

جزوه ویژه امتحان نهایی

گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل



نوتروفیل، حامی عدالت آموزشی

فصل اول: آمار و احتمال

□ مبحث: شمارش:

اصول شمارش:

اصل ضرب: اگر کاری طی دو یا چند مرحله انجام شود و مرحله اول به m روش و مرحله دوم به n روش انجام شود، اصل ضرب گفته می‌شود؛ و در کل آن عمل به $m \times n$ طریق به صورت می‌پذیرد؛ معمولاً در بین آن از کلمه (و) استفاده می‌شود.
 ✓ اصل ضرب قابل تعمیم به بیشتر از دو مرحله می‌باشد.

مثال: اگر علی ۳ پیراهن به رنگ‌های آبی، سفید و طوسی و ۲ شلوار سیاه و قهوه‌ای و ۲ جفت کفش سرمه‌ای و مشکی داشته باشد. به چند طریق می‌تواند از لباس‌های خود استفاده کند؟

از آنجایی که می‌تواند هم پیراهن، هم شلوار و هم کفش انتخاب کند متوجه می‌شویم که باید از اصل ضرب استفاده کنیم.
 $3 \times 2 \times 2 = 12$ تعداد حالت‌ها

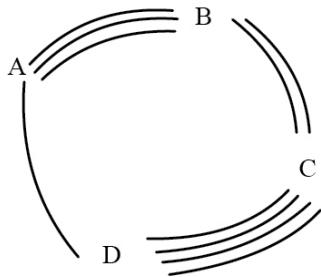
اصل جمع: اگر بتوان کاری را به m روش و کارگیری را به n روش انجام داد و این دو کار را نتوان با هم انجام داد، در این صورت $m + n$ روش می‌توان کار اول یا کار دوم را انجام داد. معمولاً در بین آنها از کلمه (یا) استفاده می‌شود.

مثال: فرض کنید سارا برای رفتن از تهران به تبریز، می‌تواند از یکی از ۳ خط اتوبوس یا یکی از ۲ خط هوایی یا یکی از ۳ خط ریلی استفاده کند. تعداد کل حالت‌های که سارا می‌تواند به تبریز برود برابر است با:
 $3 + 2 + 3 = 8$
 توجه کنید که سارا نمی‌تواند هم‌زمان از سه وسیله نقلیه استفاده کند و برای رفتن به تبریز باید یکی از ۳ وسیله نقلیه را انتخاب کند پس طبق تعریف از اصل جمع استفاده می‌کنیم.

چندتا مثال حل کنیم.

متطابق شکل زیر، میان چهار شهر D و C و B و A راه‌هایی وجود دارد.

الف) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر B سفر کرد؟ ما به دو طریق می‌توانیم از شهر A به D سفر کنیم. یا مستقیم از A به B می‌رویم. یا از D به A و از D به C و از C به B می‌رویم.



راه اول $A \rightarrow B = 3$

راه دوم $A \xrightarrow{1} D \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} B = 1 \times 4 \times 2 = 8$

جمع راه‌ها $8 + 3 = 11$

در این سؤال اصل جمع و ضرب با هم ترکیب شد.

ب) به چند طریق می‌توان از شهر D به B رفت به گونه‌ای که از C عبور کرد؟

$D \xrightarrow{4} C \xrightarrow{2} B = 4 \times 2 = 8$

به یک طریق می‌توان رفت یعنی از D به C و از C به B سفر کرد

به چند طریق می‌توان فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس از بین ۵ خودکار آبی، مشکی، قرمز، صورتی و قهوه‌ای و ۴ مداد با رنگ‌های مختلف و ۳ روان‌نویس با رنگ‌های متمایز انتخاب کرد؟

در صورت مسئله از کلمه (یا) استفاده شده و تأکید کرده که فقط یک خودکار یا یک مداد یا یک روان‌نویس انتخاب شود پس از اصل جمع استفاده می‌کنیم.
 $5 + 3 + 4 = 12$

فاکتوریل: برای یافتن یک عدد طبیعی، باید آن عدد را در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خود آن عدد ضرب کنیم. فاکتوریل را با نماد $(n!)$ نمایش می‌دهیم.

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

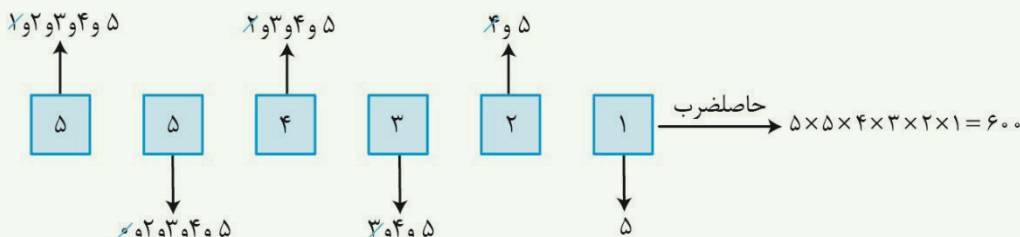
جایگشت: به هریک از حالت‌های ممکن برای قرار گرفتن n شی متمایز در کنار هم، یک جایگشت از آن n شی می‌گوییم.

مثال: علی، ایمان و حسین می‌خواهند در یک ردیف شامل ۳ صندلی بشینند. هریک از راه‌های قرار گرفتن این ۳ نفر کنار هم را یک جایگشت از این سه نفر می‌گوییم.

$$\frac{3}{\text{صندلی اول (علی، ایمان و حسین)}} \times \frac{2}{\text{صندلی دوم (علی، ایمان)}} \times \frac{1}{\text{صندلی سوم (علی)}} = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6!$$

مثال: با ارقام ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد ۶ رقمی می‌توان ساخت (بدون تکرار ارقام)؟

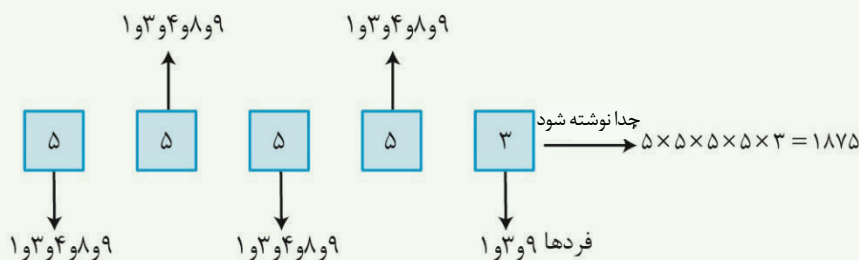
تنها شرطی که برای عدد ۶ رقمی ذکر شده تکراری نبودن آن است. پس پر کردن خانه‌ها را از چپ به راست انجام می‌دهیم. توجه داشته باشید اولین رقم سمت چپ نمی‌تواند با صفر شروع شود. پس از پر کردن هر خانه، وقتی به سراغ خانه بعدی می‌رویم، باید یک رقم استفاده شده را به دلخواه از خانه قبلی حذف کنیم (چون تکرار ارقام مجاز نیست)



نکته: در بسیاری از مسائل بهتر است برای ساختن اعداد، کلمات و... از روش پر کردن خانه استفاده کنیم در این مسائل اگر شرط خاصی مثل زوج و فرد عدد مطرح شد باید ابتدا اولین خانه سمت راست را پر کنیم و سپس به سراغ اولین خانه سمت چپ برویم و خانه‌ها را از چپ به راست پر کنیم. تعداد خانه‌ها بسته به سؤال دارد مثلاً در مثال بالا عدد ۶ رقمی خواسته شده بود پس باید ۶ خانه پر می‌کردیم. با ذکر چند مثال این موضوع را بهتر متوجه می‌شویم.

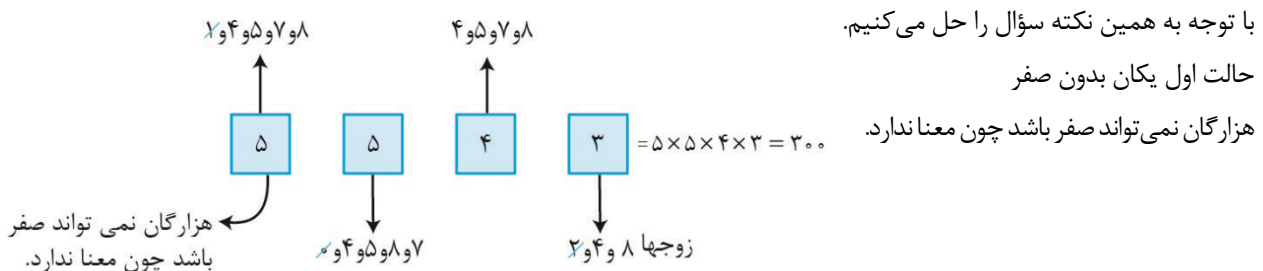
مثال: با ارقام ۹ و ۸ و ۴ و ۳ و ۱ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت که فرد باشد؟ (با تکرار ارقام)

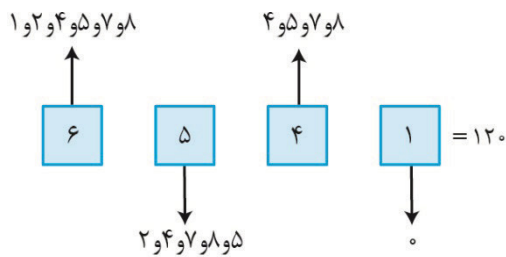
شرط خاصی برای عدد ۵ رقمی ذکر شده ما می‌دانیم عددی فرد است که یکان آن فرد باشد پس ابتدا اولین خانه سمت راست را با توجه به همین شرایط پر می‌کنیم و ضمن اینکه تکرار ارقام مجاز است.



مثال: با ارقام ۸ و ۷ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ چند عدد ۴ رقمی زوج و بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

نکته: نکته‌ای که در این سؤال وجود دارد این است که اگر صفر جزء ارقام داده شده باشد و بخواهیم عدد زوج و مضرب ۵ یا ۲ بسازیم و ضمناً تکرار ارقام غیرمجاز باشد دو حالت تشکیل می‌دهیم یکی وقتی که یکان صفر باشد و یکی هم وقتی که یکان صفر نباشد.



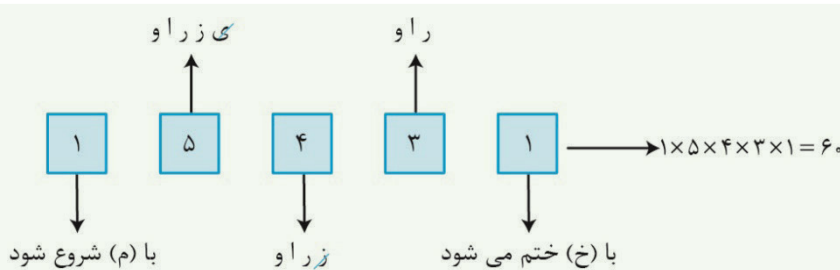


حالت دوم یکان صفر

$$= 120 + 300 = 420 \text{ تعداد کل حالت}$$

توجه داشته باشید اعدادی که داخل خانه هستند صرف تعداد حالت‌ها را نشان می‌دهند.

مثال: با حروف کلمه (خوارزمی) چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که با (م) شروع شود به (خ) ختم شود؟ (تکرار حروف مجاز نیست) (خ، و، ا، ر، ز، م، ی)



خب در این سؤال هم شرط خاصی مطرح شده

ترتیب و ترکیب

در نظر بگیرید که n شی متمایز موجود است و می‌خواهیم r شی از آنها را به شرطی انتخاب کنیم که ترتیب قرار گرفتن آنها کنار هم مهم باشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شی از n شی را با $P(n, r)$ و آن را ترتیب r شی از n شی می‌نامیم. فرمول ترتیب

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \text{ به این صورت می‌باشد}$$

مثال: از بین ۷ معلم می‌خواهیم نفر اول را به عنوان مدیر، نفر دوم را به عنوان معاون اجرایی و نفر سوم را به عنوان معاون پرورشی انتخاب کنیم به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

ترتیب انتخاب افراد مهم است زیرا نفر اول، دوم و سوم هر کدام در سمت‌های مختلفی قرار دارند و باید طبق فرمول بالا ۳ نفر را از ۷ نفر انتخاب کنیم.

$$p(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$$

$$7 \times 6 \times 5 = 210$$

البته در این سؤال می‌توانیم از روش پر کردن خانه‌ها استفاده کنیم.

ترکیب: در نظر بگیرید که n شی متمایز وجود دارد و می‌خواهیم r شی را از بین آنها انتخاب کنیم به شرطی که ترتیب قرار گرفتن آنها کنار هم مهم نباشد. در این صورت تعداد حالت‌های انتخاب r شی از n شی را با $C(n, r)$ نمایش داده و آن را ترکیب r شی از n شی می‌نامیم.

$$c(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} \text{ فرمول آن به این صورت می‌باشد:}$$

مثال: در یک اتوبوس ۵ جای خالی وجود دارد و ۹ نفر خواهان خرید بلیط هستند به چند حالت می‌توان ۵ نفر را سوار اتوبوس کرد؟

در مورد ترتیب انتخاب ۵ نفر مسافر برای سوار شدن به اتوبوس تأکیدی نشده است پس باید از فرمول ترکیب استفاده کنیم:

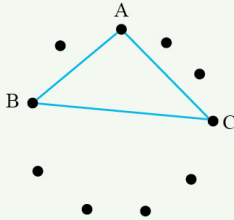
$$c(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{9!}{(9-5)! \times 5!} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4! \times 5!}$$

وقتی با فاکتوریل مواجه می‌شویم تا آنجایی که می‌توانیم ساده کنیم.

$$\frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 9 \times 2 \times 7 = 126$$

مثال: روی محیط یک دایره ۱۰ نقطه وجود دارد، چه تعداد مثلث با این نقاط می‌توان تشکیل داد؟

با هر ۳ نقطه که روی محیط یک دایره باشند یک مثلث ساخته می‌شود. مثلثی مثل ABC با مثلثی مثل BAC فرقی ندارد، یعنی جابه‌جایی سه رأس یک مثلث با هم مثلث جدیدی ایجاد نمی‌کند، پس باید از ترکیب استفاده کنیم:



$$c(n, r) = \frac{n!}{(n-r)! \times r!} = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!} = \frac{10!}{7! \times 3!}$$

$$\frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{7! \times 3!} = 120$$

احتمال

پدیده تصادفی: اگر قبل وقوع یک پدیده بتوانیم به طور حتمی نتیجه‌اش را مشخص کنیم، پدیده تصادفی گفته می‌شود؛ مانند پرتاب

تاس و سکه

✓ به هر یک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی، برآمد می‌گویند.

پدیده قطعی: اگر مثل وقوع یک پدیده بتوانیم نتیجه‌اش را قبل از رخ دادن بدانیم، پدیده قطعی گفته می‌شود؛ مانند طلوع و غروب خورشید

فضای نمونه‌ای: در پرتاب تاس بعد از آنکه تاس به زمین نشست، یکی از برآمدهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ را خواهیم داشت. همه برآمدهای

ممکن در یک آزمایش تصادفی، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهد که به آن فضای نمونه‌ای گفته می‌شود و آن را با (S) نمایش می‌دهیم.

پس در پرتاب تاس، فضای نمونه‌ای برابر است با:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

مثال: فرض کنید اعداد ۱ تا ۳۰ را روی کارت نوشته‌ایم و یک کارت را تصادفی انتخاب می‌کنیم، پیشامد اینکه عدد روی کارت مضرب

۵ باشد عبارتند از:

$$S = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$$

در بین اعداد روی کارت تنها ۳۰ و ۲۵ و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۵ مضرب ۵ می‌باشند.

مثال: در کیسه‌ای ۳ مهره آبی، ۴ مهره قرمز و ۴ مهره سبز وجود دارد. به طور تصادفی سه مهره را همزمان از کیسه خارج می‌کنیم تعداد

اعضای نمونه این پدیده تصادفی را مشخص کنید.

$$n(S) = 3 + 4 + 4 = 11$$

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{(11-3)! \times 3!} = \frac{11!}{8! \times 3!} = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{8! \times 3!} = 165$$

مثال: تعداد فضای نمونه‌ای n(S) را برای مجموعه‌های زیر به دست آورید.

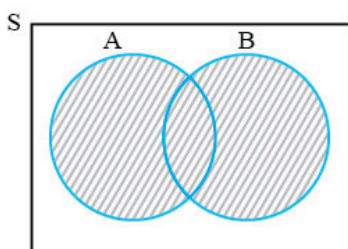
(الف) پرتاب دو تاس $n(S) = 6 \times 6 = 36$ (هر تاس که پرتاب می‌شود ۶ حالت دارد)

(ب) پرتاب دو تاس و یک کیسه $n(S) = 6 \times 6 \times 2 = 72$ (هر سکه‌ای که پرتاب می‌شود ۲ حالت دارد)

(پ) جنسیت چهار فرزند $n(S) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ (هر فرزندی که متولد می‌شود برای جنسیت آن ۲ حالت وجود دارد)

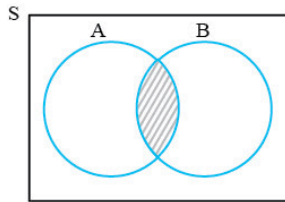
اعمال روی پیشامدها:

۱ **اجتماع پیشامدهای A و B:** $(A \cup B)$ زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A یا B رخ دهد.



$$A \cup B = \left\{ (x \in S) \mid (x \in A) \vee (x \in B) \right\}$$

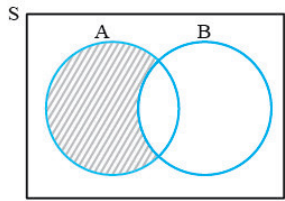
یا به شرطی که حداقل یکی از دو پیشامد A و B رخ دهد (A یا B یا هر دو)



۲ اشتراك پيشامد A و B: $(A \cap B)$ هر دو رخ دهد.

$$A \cap B = \left\{ (x \in S) \mid \begin{array}{l} \downarrow \\ (x \in A) \wedge (x \in B) \\ \downarrow \end{array} \right\}$$

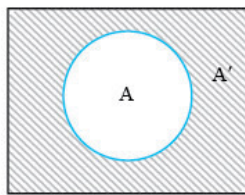
و به شرطی که A و B هم‌زمان رخ دهد



۳ تفاضل پيشامدهای A و B: $(A - B)$ یعنی اینکه A رخ دهد و B رخ ندهد یعنی باید اشتراك A و B را از A کنار بگذاریم.

$$A - B = \{ (x \in S) \mid (x \in A) \cap (x \notin B) \}$$

فقط A رخ دهد.



۴ متمم يك پيشامد: متمم پيشامد A در واقع همان $S - A$ و آن را با نماد A' نمایش می‌دهیم. پيشامد A' وقتی رخ می‌دهد که خود A رخ ندهد.

$$A' = \{ (x \in S) \mid x \notin A \}$$

A رخ ندهد

با ذکر مثال این مطالب را بهتر متوجه می‌شویم.

مثال: در پرتاب ۲ تاس با هم پيشامدهای زیر را تعريف می‌کنیم.

A. هر دو تاس عدد اول ظاهر شود.

B. حاصل ضرب اعداد دو تاس، حداقل ۲۵ شود.

در این صورت پيشامد A و B با هم رخ دهند، از پيشامد A رخ دهد ولی B رخ ندهد، چند عضو کمتر است؟

$$A = \{ (2,2)(2,3)(2,5)(3,2)(3,3)(3,5)(5,2)(5,3)(5,5) \}$$

✓ ما می‌دانیم عددی اول است که به غیر از یک و خودش مضرب هیچ عددی نباشد دقت کنید ۱ نه عدد اول است نه مرکب.

✓ گفته شده حاصل ضرب حداقل ۲۵ باشد وقتی حداقل گفته می‌شود، یعنی بیشتر از ۲۵ هم به حساب می‌آید.

$$B = \{ (5,5)(5,6)(6,5)(6,6) \}$$

متوجه شدیم که پيشامد A و B با هم رخ دهد یعنی اشتراك و پيشامد A رخ دهد و B رخ ندهد یعنی تفاضل:

$$A - B = \{ (2,2)(2,3)(2,5)(3,2)(3,3)(3,5)(5,2)(5,3) \}$$

$$A \cap B = \{ (5,5) \}$$

پس پيشامد $A \cap B$ یک عضو دارد. پيشامد $A - B$ ۸ عضو. در نتیجه پيشامد $A \cap B$ ۷ عضو کمتر از $A - B$ دارد.

پيشامد ناسازگار: اگر دو پيشامد A و B هیچ اشتراکی نداشته باشند به آنها ناسازگار می‌گوییم.

مثال: اگر پيشامد A بیانگر $\{2, 4, 5, 6\}$ و پيشامد B بیانگر $\{1, 3, 8\}$ باشد، آنگاه $A \cap B = \emptyset$ است. (\emptyset تهی)

برای محاسبه احتمال رخ دادن پيشامد A از فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده می‌کنیم.

احتمال پيشامد شدنی (غیرممکن) یعنی $P(\emptyset)$ برابر با صفر است.

احتمال پيشامد شدنی (حتمی) یعنی $P(S)$ برابر است با ۱.

مثلاً در پرتاب یک تاس احتمال اینکه عدد ۷ باشد، محال است و پيشامد اینکه عدد ظاهر شده کمتر از ۷ باشد، قطعی است.

نکته برای محاسبه احتمال رخ دادن پيشامد A از فرمول $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ استفاده می‌کنیم.

تعداد اعضای پيشامد = $n(A)$

تعداد فضای نمونه‌ای یعنی $n(S)$

پيشامد $A = P(A)$

مثال: دو تاس را پرتاب می‌کنیم. با چه احتمالی، مجموع دو تاس برابر ۷ می‌باشد؟

ابتدا $n(S)$ را به دست می‌آوریم. می‌دانیم که هر تاس ۶ حالت دارد. لذا ما دو تاس
حال باید $n(A)$ را به دست آوریم. یعنی باید اعدادی از دو تاس را انتخاب کنیم که جمع آنها برابر ۷ شود.

$$A = \{(1,6)(6,1)(2,5)(5,2)(3,4)(4,3)\} \Rightarrow n(A) = 6 \text{ عضو}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{طبق فرمول بالا عمل می‌کنیم}$$

مثال: یک تاس و یک سکه را می‌اندازیم با چه احتمالی سکه پشت و تاس زوج؟

$$n(S) = 6 \times 2 = 12$$

$$\text{عضو } n(A) = 3 \rightarrow \{(پ و ۶) (پ و ۴) (پ و ۲)\}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

کاربرد ترکیب و ترتیب در مسائل احتمال

مثال: در جعبه‌ای حاوی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره زرد، ۴ مهره را به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال حداقل ۲ مهره آبی است؟

جمعاً ۹ مهره داریم و ۴ مهره را آن را انتخاب می‌کنیم پس $n(S) \Leftarrow$ با فرمول ترکیب به دست می‌آوریم. چون ترتیب مهم نیست.

$$n(S) = \binom{9}{4} = \frac{9!}{(9-4)! \times 4!} = \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!} \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

برای به دست آوردن $n(A)$ باید به نکاتی دقت کنیم:

- در سؤال گفته شده حداقل ۲ مهره آبی انتخاب شود. پس وقتی حداقل گفته می‌شود باید بدانیم که بیشتر ۲ مهره آبی هم می‌تواند باشد.
- اگر ۲ آبی باشد ۲ مهره دیگر باید از ۵ مهره دیگر انتخاب شود و اگر ۳ مهره آبی انتخاب شود، یک مهره دیگر از ۵ مهره قرمز و زرد انتخاب می‌شود و اگر هر ۴ مهره آبی باشد دیگر نیازی به انتخاب از مهره قرمز و زرد نیست. یعنی صفر مهره از این دو مهره انتخاب می‌شود.

یک قرمز یا زرد ۲ قرمز یا زرد

هر کدام را جداگانه حساب کرده و سپس جمع می‌کنیم.

$$n(A) = \binom{4}{2} \binom{5}{2} + \binom{4}{3} \binom{5}{1} + \binom{4}{4}$$

\downarrow هر ۲ مهره آبی \downarrow ۳ مهره آبی \downarrow ۴ مهره آبی

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6 \quad \binom{5}{2} = \frac{5!}{3! \times 2!} = 10 \quad \Rightarrow \binom{4}{2} \times \binom{5}{2} = 6 \times 10 = 60$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \quad \binom{5}{1} = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5$$

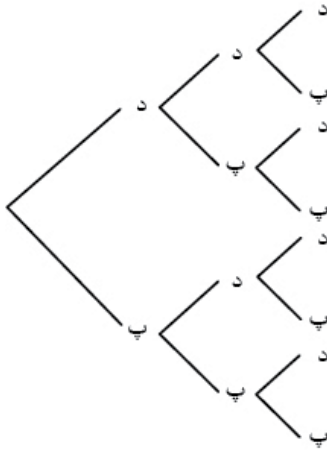
$$\Rightarrow \binom{4}{3} \times \binom{5}{1} = 4 \times 5 = 20$$

جمع کل $60 + 20 + 1 = 81$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{0! \times 4!} = 1 \quad \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{81}{126} = \frac{9}{14}$$

مثال: خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.

الف) فضای نمونه‌ای مناسب برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده چیست؟



$$S = \{ (د پ پ) (د پ د) (د د پ) (د د د) (پ پ پ) (پ پ د) (پ د پ) (د د پ) \}$$

$$n(S) = 8 \text{ عضو}$$

ب) پیشامد A که در آن هر سه فرزند از یک جنس باشد.

$$A = \{ (د د د) (پ پ پ) \} \quad n(A) = 2 \text{ عضو}$$

پ) پیشامد B که در آن فقط یک پسر باشد.

$$B = \{ (د د پ) (د پ د) (پ د د) \} \quad n(B) = 3$$

مثال: جعبه‌ای دارای ۱۰ سیب می‌باشد، که ۴ سیب آن زرد و ۶ سیب آن قرمز می‌باشد؛ ۳ سیب

را به طور تصادفی برمی‌داریم. محاسبه احتمال اینکه:

الف) هر سه سیب قرمز باشد.

$$n(S) = \binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \times 3!} = 120$$

$$n(A) = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

ب) حداکثر ۲ سیب زرد باشد.

$$n(B) = \binom{4}{2} \binom{6}{1} + \binom{4}{1} \binom{6}{2} + \binom{4}{0} \binom{6}{3}$$

حداکثر بر عکس حداقل است. یعنی کمتر از ۲ سیب هم انتخاب می‌شود.

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \quad \binom{6}{1} = \frac{6!}{5! \times 1!} = 6$$

$$\Rightarrow \binom{4}{2} \times \binom{6}{1} = 6 \times 6 = 36$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \times 2!} = 15 \Rightarrow \binom{4}{1} \binom{6}{2} = 4 \times 15 = 60$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{4! \times 0!} = 1$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20 \Rightarrow \binom{4}{0} \binom{6}{3} = 1 \times 20 = 20$$

$$\text{جمع کل} = 36 + 60 + 20 = 116$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{116}{120} = \frac{58}{60} = \frac{29}{30}$$

مبحث: چرخه آمار در حل مسائل

گام‌های چرخه آمار:

۱- بیان مسئله ۲- طرح و برنامه‌ریزی ۳- گردآوری و پاکسازی داده‌ها ۴- تحلیل داده‌ها ۵- بحث و نتیجه‌گیری
این درس بیشتر حفظی است و همه این گام‌ها به طور کامل در کتاب درسی توضیح داده شده، بنابراین نکات کلیدی از این گام‌ها را می‌آموزیم.

۱ بیان مسئله: فهم مسئله- تعریف دقیق مسئله

۲ طرح و برنامه‌ریزی: شیوه اندازه‌گیری- روش نمونه‌گیری- روش کار

۳ گردآوری و پاکسازی داده‌ها: گردآوری و داده‌ها- سازمان‌دهی داده‌ها- پاکسازی

۴ تحلیل داده‌ها: مرتب کردن داده‌ها- معیارها- نمودارها- جدول‌ها

۵ بحث و نتیجه‌گیری: تفسیر نتایج- نتیجه‌گیری- نقد و بررسی- ایده‌های جدید

مثال: برای داده‌های جمع‌آوری شده، یک نمودار دایره‌ای رسم کرده‌ایم، این کار مربوط به کدام چرخه آماری است؟ وقتی نمودار ترسیم شده پس به گام چهارم یعنی تحلیل داده مربوط می‌شود.

مثال: بعد از بررسی داده‌های جمع‌آوری شده ۲ تا از داده‌هایی که با معیار واقعی جور نبودند را حذف می‌کنیم. این کار مربوط به کدام گام چرخه آمار است؟ وقتی داده‌ها را پاکسازی کردیم به گام سوم یعنی گردآوری و پاکسازی داده‌ها مربوط است.

شاخص‌های مرکزی (گرایش به مرکز): ۱- میانگین ۲- میانه

میانگین: اگر به فرض داده‌ها صورت ۱۲ و ۸ و ۵ و ۳ و ۱ باشند میانگین آنها از طریق فرمول روبه‌رو به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{\text{جمع همه داده‌ها}}{\text{تعداد داده‌ها}}$$

نکته: اگر در بین داده‌ها، داده دورافتاده داشته باشیم استفاده از شاخص مرکزی میانگین مناسب نیست.

میانه: میانه معیار مرکزی است که دقیقاً در جایگاه وسط داده‌ها قرار می‌گیرد، یعنی نصف داده‌ها قبل از آن و نصف داده‌ها بعد از آن قرار می‌گیرد.

روش به دست آوردن میانه:

۱ مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ

۲ اگر تعداد داده‌ها فرد باشد.

$$\text{شماره میانه فرد} = \frac{\text{تعداد داده‌ها} + 1}{2}$$

۳ اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، داده میانه بین شماره دارد و داده بعدی است.

$$\text{شماره زوج} = \frac{\text{تعداد داده‌ها}}{2}$$

مثال: میانه داده‌های زیر را به دست آورید.

۳۳، ۲۱، ۱۵، ۹، ۸، ۶، ۴، ۲ <= خب تعداد داده‌ها زوج می‌باشد. $\frac{8}{2} = 4$ پس شماره میانه بین شماره داده ۴ و ۵ می‌باشد.

پس در نتیجه میانه بین داده ۹ و ۸ است که میانگین آن را به دست می‌آوریم تا میانه مشخص شود:

$$\frac{8+9}{2} = 8.5$$

شاخص‌های پراکندگی:

۱ دامنه تغییرات

۲ انحراف معیار

۳ دامنه میان چارکی

دامنه تغییرات: برابر است با اختلاف بزرگ‌ترین داده با کوچک‌ترین داده.

مثال: ۴۰ و ۳۲ و ۱۸ و ۱۵ و ۱۰

$$۱۰ = \text{کوچک‌ترین} \quad ۴۰ = \text{بزرگ‌ترین} \quad \text{دامنه تغییرات} = ۴۰ - ۱۰ = ۳۰$$

انحراف معیار: نشان‌دهنده اختلاف داده‌ها از میانگین می‌باشد، در واقع با داشتن انحراف معیار می‌توانیم مشخص کنیم داده‌ها چقدر از میانگین فاصله دارد.

مثال: انحراف معیار داده‌های مقابل را به دست آورید. ۳۰ و ۲۲ و ۲۰ و ۱۱ و ۹

۱- ابتدا میانگین داده‌ها را به دست می‌آوریم.

$$\bar{x} = \frac{۹ + ۱۱ + ۲۰ + ۲۲ + ۳۰}{۵} = \frac{۹۲}{۵} = ۱۸.۴$$

۲- تک‌تک اختلاف داده‌ها با میانگین را به دست می‌آوریم و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم و دوباره میانگین می‌گیریم. البته بعد از اینکه اختلاف

به دست آمد $\frac{(۹-۱۸)^2 + (۱۱-۱۸)^2 + (۲۰-۱۸)^2 + (۲۲-۱۸)^2}{۵}$ به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\frac{(۳۰-۱۸)^2}{۵} = \frac{۸۱ + ۴۹ + ۴ + ۱۶ + ۱۴۴}{۵} = \frac{۲۹۴}{۵} = ۵۸.۸$$

اگر در همین سؤال از ما واریانس خواسته شود به صورت فرمول روبه‌رو به دست می‌آید.

۲(انحراف معیار) = واریانس

$$۲(۵۸.۸) = \text{واریانس} = ۳۳۶.۴$$

داده‌ها: اطلاعات و واقعیت‌هایی درباره یک چیز که در محاسبه، استنباط یا برنامه‌ریزی به کار می‌رود.

واحد آماری: واحد آماری به هر یک از افراد یا چیزهایی می‌گویند که داده‌های آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

جامعه آماری: مجموع کل واحدهای آماری را جامعه آماری می‌گویند.

نمونه: هر زیر مجموعه از جامعه آماری را یک نمونه می‌گویند.

نمونه تصادفی: نمونه تصادفی که در آن همه جامعه شانس انتخاب شدن یکسان داشته باشد، نمونه تصادفی می‌باشد.

مثال: در یک شهر با ۵۰۰۰۰۰ نفر جمعیت، ۱۰۰۰ هزار نفر را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و وزن آنها را ثبت می‌کنیم.

داده: وزن واحد آماری: هر کدام از شهروندان جامعه آماری: کل جمعیت شهر اندازه جامعه: ۵۰۰۰۰۰۰ نفر نمونه: وزن اندازه نمونه: ۱۰۰۰

بریم سراغ نمونه سؤالاتی که مربوط به این قسمت می‌شود.

مثال: چرا نمونه انتخاب شده در مسائل زیر با جامعه تناسب ندارد؟

مسئله: نظرسنجی از دانش‌آموزان پایه ۱۲ شهر اراک درباره ساعت مطالعه \Leftarrow جامعه

دانش‌آموزان یک کتابخانه شهر اراک \Leftarrow نمونه

نمونه خوبی نیست چون برای بررسی سرعت مطالعه سراغ دانش‌آموزان کتابخانه رفتیم و این احتمال را در نظر نگرفتیم که سایر دانش‌آموزان در منزل و... چه ساعت مطالعه‌ای دارند.

مسئله: نظرسنجی از مادران یک شهر درباره میزان رضایت‌شان از برنامه‌های کودک \Leftarrow جامعه

انتخاب تصادفی برخی از منازل از تمامی مناطق شهر و مراجعه به آنها بین ساعت ۸ تا ۱۰ صبح \Leftarrow نمونه

نمونه خوبی نیست. چون ممکن است برخی مادران در ساعت خواب یا مشغول کار در خارج از خانه باشد.

فصل دوم: الگوی خطی

مبحث: مدل‌سازی و دنباله

در دوران ابتدایی با الگویابی آشنا شدید که چگونه با یافتن الگوی، می‌توانستید بدون ادامه دادن الگو، جمله a_{20} را به دست آورید. مفهوم کلی دنباله هم به همین صورت می‌باشد.

دنباله: اگر a تابعی از $N \rightarrow R$ باشد اعضای برد این تابع می‌تواند دنباله‌ای از اعداد را تولید کند که به ترتیب، جمله اول آن را $a(1)$ ، دوم $a(2)$ ، جمله سوم $a(3)$ و... جمله n ام را $a(n)$ در نظر می‌گیریم. معمولاً جمله n ام، جمله عمومی دنباله یا ضابطه دنباله می‌نامند.

مثال: جمله n ام دنباله‌های زیر را مشخص کنید.

همان طور که گفته شده جملات دنباله را با a_1, a_2, a_3, \dots نمایش می‌دهند. برای مثال در این قسمت $a = 4$ می‌باشد.

(الف) $4, 7, 10, 13, \dots$

برای به دست آوردن ضابطه دنباله بر این اساس پیش می‌رویم: -1 در این دنباله جمله اول 4 است و هر جمله با اضافه کردن عدد ثابت 3 به جمله قبلی‌اش به دست می‌آید یعنی: $3 +$ جمله قبلی‌اش = هر جمله دنباله

خب ما باید این را به زبان ریاضی تبدیل کنیم $\Leftarrow a_n = a_{n-1} + 3 \Leftarrow (n)$ یعنی شماره جمله

-2 مدل نوشتن جمله n ام یک دنباله این است که یک رابطه بر حسب n بیان کنیم که با جایگذاری اعداد 1 و 2 و 3 و... در آن به ترتیب جملات اول، دوم، سوم و... دنباله را به ما بدهند.

در مثال بالا ضابطه به صورت $a_n = 3n + 1$ می‌باشد.

اگر $n = 1$ باشد $a_1 = 3(1) + 1 = 4$ $n = 1$

اگر $n = 2$ باشد $a_2 = 3(2) + 1 = 7$ $n = 2$

اگر $n = 3$ باشد $a_3 = 3(3) + 1 = 10$ $n = 3$

در این مثال هر جمله با اضافه شدن 3 به جمله قبلی به دست آمده است.

(ب) $5, 8, 11, 14$

$$a_n = 3n + 2$$

برای راحت‌تر به دست آوردن ضابطه به اختلاف جملات توجه می‌کنیم مثلاً اختلاف $= 3$. پس می‌نویسیم $3n$. به جای n عدد می‌گذاریم مثلاً عدد 1 (در (n) جای‌گذاری می‌کنیم). $3(1)$ می‌بینیم که جمله اول 3 شد، در حالی که جمله اول برابر 5 است پس نیاز است

$$a_n = 3n + 2 \Leftarrow \text{به } 3n \text{ دو واحد اضافه کنیم}$$

اگر $n = 1$ $a_1 = 3(1) + 2 = 5$

اگر $n = 2$ $a_2 = 3(2) + 2 = 8$

و به همین ترتیب...

مثال: اگر $a_n = 5n + 2$ باشد، مقدار a_4 کدام است؟

برای به دست آوردن a_4 ، کافی است در جمله عمومی دنباله جای (n) ، عدد 4 بگذاریم.

$$a_n = 5n + 2 \xrightarrow{n=4} a_4 = 5(4) + 2 = 22$$

مثال: جمله چندم دنباله با جمله عمومی $a_n = 3n + 1$ برابر 19 می‌باشد.

در این گونه سؤالات مقدار یکی از جملات دنباله داده می‌شود

$$\begin{cases} 3n + 1 = 19 - 1 \\ 3n = 18 \end{cases}$$

$$n = \frac{18}{3} = 6$$

تا پیدا کنیم جمله چندم به طور مثال 19 شده پس باید (n) را بیابیم.

در واقع ما (a_n) را داریم.

دنباله بازگشتی: نوشتن جمله n ام یک دنباله بر اساس جمله یا جملات قبلی یک دنباله، رابطه بازگشتی نامیده می‌شود. دو عدد $n+1$ و n دو عدد متوالی‌اند، پس a_n, a_{n+1} دو جمله پشت سر هم از این دنباله‌اند که a_{n+1} یک شماره جلوتر از a_n است. در دنباله بازگشتی به غیر از رابطه بازگشتی باید جمله اول را به ما بدهند. با ذکر چند مثال این موضوع را بهتر متوجه می‌شویم.

مثال: در دنباله a_n با رابطه بازگشتی $a_{n+1} = a_n + 2$ ؛ اگر $a_1 = 3$ باشد، 5 جمله از جملات دنباله دنباله‌های زیر را مشخص کنید.

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad a_1 = 3$$

$$n=1 \quad a_2 = a_1 + 2 \quad a_2 = 3 + 2 = 5$$

$$n=2 \quad a_3 = a_2 + 2 \quad a_3 = 5 + 2 = 7$$

$$n=3 \quad a_4 = a_3 + 2 \quad a_4 = 7 + 2 = 9$$

$$3, 5, 7, 9, 11$$

$$n=4 \quad a_5 = a_4 + 2 \quad a_5 = 9 + 2 = 11$$

کافیست به جای (n) اعداد طبیعی گذاشته شود

و حتماً از عدد یک شروع شود.

جملات دنباله را به شکل مرتب می‌نویسیم:

مثال: جمله چهارم دنباله بازگشتی زیر را مشخص کنید.

مانند سؤال بالا به (n) عددگذاری می‌کنیم. حتماً اعداد طبیعی و حتماً از یک شروع می‌کنیم.

الف) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, $a_1 = -2$

$$n=1 \quad a_{1+1} = \frac{1}{3}a_1 \quad a_2 = \frac{1}{3} \times -2 = \frac{-2}{3} \quad a_2 = \frac{-2}{3}$$

$$n=2 \quad a_3 = \frac{1}{3}a_2 \quad a_3 = \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} \quad a_3 = \frac{-2}{9}$$

$$n=3 \quad a_4 = \frac{1}{3}a_3 \quad a_4 = \frac{1}{3} \times \frac{-2}{9} \quad a_4 = \frac{-2}{27}$$

ب) $a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$

در این سؤال در واقع a_1 و a_2 و a_3 برابر با یک می‌باشد و صرفاً این سؤال ظاهری ترسناک دارد ولی در اصل بسیار راحت می‌باشد.

$$n=1 \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 \Rightarrow a_4 = 1 + 1 + 1 \Rightarrow a_4 = 3$$

مثال: شش جمله اول دنباله بازگشتی n زوج $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n \\ 3a_n + 1 \end{cases}$ را برای هر کدام از حالت‌های زیر را بنویسید.

این سؤال چهره ترسناکی دارد در واقع سؤال از ما خواسته اگر (n) تعداد جمله فرد بود از یک فرمول و زوج بود از فرمول دیگر استفاده شود.

الف) $a_1 = 11$

$$n=1 \text{ فرد} \quad a_2 = 3a_1 + 1 = 3(11) + 1 = a_2 = 34$$

$$n=2 \text{ زوج} \quad a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \times 34$$

$$a_3 = 17$$

$$n=3 \text{ فرد} \quad a_4 = 3a_3 + 1 = 3(17) + 1 = 52 \quad a_4 = 52$$

$$n=4 \text{ زوج} \quad a_5 = \frac{1}{2}a_4 + a_4 = \frac{1}{2} \times 52 = 26 \quad a_5 = 26$$

$$n=5 \text{ فرد} \quad a_6 = 3a_5 + 1 = 3(26) + 1 = 79 \quad a_6 = 79$$

$$\text{ب) } a_1 = 25$$

$$n=1 \quad a_2 = 3a_1 + 1 \quad a_2 = 3(25) + 1 = 76 \quad a_2 = 76$$

$$n=2 \quad a_3 = \frac{1}{2}a_2 \quad a_3 = \frac{1}{2} \times 76 \quad a_3 = 38$$

$$n=3 \quad a_4 = 3a_3 + 1 \quad a_4 = 3(38) + 1 = 115$$

$$n=4 \quad a_5 = \frac{1}{2}a_4 = \frac{1}{2}(115) = \frac{115}{2}$$

$$n=5 \quad a_6 = 3a_5 + 1 = \frac{3(115)}{2} + 1 = \frac{123}{2}$$

مثال: با توجه به دنباله‌های $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2}$ و $b_n = n^2 + 1$ حاصل عبارت $2a_1 + b_3$ را به دست آورید. گاهی نمونه سؤالات امتحانی به این صورت می‌باشد که روش حل آن با نمونه‌هایی که حل شد متفاوت و ساده است. [این سؤال امتحان نهایی ۱۴۰۲ می‌باشد].

روش حل: کافی است به فرض b_3 را خواسته، در فرمول $b(3)$ را جای‌گذاری کنیم.

$$b_3 = (3)^2 + 1 = b_3 = 10 \quad 2a_1 + b_3 = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 10$$

$$a_1 = \frac{(-1)^{1+1}}{2} = a_1 = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{2} + 10 = 1 + 10 = 11$$

روش رسم نمودار دنباله: این قسمت بسیار ساده است. کافی است جمله‌های دنباله را به دست بیاوریم و آن را ترسیم کنیم.

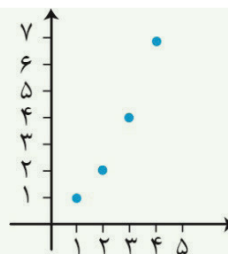
مثال: نمودار دنباله زیر را ترسیم کنید.

الف) $a_{n+1} = a_n + n, a_1 = 1$

$$n=1 \quad a_2 = a_1 + 1 \quad a_2 = 1 + 1 \quad a_2 = 2$$

$$n=2 \quad a_3 = a_2 + 2 \quad a_3 = 2 + 2 \quad a_3 = 4$$

$$n=3 \quad a_4 = a_3 + 3 \quad a_4 = 4 + 3 \quad a_4 = 7$$

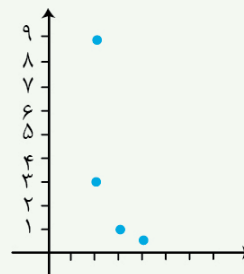


ب) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, a_1 = 9$

$$n=1 \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3} \times 9 \quad a_2 = 3$$

$$n=2 \quad a_3 = \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{3} \times 3 \quad a_3 = 1$$

$$n=3 \quad a_4 = \frac{1}{3}a_3 = \frac{1}{3} \times 1 \quad a_4 = \frac{1}{3}$$



دنباله فیبوناچی: فرمول دنباله $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ و $a_1 = a_2 = 1$ می‌باشد.

در دنباله فیبوناچی هر جمله دنباله با جمع دو جمله قبلی به دست می‌آید و ۵ و ۳ و ۲ و ۱

همیشه $a_2 = a_1 = 1$ می‌باشد. مثال جمله اول (۱) با جمله دوم (۱) جمع شده و جمله سوم (۲) به دست آمده و یا جمله سوم (۲) با جمله چهارم (۳) جمع شده و جمله پنجم (۵) به دست آمده.

مبحث: دنباله حسابی

دنباله حسابی: اگر هر کدام از عددهای دنباله‌ای از اضافه شدن یک مقدار ثابت به عدد قبلی‌اش به دست آمده باشد، به آن دنباله حسابی می‌گوییم.

۱ جمله اول دنباله را با a_1 نمایش می‌دهیم و مابقی جملات با a_1, a_2, \dots, a_n

۲ مقدار ثابتی که به جملات دنباله اضافه می‌شود، به این مقدار ثابت اختلاف مشترک می‌گوییم و با (d) نمایش می‌دهیم. (گاهی اوقات به اختلاف مشترک یا همان (d) قدر نسبت هم گفته می‌شود).

✓ جمله عمومی دنباله حسابی از این فرمول به دست می‌آید.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

\downarrow \downarrow \downarrow
 اشتراک جمله اول شماره جمله اختلاف شماره جمله اول عمومی

$$\begin{matrix} +9 & +9 \\ 2, 11, 20, \dots \end{matrix}$$

$$a_1 = 2$$

$$d = 9$$

مثال: در دنباله حسابی روبه‌رو الف) جمله اول دنباله را مشخص کنید. ب) اختلاف مشترک؟ ج) جمله دهم دنباله را مشخص کنید. ما a_1 و d را داریم و وقتی جمله دهم می‌خواهد باید $n = 10$ باشد پس کافی است این اطلاعات را در فرمول جای‌گذاری کنیم.

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = 2 + (10-1) \times 9$$

$$a_{10} = 2 + (9 \times 9) \Rightarrow a_{10} = 2 + 81 = 83 \quad a_{10} = 83$$

د) جمله چندم این دنباله برابر ۳۸ می‌باشد؟ در این قسمت برعکس قسمت بالا a_n را داریم ولی خود n را نداریم.

$$38 = 2 + (n-1)9 \Rightarrow 38 = 2 + 9n - 9 \Rightarrow 38 = 9n - 7$$

$$38 + 7 = 9n \Rightarrow n = \frac{45}{9}$$

$$45 = 9n \quad n = 5$$

واسطه دنباله حسابی: اگر a و b و c سه جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند، در این صورت رابطه مقابل برابر بین آنها برقرار است.

$$b = \frac{a+c}{2}$$

نکته اگر بخواهیم بین دو عدد a و b ، تعداد m عدد طوری قرار دهیم که با این دو عدد تشکیل دنباله حسابی دهند، (a) جمله اول و

(b) جمله آخر) در این صورت d یا همان اختلاف مشترک دنباله از این رابطه به دست می‌آید:

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

$$a_n = 2 + (n-1)9$$

ه) جمله عمومی دنباله را بنویسید.

$$a_n = 2 + 9n - 9 \Rightarrow a_n = 9n - 7$$

در این قسمت از ما جمله فلان را نخواسته به طور کلی باید فرمول یا همان جمله عمومی دنباله را به دست آوریم.

و) رابطه بازگشتی این دنباله را بنویسید. به طور کلی رابطه بازگشتی دنباله حسابی به صورت زیر می‌باشد.

$$a_{n+1} = a_n + d$$

$$a_{n+1} = a_n + 9, a_1 = 2$$

اما رابطه بازگشتی این سؤال برابر است با ۴ یاد داشته باشید که هرگاه بازگشتی نوشتید حتماً جمله اول را هم بنویسید.

مثال: در دنباله حسابی با جمله اول ۵- و اختلاف مشترک ۳ چندین جمله دنباله برابر ۳۱ می‌باشد. موارد داده شده در فرمول جای‌گذاری

می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -5 & a_n &= a_1 + (n-1)d \\
 d &= 3 & 31 &= -5 + (n-1)3 \\
 a_n &= 31 & 31 &= -5 + 3n - 3 \\
 & & & 3n = 39 \\
 n &=? & 31 &= 3n - 8 \Rightarrow n = \frac{39}{3} = 13 \\
 & & 31 + 8 &= 3n
 \end{aligned}$$

ششمین جمله همین دنباله را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -5 & a_n &= a_1 + (n-1)d \\
 d &= 3 & a_6 &= -5 + (6-1)3 \\
 a_n &=? & & \\
 a_n &= 6 & a_6 &= -5 + 15 \Rightarrow a_6 = 11
 \end{aligned}$$

مثال: در یک دنباله حسابی جمله پنجم برابر با ۱۹ و جمله پانزدهم آن ۹۹ است، جمله هفتم آن را به دست آورید. این سؤال قدری

پیچیده‌تر شد اما با جای‌گذاری کردن به راحتی می‌توان حل کرد.

$$\begin{aligned}
 a_1 &=? & a_5 &\Rightarrow a_1 + (n-1)d = 19 \\
 d &=? & a_{15} &\Rightarrow a_1 + (n-1)d = 99 \\
 & & & \Rightarrow \begin{cases} n=5 & a_1 + 4d = 19 \\ n=15 & a_1 + 14d = 99 \end{cases}
 \end{aligned}$$

خب ما نه جمله اول و نه اختلاف مشترک را داریم اما با حل کردن این قسمت به روش دستگاه به پاسخ سؤال می‌رسیم.

در روش حل دستگاه در تابع خطی در این قسمت ما $a_1 + 4d = 19$ را در یک منفی ضرب می‌کنیم که در این صورت a_1 ها از بین می‌روند و از این طریق d را به دست می‌آوریم و در فرمول جای‌گذاری می‌کنیم تا a_1 را به دست آوریم.

$$\begin{aligned}
 -(a_1 + 4d) &= -19 \\
 a_1 + 14d &= 99 \\
 \hline
 -a_1 - 4d &= -19 \\
 a_1 + 14d &= 99 \\
 \hline
 +10d &= 80 \Rightarrow d = \frac{80}{10} = 8 \Rightarrow d = 8
 \end{aligned}$$

توجه داشته باشید ما می‌توانستیم منفی را در قسمت پایین ضرب کنیم و فرقی نمی‌کند (d) را در کدام فرمول جای‌گذاری کنیم در هر صورت به یک جواب می‌رسیم. وقتی ما a_1 و d را به دست آوریم می‌توانیم خواسته سؤال که a_7 است را به دست آوریم.

$$\begin{aligned}
 a_1 + 4(8) &= 19 \\
 a_1 + 32 &= 19 - 32 \\
 a_1 &= -13 \\
 a_1 &= -13 & a_7 &= -13 + (7-1) \times 8 \\
 d &= 8 & a_7 &= -13 + 48 \\
 a_7 &=? & a_7 &= 35
 \end{aligned}$$

در این سؤال ما متوجه شدیم که دنباله حسابی نوعی تابع خطی می‌باشد که شیب خط همان اختلاف مشترک است.

مثال: پنج عدد بین ۲۵ و ۴۵ قرار می‌دهیم تا تشکیل دنباله حسابی بدهند. اختلاف مشترک این دنباله را به دست آورید.

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{b-a}{n+1} & d &= \frac{45-25}{5+1} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \\
 d &= \frac{10}{3}
 \end{aligned}$$

مثال: مقدار x را به گونه‌ای بیابید که سه عدد $3x^a + 3$, $2x^b - 4$, $2x^c + 1$ تشکیل دنباله حسابی دهند. سپس جملات را نوشته و اختلاف مشترک را به دست آورید.

باید از فرمول واسطه حسابی استفاده کنیم.

$$b = \frac{a+c}{2} \quad 2x - 4 = \frac{3x + 3 + 2x + 1}{2} = 2x - 4 = \frac{5x + 4}{2}$$

$$3x^a + 3 = 3(-12) + 3 = -32 \quad \begin{aligned} 4x - 8 &= 5x + 4 & \Rightarrow -x &= 12 \\ 4x - 5x &= 8 + 4 & \Rightarrow x &= -12 \end{aligned}$$

x را به دست آوریم در معادله‌ها جای گذاری می‌کنیم تا جملات دنباله را به دست آوریم.

$$3x^b - 4 = 2(-12) - 4 = -28$$

$$3x^c + 1 = 2(-12) + 1 = -23$$

جملات دنباله $d = 5$: $-33, -28, -23$

مجموع جملات دنباله حسابی: از دو فرمول می‌توان مجموع بر فرض 10 جمله از دنباله حسابی را به دست آورد.

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \text{یا} \quad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

(یعنی مجموع S)

مثال: مجموع 10 جمله اول دنباله حسابی با جمله اول 3 و اختلاف مشترک 6 را به دست آورید. از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ استفاده می‌کنیم.

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(3) + (10-1)6) \Rightarrow S_{10} = 300$$

$$S_{10} = 5(6 + 54)$$

$$-1, 4, 9, \dots, 199$$

مثال: مجموع دنباله حسابی زیر را به دست آورید.

از آنجایی که ما n را در اختیار نداریم ولی a_n داریم استفاده از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ راحت‌تر می‌باشد.

$$a_1 = -1$$

$$d = 5$$

$$n = ?$$

از آنجایی که n به ما داده نشده می‌توانیم از طریق فرمول $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$ تعداد n یا همان تعداد مجموع جملات را به دست آوریم.

$$S_n = \frac{n}{2}(-1 + 199) \Rightarrow S_n = 99n$$

$$S_n = \frac{n}{2} \times 198 = 99n$$

$$n = \frac{199 - (-1)}{5} + 1 \quad b = \frac{200}{5} + 1 = 41 \quad n = 41$$

$$S_{41} = 4059 \leftarrow 99 \times 41 = 4059$$

مثال: مجموع سی جمله اول اعداد فرد را به دست آورید.

ما می‌دانیم اولین عدد فرد 1 می‌باشد اما سی‌ام عدد فرد یا همان a_n را نداریم. پس از فرمول $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ استفاده می‌کنیم. چون اختلاف اعداد فرد 2 می‌باشد، پس d هم 2 است.

$$a_1 = 1 \quad S_{30} = \frac{30}{2}(2(1) + \underbrace{(30-1)}_{29} \cdot 2)$$

$$d = 2 \quad S_{30} = 15(2 + 58)$$

$$n = 30 \quad S_{30} = 15 \times 60 \Rightarrow S_{30} = 900$$

$$a_n = ?$$

فصل سوم: الگوهای غیرخطی

مبحث: دنباله هندسی

دنباله هندسی: به دنباله‌هایی که هر جمله از ضرب شدن مقداری ثابت در جمله قبلی‌اش به دست می‌آید دنباله هندسی گفته می‌شود. پس در دنباله هندسی نسبت جمله‌های متوالی را به دست می‌آوریم.

تفاوت دنباله هندسی با دنباله حسابی: در دنباله حسابی اختلاف مشترک داریم یعنی اختلاف جمله دهم با نهم، جمله نهم با هشتم، جمله هشتم با جمله هفتم و... به همین ترتیب مشترک می‌باشد؛ اما در دنباله هندسی نسبت مشترک را. یعنی وقتی جمله هفتم تقسیم بر جمله ششم می‌کنیم یا جمله ششم را تقسیم بر جمله پنجم می‌کنیم، عدد ثابت به دست می‌آید که به آن نسبت مشترک می‌گوییم که با نماد (r) نشان می‌دهیم.

فرمول کلی دنباله هندسی:

$$a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$\begin{array}{l} \frac{\times 3}{2,6}, \frac{\times 3}{18,54} \\ a_1 = 2 \\ r = 3 \end{array}$$

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

مثال:

مثال: جمله هفتم دنباله روبه‌رو را مشخص کنید.

$$a_1 = 3 \quad a_n = a_1 \times r^{n-1}$$

$$r = 2 \quad a_7 = 3 \times 2^{7-1}$$

$$a_7 = 3 \times 2^6 \Rightarrow a_7 = 3 \times 64 \quad a_7 = 192$$

$$n = 7$$

مثال: چندمین جمله دنباله هندسی با جمله اول ۵ و قدر نسبت ۲ برابر با ۳۲۰ است.

۲ به توان چه عددی می‌شود ۶۴؟ پس $n = 7$ می‌باشد چون وقتی از ۷ یکی کم کنیم، ۲ می‌شود ۶۴

$$a_1 = 5 \quad a_n = a_1 \times n^{n-1}$$

$$r = 2 \quad 320 = 5 \times 2^{n-1}$$

$$a_n = 320 \quad 2^{n-1} = \frac{320}{5} \Rightarrow 2^{n-1} = 64$$

$$n = ?$$

مثال: جمله یک دنباله هندسی ۲۷ و جمله پنجم همین دنباله ۲۴۳ است. جمله هفتم این دنباله هندسی را به دست آورید.

$$a_1 = ? \quad a_3 \Rightarrow a_1 \times r^{3-1} = 27$$

$$d = ? \quad a_5 \Rightarrow a_1 \times r^{5-1} = 243$$

$$a_3 = 27 \quad \underline{a_1 \times r^2 = 27}$$

$$a_5 = 243 \quad a_1 \times r^4 = 243$$

$$a_7 = ?$$

$$n = ?$$

ما در دنباله هندسی دستگاه تشکیل نمی‌دهیم، بلکه فاکتور می‌گیریم از ar^2 فاکتور می‌گیریم.

$$\text{طرفین وسط} \quad \frac{ar^2(1)}{ar^2(r^2)} = \frac{27}{243} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{9}$$

$$r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3$$

چون دنباله هندسی افزایش است +۳ قابل قبول $r = 3$ را به دست آوریم

$$a_1 \times r^2 = 27 \Rightarrow a_1 \times 3^2 = 27 \Rightarrow 9a = 27 \Rightarrow a = \frac{27}{9} = 3$$

تا به اینجا r و a_1 را به دست آوردیم و حال می‌توانیم خواسته سؤال یعنی جمله هفتم را به دست بیاوریم.

$$a_7 = a_1 \times r^{7-1}$$

$$a_7 = 3 \times 3^6 \Rightarrow a_7 = 2187$$

واسطه هندسی: a, b, c سه جمله متوالی دنباله هندسی باشد، در این صورت b (جمله میانی) را واسطه هندسی c و a می‌نامیم و رابطه $b^2 = a \times c$ بین آنها برقرار است.

مثال: اگر سه جمله $x^a + 4, x^b, x^c - 2$ تشکیل دنباله هندسی بدهند، مقدار x را به دست آورید.

$$b^2 = a \times c \quad x^2 = (x-2)(x+4)$$

$$x^2 = x^2 + 2x - 8$$

$$x^2 - x^2 = 2x - 8$$

$$\frac{2x = 8}{x = 4}$$

نکته اگر بین دو جمله غیرمتوالی n جمله درج شده باشد، مقدار نسبت مشترک از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$r^{n+1} = \frac{b}{a} \rightarrow \text{بزرگتر}$$

$$\downarrow$$

$$a \rightarrow \text{کوچکتر}$$

تعداد واسطه

مثال: در یک دنباله هندسی صعودی بین اعداد ۳ و ۴۸ سه واسطه هندسی درج نموده‌ایم نسبت مشترک را مشخص کنید.

$$r^{3+1} = \frac{48}{3}$$

$$r^4 = 16$$

$$r = 2$$

$$S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$

مجموع جملات دنباله هندسی: از فرمول مقابل به دست می‌آید.

مثال: مجموع ۵ جمله اول دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 2$ و نسبت مشترک $r = 3$ را به دست آورید.

$$a_1 = 2 \quad S_5 = 2 \frac{1-3^5}{1-3} \Rightarrow S_5 = 2 \times \frac{1-243}{-2}$$

$$n = 5$$

$$r = 3 \quad S_5 = 2 \frac{1-243}{-2} = 2 \times 121 \Rightarrow S_5 = 242$$

$$S_5 = ?$$

مثال: مجموع چند جمله اول دنباله هندسی $5, 10, 20, \dots$ برابر با ۳۱۵ می‌باشد؟

$$a_1 = 5 \quad 315 = 5 \times \frac{1-2^n}{1-2}$$

$$r = 2 \quad \frac{315}{5} = \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow \frac{63}{1} = \frac{1-2^n}{-1} \Rightarrow -63 = 1-2^n \Rightarrow -64 = -2^n$$

$$n = ?$$

$$S_n = 315$$

$$64 = 2^n \Rightarrow 2 \text{ به توان } 6 \text{ می‌شود } 64$$

$$n = 6$$

$$a_1 \neq 0 \quad r \neq 0$$

درباره دنباله هندسی: در دنباله هندسی جمله اول و نسبت مشترک نمی‌تواند صفر باشد.

مروری بر فرمول‌های دنباله هندسی و دنباله حسابی:

| دنباله هندسی | دنباله حسابی | نام فرمول |
|--------------------------------------|--|--------------------------|
| $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ | $a_n = a_1 + (n-1)d$ | جمله عمومی (ضابطه تابعی) |
| $a_{n+1}r \times a_n, a_1 = ?$ | $a_{n+1} = a_n + d, a_1 = ?$ | رابطه بازگشتی |
| $b^2 = a \times c$ | $b = \frac{a+c}{2}$ | سه جمله متوالی c, b, a |
| $r^{n+1} = \frac{b}{a}$ | $d = \frac{b-a}{n+1}$ | درج n جمله بین b, a |
| $S_n = a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ | $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ | مجموع جملات |

مبحث: ریشه n ام و توان گویا

یادآوری توان

ریشه دوم: وقتی می‌گوییم ریشه دوم a ، دنبال عددی می‌گردیم که توان دوم آنها a است ریشه دوم عدد a را با $+\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ نشان می‌دهیم. اعداد منفی ریشه دوم ندارند.

ریشه سوم: وقتی می‌گوییم ریشه سوم a دنبال عددی می‌گردیم که توان سوم آن a باشد هر یک از اعدادی که ریشه سوم دارند که با خود عدد هم علامت هستند و آن را با $\sqrt[3]{a}$ نشان می‌دهیم. اعداد منفی ریشه سوم دارند.

$$\sqrt[3]{-125} = -5 \quad \sqrt[3]{8} = 2$$

ضرب اعداد توان دار با پایه‌های مساوی: یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را جمع می‌کنیم.

ضرب اعداد توان دار با توان‌های مساوی: پایه‌ها را ضرب می‌کنیم و یکی از توان‌ها را می‌نویسیم.

تقسیم اعداد توان دار با پایه‌های مساوی: یکی از پایه‌ها را می‌نویسیم و توان‌ها را کم می‌کنیم.

تقسیم اعداد توان دار با توان‌های مساوی: یکی از توان‌ها را می‌نویسیم و پایه‌ها را تقسیم می‌کنیم.

توان‌های منفی: اگر عددی توان منفی داشت آن را معکوس می‌کنیم.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-r} = \left(\frac{b}{a}\right)^r$$

$$5^{-4} = \frac{1}{5^4}$$

مثال:

معادلات توانی: به معادلاتی که مجهولاتی در توان یا پایه وجود دارد، معادلات توانی گفته می‌شود.

مثال: ما متوجه می‌شویم که توان‌ها برابر می‌باشد و پایه‌ها ضرب شده پس $x = 5$

$$8^x \times 9^5 = 72^5 \quad x = 5$$

وقتی پایه‌ها مساوی باشد، توان‌ها را جمع می‌کنیم پس

$$b) \left(\frac{0}{36}\right)^4 \times \left(\frac{0}{36}\right)^x \times \left(\frac{0}{36}\right)^{-6} = \left(\frac{0}{36}\right)^7$$

$$4 + x + (-6) = 7 \Rightarrow x - 2 = 7 - 2 \Rightarrow x = 9$$

در این قسمت $(x^5 \times 15^3)$ وقتی توان‌ها جمع می‌شود که پایه برابر باشد. پس $x = 15$

$$پ) \frac{x^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = 5^8$$

$$\text{توان برابر پس پایه‌ها را تقسیم می‌کنیم.} \quad \frac{15^5 \times 15^3}{3^2 \times 3^5 \times 3} = \frac{15^8}{3^8} = 5^8$$

توجه کنید وقتی عددی توان ندارد توان آن یک می‌باشد.

مثال: حاصل هر یک از عبارتهای زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\frac{1}{3^3} \times \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^3+4} = \frac{1}{3^7}$$

$$\left(\frac{3^4}{26}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{3^{4 \times \frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^2}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{3^2}{\sqrt{2}}$$

$$\left(m^{\frac{2}{3}} \times n^{\frac{1}{2}}\right)^2 \left(m^2 \times n^3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left[\frac{a^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{4}}}\right]^{-4} = \frac{a^{-\frac{1}{2} \times -4}}{a^{-\frac{1}{4} \times -4}}$$

$$\frac{a^2}{a^1} = a^1$$

$$m^{\frac{6}{3}} \times n^1 \times m^1 \times n^{\frac{2}{2}}$$

$$m^2 \times n^1 \times m^1 \times n^1$$

$$m^2 \times n^2 = (mn)^2$$

$$m^1 \times n^1 = mn^1$$

$$(mn)^2 mn^1 = mn^{\frac{5}{2}}$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{14} \left(\frac{3}{4}\right)^{-14}$$

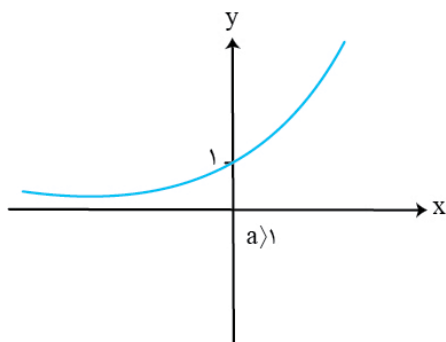
نکته هرگاه بخواهیم پایه را معکوس کنیم باید توان را قرینه کنیم.

مبحث: تابع نمایی

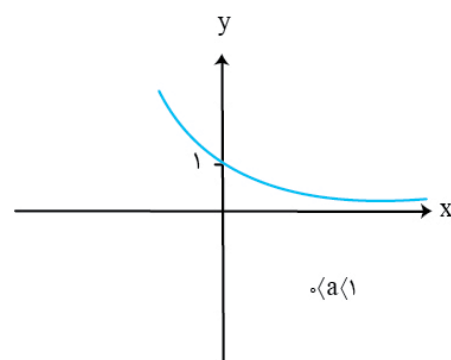
تابع نمایی: تابع نمایی از نظر ضابطه‌ای به شکل $y = a^x$ می‌باشد که a عددی مثبت می‌باشد ولی هرگز نمی‌تواند برابر با یک باشد؛ مانند

$$y = 3^x$$

نمودار تابع نمایی با دامنه \mathbb{R} به یکی از دو شکل زیر است.



$a > 1$



$0 < a < 1$

توان گویا: تا به الان اگر عددی به توان می‌رساندیم، توانش عددی صحیح بود؛ اما در این مبحث اعداد گویا هم وارد بازی می‌شوند.

برای هر یک اعداد طبیعی $n \geq 2$ توان $\frac{1}{n}$ عدد حقیقی و مثبت a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر زوج باشد، $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ منظورمان ریشه مثبت است.

دقت کنید در توان کسری صورت کسر، توان عددمان و مخرج فرجه رادیکال

$$a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{a^m} \quad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3}$$

تمام قواعدی که در توان‌های صحیح گفتیم، برای توان‌های گویا هم برقرارند.

مثال:

$$a^{\frac{2}{4}} \times a^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{2+2}{4}} = a^{\frac{4}{4}} = a^1 = a \Rightarrow \sqrt{a^2}$$

$$8^{\frac{1}{2}} \div 8^{\frac{1}{6}} = 8^{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = 8^{\frac{2}{6}} = 8^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{8^1}$$

مثال: عبارتهای رادیکالی زیر را به صورت کسر بنویسید.

$$3^{\frac{6}{4}} \Leftarrow \sqrt[4]{3^6}$$

(الف)

$$(ب) \sqrt{-2^3} = \sqrt[5]{-2^3} = \sqrt[5]{-8}$$

اعداد منفی توان گویا ندارند.

$$(ج) \sqrt{5^{\frac{3}{2}}} \Leftarrow 5^{\frac{3}{4}}$$

وقتی فرجه ننوشته شد یعنی ۲ می‌باشد.

$$10^{\frac{4}{8}} = \sqrt[8]{10^4} \rightarrow 10^{\frac{4}{8}} = 10^{\frac{1}{2}}$$

(د)

مثال: توان‌های کسری را به صورت رادیکالی بنویسید.

$$(د) (0/3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{0/3^1}$$

$$(ج) \frac{1^{\frac{5}{2}}}{2^{\frac{5}{2}}} = \sqrt[2]{\frac{1^5}{2^5}}$$

$$(ب) 7^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{7^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{7^5}}$$

$$(الف) 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$$

چند ویژگی تابع نمایی:

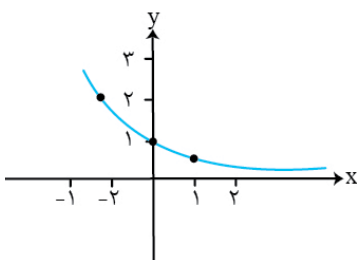
۱ اگر $a > 1$ باشد، نمودار، نمودار، صعودی است. یعنی از چپ به راست

۲ اگر $0 < a < 1$ باشد، نمودار، نزولی است. یعنی از راست به چپ

نمودار چه صعودی باشد چه نزولی، محور yها را در نقطه‌ای به عرض ۱ قطع می‌کند و این نمودار

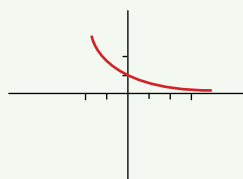
محور xها را قطع نمی‌کند.

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.



$$y = \frac{1}{2} x$$

| | | | |
|----------------------------------|----|---|-----|
| x | -1 | 0 | 1 |
| $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ | 2 | 1 | 1/2 |



رشد نمایی: مسائلی که برحسب زمان به صورت یک تابع نمایی افزایشی باشند، رشد نمایی گفته می‌شود مانند رشد جمعیت، افزایش

سود بانکی در هر ماه

$$F(t) = C(1+r)^t$$

(توان): t : زمان r : میزان رشد (تغییرات) C : مقدار اولیه t : مقدار ثانویه ($f(t)$)

مثال: جمعیت یک شهر ۲۰۰۰ نفر است. اگر رشد جمعیت در سال ۲ درصد باشد. الف) معادله رشد نمایی جمعیت را بنویسید.

$$F(t) = 2000(1+2\%)^t$$

ب) جمعیت شهر بعد از دو سال را به دست آورید.

$$F(t) = 2000(1+2\%)^2$$

$$F(2) = 2000 \times (1.02)^2 = 2080.8$$

مثال: یک شرکت سرمایه‌گذاری مبلغ ۱۰ میلیون تومان را از سرمایه‌گذار دریافت و پس از دو سال مبلغ ۱۲/۱۰۰/۰۰۰ تومان را در اختیار سرمایه‌گذاران قرار داد، نرخ سود سالانه محاسبه شده در این شرکت را به دست آورید.

$$C = 10000000$$

$$F(t) = 12,100,000$$

$$t = 2$$

$$10,000,000(1+r)^2 = 12,100,000$$

$$(1+r)^2 = \frac{12100000}{10000000}$$

$$\sqrt{(1+r)^2} = \sqrt{\frac{121}{100}}$$

$$1+r = \frac{11}{10} - 1$$

$$r = \frac{1}{10} = 0.1$$

تابع زوال نمایی: مسائلی که برحسب زمان به صورت یک تابع نمایی کاهش باشد، زوال نمایی می‌گوییم.

$$F(t) = C(1-r)^t$$

مثال: جمعیت یک شهر ۲۰۰۰۰۰ نفر است. اگر به دلیل مهاجرت هر سال جمعیت این شهر ۲ درصد کاهش پیدا کند.

الف) معادله اول نمایی جمعیت را بنویسید.

$$F(t) = 200000(1-0.02)^t$$

$$F(2) = 200000(0.98)^2$$

$$F(2) = 192,080$$

ب) چقدر جمعیت کاهش یافته است؟

$$200000 - 192080 = 7920$$



باکس طلایی

- ۱) اگر داده دور افتاده داشته باشیم معیار پراکندگی **دامنه میان چارکی** مناسب است.
- ۲) داده‌ها را گردآوری میکنیم و تا حد ممکن از درستی آنها مطمئن میشویم. گام **سوم گرد آوری و پاکسازی داده** ها چرخه اماراست.
- ۳) برای توصیف داده‌های کیفی گزارش درصد باید همیشه با گزارش **تعداد** همراه باشد.
- ۴) اندازه‌گیری یا سنجش **اولین قدم** گام برای یافتن داده و بررسی متغیر مورد نظر است.
- ۵) تعداد اعضای جامعه را **اندازه** جامعه می‌نامند.
- ۶) اگر $a \cap b = \emptyset$ باشد دو پیشامد a, b را ناسازگار می‌گوییم.
- ۷) پیشامد \bar{A} وقتی رخ دهد که پیشامده رخ دهد.
- ۸) برای عدد صفر فاکتوریل را به صورت **یک** $0! = 1$ تعریف می‌کنیم.
- ۹) اگر عملی طی دو مرحله اول و دوم انجام شود به طوری که در مرحله اول به m طریق و در مرحله دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام پذیر است.
- ۱۰) اگر داده دور افتاده داشته باشیم از نمودار **جعبه‌ای** استفاده می‌کنیم.
- ۱۱) اگر پیشامد a حتمی باشد احتمال آن برابر با **یک** است.
- ۱۲) هرگاه a, b دوپیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری $\emptyset = a \cap b$ که در این صورت پیشامدهای a, b را ناسازگار می‌گوییم.
- ۱۳) به هریک از نتایج ممکن برای یک آزمایش تصادفی **برآمد** می‌گوییم.
- ۱۴) هنگامی که داده دور افتاده نداشته باشیم **میانگین و انحراف معیار** شاخص مناسبی برای توصیف هستند.
- ۱۵) مطمئن‌ترین نمودار برای متغیر **کمی** نمودار جعبه‌ای است.
- ۱۶) بیان مسئله و فهم آن اولین گام در چرخه اماراست.
- ۱۷) هر چه پراکندگی متغیر در جامعه بیشتر باشد برای اطمینان از وجود تنوع به اندازه نمونه بزرگتری نیاز داریم.
- ۱۸) اگر داده‌ها برابر باشند دامنه تغییرات آنها صفر می‌باشد.
- ۱۹) تهی زیر مجموعه همه مجموعه‌ها می‌باشد.
- ۲۰) طرح یک پرسش دقیق و شفاف مهم‌ترین گام رسیدن به پاسخ است.

فصل اول: شمارش

۱) مجموعه هشت عضوی $\{۱, ۲, ۳, \dots, ۸\}$ چند زیر مجموعه سه عضوی دارد؟ (خرداد ۹۸)

$$c(8,3) = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6} = 56$$

۲) به چند طریق می‌توانیم ۳ کتاب را از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۸)

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \times 5!} = 56$$

۳) به چند طریق می‌توان با ارقام ۱ تا ۷ عدد چهار رقمی ساخت؟ (تکرار مجاز نیست) (شهریور ۹۸)

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

۴) با ارقام ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ چند عدد ۳ رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟ (خرداد ۹۹)

$$7 \times 6 \times 5 = 210$$

۵) به چند طریق می‌توان ۳ توپ هم‌رنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟ (خرداد ۹۹)

$$\binom{5}{3} + \binom{4}{3} = \frac{5!}{3! \times 2!} + \frac{4!}{3! \times 1!} = 14$$

۶) با حروف کلمه «خورشید» و بدون تکرار حروف (با معنی یا بی معنی) (شهریور ۹۹)

الف) چندتا کلمه ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «د» ختم شوند؟

$$5 \times 4 \times 1 = 20$$

ب) چند کلمه ۴ حرفی می‌توان نوشت که با «ی» شروع و به «خ» ختم شوند؟

$$1 \times 4 \times 3 \times 1 = 12$$

۷) می‌خواهیم از بین ۱۰ خودرو سواری - ۱۲ خودرو وانت - ۶ خودرو کامیون یک خودرو انتخاب کنیم. به چند

طریق می‌توانیم این خودرو را انتخاب کنیم؟ (شهریور ۹۹)

$$10 + 12 + 6 = 28$$

۸) مهدی از بین ۳ کتاب ریاضی - ۲ کتاب عربی و ۴ کتاب ادبیات به چند طریق می‌تواند:

الف) یک کتاب را برای مطالعه انتخاب کند؟

$$3 + 2 + 4 = 9$$

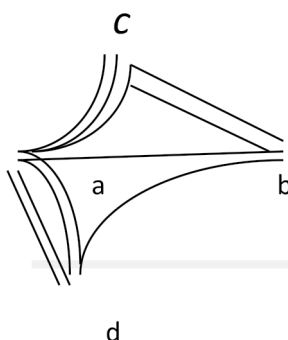
ب) یک کتاب ریاضی - یک کتاب عربی و یک کتاب ادبیات انتخاب کند؟

$$3 \times 2 \times 4 = 24$$

۹) بین چهار شهر a, b, c, d مطابق شکل زیر راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر c

و بدون عبور از شهر b به شهر d سفر کرد؟ (خرداد ۱۴۰۰)

$$3 \times 4 = 12$$



۱۰) مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن به صورت $\binom{5}{3}$ باشد. (خرداد ۱۴۰۱)
 تمام مسائلی که انتخاب ۳ شی از ۵ شی باشد. به طوری که ترتیب در انتخاب آنها اهمیت نداشته باشد.
 مانند: به چند طریق می توان از بین ۵ کتاب ۳ کتاب را انتخاب کرد؟

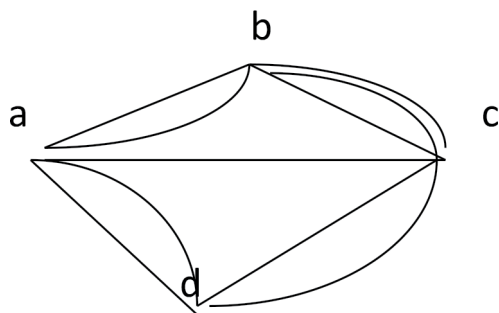
۱۱) مجموعه $\{f, e, d, c, b, a\}$ را در نظر بگیرید: (دی ۱۴۰۱)
 الف) چند زیر مجموعه ۳ عضوری دارد؟

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

ب) چند زیر مجموعه ۴ عضوی شامل دو عضو b, c می باشد؟

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

۱۲) میان چهار شهر a, b, c, d راه هایی وجود دارد. (دی ۱۴۰۲)
 به چند طریق می توان از شهر a به شهر c سفر کرد؟ به سه طریق می توان سفر کرد



۱) یا مستقیم از a به c رفت. ۱ طریق

۲) یا از a به b و سپس از b به c رفت. $3 \times 2 = 6$

۳) یا از a به d و سپس از d به c رفت. $2 \times 2 = 4$

مجموع را ها $1 + 6 + 4 = 11$

فصل اول : احتمال

۱۳) تاسی را پرتاب می کنیم پیشامد های زیر را مشخص کنید. (خرداد ۹۸)
 الف) پیشامد اینکه عدد رو شده زوج و اول باشد.

$$A = \{2\}$$

ب) پیشامد اینکه عدد رو شده اول باشد ولی زوج نباشد.

۱۴) از جعبه ای که شامل ۹ سیب سالم و ۲ سیب لکه دار است ۴ سیب را به طور تصادفی بر میداریم. مطلوب

است محاسبه احتمال اینکه سه سیب سالم و یک سیب لکه دار باشد. (خرداد ۹۸)

$$\frac{\binom{9}{3} \times \binom{2}{1}}{\binom{11}{4}} = \frac{84 \times 2}{330} = \frac{84}{165}$$

(خرداد ۹۸)

۱۵) خانواده ای دارای ۲ فرزند است .

الف) فضای نمونه ای برای ترکیب جنسیت فرزندان این خانواده بنویسید.

$$S = \{(د, د), (د, پ), (پ, د), (پ, پ)\}$$

ب) احتمال اینکه هر دو فرزند از یک جنس باشد را به دست آورید. $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ پ) احتمال اینکه حداکثر یک فرزند پسر باشد را به دست آورید. $\frac{3}{4}$

۱۶) از جعبه ای که شامل ۳ مداد و ۵ خودکار است به طور تصادفی ۴ شیء خارج میکنیم. مطلوب است احتمال

(شهریور ۱۴۰۲)

اینکه حداقل ۳ شیء انتخابی خودکار باشد.

$$P(a) = \frac{n(a)}{n(s)} = \frac{\binom{5}{3} \times \binom{3}{1} + \binom{5}{4} \times \binom{3}{0}}{\binom{8}{4}} = \frac{35}{7} = \frac{1}{2}$$

۱۷) احتمال اینکه دانش آموزی فردا به کتابخانه ی مدرسه نرود برابر با $\frac{7}{25}$ است . چقدر احتمال دارد او فردا به

(شهریور ۱۴۰۲)

کتابخانه مدرسه برود؟

$$P(\bar{A}) = 1 - p(a) = 1 - \frac{7}{25} = \frac{18}{25}$$

(خرداد ۱۴۰۲)

۱۸) دو تاس را هم زمان پرتاب می کنیم هریک از پیشامد های زیر را مشخص کنید.

الف) حاصل ضرب اعداد رو شده از دو تاس بزرگتر یا مساوی ۳۰ باشد.

$$A = \{(۶,۶), (۶,۵), (۵,۶)\}$$

ب) مجموع اعداد رو شده از دو تاس برابر ۱۳ باشد. تهی یا \emptyset

۱۹) می خواهیم از بین ۵ فوتبالیست و ۴ والیبالیست یک گروه ۶ نفره را به طور تصادفی تشکیل دهیم مطلوبست

(خرداد ۱۴۰۲)

احتمال اینکه:

الف) حداقل ۴ نفر فوتبالیست باشند.

$$N(s) = \binom{9}{6} = \frac{9!}{3! \times 6!} = 84$$

$$P(a) = \frac{\binom{5}{4} \binom{4}{2} + \binom{5}{5} \binom{4}{1}}{\binom{9}{6}} = \frac{34}{84}$$

ب) به تعداد مساوی از هر دو رشته ورزشی انتخاب شوند.

$$P(b) = \frac{\binom{5}{3} \binom{4}{3}}{\binom{9}{6}} = \frac{40}{84}$$

۲۰) دو تاس را باهم را باهم پرتاب می‌کنیم. a را پیشامد آنکه اعداد آمده از دو تاس یکسان باشند و b را پیشامد آنکه مجموع اعداد آمده از دو تاس مساوی ۸ باشند در نظر می‌گیریم: (دی ۱۴۰۱)

الف) پیشامد های a, b را مشخص کنید.

$$A = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

$$B = \{(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)\}$$

$$a \cap b = \{(4,4)\}$$

ب) آیا a, b ناسازگارند؟ چرا؟ ناسازگار نیستند

۲۱) از جعبه ای که شامل ۵ مهره آبی و ۷ مهره قرمز است. ۳ مهره را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن را حساب کنید که حداکثر ۲ مهره از مهره های انتخاب شده قرمز باشند. (دی ۱۴۰۱)

$$\binom{7}{0} \binom{5}{3} + \binom{7}{1} \binom{5}{2} + \binom{7}{2} \binom{5}{1}$$

$$\frac{(12)}{(3)} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

۲۲) از بین ۴ کارمند زن و ۶ نفر مرد می‌خواهیم یک تیم بازرسی ۳ نفره انتخاب کنیم. احتمال اینکه یک زن و دو مرد انتخاب شود را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$P(a) = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(10)}{(3)}$$

۲۳) کدام یک از پدیده‌های زیر قطعی و کدام یک تصادفی است؟ (خرداد ۱۴۰۱)

الف) مشاهده عدد ۳ در پرتاب یک تاس که روی هر شش وجه آن عدد ۳ حک شده باشد. **قطعی**

ب) نتیجه یک آزمون چهارگزینه‌ای که نیمی از سوالات را شانسی پاسخ داده ایم. **تصادفی**

۲۴) در پرتاب دو تاس پیشامد $\langle \langle \text{مجموع اعداد رو شده بزرگتر از } 10 \text{ باشد} \rangle \rangle$ را بنویسید. (دی ۱۴۰۰)

$$A = \{(6,6), (6,5), (5,6)\}$$

۲۵) هر یک از اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها به طور تصادفی یک کارت برمی‌میداریم. مطلوب است محاسبه احتمال اینکه عدد روی کارت مضرب ۳ باشد. (دی ۱۴۰۰)

$$A = \{3, 6, 9\} \quad P(a) = \frac{3}{10}$$

۲۶) از بین ۲ دانش آموز رشته ریاضی و ۳ دانش آموز رشته تجربی و دو دانش آموز رشته انسانی. سه دانش آموز را برای اردوی مشهد انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش آموز انتخاب شود؟ (خرداد ۱۴۰۰)

$$N(s) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35 \quad P(a) = \frac{12}{35}$$

$$N(a) = \binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 12$$

۲۷) از بین ۲ دانش آموز رشته ریاضی و ۳ دانش آموز رشته تجربی و دو دانش آموز رشته انسانی . سه دانش آموز را برای اردوی مشهد انتخاب کنیم. چقدر احتمال دارد از هر رشته یک دانش آموز انتخاب شود؟ (دی ۹۹)

$$\frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} \times \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{12}\right)^4$$

۲۸) در کیسه ای ۴ مهره سفید- ۳ مهره زرد- ۲ مهره ابی وجود دارد. ۳ مهره را به تصادف از آن خارج می کنیم. مطلوبست احتمال اینکه رنگ سه مهره متفاوت باشند. (دی ۹۹)

$$N(s) = \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!6!} = 84 \quad P(a) = \frac{24}{84} = \frac{2}{7}$$

$$N(a) = \binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 24$$

۲۹) می خواهیم از بین ۵ دانش آموز دوازدهم ۴ دانش آموز یازدهم یک تیم ۶ نفره تشکیل دهیم. مطلوبست احتمال اینکه ۴ نفر از پایه دوازدهم و ۲ نفر از پایه یازدهم باشند. (شهریور ۹۹)

$$N(s) = \frac{9!}{6!3!} = 84$$

$$N(a) = \binom{5}{4} \binom{4}{2} = 30$$

$$P(a) = \frac{n(a)}{n(s)} = \frac{30}{84}$$

۳۰) یک تاس و یک سکه را باهم پرتاب می کنیم. مطلوبست محاسبه احتمال اینکه تاس حداکثر ۳ یا سکه رو با شد. (خرداد ۹۹)

$$p(a) = \frac{9}{12}$$

فصل اول : چرخه آمار در حل مسائل

۳۱) داده های ۵ و ۲۸ و ۵ و ۷ و ۸ و ۶ و ۸ و ۹ و ۷ و ۳۰ و ۵ و ۶ متوسط ساعت های تماشای تلویزیون تعدادی از دانش آموزان یک کلاس در هفته را نشان می دهد. کدام معیار گرایش به مرکز و کدام معیار پراکندگی برای توصیف داده های << ساعت های تماشای تلویزیون >> مناسب تر است؟ چرا؟ (شهریور ۱۴۰۲)

میان معیار گرایش به مرکز مناسب و دامنه میان چارکی معیار پراکندگی مناسب است. چون درمیان داده ها داده دور افتاده مانند ۲۸ و ۳۰ وجود دارد.

۳۲) درصد قبولی دانش آموزان دو مدرسه a, b در درس ریاضی به ترتیب ۸۰ درصد و ۶۵ درصد بوده است. تعداد قبولی دانش آموزان کدام مدرسه بیشتر است؟ چرا؟ (خرداد ۱۴۰۲)

می توان نظری داد زیرا گزارش درصد باید با گزارش تعداد همراه باشد.

۳۳) در یک مطالعه امارتی برای اندازه‌گیری وزن افراد از دو واحد متفاوت استفاده شده است. (شهریور ۱۴۰۱)
الف) این مربوط به اجرای نادرست کدام یک از گام‌های چرخه آمار در حل مسائل است؟

گام دوم: طرح و برنامه‌ریزی

ب) این اجرای نادرست بر کدام گام‌های این چرخه اثر می‌گذارد؟

بر روی گام سوم، چهارم و پنجم اثر می‌گذارد.

۳۴) برای بررسی میزان مطالعه افراد یک شهر ایا انتخاب نمونه از بین افراد عضو کتابخانه عمومی آن شهر روش نمونه‌گیری مناسبی است؟ چرا؟ (شهریور ۱۴۰۱)

خیر چون معرف خوبی از جامعه نیستند.

۳۵) داده‌های زیر میزان حقوق ماهانه (برحسب میلیون تومان) کارمندان یک شرکت خصوصی را نشان می‌دهد. (خرداد ۱۴۰۱)

8, 6, 6, 5, 11, 20, 9, 8, 35, 12, 12, 10

الف) دامنه تغییرات و میانه داده‌های بالا را به دست آورید.

میانه = ۹ دامنه تغییرات = $30 = 35 - 5$

ب) ایا میانه معیار گرایش به مرکز مناسبی برای توصیف این داده‌ها است؟ چرا؟

بله. زیرا در بین داده‌ها دور افتاده وجود دارد

۳۶) با توجه به داده‌های زیر میانه و میانگین آن را به دست آورید.

۳- ۱- ۵- ۷- ۳- ۸- ۲- ۴- ۳- ۴

میانگین = $4 = \frac{40}{10} = \frac{4+3+4+2+8+3+7+5+1+3}{10}$ میانه = $\frac{3}{5}$

۳۷) در موارد زیر نام گام را بنویسید. (دی ۹۹)

الف) برگزاری آزمون‌های پیشرفت تحصیلی در مدارس و بررسی نمرات دانش‌آموزان.

طرح و برنامه‌ریزی

ب) بررسی علل پایین بودن سرانه مطالعه دانش‌آموزان کشور در مقطع متوسط دوم.

بیان مسئله

۳۸) در نمونه‌گیری میزان مصرف آب ۹ خانوار در یک دوره (برحسب مترمکعب) به دست آمده است میانه چارک اول و سوم را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

130 و 65 و 75 و 120 و 50 و 30 و 70 و 110 و 40

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم 130 و 120 و 110 و 75 و 70 و 65 و 50 و 40 و 30

چارک اول = 45 چارک سوم = 115 میانه = 70

فصل اول : مدل سازی و دنباله

(۳۹) با توجه به دنباله های $a_n = \frac{1^{n-1}}{5}$ و $b_n = 3n - 2$ حاصل $a_3 - b_2$ را بیابید. (شهریور ۹۹)

$$a_3 = \frac{1^{3-1}}{5} = \frac{1^2}{5} = \frac{1}{5}$$

$$b_2 = 3 \times 2 - 2 = 6 - 2 = 4 \quad a_3 - b_2 = \frac{1}{5} - 4 = -3 \frac{4}{5}$$

(۴۰) جمله های دوم تا پنجم دنباله بازگشتی $\{a_1 = 2\}$ را مشخص کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

$$a_{n+1} = a_n + n$$

$$A_2 = a_1 + 1 = 3$$

$$A_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$A_4 = a_3 + 3 = 5 + 3 = 8$$

$$A_5 = a_4 + 4 = 8 + 4 = 12$$

(۴۱) جمله پنجم دنباله بازگشتی زیر را مشخص کنید.

$$a_{n+3} = a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1$$

$$N=1 \quad a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$N=2 \quad a_5 = a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1 + 3 = 5$$

(۴۲) اگر ضابطه تابعی (جمله عمومی) دنباله ای $a_n = 2n - 1$ باشد: (دی ۱۴۰۱)

(الف) جمله اول دنباله را بنویسید. $a_1 = 1$ $a_2 = 3$ $a_3 = 5$

(ب) رابطه بازگشتی دنباله را مشخص کنید.

$$a_{n+1} = a_n + 2 \quad a_1 = 1$$

(۴۳) سه جمله اول دنباله $a_n = n^2 + 1$ بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$a_1 = 2 \quad a_2 = 5 \quad a_3 = 10$$

(۴۴) رابطه بازگشتی دنباله $10, 17, 24, \dots$ را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$a_1 = 10, \quad a_{n+1} = a_n + 7$$

(۴۵) پنج جمله اول دنباله $a_{n+1} = -a_n + (-1)^n$ را با فرض $a_1 = 3$ بنویسید. (خرداد ۹۹)

$$7, -6, 5, -4, 3$$

۴۶) برای جملات دنباله روبه رو :

(شهریور ۹۹)

1,4,7,10,13,.....

الف) رابطه بازگشتی دنباله را بنویسید.

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad a_1 = 1$$

ب) ضابطه تابعی دنباله را به دست آورید.

$$a_n = 3n - 2$$

۴۷) با توجه به دنباله های $a_n = 2^{2n+1}$ و $c_n = 2^{1^{n-2}}$ و $b_n = \frac{15}{n+1}$ حاصل عبارت $a_1 - b_4 + c_2$ را به دست

(خرداد ۱۴۰۰)

آورید.

$$a_1 = 2^3 = 8 \quad b_4 = \frac{15}{5} = 3 \quad c_2 = \frac{1^0}{2} = 1 \quad 8 - 3 + 1 = 6$$

۴۸) جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = \frac{n+1}{n}$ است چهار جمله اول این دنباله را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۰)

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$$

۴۹) چهار جمله اول دنباله $a_n = 3n + 2$ را بنویسید.

(خرداد ۱۴۰۱)

5, 8, 11, 14

۵۰) رابطه بازگشتی....., ۱۷, ۱۱, ۵ را بنویسید.

(خرداد ۱۴۰۱)

$$a_{n+1} = a_n + 6$$



باکس طلایی

- ۱) اگر در یک دنباله حسابی اختلاف مشترک (d) عددی مثبت باشد، جملات دنباله حسابی افزایشی است و بالعکس.
- ۲) هر دنباله حسابی یک تابع خطی است که شیب خط آن، همان اختلاف مشترک جملات دنباله، یعنی d است.
- ۳) در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک r ، اگر $r = 1$ باشد، آنگاه دنباله ثابت است.
- ۴) ریشه سوم عدد 27 برابر با 3 می باشد.
- ۵) ریشه چهارم عدد 16 برابر 2 و -2 است.
- ۶) ریشه پنجم عدد -243 برابر -3 است.
- ۷) در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $1 < a$ باشد، هر چه x کوچک تر میشود، مقدار y کوچک می شود.
- ۸) در تابع نمایی $y = a^x$ اگر $0 < a < 1$ باشد، هر چه x بزرگ شود، مقدار y کوچک می شود.
- ۹) دنباله ساخته شده از یک تابع خطی، جملات یک دنباله حسابی را مشخص می کند.

(شهریور ۱۴۰۲)

(۵۱) در دنباله ۱، ۵، ۹، ۴۰۱

الف) جمله عمومی دنباله را بنویسید.

$$a_n = a_1 + (n -$$

$$1)d \xrightarrow[d=4]{a_1=1} a_n = 1 + (n-1)(4)$$

$$\rightarrow a_n = 4n - 3$$

ب) مجموع جملات دنباله را بنویسید.

$$a_{n=4n-3} \rightarrow 4n-3 = 401 \rightarrow 4n = 401+3 \rightarrow 4n = 404 \rightarrow n = \frac{404}{4} = 101$$

$$S_n = \frac{101 \times (1+401)}{2} = \frac{101 \times 402}{2} = 101 \times 201 = 20301$$

$$S_n = \text{یا}$$

$$\frac{101 \times (2 \times 1 + (101-1) \times 4)}{2} = \frac{101 \times (2+400)}{2} = \frac{101 \times 402}{2} = 101 \times 201 = 20301$$

(۵۲) میان دو عدد ۱۲ و ۵۲ چهار عدد را به گونه ای قرار دهید که شش جمله حاصل یک دنباله حسابی افزایشی

(شهریور ۱۴۰۲)

تشکیل دهند.

 به دست آوردن d از هر دو روش درست است

$$\left. \begin{aligned} D = \frac{52-12}{4+1} = \frac{40}{5} = 8 \quad d = 8 \\ a_{52} \rightarrow 5+12d = 52 \rightarrow d = 8 \end{aligned} \right\}$$

$$12 \xrightarrow{+8} 20 \rightarrow 28 \rightarrow 36 \rightarrow 44 \rightarrow 52$$

(۵۳) در دنباله هندسی، جمله دوم ۳۲ و جمله پنجم این دنباله ۲۵۶ است. جمله هفتم این دنباله را به دست

(شهریور ۱۴۰۲)

آورید.

$$\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_1 \times r^4}{a_1 \times r^1} = \frac{256}{32} = r^3 = 8 \quad r = 2$$

هر سه روش درست می باشد

$$\left. \begin{aligned} a_7 = a_1 \times a_{2=32} \quad 2a_1 = 32 \quad a_1 = 16 \quad (1) \quad r^6 = 16 \times 2^6 = 1024 \\ 2) \quad a_7 = a_5 \times r^2 = 256 \times 4 = 1024 \\ 3) \quad a_7 = a_2 \times r^5 = 32 \times 32 = 1024 \end{aligned} \right\}$$



(شهریور ۱۴۰۲)

۵۴) در دنباله هندسی... 2, 6, $\frac{2}{3}$

الف) ضابطه بازگشتی این دنباله را بنویسید.

$$\begin{cases} a_1 = \frac{2}{3} & \text{یا} & a_1 = \frac{2}{3} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = 3 & & a_{n+1} = 3a_n \end{cases}$$

ب) مجموع ۶ جمله اول داده شده را به دست آورید.

$$S_6 = \frac{\frac{2}{3}(1-3^6)}{1-3} = \frac{\frac{2}{3}(1-729)}{-2} = \frac{\frac{2}{3}(-728)}{-2} = \frac{-2 \times 728}{-2} = \frac{728}{3}$$

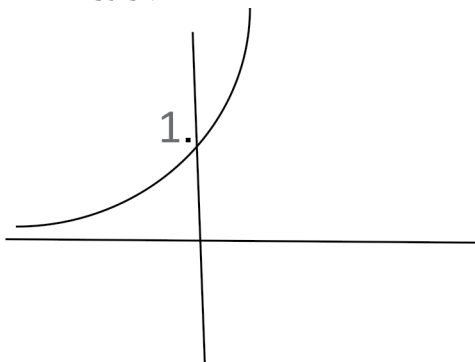
(شهریور ۱۴۰۲)

۵۵) حاصل هر عبارت را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $5^{0/12} \times 5^{0/88} = 5^1 = 5$

ب) $\left(\frac{7^{-1/3}}{7^{-1/6}}\right)^{12} = 7^{4-2} = 7^2 = 49$

(شهریور ۱۴۰۲)

۵۶) نمودار مختصاتی تابع نمای $y=3^x$ را رسم کنید.

۵۷) فردی ده میلیون تومان پول خود را در یک شرکت تولید کالای ایرانی سرمایه گذاری می کند. اگر در پایان

هر سال به پاس اعتمادش ۲۰ درصد سود علی الحساب از طرف شرکت به او پراخت شود، آنگاه پس از دو سال

(شهریور ۱۴۰۲)

مبلغ سرمایه گذاری او چه مقدار خواهد شد؟

$$\begin{aligned} F(t) &= 10,000,000 \times \left[1 + \frac{20}{100}\right]^2 \\ &= 10,000,000 \times \left[1 + \frac{1}{5}\right]^2 = 10,000,000 \times \left(\frac{6}{5}\right)^2 = 14,400,000 \end{aligned}$$

۵۸) یازدهمین جمله یک دنباله حسابی ۴۷ و جمله هفدهم آن ۷۷ است. جمله اول این دنباله را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\begin{cases} a_1 + 10d = 47 \\ a_1 + 16d = 77 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a_1 - 10d = -47 & D = 5 & a_1 = -3 \\ a_1 + 16d = 77 \end{cases}$$

۵۹) در دنباله حسابی مقابل (خرداد ۱۴۰۲)

2 و 5 و 8 و 11.....

الف) جمله چندم آن ۹۵ است.

$$a_n = 95 \quad 2 + (n-1) \times 3 = 95 \quad 3n - 3 = 93 \quad n = 32$$

ب) مجموع چهل جمله اول این دنباله را به دست آورید.

$$s_{40} = \frac{40}{2} [2 \times 2 + (40 - 1) \times 3] = 2420$$

یا

$$a_{40} = 119 \quad s_{40} = \frac{40}{2} (2 + 119) = 2420$$

۶۰) اگر $n+5$ و X و $X-3$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی افزایشی باشند، مقدار X را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$(x-3)(x+5)=9 \quad x^2 + 2x - 24 = 0 \quad \begin{cases} X=4 & \text{قابل قبول} \\ X=-6 \end{cases}$$

۶۱) جمله اول یک دنباله هندسی ۶ و نسبت مشترک دنباله ۲ است. الف) جمله نهم این دنباله را بنویسید.

$$a_9 = 6(2)^{9-1} = 6 \times 2^8 = 1536$$

ب) مجموع ده جمله اول این دنباله را بنویسید.

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)}$$

$$S_{10} = \frac{6(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 6 \times 1023 = 6138$$

۶۲) عبارت توان دار را به صورت رادیکالی و عبارت رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)

الف)
$$\sqrt[7]{(3/5)^4} = (3/5)^{4/7}$$

ب)
$$2^{5/6} = \sqrt[6]{2^5}$$

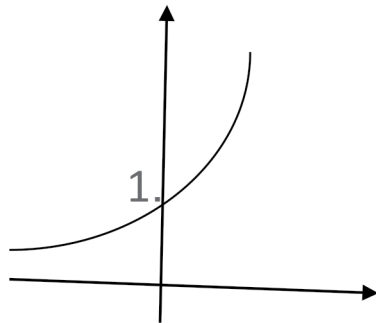
۶۳) حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

$$\left[a^{2/3} \cdot b^{4/3} \right]^3 \times [a^8]^{1/4} =$$

$$(a^2 \cdot b^4) a^2 = a^4 \cdot b^4 = (ab)^4$$

(خرداد ۱۴۰۲)

۶۴) نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = \frac{3}{2}^x$ را رسم کنید.



۶۵) جمعیت کشوری در سال ۲۰۲۳ میلادی، حدود ۲۰ میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این کشور به صورت نمایی و با نرخ دو درصد در حال کاهش باشد، جمعیت این کشور در سال ۲۰۲۴ میلادی چند نفر خواهد بود؟ (خرداد ۱۴۰۲)

$$\begin{aligned} \text{فرمول} &= F(t) = c(1-r)^t \\ &= 20,000,000(1-0/02)^1 = 20,000,000(0/98) = 19600000 \end{aligned}$$

۶۶) جمله اول یک دنباله حسابی ۵ و جمله دهم آن ۳۲ است: **الف)** اختلاف مشترک را بیابید. (دی ۱۴۰۲)

$$A_{10} = A_1 + 9D = 32 \implies 9D = 27 \quad D = 3$$

$$S_N = \frac{N}{2} [2A + (N - 1)D]$$

مجموع ۲۰ جمله اول آن را به دست آورید.

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2(5) + 19(3)] = 670$$

(۶۷) اگر $3x+X$ و $1x-$ سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار X را به دست آورید. (دی ۱۴۰۱)

$$X^2 = (X-1)(X+3)$$

$$X^2 = X^2 + 2X - 3 \implies 2X = 3 \quad X = \frac{3}{2}$$

(۶۸) با توجه به دنباله هندسی $\dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}$ حاصل $\frac{a_8}{a_3}$ را به دست آورید. (دی ۱۴۰۱)

$$A_N = \frac{1}{27} (3)^{N-1} \quad \frac{A_8}{A_3} = \frac{\frac{1}{27} \times 3^7}{\frac{1}{3}} = \frac{3^4}{\frac{1}{3}} = 243$$

(دی ۱۴۰۱)

(۶۹) مقدار X را در تساوی زیر به دست آورید.

$$\frac{X^6 \times 14^2}{2 \times 2^4 \times 2^3} = 7^8 = X^6 \times 14^2 = 7^8 \times 2^8$$

$$X^6 \times 14^2 = 14^8 \implies X^6 = 14^6 \implies X = 14$$

(۷۰) عدد توان دار را به صورت رادیکالی و عدد رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (دی ۱۴۰۱)

$$13^{\frac{5}{8}} = \sqrt[8]{13^5} \text{ الف}$$

$$\sqrt[3]{17^2} = 17^{\frac{2}{3}} \text{ ب}$$

(۷۱) جمعیت کشوری در پایان سال ۲۰۲۲ میلادی حدود ۴۰ میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت این

کشور با نرخ یک درصد در حال کاهش باشد، جمعیت آن کشور در پایان سال ۲۰۲۴ چند نفر خواهد شد؟

(دی ۱۴۰۱)

$$F(t) = c(1-r)^t$$

$$40000000 (1 - 0/01)^2 = 40000000 \times 0/99^2 = 39204000$$

(۷۲) سه عدد را به گونه ای میان دو عدد ۱۰ و ۲۲ قرار دهید که یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک مثبت

(شهریور ۱۴۰۱)

تشکیل دهد.

$$10, 13, 16, 19, 22$$

$$d = \frac{a_5 - a_1}{4} = \frac{22 - 10}{4} = 3$$

(۷۳) مجموع هفت جمله اول دنباله هندسی $\dots, 12$ و 3 را با استفاده از فرمول به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \implies S_7 = \frac{3(1-2^7)}{1-2} = 3 \times 127 = 381$$

(۷۴) در یک دنباله هندسی جمله چهارم برابر ۵ و جمله هفتم برابر با ۱۳۵ است. نسبت مشترک دنباله چند می

(شهریور ۱۴۰۱)

$$\frac{a_7}{a_4} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = r^3 = \frac{135}{5} = 27 \quad r = 3$$

باشد؟

۷۵) حاصل هر یک از عبارات های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

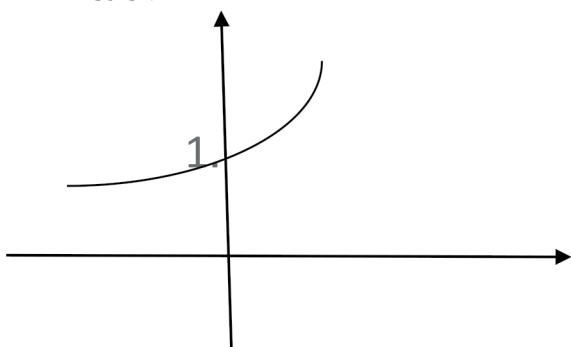
$$\text{الف) } (7^3)^{\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ب) } \left(\frac{1}{4}\right)^6 \div \frac{1}{4}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{6-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{11}{2}}$$

۷۶) اعداد توان دار را به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی به صورت توان دار بنویسید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$\text{الف) } \sqrt[5]{11^2} = (11)^{\frac{2}{5}} \quad \text{ب) } (0/9)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{0/9^4}$$

۷۷) نمودار تابع نما $y=3^x$ را با مشخص کردن نقطه برخورد با محور عرض ها، رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۱)



۷۸) طی چند سال اخیر جمعیت به گونه ای از پرندگان هر سال نسبت به سال قبل ۲۰ درصد کاهش می یابد.

اگر جمعیت آنها در حال حاضر، ده هزار نفر باشد، پس از گذشت دو سال جمعیت آنها چه تعداد خواهد بود؟ (شهریور ۱۴۰۱)

$$Y = 10,000 \times (1 - 0/2)^2 = 10000 \times (0/64) = 6400$$

۷۹) کدام یک از دنباله های زیر هندسی است؟ در صورت مثبت بودن جواب نسبت مشترک را به دست آورید.

(خرداد ۱۴۰۱)

مورد الف هندسی است.

$$\text{الف) } \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81} \dots \quad \text{ب) } 1, 4, 9, 16 \dots$$

$$R = \frac{1}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(خرداد ۱۴۰۱)

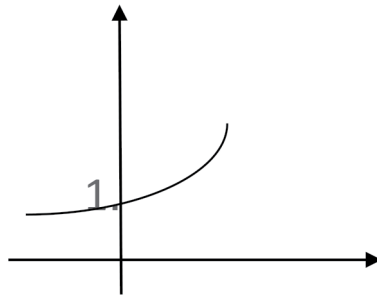
۸۰) در تساوی $8^x \times 8^3 = 8^{10}$ مقدار X را مشخص کنید.

$$8^{x+3} = 8^{10}$$

$$x + 3 = 10$$

$$x = 7$$

| | | | |
|---------|---------------|-----|-----|
| x | $1-$ | 0 | 1 |
| $Y=2^x$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 |



(۸۱) تابع نمایی را در نظر بگیرید:

(الف) جدول مقابل را کامل کنید.

(ب) نمودار مختصاتی $y=2^x$ را رسم کنید.

(۸۲) جمعیت شهری در سال ۱۴۰۰ شمسی، حدود دو میلیون نفر برآورد شده است. اگر رشد جمعیت شهر به صورت نمایی و با ضریب ثابت ۱۰ درصد در حال افزایش باشد، جمعیت این شهر در سال ۱۴۰۱ چند نفر خواهد بود؟ (خرداد ۱۴۰۱)

$$Y=2000,000 \times (1 + 0/10)^1 = 2000,000 \times (1/1) = 2,200,000$$

(۸۳) جمله یازدهم یک دنباله حسابی ۳۲ و جمله نوزدهم آن ۷۲ است. جمله سی ام این دنباله را مشخص کنید. (دی ۱۴۰۰)

$$d = \frac{72-32}{19-11} = \frac{40}{8} = 5 \qquad a_{11} = a_1 + 10d \qquad 32 = a_1 + 50$$

$$a_1 = -18 \qquad a_{30} = -18 + 29 \times 5 = 127$$

(۸۴) در دنباله هندسی روبه رو جمله نهم را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

$$\frac{1}{27} \text{ و } \frac{1}{9} \text{ و } \frac{1}{3} \text{ و } \dots \dots$$

$$a_9 = a_1 r^8 \implies a_9 = \frac{1}{27} \times 3^8 \implies a_{30} = 243$$

(۸۵) اگر $\sqrt{x} + 2$ و 3 و $\sqrt{x} - 2$ به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار x را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

$$3^2 = x - 4 \qquad x = 13$$

(دی ۱۴۰۰)

(۸۶) حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$(الف) \frac{3^8}{3^4}^{\frac{1}{2}} = (3^4)^{\frac{1}{2}} = 3^2 = 9$$

$$ب) 5 \times 5^2 = 5^3$$

۸۷) اعداد توان دار را به صورت رادیکالی و اعداد رادیکالی را به صورت توان دار بنویسید. (دی ۱۴۰۰)

الف) $\sqrt[3]{x^7} = x^{\frac{7}{3}}$

پ) $(0/9)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{0/9}$

ب) $\left[m^{\frac{3}{5}}\right] = \sqrt[5]{m^3}$

۸۸) در یک دنباله حسابی جمله اول ۱۲ و اختلاف مشترک ۲۰ است. کدام جمله از دنباله برابر ۵۹۲ است. (دی ۹۹)

$$a_n = a_1 + (n - 1) \times d \Rightarrow 592 = 12 + (n - 1) \times 20$$

۸۹) در یک دنباله حسابی $a_6 + a_4 + a_8 = 90$ باشد، جمله ششم دنباله چقدر است. (دی ۹۹)

$$a_1 + 5d + a_1 + 3d + a_1 + 7d = 9$$

$$3a_1 + 15d = 90 \Rightarrow a_1 + 5d = 30 \quad a_6 = 30$$

۹۰) با توجه به دنباله هندسی $1, 2, \dots, \dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (دی ۹۹)

$$\frac{14}{a_9 - a_6} = \frac{14}{32 - 4} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}$$

۹۱) در دنباله هندسی زیر جاهای خالی را پر کنید. (دی ۹۹)

$$4 \text{ و } 12 \text{ و } \dots \text{ و } 108 \text{ و } \dots \text{ و } \dots \quad R=3 \quad 12 \times 3 = 36 \quad 18 \times 3 = 324$$

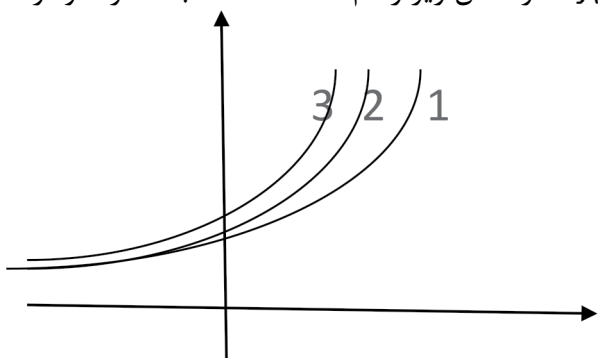
$$324 \times 3 = 972$$

۹۲) حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (دی ۹۹)

الف) $11^{\frac{5}{7}} \times 11^{\frac{9}{7}} = 11^{\frac{5+9}{7}} = 11^2$

ب) $3^{\frac{3}{2}} \times 5^{\frac{3}{2}} = 15^{\frac{3}{2}}$

۹۳) نمودار توابع $f(x)=3^x$ و $f(x)=2^x$ و $f(x)=4^x$ در شکل زیر رسم شده است. ضابطه هر نمودار را مشخص کنید.



شماره (1) $f(x)=2^x$

شماره (2) $f(x)=3^x$

شماره (3) $f(x)=4^x$

(شهریور ۱۴۰۰)

۹۴) جاهای خالی را با اعداد مناسب کامل کنید.

الف) ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر است. ۲

ب) ریشه های چهار عدد ۱۶ برابر و است. ۲-۲

پ) ریشه سوم عدد ۲۷ برابر است. ۳

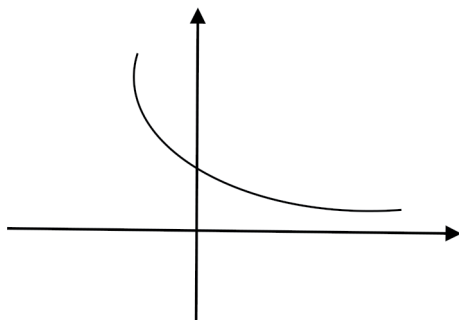
۹۵) مجموع بیست جمله اول دنباله حسابی زیر را با استفاده از فرمول به دست آورید.

1 و 3 و 5 و 7

$$S_{20} = \frac{20}{2} [2 \times (1) + 19 \times (2)]$$

$$(1) = 400$$

(شهریور ۱۴۰۰)

 ۹۶) نمودار مختصاتی تابع نمایی $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ را رسم کنید.


۹۷) کدام یک از جمالت عمومی زیر مربوط به دنباله حسابی است؟ اختلاف مشترک آن را به دست آورید.

(خرداد ۱۴۰۰)

(ب) دنباله حسابی است

الف) $a_n = n(n-1)$

ب) $b_n = 3(n-2)$

$$D=3$$

..... و 6 و 3 و 0 و -3

۹۸) نخستین جمله یک دنباله هندسی ۹۶ و نسبت مشترک این دنباله ۲ می باشد. کدام جمله دنباله

(خرداد ۱۴۰۰)

برابر ۷۶۸ است؟

$$a_n = a_1 \times r^{n-1} \implies 768 = 96 \times 2^{n-1} \implies 8 = 2^{n-1}$$

$$n-1=3 \implies n=4$$

(دی ۹۸)

۹۹) با توجه به دنباله رو به رو سوالات زیر پاسخ دهید.

3, 9, 27, 81, 243

الف) نوع دنباله را مشخص کنید. هندسی

ب) ضابطه بازگشتی دنباله را بنویسید.

پ) جمله عمومی دنباله را بنویسید.

ت) جمله دهم دنباله را بنویسید.

$$a_{n+1} = 3a_n \quad a_1 = 3$$

$$a_n = 3^n$$

$$a_{10} = 3^{10}$$

(دی ۹۸)

۱۰۰ در یک دنباله هندسی جمله اول ۱۰۲۴ و نسبت مشترک دنباله $\frac{1}{2}$ است.
الف) چندمین جمله دنباله برابر ۶۴ است.

$$64 = 1024 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}^{n-1}$$

$$n = 5$$

ب) مجموع شش جمله اول این دنباله را به دست آورید.

$$S_6 = \frac{1024 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}}$$