که در صورت برابر بودن مشتق پذیر است. این کار را با استفاده از تعریف مشتق یا قواعد مشتق‌گیری انجام می‌دهیم

پاسخ:

$$f'_+(-۱) = \lim_{x \to -۱^+} \frac{x^۲ + ۳ - ۴}{x - (-۱)} = -۲$$

$$f'_-(-۱) = \lim_{x \to -۱^-} \frac{۲x + ۶ - ۴}{x - (-۱)} = ۲$$

$$\Rightarrow f'_+(-۱) \neq f'_-(-۱)$$

$f'(-۱)$ موجود نیست.

سوال ۶۲ اگر $f(x) = \begin{cases} ax + ۱ \to x < ۰ \\ x^۲ + ۳x + ۱ \to x \geq ۰ \end{cases}$ در $x = ۰$ مشتق پذیر باشد، مقدار a را محاسبه کنید. (خرداد - ۱۴۰۱)

نکته در اینجا می‌دانیم که تابع در نقطه $x = ۰$ که نقطه مرزی تابع است، مشتق دارد یعنی مشتق چپ و راست با هم برابر است. پس با استفاده از تعریف یا قواعد مشتق‌گیری مشتق چپ و راست را محاسبه و مساوی هم می‌گذاریم تا مقدار a به دست آید

پاسخ: تابع f در نقطه $x=0$ پیوسته است.

$$\begin{matrix} f'_+(0)=3 \\ f'_-(0)=a \end{matrix} \to a=3$$

سوال ۶۳ تابع $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<0 \\ x^2-1 & x\ge 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید: (خرداد - ۹۸)

الف) نشان دهید $f'(0)$ وجود ندارد.

ب) ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

ج) نمودار تابع f' را رسم کنید.

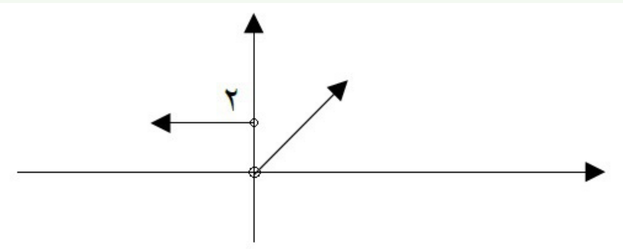
نکته در این سوال برای قسمت « الف » که کافیست مشتق چپ و راست را در نقطه $x=0$ بررسی کنیم اما برای قسمت « ب » از هر ضابطه مشتق می‌گیریم و مثل خود تابع می‌نویسیم فقط حواسمان هست که تابع مشتق یا $f'(x)$ است. فقط نکته مهم اینجاست که اگر در نقطه $x=0$ مشتق نداشتیم، علامت مساوی را در دامنه نمی‌گذاریم و در واقع آن را از دامنه تابع مشتق حذف می‌کنیم.

پاسخ: الف) در $x=0$ گوشه‌ای و مشتق ناپذیر است.

ب)

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ 2x & x>0 \end{cases}$$

ج)



سوال ۶۴ اگر $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<0 \\ x & x\ge 0 \end{cases}$ نشان دهید $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ موجودند ولی $f'(0)$ موجود نیست. (دی - ۹۸)

نکته در این سوال منظور از صورت سوال این است که مشتق چپ و راست این تابع در نقطه $x=0$ وجود دارد ولی با هم برابر نیستند پس نقطه مشتق ناپذیر است. پس کافیست ما مشتق چپ و راست را محاسبه کنیم

پاسخ:

$$\begin{matrix} f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x-0}{x-0}=1 \\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-0}{x-0}=0 \end{matrix} \Rightarrow f'_+(0)\ne f'_-(0)$$

$f'(0)$ موجود نیست.

سوال ۶۵ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خرداد - ۱۴۰۱)

$$f(x)=\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}$$

نکته سوالات مشتق‌گیری پای ثابت امتحانات نهایی است پس باید به قواعد آن مسلط باشیم. در اینجا یک تابع رادیکالی که زیر آن کسر وجود دارد و باید مشتق گیری را انجام دهیم که دو راه وجود دارد یا مشتق رادیکالی بلد باشیم یا رادیکال فرجه ۲ را به توان $\frac{1}{2}$ تبدیل کنیم و مشتق از توان بگیریم

پاسخ:

$$f'(x)=\frac{\frac{9(x+1)-1(9x-2)}{(x+1)^2}}{2\sqrt{\frac{9x-2}{x+1}}}$$

سوال ۶۶ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (دی - ۹۹)

الف) $f(x)=(\frac{x^2}{3x-1})^5$

ب) $g(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$

نکته برای به دست آوردن مشتق در این سوال به مشتق‌گیری توان و رادیکال و کسر و همچنین مشتق ضرب باید مسلط باشیم و نکته مهم اینکه نیاز به ساده‌سازی هم نیست و همه مراحل را به همان شکل کامل می‌نویسیم.

پاسخ:

الف) $f'(x)=5(\frac{x^2}{3x-1})^4(\frac{2x(3x-1)-3x^2}{(3x-1)^2})$

ب) $g'(x)=(\frac{3}{2\sqrt{3x+2}})(x^3+1)+3x^2(\sqrt{3x+2})$

سوال ۶۷ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (خرداد - ۱۴۰۲)

الف) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+4)$

ب) $g(x)=\frac{-7x^2+1}{x-6}$

پ) $h(x)=(2x^5-1)^4$

نکته برای حل سوالات مشتق‌گیری حتماً به قاعده مشتق تابع مرکب مسلط باشید تا در حل این سوالات به مشکل بر نخورید.

پاسخ:

الف) $f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}(x^{۳}+۴)+۳x^{۲}(\sqrt{۳x+۲})$

ب) $g'(x)=\frac{(-۱۴x)(x-۶)-(۱)(-۷x^{۲}+۱)}{(x-۶)^{۲}}$

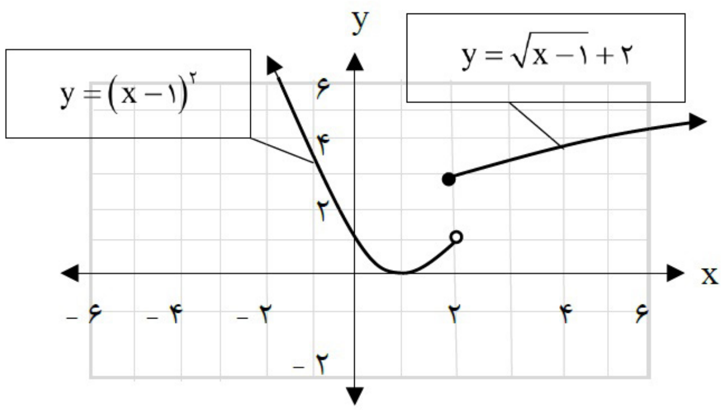
پ) $h'(x)=۴(۲x^{۵}-۱)^{۳}(۱۰x^{۴})$

سوال ۶۸ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۲ & x\geq ۲\\ (x-۱)^{۲} & x<۲\end{cases}$ به صورت مقابل است: (دی - ۱۴۰۱)

الف) آیا تابع f در نقطه $x=۲$ مشتق پذیر است؟

ب) آیا تابع در بازه $(-\infty,۲)$ مشتق پذیر است؟ چرا؟

پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x=۲$ را به دست آورید.



نکته در قسمت « الف » این سوال با توجه به ناپیوسته بودن تابع مشخص است که در نقطه $x=۲$ مشتق پذیر نیست اما در قسمت « ب » با توجه به پیوسته بودن تابع در کل بازه و نداشتن نقاط گوشه‌ای و شکسته در کل بازه مشتق پذیر است و با توجه به داشتن ضابطه تابع محاسبه مشتق راست در نقطه $x=۲$ کار سختی نیست

پاسخ:

آهنگ لحظه‌ای = $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

الف) خیر

ب) بله، در تمام نقاط بازه $(-\infty,۲)$ مشتق‌پذیر است.

پ) $x\geq ۲: f(x)=\sqrt{x-۱}+۲\to f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\to f'_{+}(۲)=\frac{۱}{۲}$

سوال ۶۹ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^{۲}-t+۱۰$ بر حسب متر در بازه $[۰,۵]$ (بر حسب ثانیه) داده

شده است. سرعت متوسط را در بازه زمانی $[0,5]$ و سرعت لحظه‌ای را در $t=2$ به دست آورید. (خرداد - ۱۴۰۱)

نکته سرعت متوسط همان آهنگ متوسط یا شیب خط واصل در نمودار است اما سرعت لحظه‌ای همان آهنگ لحظه‌ای یا شیب خط مماس در نمودار است که برابر مشتق در آن نقطه است و داریم

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

پاسخ:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(5)-f(0)}{5-0} = \frac{30-10}{5} = 4$$

$$f'(t) = 2t-1 \quad \to f'(2) = 2(2)-1 = 3$$

سوال ۷۰ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم. ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t) = -5t^2 + 40t$ به دست می‌آید

الف) سرعت متوسط جسم را در بازه $[5,8]$ به دست آورید. (خرداد - ۱۴۰۰)

ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $35\ m/s$ است.

نکته برای حل قسمت «الف» این سوال که آهنگ متوسط در بازه $[5,8]$ را محاسبه می‌کنیم اما برای قسمت «ب» چون حرف از سرعت یا آهنگ لحظه‌ای است، پس باید از تابع مشتق بگیریم و برابر با ۳۵ بگذاریم و با حل معادله ببینیم در چه لحظه‌ای سرعت برابر با ۳۵ بوده است

پاسخ:

الف) $\dfrac{\Delta h}{\Delta t} = \dfrac{h(8)-h(5)}{8-5} = \dfrac{0-(75)}{8-5} = -25$

ب) $h'(t) = -10t + 40 = 35 \Rightarrow t = 0/5$

سوال ۷۱ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^2 - t$، بر حسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,4]$ با هم برابرند؟ (خرداد - ۹۸)

نکته این تیپ سوال بسیار پرتکرار است که ما باید ابتدا آهنگ متوسط را در بازه داده شده محاسبه کنیم سپس عدد به دست آمده را مساوی مشتق تابع بگذاریم تا ببینیم با آهنگ لحظه‌ای در کدام زمان برابر است

پاسخ:

$$\text{آهنگ متوسط} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{28-0}{4} = 7 \quad , f'(t) = 4t-1 \to 4t-1 = 7 \to t = 2$$

سوال ۷۲ **خودرویی در امتداد خط راست طبق معادله $d(t) = -۵t^{۲} + ۲۰t$ حرکت می‌کند، که در آن $۰ \le t \le ۵$ بر حسب ثانیه است. سرعت لحظه‌ای در $t = ۲$ چقدر است؟**

(شهریور - ۹۹)

نکته در این سوال فقط کافیست از تابع مشتق بگیریم و $t = ۲$ را در آن قرار دهیم تا جواب به دست آید و $۰ \le t \le ۵$ اطلاعات اضافه سوال است و کمکی به ما نمی‌کند

پاسخ:

$$d'(t) = -۱۰t + ۲۰ \quad \Rightarrow d'(۲) = ۰$$

سوال ۷۳ **آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x) = ۲x^{۲} + ۵x + ۱$ در نقطه‌ای به طول $x = ۲$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۲,۰]$ است؟**

(خرداد - ۱۴۰۲)

۲

نکته در این سوال باید آهنگ لحظه‌ای در زمان گفته شده و آهنگ متوسط در بازه گفته شده را به دست آوریم سپس نسبت آنها به یکدیگر را حساب کنیم یا به عبارتی حاصل تقسیم آهنگ لحظه‌ای به متوسط را محاسبه کنیم

پاسخ:

$$f'(x) = ۴x + ۵ \Rightarrow f'(۱۲) = ۱۳$$

$$\frac{f(۰) - f(-۲)}{۰ - (-۲)} = \frac{۱ - (-۱)}{۲} = ۱$$

پس آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع در نقطه $x = ۲$، ۱۳ برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۲,۰]$ است.

سوال ۷۴ **اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}x^{۳} - x^{۲} - ۳x + \frac{۲}{۳}$ را در صورت وجود به دست آورید.**

(خرداد - ۱۴۰۱)

نکته برای به دست آوردن اکسترمم‌های نسبی تابع ابتدا از تابع مشتق گرفته و ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم و با قرار دادن در جدول تعیین علامت Max یا min بودن آنها مشخص می‌شود

پاسخ:

$$f'(x) = x^{۲} - ۲x - ۳ = ۰ \quad x = ۳, x = -۱$$

تکمیل جدول

x		-۱		۳	
f'	$+$	$\bullet$	$-$	$\bullet$	$+$
f	$\nearrow$	max $\frac{۷}{۳}$	$\searrow$	min $-\frac{۲۵}{۳}$	$\nearrow$

-

سوال ۷۵ **در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.**

(دی - ۹۸)

$$f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۹x - ۱۰$$

نکته نقـاط بحـرانی نقـاطی از تابـع هسـتند کـه مشـتق آنها صفـر یا مشـتق ناپذیرنـد. در اینجا با توجـه به اینکـه تابع پیوسـته و در تمام نقـاط مشـتق پذیر اسـت پس نقـاط بحـرانی نقاطی هسـتند که مشـتق آنها صفر می‌باشـد

پاسخ: تکمیل جدول

$$f'(x)=۳x^۲+۶x-۹=۰ \quad \begin{cases} x=۱ \\ x=-۳ \end{cases}$$

x		-۳		۱	
f'	+	●	-	●	+
f	↗	max ۱۷	↘	min ۱۵-	↗

سوال ۷۶ **نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.** (شهریور - ۱۴۰۲)

$$f(x)=-۲x^۳+۳x^۲+۱۲x-۹$$

نکته پـس از پیـدا کـردن نقـاط بحـرانی جـدول تعییـن علامت را رسـم می‌کنیم و بـا تعیین علامـت Max و min را تشـخیص می‌دهیم نقطـه‌ای کـه اطـراف آن مشـتق از منـفی بـه مثبت تغییـر کنـد min نسـبی و نقطـه‌ای که اطـراف آن مشـتق از مثبت بـه منـفی تغییر کند Max نسـبی است

پاسخ:

$$f'(x)=-۶x^۲+۶x+۱۲=۰ \rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۲ \end{cases}$$

جدول

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
f'		-	●	+	●	-	
f		↘	min ۱۶-	↗	max ۱۱	↘	

سوال ۷۷ **اگر نقطه (۲,۱) نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۳+bx^۲+d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.** (خرداد - ۱۴۰۰)

نکته وقـتی گفتـه می‌شـود نقطـه‌ای اکسـترمم نسـبی تابـعی اسـت ۲ تـا اطلاعـات به مـا داده شـده: (۱) آن نقطـه در تابع وجـود دارد و صـدق می‌کنـد. (۲) در آن نقطـه مشـتق تابـع صفـر اسـت پـس بـا اسـتفاده از ایـن دو مـورد دو مجهول سـوال به دسـت می‌آید

پاسخ:

$f(2)=1 \to 4b+d=-7 \quad f'(2)=0 \to 12+4b=0 \qquad b=-3$

$-12+d=-7 \to d=5$

سوال ۷۸ اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید. (خرداد - ۹۸)

نکته: در این سوال گفته شده که در $x=1$ اکسترمم نسبی داریم و مقدار آن ۷ است، یعنی نقطه (۱,۷) روی تابع است و در $x=1$ مشتق تابع صفر است. پس با این دو اطلاعات دو مجهول a و b را پیدا می‌کنیم

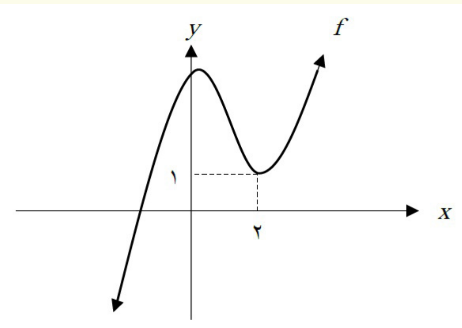
پاسخ:

$f'(x)=2ax+b \to 0=2a+b \to b=-2a$

$f(1)=7 \to 7=a+b \to a=-7, b=14$

سوال ۷۹ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^3+bx^2+d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید. (دی - ۱۴۰۱)

نکته: با توجه به نمودار تابع می‌توان متوجه شد که ۲ اکسترمم نسبی داریم که مختصات یکی از آنها به ما داده شده و با دانستن این نکته که در آن نقطه مشتق تابع صفر است، می‌توان مقادیر b و d را پیدا کرد.



پاسخ:

$f'(2)=0 \quad \to f'(x)=3x^2+2bx \quad b=-3$

$f(2)=1 \quad \to 8+(-12)+d=1 \quad d=5$

سوال ۸۰ بزرگترین بازه از R که تابع $f(x)=-2x^3+6x+11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید. (خرداد - ۱۴۰۲)

نکته برای پیدا کردن بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی یا نزولی است کافیست از تابع مشتق بگیریم و ریشه‌ها را پیدا کنیم یا به عبارتی نقاط بحرانی را به دست آوریم و جدول تعیین علامت را رسم کنیم و با توجه به جدول بازه‌های صعودی و نزولی کاملاً مشخص است

پاسخ:

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۶ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x		-۱		۱	
f'	$-$	۰	$+$	۰	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

پس تابع در بازه $[-۱,۱]$ صعودی اکید است.

سوال ۸۱ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازه $[-۱,۳]$ به دست آورید. (خرداد - ۹۸)

نکته برای پیدا کردن اکسترمم‌های مطلق تابع ابتدا نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم سپس نقاط بحرانی و نقاط ابتدا و انتهای بازه را درون تابع اصلی قرار داده و خروجی‌ها را به دست می‌آوریم. نقطه‌ای که بیشترین عرض را دارد Max مطلق و نقطه‌ای که کمترین عرض را دارد min مطلق تابع است

پاسخ:

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ \to f'(x) = x^۲ + x - ۲ = ۰ \to \begin{cases} x = -۲ \notin [-۱,۳] \\ x = ۱ \end{cases}$$

$$f(۱) = -۷, f(-۱) = ۱۳, f(۳) = ۴۵$$

(۱,−۷) مینیمم مطلق و نقطه (۳,۴۵) ماکزیمم مطلق

سوال ۸۲ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را در بازه $[-۱,۳]$ مشخص کنید. (دی - ۱۴۰۰)

نکته نکته مهم در به دست آوردن اکسترمم مطلق این است که نقاط به دست آمده حتماً درون بازه مشخص شده و دامنه گفته شده در صورت سوال حضور داشته باشد نقاط بحرانی خارج بازه قابل قبول نیستند

پاسخ:

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ = ۰ \quad \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \notin [-۱,۳] \end{cases}$$

$$f(-۱) = ۱۳$$

$$f(۱) = -۷ \qquad \Rightarrow \min(۱,-۷)$$

$$f(۳) = ۴۵ \qquad \Rightarrow \max(۳,۴۵)$$

سوال ۸۳ **در بین تمام مستطیل‌هایی با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، طول و عرض مستطیلی با بیشترین مساحت را بیابید.** (خرداد - ۱۴۰۰)

نکته برای حل این سوال ابتدا رابطه محیط مستطیل را می‌نویسیم و برابر ۱۴ می‌گذاریم و از این رابطه بین طول و عرض ارتباطی به دست می‌آید. سپس رابطه مساحت را می‌نویسیم و با استفاده از ارتباط به دست آمده بین طول و عرض رابطه مساحت را تک متغیره می‌کنیم و برای پیدا کردن بیشترین مساحت مقدار Max تابع را پیدا می‌کنیم

پاسخ:

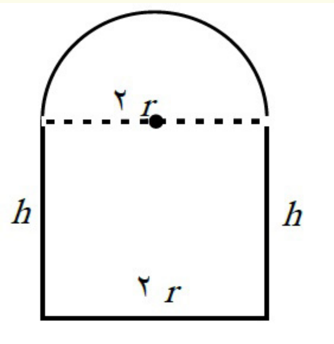
$$y = ۷ - x \rightarrow s = (y)(x) = ۷x - x^۲ \rightarrow s'(x) = ۷ - ۲x = ۰$$

$$\rightarrow x = ۳/۵ \quad , y = ۳/۵$$

سوال ۸۴ **پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم دایره‌ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نور دهی را داشته باشد** (خرداد - ۱۴۰۲)

نکته برای حل این سوال ابتدا یک شکل فرضی رسم کنید و محیط را به دست آورده و برابر ۶ قرار دهید و سعی کنید که ارتباطی بین پارامترها به دست آورید؛

$$\text{محیط} = ۲h + ۲r + r\pi = ۶ \rightarrow ۲h = ۶ - ۲r - r\pi \rightarrow h = \frac{۶ - ۲r - r\pi}{۲}$$



پاسخ:

$$S(r) = ۶r - ۲r^۲ - \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \Rightarrow S'(r) = ۶ - ۴r - \pi r$$

$$۲h + ۲r + \pi r = ۶ \Rightarrow h = \frac{۶ - ۲r - \pi r}{۲}$$

$$۶ - ۴r - \pi r = ۰ \Rightarrow r = \frac{۶}{۴ + \pi}$$

$$h = \frac{۶ - (۲ + \pi)\frac{۶}{۴ + \pi}}{۲} = \frac{۶}{۴ + \pi}$$

r		$\frac{۶}{۴+\pi}$	
S'	-	●	+
S	↗		↘

سوال ۸۵ **هر صفحه مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت $۳۲cm^۲$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایین هر صفحه ۲ cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر در نظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید، که مساحت هر صفحه از کتاب کمترین مقدار ممکن باشد.** (خرداد - ۹۹)

نکته: مقدار نوشته‌های هر صفحه مستطیلی با مساحت $۳۲cm^۲$ است. پس رابطه مساحت مستطیل را می‌نویسیم و رابطه طول و عرض را از آن به دست می‌آوریم. حال مساحت هر صفحه از کتاب را طبق اطلاعات گفته شده در سوال می‌نویسیم و با توجه به رابطه طول و عرض آن را تک متغیره می‌کنیم و بقیه مراحل مشابه سوالات قبل است

پاسخ:

$$xy = ۳۲ \rightarrow f(x) = (y+۲)(x+۴) = \frac{۱۲۸}{x} + ۴۰ + ۲x \rightarrow f'(x) = -\frac{۱۲۸}{x^۲} + ۲ = ۰$$

$$\rightarrow x = ۸ \quad , y = ۴$$

ابعاد صفحه: ۶ × ۱۲ است.

سوال ۸۶ **دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.** (دی - ۹۸)

نکته: اختلاف دو عدد مانند x و y، ۱۰ واحد است. با توجه به این رابطه حاصل ضرب این دو عدد را به صورت تک متغیر می‌نویسیم و با مشتق‌گیری و یافتن ریشه مشتق یکی از آن اعداد پیدا شده و با توجه به رابطه بین دو عدد دیگری را نیز پیدا می‌کنیم

پاسخ:

$$f(x) = xy \rightarrow f(x) = x(x+۱۰) = x^۲ + ۱۰x \rightarrow f'(x) = ۲x + ۱۰ = ۰$$

$$\rightarrow x = -۵ \quad , y = ۵$$

سوال ۸۷ **درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.** (شهریور ۹۹)

هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

نکته: هر نقطه اکسترمم نسبی یک نقطه بحرانی است، چون در آن مشتق صفر است ولی هر نقطه بحرانی اکسترمم نسبی نیست.

پاسخ: درست

سوال ۸۸ **در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.** (دی - ۹۹)

اگر $h(x) = ۳x^۴ + ۲x^۲ - ۱$ باشد، آنگاه $h''(۱)$ برابر .... است.

نکته: خواسته این سوال مشتق مرتبه دوم تابع است یعنی دوبار پشت سر هم از تابع مشتق بگیریم سپس عبارت خواسته شده را محاسبه کنیم

پاسخ:

$$h(x) = ۳x^۴ + ۲x^۲ - ۱ \rightarrow h'(x) = ۱۲x^۳ + ۴x \rightarrow h''(x) = ۳۶x^۲ + ۴$$

$$\rightarrow h''(۱) = ۳۶ + ۴ = ۴۰$$

سوال ۸۹ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

« هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است. »

نکته تمام نقاط روی تابع ثابت بحرانی هستند، چون مشتق همه آنها برابر صفر است.

پاسخ: درست

سوال ۹۰ در یک بیضی افقی طول قطر بزرگ ۸ و طول قطر کوچک ۶ واحد است. فاصله کانونی بیضی را به دست آورید. (خرداد - ۹۸)

نکته با داشتن قطر بزرگ و کوچک بیضی فاصله کانونی را از رابطه زیر به دست می‌آوریم:

قطر بزرگ = ۲a ، قطر کوچک= ۲b ، فاصله کانونی= ۲c $\quad a^۲ = b^۲ + c^۲$

پاسخ:

$$۲a = ۸ \to a = ۴ \quad ,۲b = ۶ \to b = ۳$$

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to c^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \to c = \sqrt{۷} \qquad ۲c = ۲\sqrt{۷}$$

سوال ۹۱ کانون‌های یک بیضی نقاط (۱,۳) و (۱,- ۵) است. (دی - ۹۸)

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر ۶ = a باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

نکته فاصله کانونی فاصله بین دو کانون است که با توجه به یکسان بودن طول‌ها برابر اختلاف عرض کانون‌ها است و مختصات مرکز هم وسط دو کانون است

پاسخ:

الف) $O \left| \begin{array}{l} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{array} \right.$ مرکز $FF' = |۳-(-۵)| = ۸ = ۲C \to C = ۴$

ب) $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \to b = \sqrt{۲۰} \to BB' = ۲\sqrt{۲۰}$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳}$$

سوال ۹۲ کانون‌های یک بیضی نقاط (۱,۳) و (۱,- ۵) است.

میبینی که این سوال دو بار اومده! سکشو خوب یاد بگیر! (خرداد - ۹۹)

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید.

ب) اگر ۶ = a باشد، اندازه قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید.

نکته برای پیدا کردن خروج از مرکز بیضی از رابطه مقابل استفاده می‌کنیم: $e = \frac{c}{a}$ خروج از مرکز بیضی همواره عددی بین صفر و یک است

پاسخ:

الف) $O \left| \begin{array}{l} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱ \end{array} \right.$ مرکز $FF' = |۳-(-۵)| = ۸ = ۲C \quad \to C = ۴$

و معادله قطر بزرگ: $x = ۱$

ب) $b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \quad \to b = \sqrt{۲۰} \quad \Rightarrow BB' = ۲\sqrt{۲۰}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{۲}{۳}$

سوال ۹۳ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن (۱ ،- ۴،-) و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

(دی - ۱۴۰۰)

الف) فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید.

نکته با توجه به اینکه گفته شده بیضی افقی است یعنی قطر بزرگ در راستای محور x ها است پس با پیدا کردن اندازه قطر بزرگ از مرکز بیضی در راستای محور x به اندازه نصف آن عقب و جلو می‌رویم تا مختصات دو سر آن به دست آید

پاسخ:

الف) $a = \frac{۵}{۴}c \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}c^۲ = ۹ + c^۲ \qquad FF' = ۲c = ۸ \Rightarrow$

ب) $a = ۵ \quad \Rightarrow A(۱,-۱), A(-۹,-۱)$

سوال ۹۴ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن (۰،۳) و بر خط $۳x - ۴y = ۳$ مماس باشد. (خرداد - ۱۴۰۱)

نکته با داشتن مرکز دایره و شعاع آن می‌توان معادله دایره را نوشت. اینجا ضابطه خطی مماس بر دایره را به ما داده که با یافتن فاصله نقطه مرکز تا خط اندازه شعاع نیز به دست می‌آید و می‌توان معادله دایره را نوشت

$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$

پاسخ:

$r = \frac{|۳\times ۰ - ۴(۳) - ۳|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = ۳ \qquad \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹$

سوال ۹۵ وضعیت خط $x + y = ۳$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید. (شهریور - ۱۴۰۰)

نکته یک خط نسبت به دایره ۳ حالت می‌تواند داشته باشد که بستگی به فاصله خط تا مرکز دایره دارد. اگر r شعاع دایره و OH فاصله مرکز تا خط باشد داریم

$OH < r$ ← خط و دایره متقاطع‌اند.

$OH = r$ ← خط بر دایره مماس است.

$OH > r$ ← خط بیرون دایره است و همدیگر را قطع نمی‌کنند.

پاسخ:

$$R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۱۲} = ۲ \qquad ,O(۱,۰)$$
$$OH = \frac{|۱\times۱+۰\times۱-۳|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \sqrt{۲} \qquad \Rightarrow OH < R$$

خط و دایره متقاطع‌اند.

سوال ۹۶ اگر دو دایره به معادله‌های $x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰$ و $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=m^۲$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید. (خرداد - ۱۴۰۲)

نکته دو دایره نسبت به هم حالت‌های مختلفی می‌توانند داشته باشند. مماس خارج یعنی مجموع شعاع دو دایره برابر فاصله کانون‌های آن دو باشد یعنی داریم؛ $OO' = r + r'$

پاسخ:

$$x^۲+y^۲+۲x-۴y+۱=۰ : O(-۱,۲), r=۲$$
$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=m^۲ : O'(۲,-۱), r'=m$$
$$OO' = ۳\sqrt{۲}$$
$$OO' = r+r' \Rightarrow m+۲=۳\sqrt{۲} \Rightarrow m=۳\sqrt{۲}-۲$$

سوال ۹۷ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش آموز دارد. ۳۵ درصد دانش آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم: (خرداد - ۱۴۰۲)

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟

نکته برای حل سوالات احتمال کل یک راه ساده استفاده از نمودار درختی است. قسمت « الف » سوال که ساده است اما قسمت را با استفاده از نمودار حل می‌کنیم

پاسخ:

$$\text{فرد انتخابی}\begin{cases}\xrightarrow{A}\frac{۳}{۴}\longrightarrow\frac{۳۵}{۱۰۰}\\[4pt]\xrightarrow{B}\frac{۱}{۴}\longrightarrow\frac{۱۵}{۱۰۰}\end{cases} \qquad P_{(c)} = \frac{۱}{۴}\times\frac{۱۵}{۱۰۰}+\frac{۳}{۴}\times\frac{۳۵}{۱۰۰}=\frac{۳}{۱۰}$$

سوال ۹۸ سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۴ مهره آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهره سبز و سه مهره آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ (خرداد - ۹۸)

نکته ابتدا از بین سه ظرف یکی را برمی‌داریم و سپس از هر ظرف احتمال انتخاب شدن مهره آبی را حساب می‌کنیم؛

$$\to \frac{۱}{۳} \to \frac{۴}{۹}$$

$$\text{مهره آبی} \to \frac{۱}{۳} \to \frac{۳}{۱۰}$$

$$\to \frac{۱}{۳} \to ۰$$

پاسخ:

$$P(A)=\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۹}+\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱۰}+\frac{۱}{۳}\times ۰=\frac{۶۷}{۲۷۰}$$

سوال ۹۹ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰/۰۸ و نوزاد دختر ۰/۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آنها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ (خرداد - ۹۹)

نکته احتمال دختر یا پسر شدن که $\frac{۱}{۲}$ است و احتمال انتقال بیماری هم در $\frac{۱}{۲}$ ضرب می‌شود. پس داریم: دختر = نصفِ سه صدم و پسر = نصفِ هشت صدم

پاسخ:

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)$$

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۱۰۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۱۰۰}=\frac{۱۱}{۲۰۰}$$

سوال ۱۰۰ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟ (شهریور ۱۴۰۰)

نکته اگر مهره اول سبز باشد، احتمال آن $\frac{۶}{۱۰}$ است و تعداد مهره‌های سبز ظرف دوم یکی زیاد می‌شود اما اگر مهره اول آبی باشد، احتمال آن $\frac{۴}{۱۰}$ است و تعداد مهره‌های سبز ظرف دوم ثابت و آبی‌ها یکی زیاد می‌شود. پس داریم؛

$$\xrightarrow{\text{سبز}} \frac{۶}{۱۰} \xrightarrow{\text{سبز}} \frac{۶}{۱۳}$$

$$\xrightarrow{\text{آبی}} \frac{۴}{۱۰} \xrightarrow{\text{سبز}} \frac{۵}{۱۳}$$

پاسخ:

$$P(A)=P(G)P(A|G)+P(B)P(A|B)$$

$$P(A)=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳۰}$$

فصل اول: تابع

تابع همیشه اصل کار و اساس ریاضیه! و چه بهتر از اینکه فصل اول و اصل کار رو با قدرت شروع کنیم...

توابع چند جمله‌ای:

ما در سال‌های گذشته با انواع توابع آشنا شدیم که بسیاری از آنها زیر مجموعه توابع چند جمله‌ای هستند مانند تابع خطی یا درجه یک، تابع درجه ۲ و تابع ثابت.

به‌طور کلی به هر تابع با فرمت $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+...+a_۱x+a_۰$ را که در آن a_n و $a_۰,a_۱,...,a_{n+}$ را که در آن و اعداد حقیقی و **n** یک عدد صحیح نامنفی باشد و $a_n \neq ۰$ باشد یک تابع چند جمله‌ای از درجه **n** می‌نامیم.

پس تابع $f(x)=a_n x^n + a_{n-۱}x^{n-۱}+....ax+a_۰$ چند جمله‌ای است اگر: ۱. ضرایب اعداد حقیقی باشند. 2.n عدد صحیح نامنفی باشد. 3. a_n صفر نباشد.

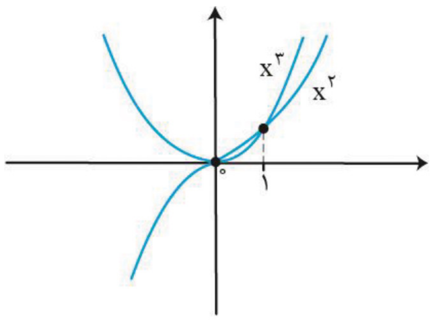
$$y=-۴x^{۲}+\sqrt{۳}x-\frac{۳}{۵}, y=۳x^{۴}-۵x^{۳}+\sqrt{۷}x^{۲}, y=۴x-۷$$

نکته: دامنه توابع چند جمله‌ای مجموعه اعداد حقیقی است اما در مورد برد لزوماً درست نیست؛ برای مثال در تابع ثابت دامنه مجموعه اعداد حقیقی است اما برد تنها یک عضو دارد.

تابع درجه ۳:

نوعی تابع چند جمله‌ای با فرمت $f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d$ که دامنه و برد آن $\mathbb{R}$ است.

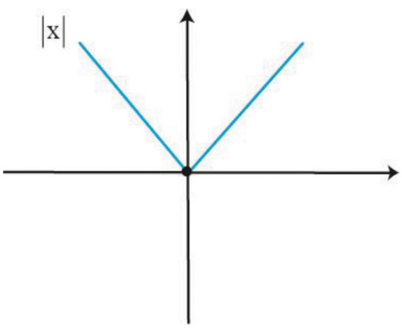
مقایسه نمودار درجه ۲ و درجه ۳ بسیار مهم است:

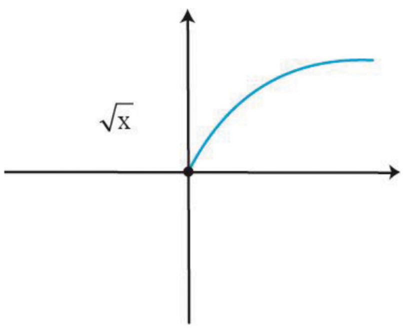


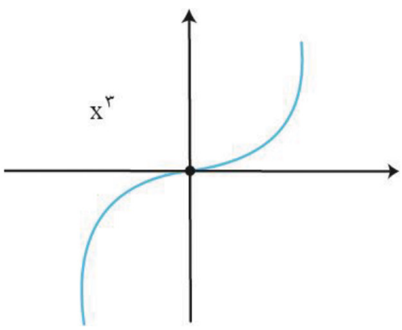
$$\begin{cases} x^{۳}>x^{۲} \leftarrow x>۱ \\ x^{۲}>x^{۳} \leftarrow ۱>x>۰ \\ x^{۲}>x^{۳} \leftarrow x<۰ \\ x^{۲}=x^{۳} \leftarrow ۱,۰=x \end{cases}$$ ۱

نمودار های زیر رو دریاب که مهمن!

رسم نمودارهای پرتکرار:







سوال: درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $y=2x(1-3x^2)+1$ یک تابع چند جمله‌ای از درجه سوم است. (دی ۱۴۰۱)

درست- اگر عبارت را ساده کنیم ضرایب عضو **R** و توان‌ها اعداد صحیح نامنفی هستند و بزرگ‌ترین توان ۳ است.

ب) تابع $y=\sqrt{2}x-x^2$ یک تابع درجه دوم است. (خرداد ۱۴۰۱)

درست- ضرایب عضو **R**، توان‌ها اعداد صحیح نامنفی و بزرگترین توان ۲ است.

پ) نمودار تابع $y=x^2$ در بازه $(0,1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^3$ است. (دی ۱۴۰۱)

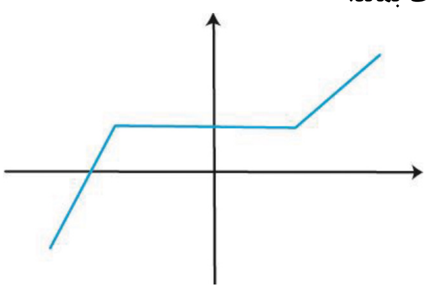
نادرست- در بازه $(0,1)$ نمودار $y=x^2$ بالاتر از $y=x^3$ است.

صعودی یا نزولی بودن تابع

تابع صعودی: به تابعی که در آن به ازای افزایش **x**ها (ورودی‌ها)، **y**ها (خروجی‌ها) کم نشوند تابع صعودی می‌گوییم. به عبارتی وقتی روی نمودار یک تابع صعودی از چپ به راست حرکت می‌کنیم یا صعود کند یا ثابت بماند.

مثال:

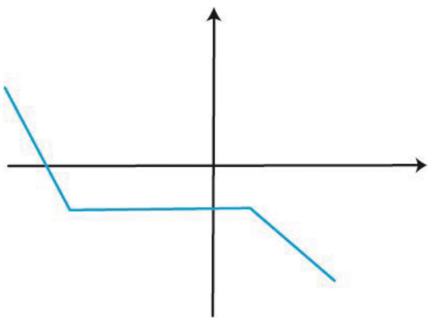
$$x_2 > x_1 \Rightarrow f_{(x_2)} \geq f_{(x_1)}$$



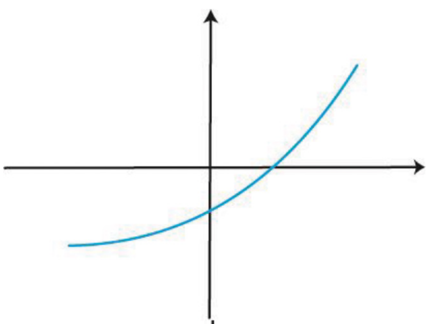
تابع نزولی: به تابعی که در آن به ازای افزایش **x**ها (ورودی‌ها)، **y**ها (خروجی‌ها) زیاد نشوند تابع نزولی می‌گوییم. به عبارتی اگر روی نمودار تابع نزولی از چپ به راست حرکت کنیم یا پایین می‌آید یا ثابت می‌ماند.

مثال:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f_{(x_2)} \leq f_{(x_1)}$$



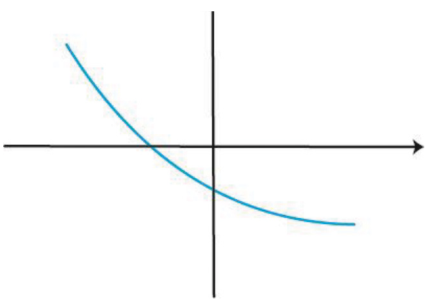
تابع اکیداً صعودی: به تابعی که در آن به ازای افزایش **x**ها (ورودی‌ها)، **y**ها (خروجی‌ها) فقط زیاد شوند تابع اکیداً صعودی می گوییم. به عبارتی اگر روی نمودار یک تابع اکیداً صعودی حرکت کنیم (از چپ به راست) فقط بالا می‌رود (دائماً صعود میکند.)



$$x_2 > x_1 \Rightarrow f_{(x_2)} > f_{(x_1)}$$

تابع اکیداً نزولی: به تابعی که در آن به ازای افزایش **x**ها (ورودی‌ها)، **y**ها (خروجی‌ها) فقط کاهش یابند تابع اکیداً نزولی می‌گوییم. به عبارتی اگر روی نمودار یک تابع اکیداً نزولی از چپ به راست حرکت کنیم

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f_{(x_2)} < f_{(x_1)}$$



این چند نکته مهم رو دریاب

به توابع صعودی و نزولی، توابع یکنوا می‌گویند و به توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی، توابع اکیداً یکنوا می‌گویند.

توابع اکیداً یکنوا: یکنوا نیز هستند اما برعکس این جمله صادق نیست.

توابع هم صعودی هم نزولی: تابع ثابت

توابع نه صعودی نه نزولی: توابعی که در بخشی از دامنه صعودی و در بخش نزولی هستند مانند تابع درجه ۲

سوال: نحوه تشخیص صعودی یا نزولی بودن توابع چیست؟

بهترین راه، رسم نمودار توابع است.

سوال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. (خرداد ۱۴۰۲)

درست- چون بی‌شمار تابع ثابت داریم.

ب) تابع $f(x)=x^{3}$ تابعی اکیداً صعودی است. (خرداد ۱۴۰۱)

درست- با توجه به نمودار x^{3} این تابع دائماً در حال صعود کردن است.

پ) تابع $y=\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست. (شهریور ۱۴۰۲)

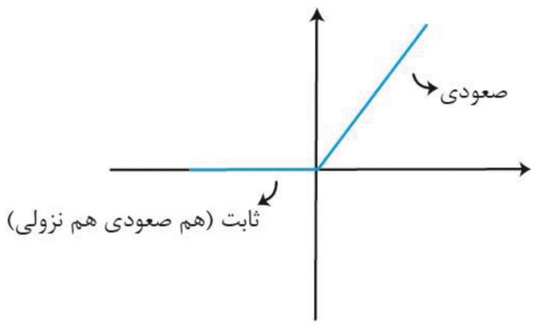
نادرست- با توجه به شکل تابع غیریکنواست.

سوال: در جای خالی گزینه مناسب را انتخاب کنید.

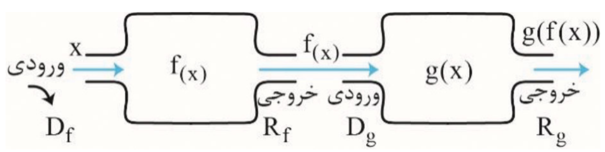
تابع $y=(x+1)^{3}$ در دامنه‌ی تعریف خود .... (صعودی، نزولی) است. (خرداد ۹۸)

سوال: نمودار تابع زیر را رسم کنید و مشخص کنید در چه بازه ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است. (تمرین کتاب درسی)

$$y(x)=x+|x|\begin{cases} x>0 \rightarrow x+x=2x \\ x<0 \rightarrow x-x=0 \end{cases}$$



ترکیب توابع: اگر دو یا چند تابع را با هم ترکیب کنیم به آن تابع مرکب یا ترکیب توابع گفته می‌شود.



حالا چند سوال اساسی بپرسیم:

۱- ترکیب توابع چه زمانی تعریف می‌شود؟

زمانی که خروجی تابع اول در ورودی تابع دوم قرار بگیرد یا به عبارتی دامنه تابع دوم و برد تابع اول با هم اشتراک داشته باشند.

۲- ترکیب توابع چگونه نام‌گذاری می‌شود؟

از آخر به اول یعنی برعکس آنچه انجام می‌شود.

$$gof_{(x)}=g(f_{(x)})\Rightarrow x\to f\to g$$

۳- دامنه ترکیب توابع شامل چه عضوهایی است؟

xهایی که وارد تابع اول شوند یعنی در دامنه تابع اول باشند و خروجی آنها وارد تابع دوم شود. یعنی در دامنه تابع دوم جا بگیرند.

دامنه تابع مرکب را با توجه به تعریف آن بدست آورید.

$$D_{gof(x)}=\left\{x\in D_f \mid f_{(x)}\in D_g\right\}$$

حواست باشه

در ترکیب دو تابع با هم سه پارامتر داریم$\left(g(f(x)),g_{(x)},f_{(x)}\right)$ پس سه نوع سوال می‌تواند مطرح شود:

پارامترهای ترکیب / انواع سوالات	$f(x)$	$g(x)$	$g(f_{(x)})$
نوع اول	✓	✓	×
نوع دوم	×	✓	✓
نوع سوم	✓	×	✓

روش‌های کلی حل سؤالات ترکیب توابع

دریاب

نوع اول← با توجه به تعریف به جای x در $g(x)$، تابع $f(x)$ را قرار می‌دهیم.

نوع دوم← با توجه به تعریف$g(x)$ را برحسب ورودی $f(x)$ می‌نویسیم. (یعنی به جای xدر g، $f(x)$ می‌گذاریم) و آن را $g(f_{(x)})$ قرار می‌دهیم و از دل آن $f(x)$ را بدست می‌آوریم. (در معادله بدست آمده $f(x)$ را تنها می‌کنیم.)

نوع سوم← $f(x)$ را مساوی **T** در نظر می‌گیریم **x** را برحسب **T** محاسبه نموده و $g(T)$ را تشکیل می‌دهیم سپس در آن به جای **x**، **T** می‌گذاریم.

سوال:اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=x-۱$ آنگاه:(مرداد ۱۴۰۲)

الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$D_g=R \qquad D_f=[-۱,+\infty)$$
$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g_{(x)}\in D_f\}$$
$$Dfog=\{x\in R \mid x-۱\geq -۱\}=\{x\in R \mid x\geq ۰\}=[۰,+\infty)$$

ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.

$$fog_{\,(x)}=f(g_{(x)})=f_{(x-۱)}=\sqrt{x-۱+۱}=\sqrt{x}$$

سوال: اگر $f(x)=۷-۴x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۳}$ باشد:

الف) دامنه تابع **fog** را با استفاده از تعریف به دست آورید.

$$D_g=[-۳,+\infty)\to D_f=R$$

ب) مقدار $(gof)_{(۱)}$ را محاسبه کنید.

$$D_{fog}=\{x\in D_f \mid g_{(x)}\in D_f\}=\{x\in[-۳,+\infty) \mid \sqrt{x+۳}\in R\}=[-۳,+\infty)$$

$$fog_{(۱)}=g(f_{(۱)})=g_{(۳)}=\sqrt{۶}$$

سوال: اگر ورودی ماشین مقابل ۳ باشد، مقدار خروجی آن چقدر است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

$$\text{ورودی } x\to ۲x-۲\to \frac{x}{\sqrt{x}+۱}\to \text{ خروجی}$$

ورودی ماشین **x** است پس به جای **x** ورودی عدد ۳ را می‌گذاریم:

$$۳\longrightarrow ۶-۲\xrightarrow{x=۴}\frac{۴}{\sqrt{۴}+۱}=\frac{۴}{۳}$$

هر قسمت مانند یك تابع است.

سوال: اگر $f(g_{(x)})=۴x^۲+۱$ و $f(x)=\frac{x}{۲}-۱$ ، آنگاه ضابطه تابع $g(x)$ را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

طبق درسنامه در تابع f به جای x، $g(x)$ می‌گذاریم و آن را مساوی $f(g_{(x)})$ قرار می‌دهیم:

$$f(g_{(x)})=\frac{g_{(x)}}{۲}-۱\to\frac{g_{(x)}}{۲}-۱=۴x^۲+۱\to\frac{g_{(x)}}{۲}=۴x^۲+۲\to g_{(x)}=۸x^۲+۴$$

سوال: اگر $f=\{(۰,-۱),(۵,۹),(۳,۷),(-۲,۴)\}$ و $g=\{(۱,۲),(۳,-۱),(۹,۰),(-۱,۴),(۷,۷)\}$ باشند، تابع gof را در صورت وجود بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$gof(x)=g(f_{(x)})$$

$x\to f\to g\to y$

$۰\to -۱\to ۴$

$۵\to ۹\to ۰$

$۳\to ۷\to ۷$

$-۲\to ۴$

$$gof_{(x)}=\{(۰,۴),(۳,۷),(۵,۰)\}$$

انتقال و تبدیل نمودار تابع:

تاثیر برعکس در دامنه و تغییرات در جهت محور **x**

$$y=a\,f(bx+c)+d$$

تاثیر مستقیم در برد و تغییرات در جهت محور **y**

تغییرات در راستای محور **x**ها لجباز است و برعکس عمل می‌کند.

تغییرات در راستای محور **y**ها همانگونه که می‌بینیم اعمال می‌شود.

a ← تابع را در راستای محور **y**ها منبسط و منقبض می‌کند، اگر بیشتر از یک باشد منبسط و اگر بین ۰ و ۱ باشد منقبض می‌کند.

d ← تابع را در راستای محور **y**ها بالا و پایین می‌برد، اگر مثبت باشد بالا و اگر منفی باشد تابع پایین می‌آید.

در صورت حضور هر دو (d,a) اولویت با **a** است.

b⟵ تابع را در راستای محور **x**ها منبسط و منقبض می‌کند، اگر بزرگتر از یک باشد منقبض و اگر بین صفر و یک باشد منبسط می‌کند.

c⟵ تابع را در راستای محور **x**ها به چپ و راست می‌برد، اگر مثبت باشد به سمت چپ و اگر منفی باشد به سمت راست می‌رود.

در صورت حضور هر دو(d,c) اولویت با **c** است.

چند نکته خفن!

! اگر پشت کل تابع منفی بیاید (ضریب **a** منفی باشد) تابع نسبت به محور **x**ها قرینه می‌شود.

! اگر پشت **x** منفی بیاید (ضریب **b** منفی باشد) تابع نسبت به محور **y**ها قرینه می‌شود.

! اگر کل تابع درون قدر مطلق برود آن قسمت که زیر محور **x**ها بوده قرینه شده و بالای محور **x**ها قرار می‌گیرد.

! اگر فقط **x** درون قدر مطلق برود قسمتی از تابع که سمت چپ محور **y**ها است حذف می‌شود و قسمت سمت راست محور **y**ها عیناً سمت چپ هم قرینه می‌شود.

برای رسم از قوانین انتقال از نقاط مرزی کمک می‌گیریم. (نقاط ابتدا و انتهای بازه)

سوال: در جای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

نقطه $(-۲,۴)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ روی نمودار تابع می‌باشد. نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $y=f(۲x)$ برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۲)

تغییرات در راستای محور **x**ها برعکس اعمال می‌شود پس چون ضریب **x** دو برابر شده ما **x** نقطه را نصف می‌کنیم و در راستای محور **y**ها هم که تغییری نداریم پس پاسخ$(-۱,۴)$ است.

سوال: برد تابع f بازه‌ی $(-۳,۱]$ است. برد تابع $y=-۲f(۳x-۱)+۳$ کدام‌یک از موارد زیر است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

الف) $[-۸,۰)$ ب) $(-۱۲,۰]$ پ) $[۱,۹)$ ت) $[-۱۰,۲)$

! پاسخ: تغییرات در راستای محور **y**ها همانطور که هست اعمال می‌شود. پس:

گزینه (پ) $-۳<y\le ۱ \xrightarrow{x(-۲)} -۲\le y<۶ \xrightarrow{+۳} ۱\le y<۹=[۱,۹)$

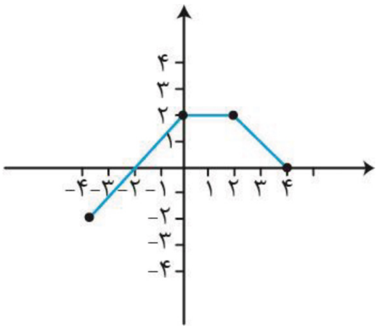
سوال: نمودار تابع $g=\sqrt{x}$ را ابتدا ۳ واحد به سمت راست انتقال می‌دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می‌کنیم. ضابطه جدید تابع چیست؟. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ: انتقال به سمت راست در جهت محور **x**هاست پس برعکس انجام می‌شود و دو برابر کردن عرض یعنی کل تابع را ۲ برابر می‌کنیم.⟸ $y=۲\sqrt{x-۳}$

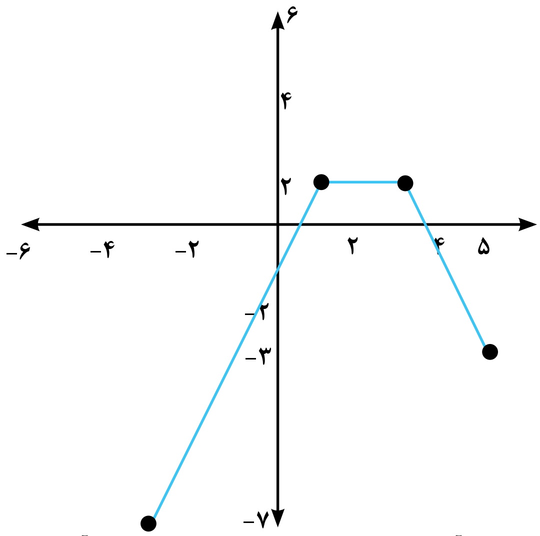
سوال: با استفاده از نمودار تابع **f**، نمودار خواسته شده را رسم کنیم.

$y=۲f(x-۱)-۳$

پاسخ: با توجه به درسنامه در راستای محور **x**ها یک واحد به راست و در راستای محور **y**ها ابتدا ۲ برابر سپس ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم. برای رسم ابتدا نقاط مرزی را انتقال داده سپس آن‌ها را به هم وصل می‌کنیم.



نقاط مرزی



$$(۴,۰) \longrightarrow (۵,-۳)$$
$$(۲,۲) \longrightarrow (۳,۱)$$
$$(۰,۲) \longrightarrow (۱,۱)$$
$$(-۴,-۲) \longrightarrow (-۳,-۷)$$

تابع وارون:

اگر در یک تابع مانند $f(x)$ جای ورودی‌ها (دامنه) و خروجی‌ها (برد) را عوض کنیم آنچه حاصل می‌شود وارون تابع است و آن را با نماد $f^{-۱}_{(x)}$ نمایش می‌دهیم.

$$\begin{cases} D_f = R_{f^{-۱}} \\ R_f = D_{f^{-۱}} \end{cases}$$

حواست باشه

تابع زمانی وارون‌پذیر است که یک به یک باشد.

وارون کردن تابع در نمایش‌های مختلف آن

زوج مرتب: در تمامی زوج مرتب‌های تابع جای مؤلفه‌ی اول و دوم را عوض می‌کنیم.

نمودار پیکانی: جای مجموعه اول و دوم را عوض می‌کنیم یا جهت فلش‌ها را برعکس می‌کنیم.

نمودار مختصاتی: نمودار تابع را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم $(y = x)$ قرینه می‌کنیم.

نمایش جبری (ضابطه): جای **x** و **y** را عوض کرده و سپس **y** را تنها می‌کنیم.

مثال:

$$f_{(x)} = ۲\sqrt{x-۱}+۳ \xrightarrow{\text{وارون}} x = ۲\sqrt{y-۱}+۳ \xrightarrow{\text{ساده کردن}} x-۳ = ۲\sqrt{y-۱} \xrightarrow{\div ۲} \frac{x-۳}{۲} = \sqrt{y-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{توان}} \left(\frac{x-۳}{۲}\right)^۲ = y-۱ \xrightarrow{+۱} f^{-۱}_{(x)} = \left(\frac{x-۳}{۲}\right)^۲ + ۱$$

حواست باشه

گاهی توابعی که یک به یک نیستند را با محدود کردن دامنه به تابع یک به یک تبدیل می‌کنیم. مانند تابع درجه ۲

روش حل سؤالات وارون رو دریاب

برای حل سؤالات وارون تابع تا جایی که بتوانیم سراغ پیدا کردن وارون نمی‌رویم بلکه یک نقطه در نظر گرفته و جای **x** و **y** آن را

عوض می‌کنیم و در وارون چک می‌کنیم و با رد گزینه و عددگذاری سؤالات را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} a \to f_{(x)} \to b \\ b \to f^{-1}_{(x)} \to a \end{cases}$$

سوال: در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) اگر $f(x)=۳+\sqrt{۲x-۱}$ باشد، مقدار $\left(fof^{-1}\right)_{(۵)}$ برابر با........................ است.(خرداد۱۴۰۲)

ابتدا ۵ باید وارد وارون **f** شود و چون وارون را نداریم از خود **f** کمک می‌گیریم.

$$f\left(f^{-1}_{(۵)}\right)=f\left(\frac{۵}{۲}\right)=۵$$

$$\begin{matrix} ۵\to f^{-1}\to y \\ y\to f\to ۵ \end{matrix}\Rightarrow ۵=۳+\sqrt{۲x-۱}\to ۲=\sqrt{۲x-۱}\xrightarrow{\text{توان}}۴=۲x-۱\to ۲x=۵\to x=\frac{۵}{۲}$$

ب) اگر $f(x)=۲x^۳-۱$ باشد، حاصل $f^{-1}_{(۱۵)}$ برابر................. است.(دی ۱۴۰۱)

برای حل این سؤال می‌توانیم از خود **f** کمک بگیرید یا **f** وارون را پیدا کنیم.

راه اول:

$$۲x^۳-۱=۱۵\to ۲x^۳=۱۶\to x^۳=۸\to x=۲\Rightarrow f(۲)=۱۵\to f^{-1}_{(۱۵)}=۲$$

راه دوم:

$$y=۲x^۳-۱\xrightarrow{\text{وارون}}x=۲y^۳-۱\to x+۱=۲y^۳\to \frac{x+۱}{۲}=y^۳\to y=\sqrt[۳]{\frac{x+۱}{۲}}\xrightarrow{x=۱۵}y=۲$$

پ) اگر $f=\{(۲,۳),(۳,۵)\}$ باشد، حاصل $f^{-1}_{(۳)}$ برابر...................... است.(خرداد۱۴۰۱)

با توجه به تعریف وارون و توجه به زوج مرتب‌های داده شده جواب عدد ۲ است.

$$۳\to f^{-1}\to \boxed{}$$
$$\boxed{۲}\to f\to ۳$$

ت) ضابطه وارون تابع $y=x^۳$ برابر...................... است. (شهریور ۱۴۰۱)

وارون توان ۳، فرجه ۳ است پس جواب $y^{-1}=\sqrt[۳]{x}$

ث)اگر دامنه تابع $f(x), x^۲+۴x+۳$ برابر $[-۲,+\infty)$ باشد،ضابطه و دامنه تابع وارون را بدست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)

ابتدا تابع را مربع کامل می‌کنیم سپس طبق درسنامه وارون را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=x^۲+۴x+\overbrace{۴-۱}^{۳}=(x+۲)^۲-۱\xrightarrow{\text{وارون}}x=(y+۲)^۲-۱\to x+۱=(y+۲)^۲$$
$$\to\sqrt{x+۱}=y+۲\to y=\sqrt{x+۱}-۲\Rightarrow f^{-1}_{(x)}=\sqrt{x+۱}-۲$$
$$D_{f^{-1}}=[-۱,+\infty)$$

سوال: ضابطه وارون تابع $g(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$ را به دست آورید. (دی ۹۹)

$$y=-۵-\sqrt{۳x+۱}\xrightarrow{\text{وارون}}x=-۵-\sqrt{۳y+۱}$$

$$\to x+۵=-\sqrt{۳y+۱}\xrightarrow{\text{توان }2}(x+۵)^۲=۳y+۱\to(x+۵)-۱=۳y\to y=\frac{(x+۵)^۲-۱}{۳}$$

$$f^{-1}_{(x)}=\frac{(x+۵)^۲-۱}{۳}$$

فصل دوم: مثلثات

به دنیای مثلثات خوش اومدی نوتروفیلی عزیزم... مثلثات هم مطالب حفظی داره هم مفهومی پس بزن بریم تو کارش

دوره تناوب و تابع متناوب: تابع $f(x)$ را متناوب گوییم هرگاه بتوانیم با انتقال افقی نمودار تابع را بر خودش منطبق کنیم. در این صورت حداقل مقدار مثبت انتقال افقی را دوره تناوب اساسی تابع می‌نامیم و آن را با **T** نمایش می‌دهیم.

توابع مثلثاتی $y=\text{Sin}\,x$ و $y=\text{Cos}\,x$ متناوب هستند ودوره تناوب آن برابر 2π است.

توابع مثلثاتی $y=\tan x$ و $y=\cot x$ متناوب هستند و دوره تناوب آنها برابر π است.

روش‌های پیدا کردن دوره تناوب توابع sin x و cos x

۱- فاصله‌ی بین دو نقطه ماکسیمم تابع

۲- فاصله بین دو نقطه مینیمم تابع

۳- از یک برخورد تا دومین برخورد بعد از آن با محور **x**ها

دو عمل قدر مطلق و توان زوج دوره تناوب $\sin x$ و $\cos x$ را نصف می‌کند.

این نکته مهم رو دریاب :

اگر دوره تناوب تابع $f(x)$ را داشته باشیم و بخواهیم دوره تناوب تابع $y=a\,f_{(bx+c)+d}$ را بدست آوریم مطابق فرمول زیر عمل می‌کنیم:

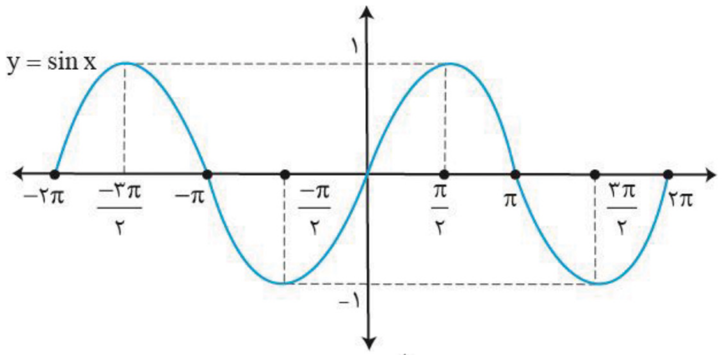
$$y=af(bx+c)+d$$

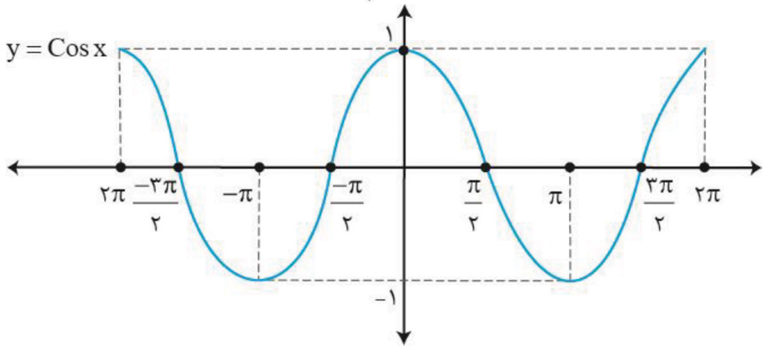
دوره تناوب سینوس و کسینوس: $T=\dfrac{2\pi}{|b|}$

ضریب x میشود: $T=\dfrac{T_f}{|b|}$

دوره تناوب سینوس و کسینوس:

ضریب **x** میشود:





مقدار ماکسیمم و مینیمم این توابع از رابطه زیر بدست می‌آید:

بی‌تاثیر / تاثیر در دوره تناوب

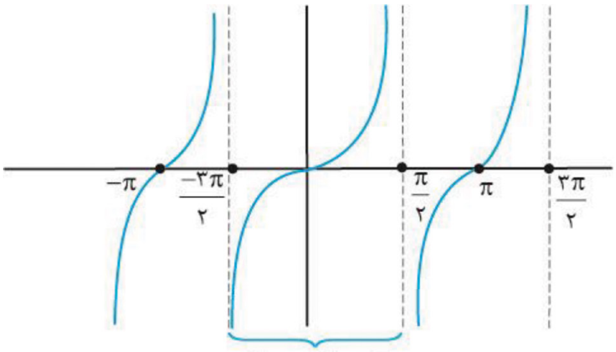
$$y = a \sin\underset{(\cos)}{} (bx \pm d) \pm c$$

تاثیر در Max و min

$$Max = |\alpha| + C$$
$$min = -|\alpha| + C$$

به نحوه شروع شدن و صعودی و نزولی بودن توابع توجه کنید.

$$\begin{cases} y = \tan x \\ D_y = \{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in z\} \\ R_y = R \end{cases}$$



در کل نه صعودی نه نزولی است ولی در هر بازه تعریف شده از دامنه اکیداً صعودی

سوال: در جای خالی عبارت مناسب قرار دهیم.

برد تابع $y = \tan\alpha$ برابر........................ می‌باشد. (خرداد ۹۹)

پاسخ: برد تابع $\tan\alpha$ برابر مجموعه اعداد حقیقی (**R**) است.

سوال: دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را بدست آورید. (دی ۹۹)

$$y = ۸\cos\left(\frac{x}{۳}\right)$$

پاسخ:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۳}|} = ۶\pi$$

$$\begin{cases} max = |a| + C = ۸ + ۰ = ۸ \\ min = -|a| + C == -۸ + ۰ = -۸ \end{cases}$$

سوال: دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به دست آورید. (خرداد ۹۹)

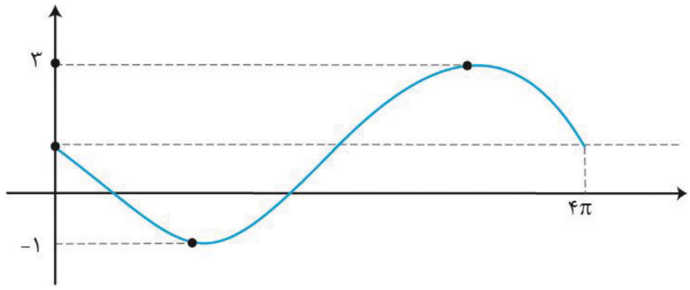
$$y = \sqrt{۳} - Cos\frac{\pi}{۲}x$$

پاسخ:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|} = ۴$$

$$\begin{cases} max = |a| + C = ۱ + \sqrt{۳} \\ min = -|a| + C = -۱ + \sqrt{۳} \end{cases}$$

سوال: نمودارزیر قسمتی از نمودار تابع $y=\alpha \mathrm{Sin}\, bx+1$ است. حاصل **ab** را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ:

$$T=4\pi \to \frac{2\pi}{|b|}=4\pi \to |b|=\frac{1}{2} \to b=\pm\frac{1}{2}$$

اختلاف مقدار **max** و **min** تقسیم در ۲ برابر ضریب Sin یا Cos (a) است.

$$|a|=\frac{3-(-1)}{2}=2 \to \alpha=\pm 2$$

با توجه به نمودار که به صورت نزولی شروع شده **ab** باید منفی باشد پس $\boxed{ab=-1}$

سوال: معادله یک تابع سینوسی $y=\alpha \mathrm{Sin}(bx)+C$ را بنویسید که برد آن $[-4,4]$ را بنویسید که برد آن و دوره تناوب اصلی آن ۲ است. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\left.\begin{array}{l} T=2 \to \dfrac{2\pi}{|b|}=2 \to |b|=\pi \to b=\pm\pi \\ |\alpha|=\dfrac{\max-\min}{2}=\dfrac{4-(-4)}{2}=4 \to \alpha=\pm 4 \\ C=\dfrac{\max+\min}{2}=\dfrac{4+(-4)}{2}=0 \to C=0 \end{array}\right\} y=\pm 4\mathrm{Sin}(\pm\pi x)$$

همه توابع با این فرمت درست هستند.

روابط مثلثاتی دو برابر کمان: گاهی برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا از زوایای دیگر کمک می‌گیریم.

$$1)\ \mathrm{Sin}2\alpha=2\mathrm{Sin}\alpha\mathrm{Cos}\alpha$$

$$2)\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Cos}2\alpha=\mathrm{Cos}^2\alpha-\mathrm{Sin}^2\alpha \\ \mathrm{Cos}2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \\ \mathrm{Cos}2\alpha=1-2\mathrm{Sin}^2\alpha \end{array}\right\}$$ ویژه‌ی زوایای نصف معروف 15 و 22/5

سوال: $\mathrm{Cos}15^\circ$ و $\mathrm{Sin}15^\circ$ را حساب کنید. (خرداد، شهریور و دی ۹۹)

پاسخ:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 \to \cos 30^\circ=2\cos^2 15^\circ-1$$

$$\to \frac{\sqrt{3}}{2}+1=2\cos^2 15^\circ \to \frac{\sqrt{3}+2}{2}=2\cos^2 15^\circ \to \frac{\sqrt{3}+2}{4}=\cos^2 15^\circ$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال}} \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}}=\cos 15^\circ \to \cos 15^\circ=\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha \to \cos 30^\circ=1-2\sin^2 15^\circ \to \frac{\sqrt{3}}{2}-1=-2\mathrm{Sin}^2 15^\circ$$

$$\to \frac{\sqrt{3}-2}{2}=-2\mathrm{Sin}^2 15^\circ \to \frac{-\left(\sqrt{3}+2\right)}{4}=\mathrm{Sin}^2 15^\circ \xrightarrow{\text{رادیکال}} \mathrm{Sin}15^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

سوال: مقدار $\text{Sin}\,(۲۲/۵)^\circ$ را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$\text{Cos}۲\alpha=۱-۲\text{Sin}^۲\alpha\to\cos۴۵^\circ=۱-۲\sin^۲(۲۲/۵)^\circ\to\frac{\sqrt{۲}}{۲}=۱-۲\sin^۲(۲۲/۵)^\circ$$

$$\to۲\sin^۲(۲۲/۵)^\circ=۱-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to۲\sin^۲(۲۲/۵)^\circ=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۲}\to\sin^۲(۲۲/۵)^\circ=\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}$$

$$\xrightarrow{\text{رادیکال}}\text{Sin}\,(۲۲/۵)=\sqrt{\frac{۲-\sqrt{۲}}{۴}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$$

سوال: فرض کنید $\text{Cos}\,\alpha=\frac{۵}{۱۳}$ و α زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارات $\text{Sin}۲\alpha$ و $\text{Cos}۲\alpha$ را بدست آورید. (تمرین کتاب درسی)

پاسخ:

$$\cos\alpha^۲+\sin\alpha^۲=۱\to\frac{۲۵}{۱۶۹}+\text{Sin}^۲\alpha=۱\to\text{Sin}^۲\alpha=۱-\frac{۲۵}{۱۶۹}=\frac{۱۴۴}{۱۶۹}$$

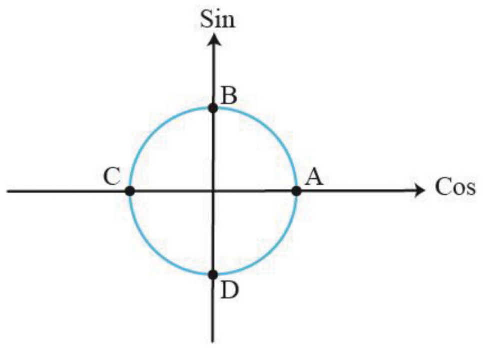
$$\text{Sin}\,\alpha=\frac{+۱۲}{۱۳}$$

$$\text{Sin}۲\alpha=۲\text{Sin}\alpha.\text{Cos}\,\alpha=۲\times\frac{۱۲}{۱۳}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۱۲۰}{۱۶۹}$$

$$\text{Cos}۲\alpha=۲\cos^۲\alpha-۱=۲\times\frac{۲۵}{۱۶۹}-۱=\frac{۵۰}{۱۶۹}-\frac{۱۶۹}{۱۶۹}=-\frac{۱۱۹}{۱۶۹}$$

معادلات مثلثاتي

نقاط معروف رويِ دايره مثلثاتي رو حفظ باش



$۱)\,A:۲k\pi$

$۲)\,C:۲k\pi+\pi$

$۳)\,B:۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

$۴)\,D:۲k\pi-\frac{k}{۲}$

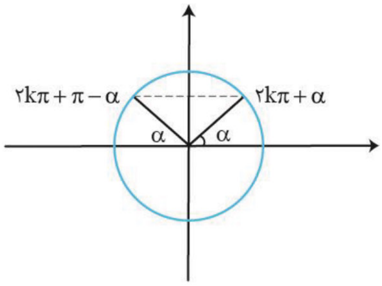
$۵)\,A,C:k\pi$

$۶)\,B,D:k\pi\pm\frac{\pi}{۲}$

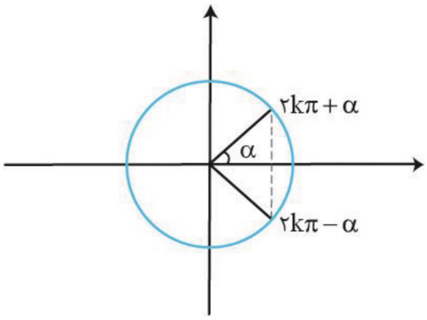
$۷)\,A,B,C,D:\frac{k\pi}{۲}$

برای حل معادلات مثلثاتی از روابط زیر کمک می‌گیریم:

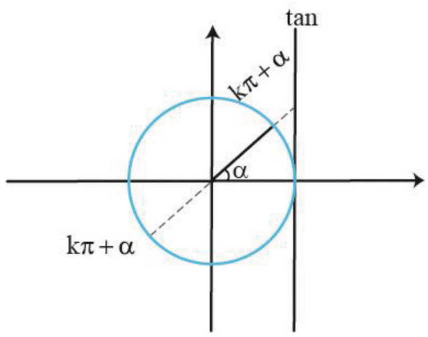
$$\text{Sin}\square=\text{Sin}\bigcirc \to \begin{cases}\square=2k\pi+\bigcirc\\ \square=2k\pi+\pi-\end{cases}$$



$$\text{Cos}\square=\text{Cos}\bigcirc \to \{\square=2k\pi\pm\bigcirc$$



$$\tan\square=\tan\bigcirc \to \{\square=k\pi+\bigcirc$$



سوال: معادله مثلثاتی $\text{Sin}2x=\text{Sin}\,x$ را حل کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\text{Sin}2x=\text{Sin}\,x \to \begin{cases}2x=2k\pi+x \to x=2k\pi, k\in z\\ 2x=2k\pi+\pi+x \to 3x=2k\pi+\pi \to x=\dfrac{2k\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}, k\in z\end{cases}$$

سوال: جواب‌های معادله مثلثاتی $\cos 2x-\cos x=0$ را در بازه $(0,\pi)$ مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

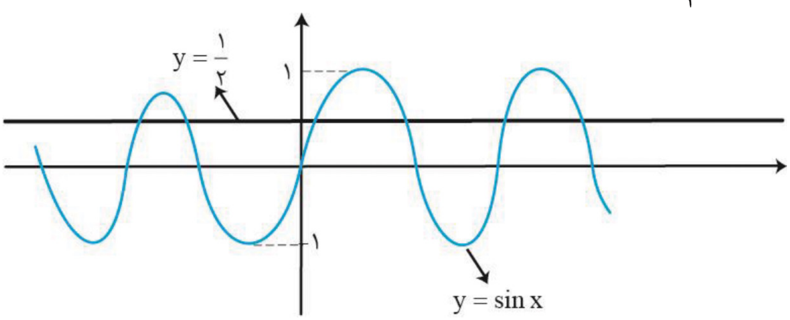
پاسخ:

$$\text{Cos}2x=\cos x \to 2x=2k\pi\pm x \xrightarrow[k\in z]{} \begin{cases}x=2k\pi \to 0, 2\pi, 4\pi\\ x=\dfrac{2k\pi}{3} \to 0, \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$

فقط $x=\dfrac{2\pi}{3}$ در بازه $(0,\pi)$ در بازه قرار دارد.

سوال: نمودار تابع با ضابطه $y=\text{Sin}\,x$ و خط به معادله $y=\dfrac{1}{2}$ در دستگاه مختصات زیر، رسم شده است طول نقاط برخورد آنها را پیدا کنید. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:



ابتدا پیدا می‌کنیم Sin کدام زاویه برابر با $\frac{۱}{۲}$ است:

$$\operatorname{Sin}\bigcirc = k = \operatorname{Sin}\square$$

$$\operatorname{Sin} x = \frac{۱}{۲} = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶} \to \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} & (k \in z) \\ x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

سوال: معادله مثلثاتی $۲\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را حل کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$۲\operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} x = \operatorname{Sin}۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۳} \to \operatorname{Sin}۲x = \operatorname{Sin}\frac{x}{۳} \to \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases} (k \in z)$$

سوال: معادله زیر را حل کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ ۱-۲\operatorname{Sin}^۲ x}}{\operatorname{Cos}۲x} - ۳\operatorname{Sin} x + ۴ = ۰ \to ۱ - ۲\operatorname{Sin}^۲ x - ۳\operatorname{Sin} x + ۴ = ۰ \to -۲\operatorname{Sin}^۲ x - ۳\operatorname{Sin} x + ۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{\operatorname{Sin} x = t} -۲t^۲ - ۳t + ۵ = ۰ \begin{cases} t = -\frac{۵}{۲} \to \operatorname{Sin} x = -\frac{۵}{۲} \text{ غ ق ق} \\ y = ۱ \to \operatorname{Sin} x = ۱ = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۲} \to x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

سوال: معادله‌ی مثلثاتی ، $\operatorname{Cos}^۲ x - \operatorname{Sin} x = \frac{۱}{۴}$ را حل کنید.

$$(۱ - \operatorname{Sin}^۲ x) - \operatorname{Sin} x = \frac{۱}{۴} \to \operatorname{Sin}^۲ x + \operatorname{Sin} x - \frac{۳}{۴} = ۰ \xrightarrow{\text{ضربدر چهار}}$$

$$\to ۴\operatorname{Sin}^۲ x + ۴\operatorname{Sin} x - ۳ = ۰ \xrightarrow{\operatorname{Sin} x = t} ۴t^۲ + ۴t - ۳ = ۰ \xrightarrow[۱۶-۴\times۴\times(-۳)=۶۴]{b^۲-۴ac} \begin{cases} t = \frac{-۴ + \sqrt{۶۴}}{۲\times۴} = \frac{۴}{۸} = \frac{۱}{۲} \\ t = \frac{-۴ - \sqrt{۶۴}}{۲\times۴} = \frac{-۱۲}{۸} = -\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} t = \operatorname{Sin} x = \frac{۱}{۲} \text{ ق ق} \\ t = \operatorname{Sin} x = -\frac{۳}{۲} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

$$\operatorname{Sin} x = \frac{۱}{۲} = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶} \to \operatorname{Sin} x = \operatorname{Sin}\frac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + -\frac{\pi}{۶} \end{cases}$$

فصل سوم: حد

از قدیم میگن حد را بخوان تا کامروا باشی... حد یه فصل ساده ست پس تا میتونید ازش نمره بگیرید

همسایگی: هر بازه باز مانند (a,b) را که شامل x باشد یک همسایگی برای x می‌گوییم.

$a<x<b \quad , \quad x\in(a,b)$

همسایگی محذوف: اگر بازه (a,b) یک همسایگی برای x باشد آنگاه مجموعه $(a,b)-\{x\}$ همسایگی محذوف برای x است.

$a<x<b, x\notin(a,b)$

همسایگی چپ و راست: بازه (x,b) همسایگی راست و بازه (a,x) همسایگی چپ x هستند.

تقسیم چند جمله‌ای‌ها:

$$\begin{array}{l|l} f_{(x)} & x-a \\ \hline R & Q_{(x)} \end{array}$$

$$f_{(x)}=(x-a)Q_{(x)}+R$$

$$\Rightarrow x=a\to f_{(a)}=\underbrace{\cancel{(a-a)}}_{0}Q_{(a)}+R$$

$$f_{(a)}=R$$

در تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر عامل $(x-a)$ باقیمانده برابر با $f(a)$ است اگر $f(a)$ برابر صفر باشد یعنی $f_{(x)}$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است و بالعکس.

سوال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) بازه (۵و ۲) یک همسایگی ۴ است. (شهریور ۱۴۰۱)

درست- بازه (۵ و ۲) شامل ۴ می‌باشد.

ب) در تقسیم چند جمله‌ای $p_{(x)}$ بر $x-a$ باقی مانده برابر $p_{(a)}$ است. (دی ۹۹)

درست- طبق درسنامه

پ) چند جمله‌ای $f_{(x)}=2x^3+5x^2-3x-10$ بر دو جمله‌ای $x+2$ بخش‌پذیر است. (دی ۹۸)

درست- اگر ریشه $x+2$ را در $f_{(x)}$ قرار دهیم باقیمانده صفر می‌شود پس بخش‌پذیر است.

سوال: در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

باقیمانده تقسیم عبارت $2x^2-5x+1$ بر $x-3$ برابر.................... است.

اگر ریشه $x-3$ را در عبارت جاگذاری کنیم باقیمانده برابر ۴ می‌شود.

مفهوم حد و محاسبه آن

میل کردن به عدد α: یعنی بتوان به اندازه دلخواه و بسیار زیاد به α نزدیک شد و آن را با نماد $x\to\alpha$ نشان می‌دهند. اگر از سمت راست بسیار به **a** نزدیک شویم آن را با نماد $x\to\alpha^+$ و اگر از سمت چپ بسیار به α نزدیک شویم آن را با نماد $x\to\alpha^-$ نشان می‌دهند.

تعریف حد راست: فرض کنید تابع f در بازه‌ی (a,b) تعریف شده باشد در این صورت حد راست تابع f در نقطه a برابر عددی مانند L است هرگاه به ازای نزدیک شدن به a از سمت راست $(x\to a^+)$ مقادیر تابع نیز به L نزدیک شود.

$$\lim_{x\to a^+} f_{(x)}=L$$

تعریف حد چپ: فرض کنید تابع f در بازه‌ی (b,a) تعریف شده باشد در این صورت حد چپ تابع f در نقطه a برابر عددی مانند L است هرگاه به ازای نزدیک شدن به a در سمت چپ $(x\to a^-)$ مقادیر تابع نیز به L نزدیک شود.

$$\lim_{x\to a^-} f_{(x)}=L$$

تعریف حد کامل: فرض کنید تابع f در بازه (b,c) تعریف شده باشد که این بازه همسایگی یا همسایگی محذوف a است در این صورت حد تابع f در تابع a برابر L است هرگاه به ازای نزدیک شدن به a (از چپ و راست) مقادیر تابع نیز به L نزدیک شود.

$$\lim_{x\to a} f_{(x)} = L$$

پس تابع وقتی در یک نقطه حد دارد که حد چپ و راست آن موجود و برابر باشند.

برای محاسبه حد توابع پیوسته نقطه‌ای که حد را در آن می‌خواهیم به تابع می‌دهیم و مقدار حد بدست می‌آید اما در توابعی مانند چند ضابطه‌ای باید حواسمان به نقاط مرزی باشد و حد چپ و راست را بررسی کنیم.

در تمامی حدها در صورت وجود قدرمطلق یا جز صحیح ابتدا آنها را تعیین تکلیف و حذف می‌کنیم.

ابهام $\frac{0}{0}$ ← اگر در محاسبه حدهای کسری پس از جایگذاری به ابهام $\frac{0}{0}$ رسیدیم باید عامل صفر شونده را از صورت و مخرج حذف کنیم:

۱- اگر کسر رادیکال نداشت: صورت و مخرج را با استفاده از فاکتورگیری یا اتحادها تجزیه می‌کنیم.

۲- اگر کسر رادیکال داشت: باید با استفاده از اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج گویا کنیم.

البته استفاده از هوپیتال بسیار سریع‌تر خواهد بود به شرطی که اگر رادیکال داشتیم زیر رادیکال صفر نشود.

حد بی‌نهایت: اگر در روند حل صورت یک عدد و مخرج صفر شود جواب حد ما بی‌نهایت خواهد بود.

$$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

برای تعیین علامت ∞ باید صفر مخرج را تعیین علامت کنیم.

حد در بی‌نهایت: اگر در بی‌نهایت بخواهیم از تابع حد بگیریم یعنی حد در نقطه $x=\infty$ در این صورت اگر با ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ روبه‌رو شدیم باید از هم ارزی پرتوان استفاده کنیم یعنی از صورت و مخرج تابع عامل پرتوان را برداریم و معادل تابع قرار دهیم، که با این کار سه حالت پیش می‌آید:

$$f_{(x)} = \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m+1} + \dots} \equiv \frac{ax^n}{a'x^m} \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f_{(x)} = \begin{cases} \infty \to n > m \\ \dfrac{\alpha}{\alpha'} \to n = m \\ 0 \to m > n \end{cases}$$

انواع حد

1) حد ÷ ← اول جایگذاری: جواب داد ← ok

ایجاد ابهام ÷ ← حذف عامل صفر شوند.

رادیکال نداشت: 1- ریشه‌یابی 2- فاکتورگیری 3- اتحادها

رادیکال داشت: یادآوری 1- مزدوج 2- چاق و لاغر

2- حد بی‌نهایت ← اول جایگذاری $\infty = \frac{\text{عدد}}{0}$ ← تعیین علامت صفر و ∞

$$\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$$

3- حد در بی‌نهایت ← اول جایگذاری ← ایجاد ابهام $\frac{\infty}{\infty}$ ←استفاده از هم ارزی پرتوان

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \begin{cases} \infty \to m<n \\ \frac{\alpha}{\alpha'} \to n=m \Leftarrow f(x) = \frac{ax^n+bx^{n-1}\ldots}{a'x^m+b'x^{m-1}} \cong \frac{ax^n}{a'x^m} \\ 0 \to n<m \end{cases}$$

حواست باشه

در تمامی حدها در صورت وجود قدرمطلق یا براکت تعیین تکلیف می‌کنیم.

سوال: آیا مقدار $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{[x]-1}$ وجود دارد؟ چرا؟ (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

خیر- چون با گذاشتن 1^+ درون عبارت مخرج صفر مطلق می‌شود یا به عبارتی تابع در همسایگی راست $x=1$ تعریف نشده است.

سوال: حاصل حد تابع $f(x) = \frac{2x^2}{3x^2-1}$ وقتی $x \to +\infty$ میل می‌کند برابر.................... است. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

توان جملات پرتوان برابر است پس پاسخ تقسیم ضرایب می‌شود.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{3x^2-1} = \frac{2\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = \frac{2}{3}$$

سوال: حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\text{الف)}\ \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)} = 3 \to \text{if}(x=1)$$

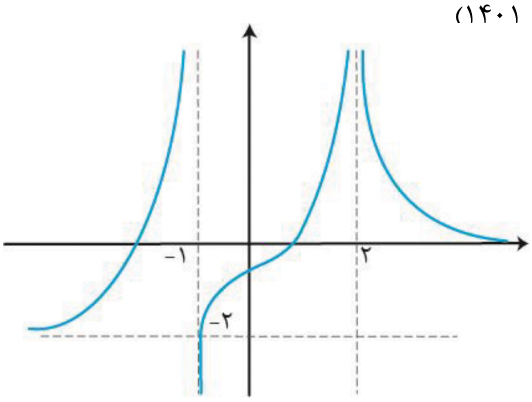
$$\text{ب)}\ \lim_{x\to 0^-} \frac{x-2}{|\operatorname{Sin} x|} = \frac{0^- -2}{|\operatorname{Sin} 0^-|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\text{پ)}\ \lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+4x^5}{x^3-x} \overbrace{=}^{} \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^{\cancel{5}}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} 4x^2 = +\infty$$

سوال: حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. (دی ۱۴۰۱)

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}=\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\frac{\cancel{x-۱}}{\cancel{(x-۱)}(x+۱)(\sqrt{x}+۱)}\xrightarrow{x=۱}\frac{۱}{۴}$$

سوال: نمودار تابع **f** به شکل مقابل است. حدهای زیر را محاسبه کنید. (دی ۱۴۰۱)



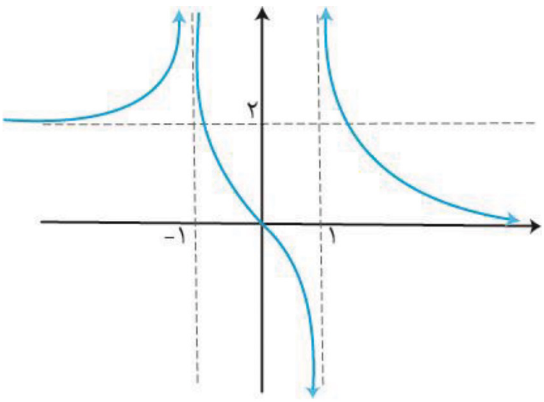
پاسخ: در سؤالات نموداری با توجه به اینکه **x** به چه چیز میل می‌کند **y** را پیدا می‌کنیم.

الف) $\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=-\infty$

ب) $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=+\infty$

پ) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-۲$

سوال: نمودار تابع **f** به شکل مقابل است حدود خواسته شده را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)



پاسخ:

الف) $\lim_{x\to -\infty} f(x)=۲$

ب) $\lim_{x\to +\infty} f(x)=۰$

پ) $\lim_{x\to -۱} f(x)=+\infty$

ت) $\lim_{x\to (۱)^-} f(x)=-\infty$

فصل چهارم : مشتق

فصلی گره خورده به حد! به مشتق خوش اومدی

تعریف مشتق: اگر تابع‌اگر تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته باشد مشتق در این نقطه به صورت زیر تعریف می‌شود:
یا

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f_{(x)}-f_{(a)}}{x-a} \text{ یا } f'_{(a)}=\lim_{h\to ۰}\frac{f_{(a+h)}-f_{(a)}}{h}$$

مشتق یعنی شیب خط مماس در یک نقطه .

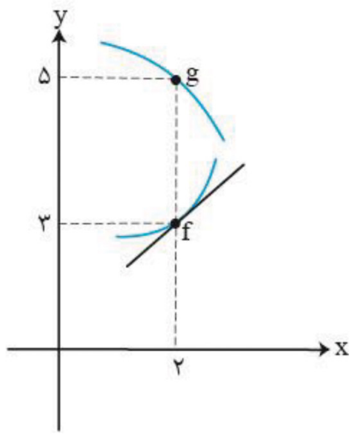
خط مماس و مشتق چپ و راست: برای رسم خط مماس باید نقطه تعریف شده و پیوسته باشد. اگر این دو شرط برقرار باشد نیم
اگر تابع در نقطه $x=a$ مماس داشته باشد و این مماس موازی محور yها نباشد آنگاه تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است.
مشتق چپ در نقطه $x=a \Leftarrow$ اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوستگی چپ داشته باشد آنگاه می‌توان نیم مماس چپ در این نقطه را رسم کرد که اگر موازی محور yها نباشد می‌گوییم:

$$\text{شیب نیم مماس چپ} = f'_{(a^-)}=\lim_{x\to a^-}\frac{f_{(x)}-f_{(a)}}{x-a}$$

مشتق راست در نقطه $x=a \Leftarrow$ اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد آنگاه می‌توان نیم مماس راست در این نقطه را رسم کرد که اگر موازی محور yها نباشد می‌گوییم:

$$\text{شیب نیم مماس راست} = f'_{(a^+)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f_{(x)}-f_{(x)}}{x-a}$$

سوال: با توجه به نمودارهای توابع **f** و **g** حاصل $\lim_{x\to ۲}\frac{f_{(x)}g_{(x)}-۳g_{(x)}}{x-۲}$ چند برابر $f'(۲)$ است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

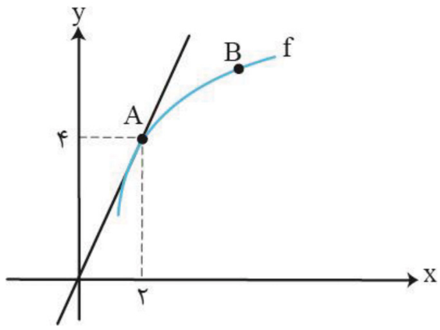


g(۲)=۵, f(۲)=۳

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-۳g(x)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)g(x)-f(۲)g(x)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{g(x)(f(x)-f(۲))}{x-۲}=\underbrace{\lim_{x\to ۲}g(x)}_{۵}.\underbrace{\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}}_{\text{تعریف مشتق}}=۵\times f'(۲)=۵f'(۲)$$

سوال: نمودار تابع **f** به صورت زیر رسم شده است اگر خط **d** در نقطه **A** بر نمودار تابع **f** مماس باشد؟ (دی ۱۴۰۱)



الف) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید.

ب) شیب خط‌های مماس در نقاط **A** و **B** را مقایسه کنید.

پاسخ:

الف) تعریف مشتق در نقطه 2 یا همان شیب در نقطه $x=۲$ است. (برابر با شیب خط مماس رسم شده)

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'_{(۲)}=۲ \qquad m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{۴}{۲}=۲$$

ب) هر چه خط به حالت قائم نزدیک‌تر باشد شیب آن بیشتر است پس: $m_A > m_B$

مشتق‌پذیری در نقطه: $x=a$: پس تابع $y=f(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر است هرگاه دو شرط زیر همزمان برقرار باشد:

۱- تابع در این نقطه پیوسته باشد.

2- $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ موجود و برابر با یک عدد مشخص باشد. (عدد معلوم $=f'_{(a^-)}=f'_{(a^+)}$)

تابع مشتق و قوانین مشتق‌گیری: اگر در تعریف مشتق به جای عدد معلوم از عدد مجهول **x** استفاده کنیم مشتق در هر نقطه از تابع بدست می‌آید که به آن تابع مشتق می‌گوییم.

قوانین مشتق‌گیری:

$$f(x)=k \to f'(x)=۰$$
$$f(x)=ax \to f'(x)=a$$
$$f(x)=ax^n \to f'(x)=na.x^{n-۱}$$
$$f(x)=g(x)\pm h(x)\pm .... \to f'(x)=g'(x)\pm h'(x)\pm ....$$
$$f(x)=g(x).h(x) \to f'(x)=g'(x).h(x)+h'(x)g(x)$$
$$f(x)=(g(x))^n \to f'(x)=n(g'(x)).(g(x))^{n-۱}$$
$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \to f'(x)=\frac{g'(x)h(x)-h'(x)g(x)}{(h(x))^۲}$$
$$f(x)=\sqrt{g(x)} \to f'(x)=\frac{g(x)'}{۲\sqrt{g(x)}}$$
$$f(x)=\sqrt[m]{g(x)^n} \to f'(x)=\frac{ng'(x)}{m\sqrt[n]{g_{(x)}^{m-n}}}$$
$$f(x)=\frac{g(x)}{k} \to f'(x)=\frac{g'(x)}{k}$$
$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \to f'(x)=\frac{ad-bc}{(cx+d)^۲}$$

مشتق تابع مرکب یا ترکیب توابع $\Leftarrow$ $fog_{(x)}=f(g_{(x)}) \longrightarrow g'_{(x)}.f'(g_{(x)})$

مشتق عامل صفر شونده: اگر بخواهیم مشتق تابع **y** در نقطه را محاسبه کنیم و این نقطه ریشه تابع باشد کافیست فقط از همان عبارت مشتق بگیریم و بقیه عبارات را به همان شکل جاگذاری کنیم.

مثال: $x=a$ ریشه عبارت $f(x)$ است:

$$y=\frac{f(x)\cdot g(x)}{h(x)}\xrightarrow[x=a]{}y'=\frac{f'(x).g(x)}{h(x)}$$

مشتق مرتبه دوم: اگر از تابعی دو بار مشتق بگیریم به عبارت حاصل مشتق مرتبه دوم می‌گویند.

مثال:

$$f(x)=ax^{۳}+bx^{۲}+cx+d\xrightarrow[\text{اول}]{\text{مشتق}}f'(x)=۳ax^{۲}+۲bx+c\xrightarrow[\text{دوم}]{\text{مشتق}}f''(x)=۶ax+۲b$$

حواست باشه

به طور خلاصه اگر تابع f در $x=a$ هریک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

1- f در a پیوسته نباشد.

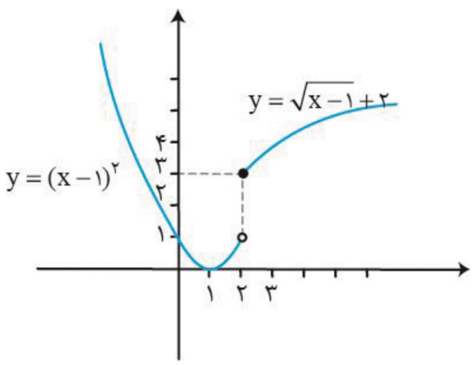
2- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند. (نقطه گوشه‌ای)

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد. (نقطه گوشه‌ای)

پ) هر دو نامتناهی باشند. (مماس قائم)

سوال: نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-۱}+۲ & x\geq ۲\\ (x-۱)^{۲} & x<۲\end{cases}$ به صورت مقابل است:(دی ۱۴۰۱)



الف) آیا تابع f در نقطه $x=۲$ مشتق‌پذیر است؟

ب) آیا تابع در بازه $(-\infty,۲)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟

پ) مشتق راست تابع f در نقطه $x=۲$ را بدست آورید.

پاسخ:

الف) خیر. چون ناپیوسته است و یکی از شروط مشتق‌پذیری پیوستگی است.و

ب) بله. در تمام نقاط این بازه پیوسته و مشتق پذیر است.

پ)

$$x\geq ۲: f(x)=\sqrt{x-۱}+۲\rightarrow f'(x)=\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\rightarrow f'_{+}(۲)=\frac{۱}{۲\sqrt{۲-۱}}=\frac{۱}{۲}$$

سوال: اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $f(۲)=۳, f'(۲)=۵$ و $g(۲)=۸$ و $g'(۲)=-۶$ حاصل $(f.g)'(۲)$ را به دست‌آورید. (خرداد۱۴۰۱)

پاسخ:

مشتق ضرب می‌گیریم $(f.g)'(۲)=f'(۲).g(۲)+g'(۲)f(۲)=\overbrace{۵\times ۸}^{۴۰}+\overbrace{(-۶)\times ۳}^{-۱۸}=۲۲$

سوال: اگر $f(x)=\begin{cases} ax+۱ & x<۰ \\ x^۲+۳x+۱ & x\geq ۰ \end{cases}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد، مشتق‌پذیر باشد، مقدار **a** را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

چون تابع در $x=۰$ مشتق‌پذیر است پس پیوسته و مشتق چپ و راست در آن برابر است.

پاسخ:

$$f'_{+(۰)}=f'_{-(۰)}$$

$$\begin{cases} ax+۱ \xrightarrow{\text{مشتق}} a \xrightarrow{x=۰} a \\ x^۲+۳x+۱ \longrightarrow ۲x+۳ \xrightarrow{x=۰} ۳ \end{cases} \quad \Rightarrow a=3$$

سوال: مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست) (خرداد ۱۴۰۲)

الف) $f(x)=\left(\sqrt{۳x+۲}\right)\left(x^۳+۴\right) \to f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}}\times\left(x^۳+۴\right)+۳x^۲\left(\sqrt{۳x+۲}\right)$

ب) $g(x)=\frac{-۷x^۲+۱}{x-۶} \to g'(x)=\frac{(-۱۴x)(x-۶)-(۱)\times(-۷x^۲+۱)}{(x-۶)^۲}$

پ) $h(x)=(۲x^۵-۱)^۴ \to h'(x)=۴(۲x^۵-۱)^۳(۱۰x^۴)$

سوال: مشتق توابع زیر را بدست آورید. (ساده کردن الزامی نیست) (دی ۱۴۰۱)

الف) $f(x)=x(x-۱)(x+۱)=x(x^۲-۱)=x^۳-x \to f'(x)=۳x^۲-۱$

ب) $g(x)=\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right)^۳ \to g'(x)=۳\left(\frac{۲x-۱}{x+۱}\right)^۲\left(\frac{۲(x+۱)-(۱)(۲x-۱)}{(x+۱)^۲}\right)$

آهنگ تغییر: در سؤالات این فصل ۲ نوع آهنگ تغیر را بررسي مي‌کنيم:

1- آهنگ متوسط تغییرات $\Leftarrow$ شیب خط واصل بین دو نقطه از تابع

$$\overline{m}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}=\frac{f_{(x_۲)}-f_{(x_۱)}}{x_۲-x_۱}$$

2- آهنگ لحظه‌ای تغییرات $\Leftarrow$ شیب خط مماس در یک نقطه از تابع یا مشتق در آن نقطه

$$\lim_{x_۲\to x_۱}\frac{f(x)-f(x)}{x_۲-x_۱}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'_{(x)}$$

سوال: آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع $f(x)=۲x^۲+۵x+۱$ در نقطه‌ای به طول $x=۲$ چند برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه $[-۲,۰]$ است؟ (خرداد ۱۴۰۲)

آهنگ تغییر متوسط = شیب خط

$$f(x)=۲x^۲+۵x+۱ \to f'(x)=۴x+۵$$

$$\xrightarrow{x=۲} f'(۲)=۱۳$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای= مشتق

$m=\frac{f(۰)-f(-۲)}{۰-(-۲)}=\frac{۱-(-۱)}{۲}=\frac{۲}{۲}=۱$ $\qquad$ آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x=۲$، ۱۳ برابر $\to \frac{۱۳}{۱}=۱۳$

آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-۲,۰]$ است.

سوال: معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^{۲}-t+۱۰$ بر حسب متر در بازه $[۰,۵]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است.سرعت متوسط را در بازه زمانی $[۰,۵]$ و سرعت لحظه‌ای را در لحظه $t=۲$ بدست آورید.(خرداد ۱۴۰۱)

$$\text{سرعت متوسط} \rightarrow \frac{\Delta f}{\Delta t}=\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=\frac{۳۰-۱۰}{۵}=\frac{۲۰}{۵}=۴$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای} \rightarrow f(t)=t^{۲}-t+۱۰ \rightarrow f'(t)=۲t-t \xrightarrow{t=۲} f'(۲)=۲(۲)-۱=۳$$

سوال: جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم، جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله $h(t)=-۴t^{۲}+۴۰t$ به دست آید. (دی ۱۴۰۱)

الف) سرعت متوسط در بازه$[۲,۴]$ را بیابید.

ب) در چه زمانی سرعت لحظه‌ای آن برابر ۱۶ متر بر ثانیه است.

پاسخ:

الف) $\text{سرعت متوسط}=\frac{h(۴)-h(۲)}{۴-۲}=\frac{۹۶-۶۴}{۲}=۱۶$

ب) $h(t)=-۴t^{۲}+۴۰t \rightarrow h'(t)=-۸t+۴۰=۱۶ \rightarrow -۸t=-۲۴ \rightarrow t=۳$

فصل پنجم: کاربرد مشتق

یک فصل خیلی جذاب داریم! اما حواست باشه که این فصل هم در امتداد دو فصل اخیره. بدون معطلی بریم و فصل رو بخونیم!

ارتباط یکنوایی تابع با مشتق: برای تشخیص صعودی یا نزولی بودن می‌توانیم از مشتق استفاده کنیم:

الف) در بازه‌ای از دامنه که علامت مشتق مثبت است. $\left(f'_{(x)}>۰\right)$ تابع اکیداً صعودی است.

ب) در بازه‌ای از دامنه که علامت مشتق منفی است $\left(f'_{(x)}<۰\right)$ تابع اکیداً نزولی است.

پ) در بازه‌ای از دامنه که مشتق برابر با صفر است $\left(f'_{(x)}=۰\right)$ در بازه تابع ثابت است.

نقاط بحرانی: اگر $x=a$ عضو دامنه تابع $f_{(x)}$ باشد آن را یک نقطه بحرانی تابع $f_{(x)}$ می‌نامیم. هرگاه یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

1- مشتق در نقطه $x=a$ موجود نباشد.

2- مشتق در نقطه $x=a$ برابر صفر باشد.

دو نکته زیر را دریاب

نکته ۱: ابتدا و انتهای دامنه نقطه بحرانی هستند چون مشتق ندارند.

نکته ۲: بهترین راه برای بدست آوردن نقاط بحرانی رسم نمودار توابع است.

اکسترمم‌های نسبی: به نقاط **max** و **min** نسبی تابع اکسترمم‌های تابع می‌گوییم.

تابع $f_{(x)}$ در نقطه $x=a$ ماکزیمم نسبی دارد هرگاه مقدار تابع در $x=a$ در همسایگی آن از همه بیشتر باشد یا به عبارتی نقطه $x=a$ در همسایگی خود از همه بالاتر باشد.

تابع $f_{(x)}$ در نقطه $x=b$ مینیمم نسبی دارد هرگاه مقدار تابع در $x=b$ در همسایگی آن از همه کمتر باشد که به عبارتی نقطه $x=b$ در همسایگی خود از همه پایین‌تر باشد.

تشخیص max و min نسبی با مشتق

1- ابتدا با استفاده از مشتق نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

2- نقاط بحرانی را در جدول تعیین علامت وارد کرده و تعیین علامت می‌کنیم.

3- نقاطی که اطراف آنها مشتق از مثبت به منفی تغییر علامت داده max نسبی و نقاطی که مشتق در اطراف آنها از منفی به مثبت علامت داده min نسبی هستند.

به جز ریشه‌های مکرر زوج بقیه ریشه‌های مشتق اکسترمم نسبی هستند.

اکسترمم‌های مطلق: به نقاط max و min مطلق تابع اکسترمم‌های مطلق می‌گویند.

نقطه $x=a$، max مطلق تابع $f_{(x)}$ است، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمامی نقاط دامنه بیشتر باشد.

نقطه $x=b$، min مطلق تابع $f_{(x)}$ است، هرگاه مقدار تابع در این نقطه از تمامی نقاط دامنه کمتر باشد.

اگر تابع $f_{(x)}$ در بازه $[a,b]$ تعریف شده باشد در این صورت تابع در این بازه هم ماکزیمم و هم مینیمم مطلق دارد.

تشخیص max و min مطلق

۱- با استفاده از مشتق نقاط بحرانی تابع را پیدا می‌کنیم.

۲- مقدار تابع را در نقاط بحرانی و ابتدا و انتهای بازه یا دامنه بدست می‌آوریم.

۳- بزرگترین عدد بدست آمده مقدار ماکزیمم مطلق و کوچک‌ترین عدد بدست آمده مقدار مینیمم مطلق تابع است.

نکته: اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع، نقاط بحرانی تابع نیز هستند.

سوال: درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن تابع است. (خرداد ۱۴۰۲)

درست- نقاط اکسترمم زیر مجموعه نقاط بحرانی هستند.

ب):هر نقطه دلخواه از دامنه تابع ثابت، یک نقطه بحرانی است. (شهریور ۱۴۰۱)

درست- مشتق هر نقطه روی تابع ثابت برابر صفر است.

سوال:بزرگترین بازه از R که تابع $f(x)=-2x^3+6x+11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

ابتدا ریشه های مشتق را پیدا می‌کنیم سپس جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=-2x^3+6x+11 \to f'(x)=-6x^2+6=0 \to -6x^2=-6 \to x^2=1 \to x=\pm 1$$

پس تابع در بازه $[-1,1]$ صعودی اکید است.

x		-1		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘ نزول		↗ صعود		↘ نزول

سوال: اکسترمم‌های نسبی تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+\frac{۲}{۳}$ را در صورت وجود به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x^{۲}-۳x+\frac{۲}{۳}\rightarrow f'(x)=x^{۲}-۲x-۳=۰\rightarrow z_{۱,۲}=-۱,۳$$

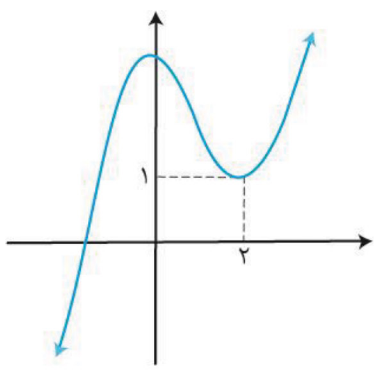
$$\text{Max}_{\text{نسبی}}\Rightarrow f_{(-۱)}=-\frac{۱}{۳}-۱+۳+\frac{۲}{۳}=\frac{۷}{۳}$$

$$\text{min}_{\text{نسبی}}\Rightarrow f(۳)=\frac{۱}{۳}\times ۲۷-۹-۹-+\frac{۲}{۳}=-\frac{۲۵}{۳}$$

x		-۱		۳	
$f'(x)$	+	۰	-	۰	+
f	صعود	max	نزول	min	صعود

سوال: نمودار تابع با ضابطه $f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d$ به صورت شکل مقابل رسم شده است. (دی ۱۴۰۱)

مقادیر **b** و **d** را بیابید.



پاسخ:

تابع در $x=۰$ و $x=۲$ اکسترمم نسبی دارد. پس مشتق تابع دو ریشه دارد.

$$f(x)=x^{۳}+bx^{۲}+d\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}+۲bx=۰$$

$$\underset{x=۰}{\underset{\downarrow}{x}}\,\underbrace{(۳x+۲b)}_{x=۲}=۰\rightarrow ۳x+۲b=۰$$

$$۳\times ۲+۲b=۰\rightarrow b=-۳$$

$$f_{(۲)}=۱\rightarrow ۸+(-۱۲)+d=۱\rightarrow d=۵$$

بهینه‌سازی چیه؟ به مسائلی که کمترین یا بیشترین مقدار عبارتی را می‌خواهند بهینه‌سازی می‌گویند.

مراحل حل کردن سؤالات بهینه‌سازی

1- ابتدا داده‌ها و فرضیات سوال را به زبان ریاضی می‌نویسیم. (رابطه‌ی بین متغیرها)

2- تابع هدف را مشخص می‌کنیم. (عبارتی که قرار max یا min شود)

3- به کمک رابطه موجود بین متغیرها تابع هدف را تک متغیره می‌کنیم.

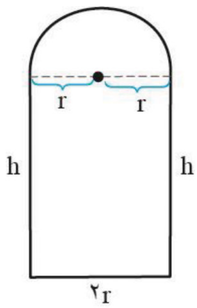
4- از تابع هدف مشتق گرفته و نقاط بحرانی را پیدا می‌کنیم.

5- با استفاده از نقاط بحرانی نقطه‌ی max یا min مطلق تابع را پیدا می‌کنیم (با توجه به سؤال)

6- آن نقطه را در تابع هدف جاگذاری می‌کنیم.

سوال: پنجره‌ای به شکل یک مستطیل به نیم دایره‌ای بر روی آن داریم به طوری که قطر نیم دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

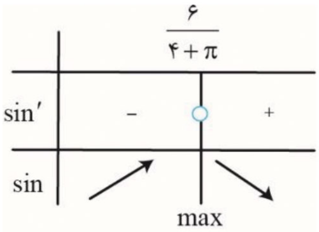
پاسخ: برای فهم بهتر سوالات بهینه‌سازی شکل فرضی رسم کنیم.



$$2h+2r+\frac{2r\pi}{2}=6\to 2h+2r+r\pi=6\to 2h=6-2r-r\pi\to h=\frac{6-2r-r\pi}{2}$$

$$S(r)=2rh+\frac{\pi r^2}{2}=2r\left(\frac{6-2r-r\pi}{2}\right)+\frac{\pi r^2}{2}=6r-2r^2-\frac{\pi r^2}{2}$$

$$S'(r)=6-4r-\pi r=0\to r(4-\pi)=-6\to r=\frac{-6}{(4+\pi)}=\frac{6}{4+\pi}$$



$$h=\frac{6-(2+\pi)(\frac{6}{4+\pi})}{2}=\frac{6(1-\frac{2+\pi}{4+\pi})}{2}=\frac{4(\frac{4+\pi-2-\pi}{4+\pi})}{2}$$

$$=\frac{6\times\frac{\cancel{2}}{4+\pi}}{\cancel{2}}=\frac{6}{4+\pi}$$

سوال: دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$x-y=10\to y=x-10$$

$$P=x.y=x(x-10)=x^2-10x\to P'(x)=2x-10=0\to x=5$$

$$y=-5$$

سوال: اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه بین $5x-y=10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب این دو مینیمم گردد. (خرداد ۱۴۰۱)

$$5x-y=10\to y=5x-10$$

$$P=x.y=x(5x-10)=x5^2-10x\to P'(x)=10x-10=0\to x=1$$

$$y=-5$$

فصل ششم: هندسه

اعتراف میکنم که هندسه فصل خشکیه . ولی دلیل نمیشه که بذاریم به عشق خودش بیاد و بره که!

در ابتدا یک سری مفاهیم که باید آنها را حفظ باشید بیان کنیم. (معمولاً سؤال جا خالی یا درست و نادرست در امتحان دارد)
پس این نکات رو حفظ کن که قراره تو امتحانت بیاد.

دوران اشکال مختلف: حول یک محور

الف) شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض آن یک استوانه است.

ب) شکل حاصل از دوران یک پاره خط حول پاره خط دیگری که بر آن عمود است یک دایره است.

پ) شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه یک مخروط است.

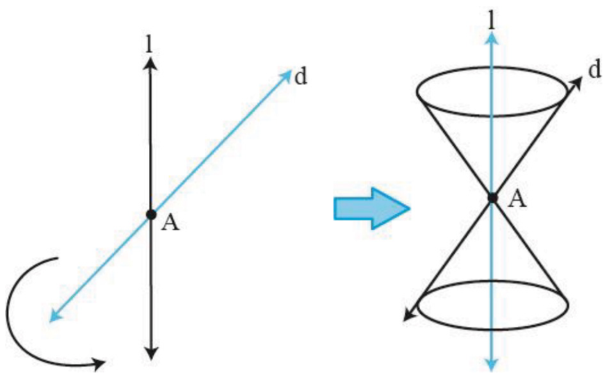
ت) شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن یک کره است.

ث) شکل حاصل از دوران یک نیم دایره حول شعاع عمود بر قطر آن یک نیم کره است.

شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود سطح مقطع آن نامیده می‌شود.

مقاطع مخروطی

سطح مخروطی: دو خط **d** و **L** در نقطه‌ای مثل **A** متقاطع‌اند. اگر خط **d** را حول خط **L** دوران کامل دهیم شکل حاصل یک سطح مخروطی نامیده می‌شود که در این حالت خط **L**، محورف نقطه **A**، رأس و خط **d**، مولد این سطح مخروطی است.



مقاطع مخروطی: وقتی یک سطح مخروطی توسط یک صفحه برش داده می‌شود، معمولاً سطح مقطع یک منحنی است. از آن جایی که این منحنی‌ها حاصل تقاطع یک صفحه با یک سطح مخروطی هستند، مقاطع مخروطی نامیده می‌شوند.

الف) اگر صفحه بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند شکل حاصل دایره است.

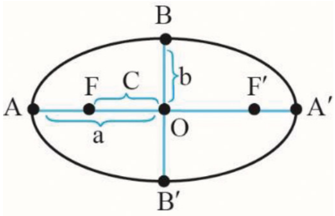
ب) اگر صفحه بر محرو سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس عبور نکند شکل حاصل بیضی است.

پ) اگر صفحه در یکی از موقعیت‌ها با مولد سطح مخروطی موازی باشد و از رأس عبور نکند شکل حاصل سهی است.

ت) اگر صفحه سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس عبور نکند شکل حاصل هذلولی است.

بیضی: مجموعه نقاطی از صفحه که مجموع فواصل آنها از دو نقطه ثابت واقع در صفحه، برابر با مقدار ثابت است.

مفاهیم و پارامترهای مهم در یک بیضی (با توجه به شکل)



F و F' کانون‌های بیضی هستند که به فاصله بین آنها فاصله کانونی می‌گوییم و اندازه آن را با $2C$ نشان می‌دهیم.

پاره خطی که از کانون‌های بیضی می‌گذرد که دو سر آن A و A' است قطر بزرگ یا قطر کانونی بیضی می‌گوییم و اندازه آن را با $2a$ نشان می‌دهیم.

پاره خطی که در مرکز به قطر بزرگ عمود است که دو سر آن B و B' است را قطر کوچک بیضی می‌گوییم و اندازه آن را با $2b$نشان می‌دهیم.

نقطه‌ای که وسط پاره‌خطAA', FF' و BB'است را مرکز بیضی می‌گوییم و با O نشان می‌دهیم.

اگر قطر بزرگ بیضی افقی باشد (در راستای محور xها) آن را بیضی افقی و اگر قطر بزرگ بیضی عمودی باشد (در راستای محور y ها) آن را بیضی قائم می‌نامیم.

رابطه‌ی بسیار مهم در بیضی: اگر در یک بیضی اندازه نصف قطر بزرگ را a، اندازه نصف قطر کوچک را b و اندازه نصف فاصله کانونی را C بنامیم. آنگاه داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

خروج از مرکز بیضی: مقدار $\frac{c}{a}$را خروج از مرکز بیضی می‌نامند که شاخص کشیدگی بیضی است و معمولاً آن را با حرف e نمایش می‌دهیم.

$$e = \frac{c}{a}$$

نکته مهم: خروج از مرکز بیضی همواره عددی بین ۰ و ۱ است که هر چه به یک نزدیک‌تر شود بیضی کشیدتر (لاغرتر) و هر چه به ۰ نزدیک‌تر شود بیضی به دایره نزدیک می‌شود (چاق‌تر)

نکته: مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از دو کانون آن، مقدار ثابتی است که برابر است با اندازه قطر بزرگ بیضی پس مجموع فواصل هر نقطه بیرون بیضی از دو کانون آن بیشتر از اندازه قطر بزرگ و مجموع فواصل هر نقطه درون بیضی از دو کانون آن کمتر از اندازه قطر بزرگ است.

سوال:در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف) خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر............ است. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ: قطر بزرگ بیضی برابر $2a$ و فاصله کانونی برابر $2c$ است.پس $\frac{3}{4} = \frac{c}{a} =$ خروج از مرکز

ب): اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس عبور نکند، شکل حاصل .... است. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ: با یک تجسم ساده می‌شود ضمیمه شکل حاصل دایره است. (طبق درسنامه)

ج) شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود..................... آن نامیده می‌شود. (شهریور ۱۴۰۱)

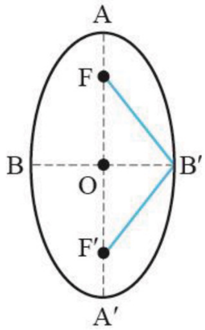
طبق درسنامه سطح مقطع می‌شود.

سوال: در بیضی مقابل کانون‌هابه مختصات $F(1,5)$ و $F'(1,1)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(1,9)$ می‌باشد: (خرداد۱۴۰۲)

الف) فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.

پ) مساحت مثلث را بدست آورید.



الف) کانون‌ها در یک راستا هستند پس اختلاف yها برابر فاصله کانونی است:

$FF' = ۵-۱=۴$

ب) قطر کوچک بیضی که خط افقی است که از وسط دو کانون می‌گذرد پس: $\frac{۵+۱}{۲}=۳ \to y=۳$ وسط کانون‌ها

پ) ارتفاع مثلث مشخص شده برابر نصف قطر کوچک (**b**) و قائده آن برابر فاصله کانونی است.

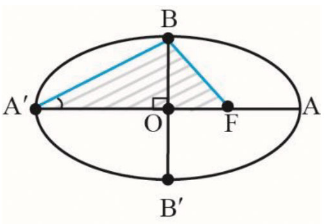
پس: $a^۲=b^۲+c^۲ \to ۳^۲=b^۲+۲^۲ \to b^۲=۹-۴=۵ \to b=\sqrt{۵}$

$S=\frac{۱}{۲}\times\sqrt{۵}\times ۴=۲\sqrt{۵}$

سوال: اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد: (خرداد ۱۴۰۱)

الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید؟ (F کانون بیضی است)

ب) مساحت مثلث هاشور خورده $\overset{\Delta}{(BFA')}$ چقدر است؟



پاسخ:

الف) مقدار $A'F$ برابرنصف قطر بزرگ + نصف فاصله کانونی است.

$a^۲=b^۲+c^۲$

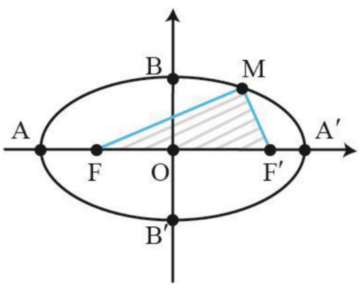
$۲a=۱۰ \to a=۵ \quad ۲۵=۱۶+C^۲ \to C^۲=۹ \to C=۳ \quad A'F=۳+۵=۸$

$۲b=۸ \to b=۴$

ب) ارتفاع مثلث نصف قطر کوچک و قائده هم $A'F$ است: $S_\Delta=\frac{(۵+۳)\times ۴}{۲}=۱۶$

سوال: اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(۴,۰)$ و مختصات رأس $B(۰,۳)$ باشد: (دی۱۴۰۱)

الف) قطر بزرگ بیضی را بیابید.



ب) محیط مثلث $\overset{\Delta}{(MFF')}$ را بیابید.

پاسخ: الف)

$\begin{matrix} b=۳ \\ c=۴ \end{matrix} \to a^۲=b^۲+c^۲ \to a^۲=۹+۱۶=۲۵ \to a=۵$

$۲a=۱۰$

ب) محیط مثلث برابر مجموع فواصل نقطه **M** از کانون‌ها + فاصله کانونی است و طبق درسنامه می‌دانیم مجموع فواصل هر نقطه روی بیضی از کانون‌ها برابر اندازه قطر بزرگ است. پس:

$$MF + MF' + FF' = ۲a + ۲c = ۱۰ + ۸ = ۱۸$$

دایره: مجموعه نقاطی از صفحه است که فاصله آنها ار نقطه ثابتی در همان صفحه مقداری ثابت و مثبت باشد. این نقطه ثابت را مرکز دایره و مقدار ثابت را شعاع دایره میگوییم.

رابطه استاندارد دایره:

$$(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$$

در این معادله $O(\alpha,\beta)$ و r شعاع دایره است.

نقاطی که در معادله $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = r^۲$ صدق می‌کند، نقاطی از صفحه هستند که روی دایره قرار دارند.

مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ < r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که درون دایره قرار دارند.

مجموعه جواب نامعادله $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ > r^۲$ نقاطی از صفحه را مشخص می‌کند که بیرون دایره قرار دارند.

معادله استاندارد دایره را به کمک اتحادها می‌توان ساده کرد که رابطه بدست آمده را معادله گسترده یا معادله ضمنی می‌نامیم. (این دو معادله به یکدیگر قابل تبدیل هستند)

مثال: $(x-۲)^۲ + (y+۳)^۲ = ۱ \to x^۲ - ۴x + ۴ + y^۲ + ۶y + ۹ - ۱ = ۰ \to x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + ۱۲ = ۰$

اگر $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معادله گسترده یک دایره باشد، مختصات مرکز این دایره $O\left(\frac{-a}{۲},\frac{-b}{۲}\right)$ است و شعاع این دایره برابر است با: $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}$

اینا رو بخاطر بسپار

اوضاع نسبی خط دایره: یک خط و دایره سه وضعیت می‌توانند نسبت به هم داشته باشد.

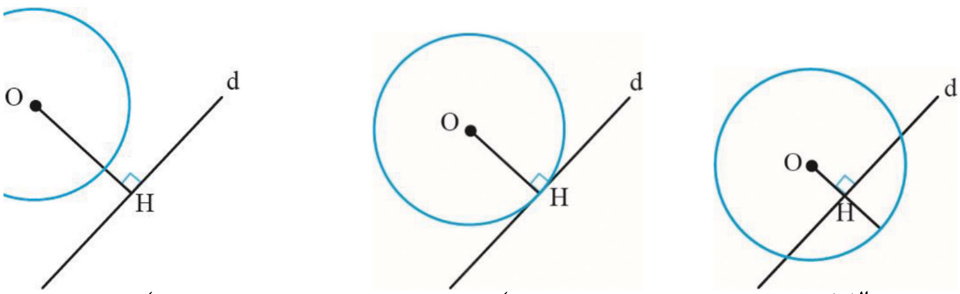
می توانند دو نقطه اشتراک، یک نقطه اشتراک یا هیچ نقطه اشتراک داشته باشند.

برای فهمیدن وضعیت خط و دایره کافیست فاصله مرکز دایره تا خط و شعاع دایره را با هم مقایسه کنیم.

الف) اگر خط d با دایره متقاطع باشد: $OH < r$

ب) اگر خط d بر دایره مماس باشد: $OH = r$

پ) اگر خط d دایره را قطع نکند: $OH > r$



پ)　　ب)　　الف)

یادآوری دو نکته!

۱- خط مماس در نقطه تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.

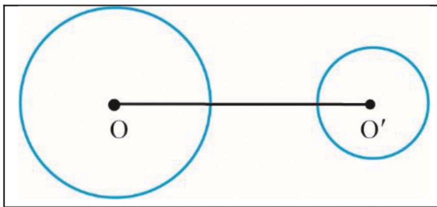
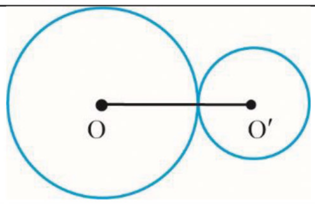
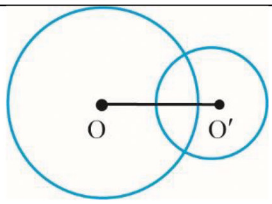
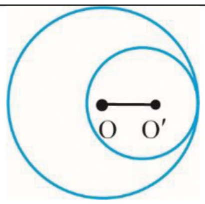
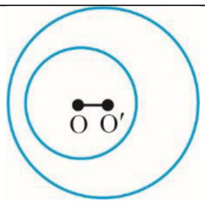
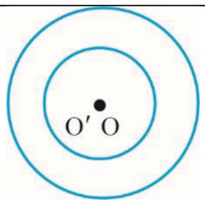
2- فاصله نقطه $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادله $ax+by+c=۰$ برابر است با: $d=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$

اوضاع نسبی دو دایره

دو دایرهٔ دلخواه $C(O,r)$ و $C'(O',r')$ را با فرض $r>r'$ در نظر بگیرید. در جدول زیر حالت‌های مختلف دو دایره نسبت به هم داده شده و در هر مورد، رابطهٔ بین اندازهٔ شعاع‌های دو دایره با اندازهٔ فاصلهٔ بین مرکزهای دو دایره بیان شده است.

پاره‌خطی که مرکزهای دو دایره را به هم وصل می‌کند، خط المرکزین نامیده می‌شود. در اینجا اندازهٔ خط‌المرکزین را با L، نمایش داده‌ایم.

جدول زیر رو دریاب

دو دایره بیرون هم (متخارج)	$d>r+r'$	
دو دایره مماس بیرون	$d>r+r'$	
دو دایره متقاطع	$r-r'<d<r+r'$	
دو دایره مماس درون	$d=r=r'$	
دو دایره متداخل	$d<r-r'$	
دو دایره هم مرکز	$d=۰$	

سوال: معادله گسترده یک دایره به شکل $x^2+y^2+2x+2y-8=0$ است. مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بیابید. (دی ۱۴۰۱)

$$O\left(\frac{-a}{2},-\frac{b}{2}\right)=O\left(\frac{-2}{2},-\frac{2}{2}\right)=O(-1,-1)$$

$$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=\frac{1}{2}\sqrt{4+4+32}=\sqrt{10}$$

سوال: معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(0,3)$ و بر خط $3x-4y=3$ مماس باشد. (خرداد ۱۴۰۱)

: با استفاده از نقطه از خط شعاع را پیدا کرده و معادله را می‌نویسیم:

$$t=\frac{|3\times 0-4\times 3-3|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-15|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3 \qquad (x-0)^2+(y-3)^2=9$$

سوال: اگر دو دایره به معادله‌های $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ و $(x-2)^2+(y+1)^2=m^2$ مماس خارج باشند. مقدا m_+ را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$(x-2)^2+(y+1)^2=m^2 : O(2,-1), r=m$$

$$x^2+y^2-2x-4y+1=0 : O'(-\frac{2}{2},\frac{(-4)}{2})=O'(-1,2), r'=\frac{1}{2}\sqrt{4+16-4}=2$$

$$OO'=\sqrt{(2-(-1))^2+(-1-2)^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$$

$$OO'=r+r'=m+2=3\sqrt{2}\rightarrow m=3\sqrt{2}-2$$

سوال: وضعیت خط $3x+4y=0$ را نسبت به دایره به معادله $(x-2)^2+(y+2)^2=9$ مشخص کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

$$O(2,-2) \quad r=3$$

$$d=\frac{|2\times 3+4\times(-2)|}{\sqrt{9+16}}=\frac{2}{5} \Rightarrow r=3>d=\frac{2}{5}$$

چون شعاع دایره بزرگتر از فاصله مرکز تا خط است پس خط و دایره متقاطع هستند!

فصل هفتم : احتمال

و اما... رسیدیم به اخرین و ساده ترین فصل ریاضی.... از خوندن این فصل لذت ببرید!

۱- **پدیده تصادفی:** پدیده‌ای که نتیجه آن را نتوان قبل از انجا که به طور قطعی پیش بینی کرد.

۲- **فضای نمونه‌ای:** مجموعه تمام نتایج ممکن یک پدیده تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً با **S** نمایش می‌دهیم.

۳- **پیشامد تصادفی:** هر زیر مجموعه از **S** را یک پیشامد تصادفی می‌گوییم.

۴- **پیشامدها و اعمال روی آنها:** فرض کنید **A** و **B** پیشامدهای از فضای نمونه‌ای **S** باشد.

الف) اجتماع دو پیشامد: پیشامد $A\bigcup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد: پیشامد $A\bigcap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد: پیشامد $A-B$ وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم دو پیشامد: پیشامد A' وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد. $P_{(A)}=1-P_{(A)}$

۵- **رابطه محاسبه احتمال وقوع یک پیشامد:**

$$P_{(A)}=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد هم حالت‌های ممکن}}$$

۶- **پیشامدهای ناسازگار:** دو پیشامد **A** و **B** ناسازگار هرگاه **A** و **B** با هم رخ ندهند به بیان دیگر $A \cap B : \varnothing$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

۷- **پیشامدهای مستقل:** دو پیشامد **A** و **B** مستقل‌اند هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگر بی‌تاثیر باشد:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

۸- **احتمال شرطی:** منظور از احتمال A به شرط B که آن را با $P(A|B)$ نشان می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد **A** به شرط آنکه بدانیم پیشامد **B** رخ داده است:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} (P(B) \neq ۰)$$

تعریف افراز: فرض کنید $A_۱, A_۲, ..., A_n$ زیر مجموعه‌هایی با تهی از مجموعه **S** باشند به گونه ای احتماع همه آنها برابر **S** و اشتراک هر دوتای برابر $\varnothing$ باشد در این صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک افراز روی **S** هستند.

سوال: اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و..... =C باشند، آنگاه A و B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی هستند.

پاسخ: مجموعه اعداد طبیعی برابر اعداد یک تا $+\infty$ است و از آنجایی که اجتماع مجموعه‌ها A و B و C باید برابر اعداد طبیعی شود پس فقط عدد ۱ باقی می‌ماند که باید درون مجموعه **C** قرار گیرد. $C = \{۱\}$

قانون احتمال کل: دو یا چند عمل انجام می‌شود که احتمال هر کدام را حساب کرده در هم ضرب می‌کنیم و در نهایت احتمال همه حالت‌ها را با هم جمع می‌کنیم. (در مثال‌ها بهتر متوجه می‌شوید.)

سوال: مدرسه **A** سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه **A** و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه **B** معدل بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم: (خرداد ۱۴۰۲)

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه **A** و با چه احتمالی از مدرسه **B** است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدل بالای ۱۸ دارد؟

پاسخ:

الف) $\begin{matrix} P(B) = x \\ P(A) = ۳x \end{matrix} \rightarrow x + ۳x = ۴x \rightarrow P(B) = \frac{۱}{۴}, P(A) = \frac{۳}{۴}$

ب) $P(C) = \frac{۳}{۴} \times \frac{۳۵}{۱۰۰} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۵}{۱۰۰} = \frac{۱۰۵ + ۱۵}{۴۰۰} = \frac{۱۲۰}{۴۰۰} = \frac{۳۰}{۱۰۰} = ۰/۳$

$\frac{۳}{۴} A \xrightarrow{۰/۲۵}$ معدل بالای 18

$\frac{۱}{۴} B \xrightarrow{۰/۱۵}$ معدل بالای 18

سوال: دو ظرف یکسان داریم ظرف اول شامل ۵ مهره سبز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهره سبز و ۶ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده ودر ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم با چه احتمالی این مهره سبز است؟

پاسخ:احتمال برداشتن مهره سبز از ظرف اول $\frac{۵}{۸}$ و احتمال برداشتن مهره آبی $\frac{۳}{۸}$ است پس:

$\frac{۵}{۸}$ سبز $\xrightarrow{\frac{۵}{۱۱}}$ سبز ظرف دوم

$\frac{۳}{۸}$ آبی $\xrightarrow{\frac{۴}{۱۱}}$ سبز ظرف دوم

$$P(A)=\frac{۵}{۸}\times\frac{۵}{۱۱}+\frac{۳}{۸}\times\frac{۴}{۱۱}=\frac{۲۵+۱۲}{۸۸}=\frac{۳۷}{۸۸}$$

سوال: دو جعبه داریم. درون یکی از آنها ۹ لامپ سالم و ۳ لامپ معیوب قرار دارد و درون جعبه دیگر ۱۵ لامپ قرار دارد که ۵ تای آنها معیوب است. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ موردنظر سالم باشد؟(شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ: روش اول

$\frac{۱}{۲}$ جعبه اول $\xrightarrow{\frac{۹}{۱۲}}$ لامپ سالم

$\frac{۱}{۲}$ جعبه دوم $\xrightarrow{\frac{۱۰}{۱۵}}$ لامپ سالم

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۰}{۱۵}=\frac{۱۷}{۲۴}$$

روش دوم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(C)P(A|C)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۹}{۱۲}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۵}=\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۳}=\frac{۱۷}{۲۴}$$