جزوهٔ ریاضی دهم

گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

نوتروفیل، حامی عدالت آموزشی

فصل اول

درس اول: مجموعه متناهی و نامتناهی

مجموعه‌های اعداد

یادآوری:

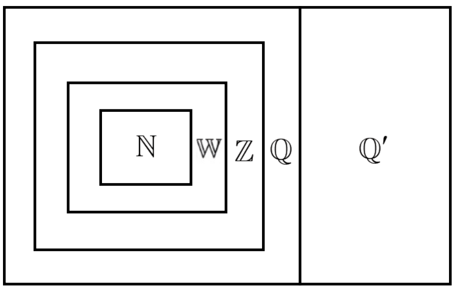
$\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,...\}$: طبیعی $\qquad$ $\mathbb{W}=\{۰,۱,۲,۳,...\}$: حسابی

$\mathbb{Z}=\{...,-۱,۰,۱,...\}$: صحیح $\qquad$ $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z}, n\neq ۰\right\}$: گویا

مجموعه اعدادی که نمی‌توان آن‌ها را به‌صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد: Q': گنگ

$\mathbb{R}=Q\cup Q'$: حقیقی

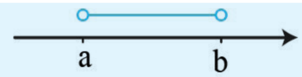
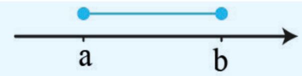
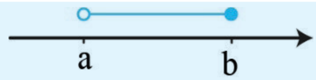
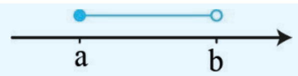
روابط زیرمجموعه بودن بین این مجموعه‌ها:



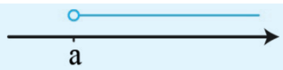
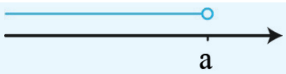
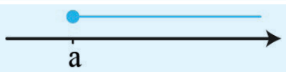
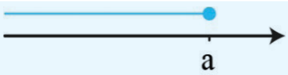
$$\begin{cases}\mathbb{N}\subseteq\mathbb{W}\subseteq\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}\\ \mathbb{Q}'\subseteq\mathbb{R}\end{cases}$$

بازه‌ها

محدود:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز	(a,b)	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x<b\}$	
بسته	$[a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$	
نیم‌باز از چپ	$(a,b]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$	
نیم‌باز از راست	$[a,b)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x<b\}$	

بی‌کران:

نوع بازه	بازه	نمایش مجموعه‌ای	نمایش هندسی
باز و از راست بی‌کران	$(a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\}$	
باز و از چپ بی‌کران	$(-\infty,a)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}$	
نیم‌باز و از راست بی‌کران	$[a,+\infty)$	$\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\}$	
نیم‌باز و از چپ بی‌کران	$(-\infty,a]$	$\{x\in\mathbb{R} \mid x\le a\}$	
باز و از دو طرف بی‌کران	$(-\infty,+\infty)$	$\mathbb{R}$ یا $\{x\in\mathbb{R}\}$	

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

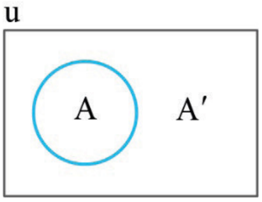
اگر تعداد اعضای یک مجموعه اعدادی حسابی باشد، آن مجموعه متناهی و در غیر این صورت نامتناهی است.

مجموعه $\varnothing$ صفر عضو دارد ⟵ پس مجموعه‌ای متناهی است.

درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع (U)

مجموعه‌ای که همه مجموعه‌های دیگر زیرمجموعه آن باشند.



متمم یک مجموعه ('A)

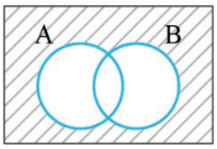
مجموعه‌ای شامل عضوهایی از مجموعه مرجع که در مجموعه اولیه (A) نیستند.

روابط بین متمم مجموعه‌ها

$(۱)\ (A')' = A$

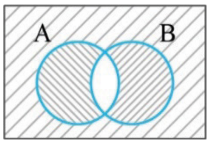
متمم متمم یک مجموعه همان خود مجموعه است.

مجموعه اعدادی که در اجتماع دو مجموعه نیستند، ⟵ همان اعدادی که در A نبودند و در B نبودند.



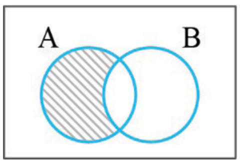
$(۲)\ (A\cup B)' = A'\cap B'$

مجموعه اعدادی که در اشتراک دو مجموعه نیستند، ⟵ همان اعدادی که در A نبودند یا در B نبودند.



$(۳)\ (A\cap B)' = A'\cup B'$

مجموعه اعدادی که عضو A بوده ولی عضو B نیستند ⟵ همان اعدادی که در A و در متمم B هستند.



$(۴)\ A - B = A\cap B'$

نکته روابط ۲ و ۳ به قوانین دمورگان مشهورند.

تعداد اعضا

$(۱)\ n(A\cup B) = n(A) + n(B) - n(A\cap B)$

$(۲)\ n(A - B) = n(A) - n(A\cap B)$ $\qquad (۳)\ n(A') = n(u) - n(A)$

مجموعه‌های جدا از هم یا مجزا:

$$A\cap B = \varnothing \to n(A\cup B) = n(A) + n(B) - ۰$$

مثال: اگر $n(A\cup B) = ۲۰$ و $n(A) = ۲n(B)$ و $n(A\cap B) = ۱۰$ باشد، $n(A)$ چند است؟

راه‌حل:

$n(A) + n(B) - n(A\cap B) = n(A\cup B)$

$۲n(B) - ۱۰ = ۲۰ \Rightarrow ۲n(B) = ۳۰ \Rightarrow n(B) = ۱۰ \qquad n(A) = ۲n(B) = ۲۰$

درس سوم: الگو و دنباله

الگو

الگوهای خطی: در این الگوها، اختلاف هر دو جمله متوالی یک عدد ثابت است.

جمله عمومی: $t_n = an + b$ اختلاف بین هر دو جمله متوالی

دنباله: الگوهایی که در آن‌ها تعدادی عدد پشت هم قرار می‌گیرند.

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

دنباله حسابی

دنباله‌ای که در آن هر جمله جز اولی، با اضافه شدن عددی ثابت به جمله قبل خود به دست می‌آید.

قدر نسبت (d): اختلاف هر دو جمله متوالی یک دنباله حسابی که عددی ثابت است.

مثال: جمله یازدهم یک دنباله حسابی ۳۲ و جمله نوزدهم آن ۷۲ است. جمله سی‌ام این دنباله را مشخص کنید.

راه‌حل:

$d = \frac{t_x - t_n}{x - n}$ $\qquad d = \frac{۷۲-۳۲}{۱۹-۱۱} = \frac{۴۰}{۸} = ۵$

$a_{۱۱} = a_۱ + ۱۰d \Rightarrow ۳۲ = a_۱ + ۵۰$ $\qquad a_۱ = -۱۸$ $\qquad a_{۳۰} = a_1 + ۲۹d$ $\qquad a_{۳۰} = -۱۸ + ۲۹ \times ۵ = ۱۲۷$

نکته: جمله عمومی دنباله‌های حسابی: $t_n = a + (n-۱)d$

دنباله هندسی

دنباله‌ای که در آن هر جمله جز اولی از ضرب جمله قبل خود در عددی ثابت به دست می‌آید.

قدر نسبت (r) عددی ثابت است که از تقسیم هر جمله قبل خود به دست می‌آید.

نکته: جمله عمومی دنباله‌های هندسی: $t_n = a \times r^{n-۱}$

واسطه‌های حسابی و هندسی

حسابی:

$$a,b,c,\ldots \rightarrow \begin{cases} a+d=b \\ b+d=c \end{cases} \rightarrow a-b=b-c \rightarrow a+c=۲b \Rightarrow \frac{a+c}{۲} = b$$

هندسی:

$$a,b,c,\ldots \rightarrow \begin{cases} ar=b \\ br=c \end{cases} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow ac = b^۲ \Rightarrow \sqrt{ac} = b$$

درج n واسطه حسابی و هندسی

حسابی: اگر n واسطه بین دو جمله c و a درج کنیم: $d = \frac{c-a}{n+۱}$

هندسی: اگر n واسطه بین دو جمله c و a درج کنیم: $r = \sqrt[n+1]{\frac{c}{a}}$

مثال: بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد چنان قرار داده‌ایم که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی داده‌اند. قدر نسبت دنباله و سه عدد را بیابید.

راه‌حل:

$$۱۸,\ldots,\ldots,\ldots,۶۲ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱۸ \\ t_۵ = ۶۲ \end{cases} \Rightarrow t_n = t_۱ + (n-۱)d \Rightarrow t_۵ - ۱۸ + (۵-۱)d \Rightarrow ۶۲ = ۱۸ + ۴d$$

$$d = \frac{۶۲-۱۸}{۴} \Rightarrow d = ۱۱ \Rightarrow ۱۸,۲۹,۴۰,۵۱,۶۲$$

رابطه اندیسی بین جملات دنباله حسابی و هندسی

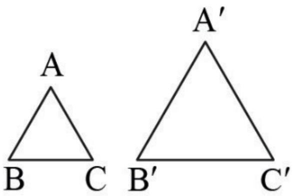
حسابی: $m,n,p,k \in \mathbb{N}, m+n=p+k \Rightarrow t_m+t_n=t_p+t_k$

هندسی: $m,n,p,k \in \mathbb{N}, m+n=p+k \Rightarrow (t_m)(t_n)=(t_p)(t_k)$

فصل دوم

درس اول: نسبت‌های مثلثاتی

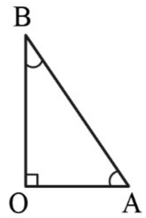
یادآوری: تشابه



$A\overset{\triangle}{B}C \sim A'\overset{\triangle}{B'}C' : (۱)\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$

$(۲)\ \hat{A}=\hat{A}', \hat{B}=\hat{B}', \hat{C}=\hat{C}'$

شروط تشابه دو مثلث	زز: دوزاویه متناظر برابر باشند.
	ض ض ض: نسبت هر ۳ ضلع مثلث به ضلع متناظرشان برابر باشد.
	ض ز ض: دو ضلع متناسب و زاویه بین آنها برابر باشد.



نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه

نکته (sin و cos همواره کمتر یا مساوی یک هستند اما tan و cos محدودیت ندارند.)

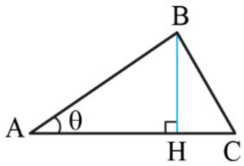
$\sin A=\frac{OB}{AB}\left(\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}\right)$ $\quad \cos A=\frac{OA}{AB}\left(\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}\right)$

$\tan A=\frac{OB}{OA}\left(\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}\right)$ $\quad \cot A=\frac{OA}{OB}\left(\frac{\text{مجاور}}{\text{مقابل}}\right)$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف:

	sin	cos	tan	cot
۳۰°	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$
۴۵°	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱
۶۰°	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$

✓ احتساب مساحت مثلث با استفاده از سینوس:



$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{AC\times BH}{۲}\xrightarrow[BH=\sin\theta\times AB]{\sin\theta=\frac{BH}{AB}}\frac{۱}{۲}\sin\theta\times AB\times AC$$

توضیح: نصف سینوس زاویه مدنظر ضرب در اندازه ضلع‌های مجاور زاویه

مثال: مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

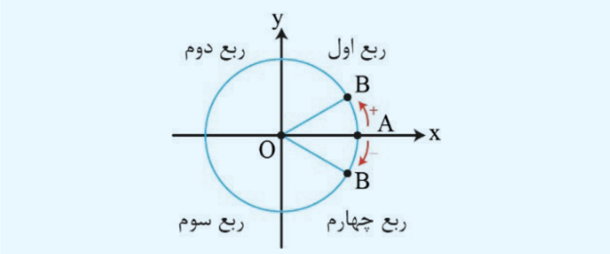
$$A=\frac{\cos^۲(۴۵^\circ)-۳\sin(۳۰^\circ)}{۵\tan^۲(۴۵^\circ)+۵\cos(۶۰^\circ)}$$

راه‌حل:

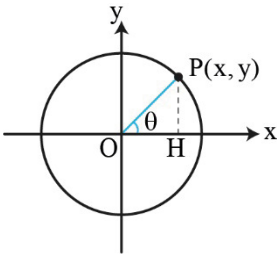
$$A=\frac{\cos^{۲}(۴۵^\circ)-۳\sin(۳۰^\circ)}{۵\tan^{۲}(۴۵^\circ)+۵\cos(۶۰^\circ)}=\frac{\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^{۲}-۳\left(\frac{۱}{۲}\right)}{۵(۱)^{۲}+۵\left(\frac{۱}{۲}\right)}=\frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}}{۵+\frac{۵}{۲}}=\frac{-\frac{۲}{۲}}{\frac{۱۵}{۲}}=\frac{-۲}{۱۵}$$

درس دوم: دایره مثلثاتی

تعریف و کاربرد: دایره‌ای به شعاع ۱ که مرکز آن روی مبدأ مختصات قرار می‌گیرد. ضلع OA برای تمام زوایا ثابت است.

اگر نقطه B از A حرکت کند.	پادساعت‌گرد: زاویه مثبت ساعت‌گرد: زاویه منفی	

نسبت‌های مثلثاتی زاویه θ در دایره مثلثاتی



$$(۱)\ \sin\theta=\frac{PH}{OP}=\frac{y}{۱}=y \qquad (۲)\ \cos\theta=\frac{OH}{OP}=\frac{x}{۱}=x$$

$$(۳)\ \tan\theta=\frac{PH}{OH}=\frac{y}{x} \qquad (۴)\ \cot\theta=\frac{OH}{PH}=\frac{x}{y}$$

با توجه به معادلات ۲ و ۳، با داشتن مختصات نقطه P می‌توان سینوس و کسینوس زاویه آن را محاسبه کرد.

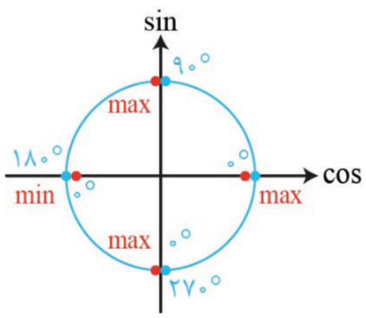
سینوس: عرض مختصات نقطه P(y) و **کسینوس:** طول مختصات نقطه P(x)

بنابراین در دایره مثلثاتی به محور yها محور سینوس و به محور xها، محور کسینوس هم می‌گن.

زوایای ربع دایره مثلثاتی:

✓ با توجه به اینکه sin و cos حداکثر برابر با یک و حداقل برابر با منفی یک هستن، به نمودار مقابل دقت کنید. همان‌طور که می‌بینید max و min ها و صفرها در زوایای ربع دایره پدید می‌آیند.

	Sin	cos	tan	cot
°۰	۰	۱	۰	ت ن
°۹۰	۱	۰	ت ن	۰
°۱۸۰	۰	۱-	۰	ت ن
°۲۷۰	۱-	۰	ت ن	۰



مثال: حاصل عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$۲\sin ۴۵^\circ-۴\cos ۶۰^\circ+\sin ۹۰^\circ+۵\cos ۱۸۰^\circ$$

راه‌حل:

$$۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}-۴\times\frac{۱}{۲}+۳\times ۱+۵\times(-۱)=\sqrt{۲}-۲+۳-۵=\sqrt{۲}-۴$$

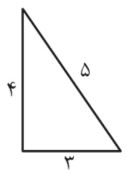
علامت نسبت‌ها در ربع‌های مختلف: رمز رایج برای به خاطر سپردن نسبت‌های مثبت در هر ربع **هستک** است.

هستک: همه سینوس تانژانت کسینوس

	ربع اول (همه) x و $y>۰$	ربع دوم (سینوس) $x<۰$ و $y>۰$	ربع سوم (تانژانت) x و $y<۰$	ربع چهارم (کسینوس) $x>۰$ و $y<۰$
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tan	+	−	+	−
cot	+	−	+	−

چون‌که تانژانت و کتانژانت همواره هم علامت‌اند در رمز برای ناحیه سوم فقط تانژانت ذکر شده.

شیب خط و تانژانت



✓ اگر زاویه‌ی یک خط و جهت مثبت محور xها، α باشد ⟵ شیب خط همان $\tan\alpha$ می‌شود.

✓ اگر α زاویه منفرجه یا باز باشد ⟵ شیب خط $(\tan\alpha)$ منفی می‌شود.

درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

روابط مقدماتی:

(می‌توانید با مثلث فیثاغورسی روابط را برای خود ثابت کنید.)

$$(۱)\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱ \quad \begin{cases} ۱-\cos^۲\theta=\sin^۲\theta \\ ۱-\sin^۲\theta=\cos^۲\theta \end{cases}$$

$$(۲)(\tan\theta)(\cot\theta)=۱ \qquad \left(\frac{\sin}{\cos}\right)\left(\frac{\cos}{\sin}\right)=۱$$

$$(۳)\ (۱+\tan^۲\theta)=۱+\frac{\sin^۲}{\cos^۲}=\frac{\cos^۲+\sin^۲}{\cos^۲}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}$$

$$(۴)\ (۱+\cot^۲\theta)=۱+\frac{\cos^۲}{\sin^۲}=\frac{\sin^۲+\cos^۲}{\sin^۲}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

اتحادهای مثلثاتی:

به تساوی‌ها و روابط مثلثاتی می‌گویند که به ازای هر زاویه همواره برقرار است. برای حل و اثبات اتحادهای مثلثاتی از روابط نسبت‌ها استفاده کرده و سعی کنید دو طرف اتحاد را نزدیک و هم‌شکل کنید.

مثال: **درستی اتحاد روبه‌رو را ثابت کنید.**

$$\cot x(۱+\tan^۲x)=\frac{۱}{\sin x\times\cos x}$$

راه‌حل:

$$\text{طرف اول}=\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{۱}{\cos^۲x}=\frac{۱}{\sin x\cos x}$$

مثال: **تساوی زیر را ثابت کنید.**

$$\frac{\sin^۲\theta}{۱-\cos\theta}=۱+\cos\theta$$

راه‌حل:

$$\frac{\sin^۲\theta}{۱-\cos\theta}=\frac{۱-\cos\theta^۲}{۱-\cos\theta}=\frac{(۱-\cos\theta)(۱+\cos\theta)}{۱-\cos\theta}=۱+\cos\theta$$

فصل سوم

درس اول: ریشه‌های دوم و سوم اعداد

ریشه دوم: هر عدد مثبت، دو تا ریشه دوم دارد که قرینه یکدیگرند. $(\sqrt{a}=b \Leftrightarrow b^۲=a)$

ریشه سوم: همه اعداد مثبت و منفی، یک ریشه سوم دارند. $(\sqrt[۳]{a}=b \Leftrightarrow b^۳=a)$

یادآوری: نماد $(\Rightarrow)$ به‌صورت «معادل است با» خوانده می‌شود.

این نماد یعنی طرف راست طرف چپ و طرف چپ راست را نتیجه می‌دهد.

نکته در ریشه‌های فرد، منفی می‌تواند پشت، رادیکال قرار بگیرد $\sqrt[۳]{-a}=-\sqrt[۳]{a}$

محاسبه تقریبی ریشه‌ها

ریشه دوم: برای محاسبه تقریبی ریشه دوم عدد a $\longleftarrow$ بررسی اینکه a بین کدام دو مربع کامل قرار می‌گیرد.

اعداد مربع کامل با به توان ۲ رسانده به اعداد حسابی تبدیل می‌شوند. $...,۳^۲,۲^۲,۱^۲$

ریشه سوم: برای محاسبه تقریبی ریشه سوم عدد a $\longleftarrow$ بررسی اینکه a بین کدام دو مکعب کامل قرار می‌گیرد.

اعداد مکعب کامل به توان ۳ رساندن به اعداد حسابی تبدیل می‌شوند. $...,۳^۳,۲^۳,۱^۳$

اگر اعداد مد نظر [مربع کامل / مکعب کامل] نباشند، [ریشه دوم / ریشه سوم] آن‌ها عددی گنگ می‌شود؛ و به‌طور دقیق قابل محاسبه نیست. برای محاسبه تقریبی با یک رقم اعشار می‌توان مانند مثال زیر عمل کرد.

مثال: ریشه دوم عدد ۲۰ را بیابید.

$$۱۶<۲۰<۲۵ \rightarrow ۴<\sqrt{۲۰}<۵$$

راه‌حل: عدد ۲۰ فاصله کمتری با عدد ۱۶ نسبت به ۲۵ دارد پس ریشه دوم آن نیز فاصله کمتری از عدد ۴ دارد.

با این حساب، از ۴ شروع کرده و با یک رقم اعشار، مربع اعداد را محاسبه می‌کنیم.

تا نزدیک‌ترین به ۲۰ و کمتر از آن پیدا شود.

$$(۴/۱)^۲=۱۶/۸۱ \quad (۴/۲)^۲=۱۷/۶۴ \quad (۴/۳)^۲=۱۸/۴۹$$

$$\underline{(۴/۴)^۲=۱۹/۳۶} \quad (۴/۵)^۲=۲۰/۲۵$$

ریشه چهارم و پنجم:

ریشه چهارم: هر عدد مثبت، دو تا ریشه چهارم دارد که قرینه یکدیگرند. $(\sqrt[۴]{a}=b \Leftrightarrow a=b^۴)$

اعداد منفی نمی‌توانند ریشه زوج داشته باشند. مثلاً $[-۶۴]$ نه ریشه دوم و نه چهارم دارد.

ریشه پنجم: همه اعداد مثبت و منفی یک ریشه پنجم دارند. $(\sqrt[۵]{a}=b \Leftrightarrow a=b^۵)$

همه اعداد دارای ریشه فرد هستند. (یک عدد برای هر ریشه)

ریشه نمونه اعداد علامت مشابهی با آن‌ها دارند. (ریشه فرد اعداد مثبت، مثبت و ریشه فرد اعداد منفی، منفی است)

مقایسه ریشه‌ها

حالت ۱: مقایسه ریشه‌های یکسان اعداد مختلف

اگر عددی کوچک‌تر از عدد دیگری باشد ریشه‌های آن هم از ریشه‌های یکسان عدد دیگر کوچک‌ترند.

حالت ۲: مقایسه ریشه‌های مختلف یک عدد

$1<a$	$0<a<1$	$-1<a<0$	$a<-1$
$\dots<\sqrt[5]{a}<\sqrt[3]{a}<\sqrt{a}<a$	$\dots>\sqrt[3]{a}>\sqrt{a}>a$	$\dots<\sqrt[5]{a}>\sqrt[3]{a}<a$	$\dots>\sqrt[5]{a}>\sqrt[3]{a}>a$
ریشه بزرگ‌تر ← حاصل کوچک‌تر	ریشه بزرگ‌تر ← حاصل بزرگ‌تر	ریشه بزرگ‌تر ← حاصل کوچک‌تر	ریشه بزرگ‌تر ← حاصل بزرگ‌تر

مثال: **اگر $-1 > a$ باشد در جای خالی علامت (<یا = یا>) بگذارید.** $\sqrt{a}\ \square\ \sqrt[3]{a}$

راه‌حل: $\sqrt{a}\ \boxed{<}\ \sqrt[3]{a}$

درس دوم: ریشه n ام

تعریف: b را ریشه n ام عدد a می‌نامیم هرگاه $b^n = a \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} = b \ .\ n \geq 2$

نکته وقتی n زوج بوده و در معادله‌ای $\sqrt[n]{a}$ نوشته شود ⟵ فرض این است که عبارت تعریف شده می‌باشد و A عددی مثبت است. $(a \geq 0)$

قواعد ریشه‌گیری

اگر n زوج باشد: $(1)\ \sqrt[n]{x^n} = |x|$

✓ هر عددی را می‌توان با توان زوج مثبت خواهد شد و ریشه زوج عدد مثبت همواره مثبت است.

اگر n فرد باشد: $(2)\ \sqrt[n]{x^n} = x$

✓ هر عدد به توان یا ریشه فرد علامت خود را حفظ می‌کند.

۳- در ضرب و تقسیم رادیکال‌ها با فرجه یکسان، می‌توانیم آن‌ها را زیر یک رادیکال ببریم.

$$\sqrt[n]{a} \div \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, (\sqrt[n]{a})(\sqrt[n]{b}) = \sqrt[n]{ab}$$

دقت داشته باشید: $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a+b}, \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a-b}$

نکته اگر n زوج باشد: $1-\sqrt[n]{x^n} = |x|$ اما $2-(\sqrt[n]{x^n}) = x$ ⟵ $1)\ \sqrt[n]{x^n} = |x|$ $\quad 2)\ (\sqrt[n]{x}\ )^n = x$

زیرا در معادله اول x می‌تواند مثبت یا منفی باشد (توان n زوج هر عددی را مثبت می‌کند که شرط زیر رادیکال با فرجه زوج بودن است) اما در معادله دوم x به تنهایی و قبل از به توان رسیدن زیر رادیکال رفته که یعنی حتماً مثبت $(x \geq 0)$ است. پس دیگه قدر مطلق احتیاج دارد.

درس سوم: توان‌های گویا

تعریف: با دو عدد طبیعی n و m با توان کسری a (که حتماً مثبت است) این‌گونه تعریف می‌شود.

(توان کسری برای پایه منفی تعریف نمی‌شود)

$$\begin{cases} a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\ a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{cases} \qquad (n \geq 2)$$

قواعد: تماماً مانند قواعد توان‌های صحیح

یادآوری:

$(1)\ a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\qquad (2)\ a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(3)\ (a^m)^n = a^{mn}$ $\qquad (4)\ (ab)^m = a^m \times b^m$

نکته اگر پایه (a) بزرگ‌تر از صفر باشد می‌توان فرجه و توان را در یک عدد ثابت ضرب کرد.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{km}{kn}} = \sqrt[kn]{a^{km}}$$

درس چهارم: عبارت‌های جبری

اتحادها

✓ مربع مجموع دو جمله: $(۱)\ (a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$

✓ مربع تفاضل دو جمله: $(۲)\ (a-b)^۲ = a^۲ - ۲ab + b^۲$

✓ مزدوج: $(۳)\ (a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$

✓ جمله مشترک: $(۴)\ (x+a)(x+b) = x^۲ + (a+b)x + ab$

✓ مکعب مجموع دو جمله: $(۵)\ (a+b)^۳ = a^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲ + b^۳ \ /\ a^۳ + ۳ab(a+b) + b^۳$

✓ مکعب تفاضل دو جمله: $(۶)\ (a-b)^۳ = a^۳ - ۳a^۲b + ۳ab^۲ - b^۳ \ /\ a^۳ - ۳ab(a-b) - b^۳$

✓ چاق و لاغر:

$$\begin{cases} (۷)\ (a+b)(a^۲ - ab + b^۲) = a^۳ + b^۳ \\ (۸)\ (a-b)(a^۲ + ab + b^۲) = a^۳ - b^۳ \end{cases}$$

مثال: حاصل عبارت مقابل را با استفاده از اتحاد به دست آورید. $\mathbf{(x-۱)(x+۱)(x^۴+x^۲+۱)}$

راه‌حل: $(x^۲-۱)(x^۴+x^۲+۱) = x^۶ - ۱$

تجزیه: تبدیل عبارت‌های جبری به ضرب عبارت‌ها با درجه کوچک‌تر!

راه‌های تجزیه به ترتیب اولویت:

۱ استفاده مستقیم از اتحادها $x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۱ = (x+۱)^۳$

۲ دسته‌بندی عبارت‌ها به گونه‌ای که بعد از فاکتورگیری دارای عامل مشترک باشند.

$$x^۳ + x^۲ + x + ۱ = (x^۳ + x^۲) + (x+۱) = x^۲(x+۱) + (x+۱) = (x^۲+۱)(x+۱)$$

۳ شکستن یک جمله و سپس دسته‌بندی عبارت‌ها

$$x^۳ - ۳x + ۲ = x^۳ - x - ۲x + ۲ = x(x^۲-۱) - ۲(x-۱) = x(x+۱)(x-۱) - ۲(x-۱) = (x-۱)(x^۲+x-۲)$$

نکته برای تجزیه عبارت‌های به شکل $ax^۲+bx+c$ با روش شکستن جملات، دو عدد را پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر b و ضربشان برابر ac شود. پس b را به‌صورت جمع این دو عدد نوشته و دسته‌بندی می‌کنیم.

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید. $\mathbf{x^۳ - ۲۷}$

راه‌حل:

$$x^۳ - ۲۷ = (x-۳)(x^۲+۳x+۹)$$

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\mathbf{x^۲ + ۲x - ۴ = ۰}$ ب) $\mathbf{-x^۲ + ۳x - ۱ = ۰}$

راه‌حل:

$$b^۲ - ۴ac = ۴ + ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۲ \pm \sqrt{۲۰}}{۲} = (-۱ \pm \sqrt{۵})$$

$$x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \Rightarrow \Delta = ۹ - ۴ = ۵ \Rightarrow \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{۳ \pm \sqrt{۵}}{۲}$$

مثال: $۲x^۲ + ۷x + ۳ \xrightarrow[b=۷]{ac=۶} ۲x^۲ + ۶x + x + ۳ =$

$$۲x(x+۳) + (x+۳) = (x+۳)(۲x+۱)$$

عبارت‌های گویا

تعریف: عبارت‌هایی که صورت و مخرج آن‌ها چندجمله‌ای بوده و متغیر توان کسری یا درون رادیکال نداشته باشد.

اگر مخرج یک عبارت گویا به ازای مقدار (های) مشخصی برابر صفر شود، عبارت گویا به ازای آن مقدار (ها) تعریف نشده است.

گویاکردن مخرج کسرها

۱ اگر مخرج به‌صورت $\sqrt[n]{x^m}$ باشد، صورت و مخرج را در $\sqrt[n]{x^{n-m}}$ ضرب می‌کنیم.

نکته برای از بین بردن رادیکال، مجموع توان‌های x باید برابر با فرجه رادیکال باشد.

۲ اگر مخرج به‌صورت $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ یا $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ باشد، صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب می‌کنیم.

به‌طور کل اگر بخش مجزایی از مخرج ما را به یاد یک اتحاد انداخت، صورت و مخرج را در ادامه اتحاد ضرب می‌کنیم تا مخرج گویا شود.

مثال: مخرج کسر زیر را گویا کنید. $\dfrac{۱}{\sqrt{x}-۱}$

راه‌حل:

$$\frac{۱}{\sqrt{x}-۱} \times \frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱} = \frac{\sqrt{x}+۱}{x-۱}$$

ساده‌کردن عبارت‌های گویا

✓ برای یک عبارت یا ضرب و تقسیم عبارت‌ها، صورت و مخرج را قرینه و عبارت‌های یکسان را حذف می‌کنیم.

✓ برای جمع و تفریق عبارت‌ها، ابتدا مخرج‌ها را تجزیه کرده و سپس از تمام آنها ک م م میگیریم و آن را به عنوان مخرج مشترک قرار می‌دهیم.

فصل چهارم

درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن

درجه عبارت جبری: درجه عبارت، بزرگ‌ترین توانی از x می‌باشد که در عبارت وجود دارد.

معادله و جواب معادله: هرگاه برای یک عبارت جبری معادل عددی قرار دهیم تبدیل به معادله می‌شود.

جواب معادله مقداری از x است که به ازای آن معادله صادق و برقرار باشد.

معادله درجه دوم: در حالت کلی $ax^۲ + bx + c = ۰$ با ضرایب a و b و c. $(a \neq ۰)$

تعداد جواب‌ها یا ریشه‌های این معادله می‌تواند حداکثر ۲ یا ۱ یا صفر عدد باشد.

یادآوری: تجزیه عبارت درجه دوم با اتحاد جمله مشترک:

باید دو عدد پیدا کرد که جمع آن‌ها b و ضرب آن‌ها c شود.

نکته برای تجزیه به کمک این اتحاد ضریب a باید حتماً ۱ باشد. در مواردی می‌توانید کل معادله را به ضریب a تقسیم کنید تا ضریب a تبدیل به ۱ شود.

روش‌های حل معادله

۱ **تجزیه:** مثال: $x^۲ - ۴۹ = ۰ \to (x-۷)(x+۷) = ۰ \Rightarrow x = \pm ۷$

مثال: عبارت مقابل را تجزیه کنید. $x^۳ - ۲۷$

راه‌حل:

$$x^۳ - ۲۷ = (x-۳)(x^۲ + ۳x + ۹)$$

۲ جابه‌جایی اعداد: به طوری که اگر $x^۲-a=۰$ یعنی $x^۲=a$ پس $x=\pm\sqrt{a}$

مثال: $x^۲-۴۹=۰\to x^۲=۴۹\to x=\pm۷$

توجه دارید که اگر عدد a منفی باشد معادله جواب نخواهد داشت چون $x^۲$ همواره مثبت است.

۳ مربع کامل: در این روش هدف این است که با کم یا اضافه کردن اعداد به یک اتحاد مربع کامل برسیم.

برای این منظور ضریب x را نصف کرده و به توان ۲ می‌رسانیم. $(b^۲)$ پس به دو طرف معادله عددی اضافه می‌کنیم که در سمت عبارت جبری عدد تنها (c) به $b^۲$ تبدیل شود. پس ادامه اتحاد را حل می‌کنیم.

مثال:

$$x^۲-۸x+۱۲=۰\xrightarrow[b^۲=۱۶]{\frac{-۸}{۲}=-۴\to(-۴)^۲=۱۶}\underbrace{x^۲-۸x+۱۶}_{(x-۴)^۲}=۴$$

$$(x-۴)^۲=۴\to x-۴=\pm۲$$

$$x-۴=۲\Rightarrow x=۶$$

$$x-۴=-۲\Rightarrow x=۲$$

دقت کنید که ضریب x حتماً باید ۱ باشد.

۴ روش Δ (دلتا) یا روش کلی: دلتا در یک معادله درجه دوم $(ax^۲+bx+c=۰)$ برابر است با: $\Delta=b^۲-۴ac$

با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است برای ریشه‌ها پیش بیاید.

A: $\Delta>۰$ در این صورت معادله دو ریشه داشته که با معادله $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}$ به دست می‌آیند.

B: $\Delta=۰$ در این صورت معادله یک ریشه برابر با $x=\dfrac{-b}{۲a}$ دارد.

C: $\Delta<۰$ در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد.

نکته اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم $a+b+c=۰\leftarrow$ یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\dfrac{c}{a}$ است.

نکته اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم $a+c=b\leftarrow$ یکی از ریشه‌ها ۱- و دیگری $\dfrac{-c}{a}$ است.

مثال: معادله $\dfrac{x^۲}{۳}-\dfrac{x}{۲}-\dfrac{۳}{۲}=۰$ را به روش دلخواه حل کنید.

راه‌حل:

$$\frac{۱}{۳}x^۲-\frac{۱}{۲}x-\frac{۳}{۲}=۰$$

$$\Delta=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۲-۴\left(\frac{۱}{۳}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱۲}{۶}=\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۱}=\frac{۹}{۴}$$

$$x_۱=\frac{\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۴}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳\times۴}{۲\times۲}=\boxed{۳}$$

$$x_۲=\frac{\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{-\frac{۲}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{-\cancel{۲}\times۳}{۲\times\cancel{۲}}=\boxed{-\frac{۳}{۲}}$$

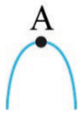
درس دوم: سهمی

نمودار کلی و معادله سهمی نمودار معادله $y=ax^۲+bx+c$ به‌صورت یک سهمی است. $(a\neq۰)$


A

نقطه A که محل عوض شدن جهت سهمی است رأس سهمی نام دارد.

اگر $a>۰\to A$ پایین‌ترین نقطه سهمی و دهانه نمودار به سمت بالا است.



اگر $a<۰ \leftarrow A$ بالاترین نقطه سهمی و دهانه نمودار به سمت پایین است.

رسم سهمی با روش مربع کامل:

مثال: $y = x^۲ - ۴x + ۷ \xrightarrow[b^۲=۴]{-\frac{۴}{۲}=-۲\to(-۲)^۲=۴} y = \underbrace{x^۲ - ۴x + ۴}_{(x-۲)^۲} + ۳$

$\Rightarrow y = (x-۲)^۲ + ۳$

اگر درون پرانتز را برابر صفر قرار دهیم، $x = ۲$ می‌شود و $y = ۳$ که این همان رأس سهمی است.

✓ **حالت کلی:** $(a \neq ۰) y = a(x-h)^۲ + k$

۱ مختصات رأس سهمی (h,k) و محور تقارن سهمی، خط عمودی $x = h$ است.

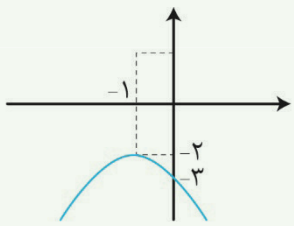
۲ اگر a برابر یک نبود، از آن فاکتور بگیرید، سپس درون پرانتز را مربع کامل کنید. a را در عدد اضافه ضرب کنید تا k به دست آید، اما در عبارت مربع کامل ضرب نکنید تا معادله $a(x-h)^۲ + k$ حفظ شود.

مثال: نمودار سهمی $y = -(x+۱)^۲ - ۲$ را رسم کرده و مختصات رسمی سهمی را به دست آورید.

راه‌حل:

$x + ۱ = ۰ \to x = -۱, y = -۲ \qquad S = (-۱,-۲)$

$x = ۰ \to -(۰+۱)^۲ - ۲ = -۱ - ۲ = -۳$



رأس سهمی از روی معادله استاندارد:

در معادله $y = ax^۲ + bx + c$ و بدون مربع کامل کردن، مختصات رأس سهمی $\left(\frac{-b}{۲a}, \frac{-\Delta}{۴a}\right)$ خواهد بود (از آنجا که خط تقارن سهمی از رأس آن می‌گذرد معادله آن $x = \frac{-b}{۲a}$ خواهد بود.)

دقت کنید که اکثر مواقع می‌توان عرض رأس سهمی را با قرار دادن طول آن در معادله به دست آورد و محاسبه Δ اجباری نیست.

معادله سهمی با استفاده از نقاط آن:

اگر نقاط مناسبی از سهمی را داشته باشیم می‌توانیم با استفاده از معادلات $y = a(x-h)^۲ + k$ یا $y = ax^۲ + bx + c$ معادله سهمی را به دست آوریم.

دقت کنید که اگر رأس سهمی داده شده بود، هم می‌توانید به عنوان یک نقطه در معادله آن را جایگذاری کنید و هم می‌توانید با توجه به $x = \frac{-b}{۲a}$، b و a یا با توجه به $A(h,k)$، h و k را پیدا کنید.

تعیین علامت ضرایب و تعداد ریشه‌ها از روی نمودار سهمی:

۱ **a:** اگر دهانه سهمی به بالا $a > ۰$ و اگر دهانه سهمی به پایین $a < ۰$

۲ **b:** با استفاده از معادله $x = \frac{-b}{۲a}$ و با توجه به علامت طول رأس و علامت a

۳ **c:** همان محل برخورد سهمی با محور y ها

۴ **ریشه‌ها:** محل برخورد (های) سهمی با محور xها

درس سوم: تعیین علامت

عبارت‌های درجه اول:

۱ ریشه عبارت را به دست می‌آوریم.

$$ax+b=۰ \rightarrow x=\frac{-b}{a}$$

۲ در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

x	$-\infty$	$x<\frac{-b}{a}$	$\frac{-b}{a}$	$x>\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$		مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

ضرب و تقسیم چند عبارت درجه اول:

۱ ریشه هر عبارت را به دست می‌آوریم.

۲ ریشه‌های را در جدول تعیین علامت از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم.

۳ همه عبارت‌ها را در ستون سمت چپ قرار داده و در سطر خودش یا ریشه خودش تعیین علامت می‌کنیم.

٤ علامت‌های هر ستون را در هم ضرب کرده و در آخرین سطر قرار می‌دهیم.

نکته کل عبارت به ازای ریشه (های) صورت برابر صفر و به ازای ریشه (های) مخرج تعریف نشده است.

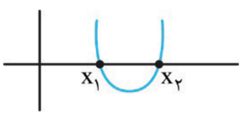
مثال: $P(x)=\frac{(-۲x-۴)}{۳x-۹}$ $\rightarrow$ ریشه: $x=-۲$ ، $\rightarrow$ ریشه: $x=۳$

نکته اگر عبارتی به توان زوج برسد یا کل آن قدر مطلق داشته باشد هیچ‌گاه منفی نمی‌شود؛ بنابراین در کل سطر چنان عبارت‌هایی علامت + قرار می‌دهیم.

x		-۲		۳	
$-۲x-۴$	+	۰	−		−
$۳x-۹$	−		−	۰	+
$P(x)$	−	۰	+	ت ن	−

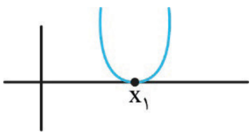
✓ عبارت‌های درجه دوم تعداد ریشه‌ها بستگی به علامت Δ دارد؛ بنابراین ۳ حالت داریم.

۱ $\Delta>۰$ پس معادله دو ریشه دارد. ریشه‌ها را ابتدا به دست میاوریم.



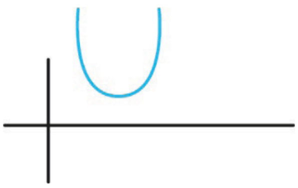
x		$x_۱$		$x_۲$	
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	۰	مخالف علامت a	۰	موافق علامت a

۲ $\Delta=۰$ پس معادله یک ریشه دارد. ریشه را به دست می‌آوریم.



x		$x_۱$	
$ax^۲+bx+c$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

۳ $\Delta<۰$ پس معادله ریشه ندارد.



x	
$ax^۲+bx+c$	همواره موافق علامت a

مثال: عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید. $A=\frac{x^۲+x-۲}{۳-x}$

x							
$x^۲+x-۲$							
$۳-x$							
$\frac{x^۲+x-۲}{۳-x}$							

مثال: عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید. $A=\dfrac{x^{۲}+x-۲}{۳-x}$

راه‌حل:

x		-۲		۱		۳	
$x^{۲}+x-۲$	$+$	۰	$-$	۰	$+$		$+$
$۳-x$	$+$		$+$		$+$	۰	$-$
$\dfrac{x^{۲}+x-۲}{۳-x}$	$+$	۰	$-$	۰	$+$	ت.ن	$-$

نامعادله درجه اول

نامعادله	می‌خوانیم		نامعادله	می‌خوانیم
$A<B$	A کوچک‌تر از B است.		$A>۰$	A مثبت است.
$A\le B$	A کوچک‌تر یا مساوی B است.		$A\ge۰$	A بزرگ‌تر یا مساوی صفر است
$A>B$	A بزرگ‌تر از B است.		$A<۰$	A منفی است
$A\ge B$	A بزرگ‌تر یا مساوی B است.		$A\le۰$	A کوچک‌تر یا مساوی صفر است

مراحل حل نامعادله درجه اول:

۱ با ضرب یا تقسیم‌های مناسب مخرج‌ها را از بین می‌بریم.

۲ اعداد را به یک طرف و متغیرها را به یک طرف می‌بریم. دقت کنید که شبیه تساوی‌ها، جابه‌جایی عبارت از طرفی به طرف دیگر علامت آن را عوض می‌کند.

۳ دو طرف را به ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم.

دقت دارید که در ضرب یا تقسیم معادله بر عدد منفی جهت نامعادله را عوض می‌کند.

نامعادله‌های دوگانه:

✓ نامعادله‌های شبیه $a<x<b$ را دوگانه می‌نامند. اگر a و b عدد باشند می‌توانید با انجام اعمال ریاضی جواب را در همین نامعادله به دست بیاورید.

✓ اگر در یک نامعادله دوگانه a و b نیز عبارت‌های جبری باشند باید آن را به دو معادله $x<b$ و $x>a$ تبدیل کرده، جواب‌های هر معادله را محاسبه کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک گرفت.

مثال: هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به‌صورت بازه نشان دهید.

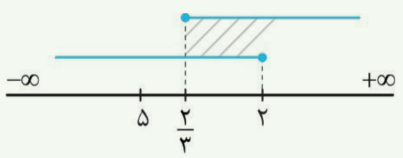
$$x+۱\le ۵-x\le ۲x+۳ \qquad , \qquad ۵-x\le ۲x+۳$$

راه‌حل:

$x+x\le ۵-۱$, $-x-۲x\le ۳-۵$

$۲x\le ۴$, $-۳x\le -۲$

$(-\infty,۲]$, $x\ge\dfrac{۲}{۳}\Rightarrow\left[\dfrac{۲}{۳},+\infty\right)$



$\Rightarrow[\dfrac{۲}{۳},۲]$

تعیین علامت در حل نامعادله

✓ ابتدا تمام عبارت‌ها را به یک سمت منتقل کرده و در صورت لزوم مخرج مشترک می‌گیریم تا یک صورت و یک مخرج در یک طرف نامعادله و یک صفر در طرف دیگه داشته باشیم. سپس به کمک جدول تعیین علامت بازه‌هایی که دارای شرط مدنظر صورت سؤال هستند را می‌یابیم.

مثال: نامعادله مقابل را حل و مجموعه جواب را به‌صورت بازه نمایش دهید. $\dfrac{x^۲-۴x+۳}{(x-۲)^۲(-x+۴)}>۰$

راه‌حل:

$x^۲-۴x+۳=۰ \rightarrow (x-۱)(x-۳)=۰$

$x-۲=۰ \rightarrow \underline{x=۲}|$ $\quad\quad$ $-x+۴=۰ \rightarrow \underline{x=۴}|$

x	$-\infty$	۱		۲		۳		۴	$+\infty$
$x^۲-۴x+۳$	+	۰	−		−	۰	+		+
$-x+۴$	+		+		+		+	۰	−
	+	۰	−	ت.ن	−	۰	+	ت.ن	−

مجموعه جواب $(-\infty,۱)\cup(۳,۴)$

عبارت‌های درجه دوم که همواره مثبت یا منفی هستند: در یک سهمی اگر $\Delta>۰ \leftarrow$ نمودار به ۳ قسمت تقسیم می‌شود و علامت قسمت میانی متفاوت است.

اگر $\Delta=۰$ یا $\Delta<۰$ نمودار همواره بالا یا پایین (با توجه به علامت a) محور مختصات خواهد بود پس عبارت درجه دومی است که همواره مثبت یا همواره منفی می‌شود.

نامعادله‌های قدرمطلق

یادآوری: قدر مطلق فاصله نقطه مدنظر روی محور را از مبدأ نشان می‌دهد و همواره مثبت می‌شود.

حالت اول: $|x|\le a \rightarrow -a\le x\le a$

حالت دوم: $|x|\ge a \rightarrow x\ge a \,/\, x\le -a$

✓ به جای x می‌تواند یک عبارت جبری نیز قرار بگیرد. (A)

مثال: هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به‌صورت بازه نشان دهید. $|۷-۲x|<۱$

راه‌حل:

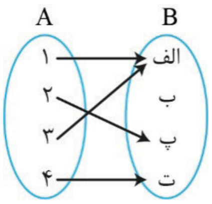
$-۱<۷-۲x<۱ \xrightarrow{-۷} -۸<-۲x<-۶ \xrightarrow{\div(-۲)} ۴>x>۳$ $\quad\quad (۳,۴)$

فصل پنجم

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن

مفهوم تابع

تعریف: یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین A و B است که به هر عضو از مجموعه A، دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت می‌دهد.



توضیح: دو مجموعه A و B داریم. از هر عضو مجموعه A باید دقیقاً یک پیکان به سمت مجموعه B برود؛ اما در مجموعه B به هر عضو می‌تواند بیش از یک پیکان وارد شود یا پیکانی وارد نشود.

زوج مرتب تابع و نمودار مختصاتی

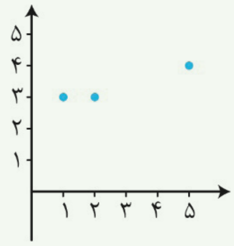
تعریف زوج مرتب: زوجی از اعداد که ترتیب آن‌ها مهم است و یک نقطه از تابع روی نمودار مختصات را نشان می‌دهد. مثلاً زوج مرتب $(۱,۳)$ با $(۳,۱)$ تفاوت دارد. برخلاف مجموعه‌ها که $\{۱,۳\}$ با $\{۳,۱\}$ تفاوتی ندارد.

مثال: $f=\{(1,3),(5,4),(2,3)\}$

تابع بودن مجموعه زوج‌های مرتب:

اگر مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داشته باشیم زمانی تابع است که مؤلفه‌های اول (اعداد سمت چپ) همگی متفاوت باشند.

اگر در مجموعه‌ای مؤلفه‌های اول دو زوج مرتب برابر باشند، مؤلفه‌های دوم نیز قطعاً برابر هستند وگرنه این مجموعه تابع نیست.



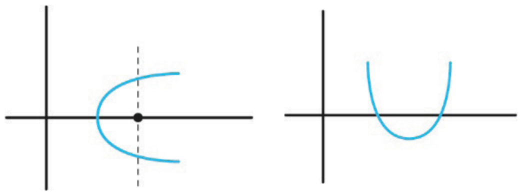
مثال: **مقدار a را طوری به دست آورید که رابطه‌ی $R=\{(2,7),(9,2a),(9,1-a)\}$ یک تابع باشد.**

راه‌حل: $2a=1-a \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$

تابع بودن مقدار

در یک نمودار محور xها شبیه مجموعه A و محور yها شبیه مجموعه B است. بدین معنی که به هر x (طول) حداکثر یک y نسبت داده می‌شود اما به هر y(عرض) می‌توان بی‌نهایت x نسبت داد.

مثال:



تابع نیست   تابع است

درس دوم: دامنه و برد تابع

تعریف دامنه: مجموعه همه مؤلفه‌های اول و زوج مرتب‌های یک تابع (D_f)

تعریف برد: مجموعه همه مؤلفه‌های دوم و زوج مرتب‌های یک تابع (R_f)

اگر همان مجموعه‌های A و B درس قبل را در نظر بگیریم، دامنه همان مجموعه A و برد همان مجموعه B است. (البته اعضایی از B که پیکان به آن‌ها وارد شده است)

✓ اگر دو نمودار تابع را داشته باشیم مجموعه شامل xها همان دامنه و مجموعه شامل yها همان برد است.

نمایش تابع به‌صورت جبری

می‌توان به تابع f مانند یک دستگاه نگاه کرد که ورودی (x) را دریافت می‌کند، اعمال جبری روی آن انجام می‌دهد و سپس خروجی (y یا $(f(x)$) را تحویل می‌دهد.

مثال: رابطه بین یک مربع و محیط آن

x = ضلع مربع
y = f(x) محیط مربع
$\Big\}\; y=f(x)=4x$

توابع خطی: معادله کلی:

شیب خط
↑
$f(x)=ax+b \rightarrow$ عرض از مبدأ

اگر تابع خطی از نقطه (c,d) عبور کند می‌توان c را به جای x و d را به جای $f(x)$ صدق داد.

مثال: **نمایش جبری تابع خطی $f(1)=2$ و $f(-5)=-4$ را بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.**

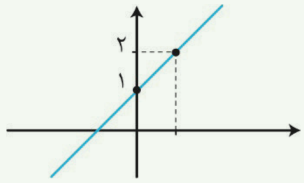
راه‌حل: $f(x)=ax+b$

$$f(۱)=۲ \rightarrow a\times ۱+b=۲ \rightarrow a+b=۲ \Rightarrow \begin{cases} a+\cancel{b}=۲ \\ ۵a-\cancel{b}=+۴ \end{cases}$$

$$f(-۵)=-۴ \rightarrow -۵a+b=-۴$$

$$۶a=۶ \rightarrow \boxed{a=۱}$$

$$\cancel{a}^{۱}+b=۲ \rightarrow \boxed{b=۱}$$



x	۰	۱
y	۱	۲

دامنه و برد تابع از روی نمودار

✓ دامنه تابع بازهٔ طول نقاط تشکیل‌دهنده آن یعنی بازه‌ی محور x هاست.

برد تابع بازهٔ عرض: نقاط تشکیل‌دهنده آن یعنی بازه‌ی محور y هاست.

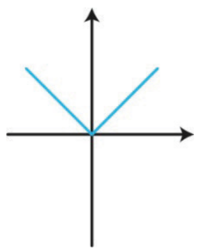
✓ اگر در صورت سؤال دامنه و برد معلوم نشده ولی ضابطه تابع وجود دارد، دامنه و برد را با توجه به شرایط سؤال بزرگ‌ترین بازه ممکن قرار می‌دهیم.

درس سوم: انواع توابع

توابع چندجمله‌ای: اگر چندین یک جمله‌ای را با هم جمع و تفریق کنیم یک چندجمله‌ای به دست می‌آید. تابع‌هایی که ضابطه آن‌ها یک یا چندجمله‌ای با متغیر یکسان است را توابع چند جمله‌ای می‌گویند.

مثال: یک تابع چندجمله‌ای درجه ۴ $\leftarrow f(x)=\sqrt{۲}x^{۴}+\frac{x^{۲}}{۲}+x+۷$

توابع چندجمله‌ای خاص:



$f(x)=x$

$f(x)=k$

$f(x)=|x|$

۱ **تابع همانی:** ورودی هر چه باشد خروجی همان خواهد بود.

۲ **تابع ثابت:** مقدار تابع به ازای همه ورودی‌ها یک عدد ثابت خواهد بود.

۳ **تابع قدرمطلق:** به هر عدد حقیقی X قدرمطلق آن را نسبت می‌دهد.

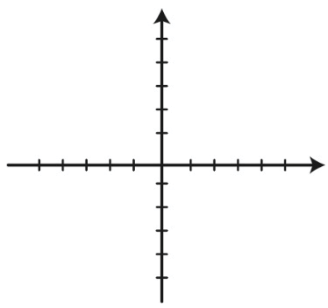
با توجه به نمودار روبه‌رو دامنه این تابع R اما برد آن بازه $[۰,+\infty)$ است.

۴ **تابع چند ضابطه‌ای:** در بخش‌های مختلف دامنه خود، ضوابط متفاوتی دارد.

مثال: $f(x)\begin{cases} x & x\leq ۱ \\ ۲x & ۱<x\leq ۱۰ \\ x^{۲} & ۱۰<x \end{cases}$

برای به دست آوردن مقدار این توابع باید اول بررسی کرد که ورودی خاص (x) در کدام دامنه قرار گرفته و بنابراین کدام ضابطه برای آن تعریف می‌شود. سپس همان ضابطه را استفاده می‌کنیم.

برای رسم چنین نموداری هم به همین صورت ضوابط را در دامنه تعریف خودشان رسم می‌کنیم.



مثال: تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq ۰ \\ ۲ & ۰<x<۲ \\ x+۲ & x\geq ۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

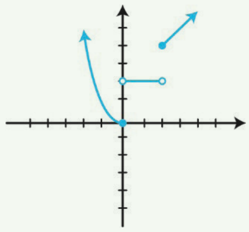
ب) دامنه تابع را با استفاده از نمودار به دست آورید.

پاسخ:

الف)

x	۲	۳
y	۴	۵

ب) $D=\mathbb{R}$



رسم توابع به‌کمک انتقال

۱ انتقال عمودی: $f(x)\pm k$

با اضافه کردن عدد k به کل ضابطه نمودار $f(x)$، نمودار در جهت محور y ها به سمت بالا (اگر $k>۰$) و یا پایین (اگر $k<۰$) منتقل می‌شود.

نکته در انتقال عمودی دامنه تابع بدون تغییر مانده اما برد فرق می‌کند.

۲ انتقال افقی: $y=f(x\pm k)$

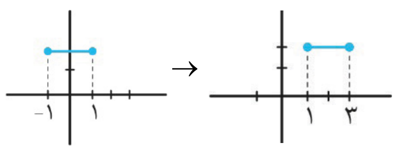
برای فهم انتقال افقی ابتدا باید توجه داشت که تابع f ضابطه خود را به هر گونه ورودی به‌طور تمام و کمال اعمال می‌کند. مثلاً اگر $f(x)=x^۲$ پس $f(x+۱)=(x+۱)^۲$. به زبان ساده‌تر اگر ورودی دیگری به جز x داشتیم آن را کامل و بدون جدا کردن اجزایش به جای x جایگذاری می‌کنیم.

با اضافه کردن عدد k به ورودی نمودار f، نمودار در جهت محور xها به سمت راست (اگر $k<۰$) و یا به سمت چپ (اگر $k>۰$) منتقل می‌شود.

مثال: نمودار $f(x)$ دامنه‌ای با بازه $[-۱,۱]$ دارد؛ یعنی تنها ورودی‌هایی که در این بازه باشند را قبول می‌کند. حالا اگر بخواهیم ورودی $(x-۲)$ را به آن بدهیم، باید x را به گونه‌ای به دست بیاوریم که $x-۲$ بین ۱ و ۱- باشد.

$-۱\le x-۲\le ۱ \to ۱\le x\le ۳$

پس دامنه تابع $f(x-۲)$ بازه $[۱,۳]$ می‌شود.



نکته در انتقال افقی برد تابع بدون تغییر مانده اما دامنه فرق می‌کند.

۳ قرینگی $y=-f(x)$

برای رسم قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها کافی است کل ضابطه را در یک منفی ضرب کنیم. (دامنه ثابت مانده اما برد فرق می‌کند)

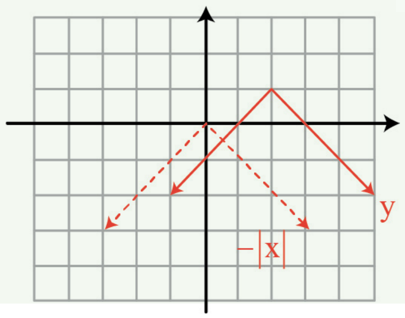
مثال: نمودار تابع $y=-|x-۲|+۱$ به کمک انتقال رسم کنید و دامنه برد آن را تعیین کنید.

راه‌حل: ابتدا تابع اصلی $y=-|x|$ را به کمک نقطه یابی رسم می‌کنیم. سپس چون x به $x-۲$ تبدیل شده ۲ واحد به راست و y به $y+۱$ تبدیل شده ۱ واحد به بالا، نمودار را منتقل می‌کنیم.

x	۲-	۱-	۰	۱	۲
$-\lvert x\rvert$	۲-	۱-	۰	۱-	۲-

$D=\mathbb{R}$

$R=(-\infty,۱]$



فصل ششم

درس اول: شمارش

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به‌طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب داریم، برای انجام این

کار $m+n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد به‌طوری که در روش اول $m_۱$ انتخاب، در روش دوم $m_۲$ انتخاب، ...؛ و در روش k ام m_k انتخاب داریم، برای انجام این کار $m_۱+m_۲+...+m_k$ روش وجود دارد.

✓ دقت دارید که کار مدنظر در نهایت فقط با یکی از این انتخاب‌ها انجام می‌شود.

اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به گونه‌ای که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، بتوان مرحله دوم را به n روش انجام داد، برای انجام کل کار $m\times n$ روش وجود دارد.

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری را شامل k روش انجام باشد و برای انجام مرحله اول $m_۱$ روش، برای مرحله دوم $m_۲$ روش،...؛ و برای مرحله k ام m_k روش وجود داشته باشد، برای انجام کل کار $m_۱\times m_۲\times ...\times m_k$ روش وجود دارد.

همزمانی اصول ضرب و جمع

در مسائلی که از اصول ضرب و جمع به صورت جداگانه استفاده می‌کنیم، اجزاء مختلف از هم مستقل هستند.

اما در برخی مسائل دیگر، حالت‌های ممکن برای یک جزء مربوط و مشروط به حالت‌هایی هستند که ممکن است در جزئی دیگر اتفاق بیفتد. برای حل چنینی سؤالاتی ابتدا باید جزء‌های مربوط را تشخیص داد، حالت‌های جزئی که دیگری به آن بستگی دارد را جدا کرد و سپس به‌طور جداگانه برای هر حالت اصل ضرب را به کار برده و در نهایت اصل جمع را روی تمام جواب‌های به دست آمده اعمال می‌کنیم.

مثال: با ارقام ۰ و ۳ و ۲ و ۵ و ۴ چند عدد ۴ رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟

راه‌حل:

صفر یکان باشد: $\boxed{۴}\,\boxed{۳}\,\boxed{۲}\,\boxed{۱} \Rightarrow ۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$

صفر یکان نباشد: $\boxed{۳}\,\boxed{۳}\,\boxed{۲}\,\boxed{۲} \Rightarrow ۹\times۴=۳۶$

$\rightarrow ۲۴+۳۶=۶۰$

متمم: گاهی آسان‌تر است که به جای محاسبه تمام حالت‌های ممکن (مطلوب)، حالت‌های نامطلوب را بشماریم و از تعداد کل حالت‌های انجام کاری کم کنیم.

درس دوم: جایگشت

فاکتوریل! به معنی ضرب n عدد پشت سر هم تا عدد یک است.
$n!=n(n-۱)!\times(n-۲)!\times...\times۱$

نکته اعداد فاکتوریلی را نمی‌توان جمع، تفریق، ضرب و یا تقسیم کرد در واقع باید آن‌ها را گسترش داد و به عدد واقعی تبدیل کرد.

مثال: $\underbrace{\overbrace{۱\times۲}^{(۲!)}\times\overbrace{۳\times۲\times۱}^{(۳!)}}_{=۱۲}\neq ۶!$

نکته هر فاکتوریل را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد و آن گونه نوشت: اعداد بزرگ‌تر × فاکتوریل
$n!=n(n-۱)!=n(n-۱)(n-۲)!=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!=.....$

نکته برای ساده کردن یک کسر فاکتوریلی، فاکتوریل بزرگ‌تر را به روش نکته قبل تا جایی تجزیه می‌کنیم که فاکتوریل کوچک‌تر ظاهر شود و سپس ساده می‌کنیم.

مثال: $\dfrac{۸!}{۵!}=\dfrac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!}=۸\times۷\times۶$

نکته به‌صورت قراردادی !۰ برابر با یک فرض می‌شود.

جایگشت:

فرض کنید می‌خواهیم ۳ مهره A، B و C را در کنار هم بچینیم. به چند حالت می‌توان این کار را کرد؟

اگر بنویسیم ABC، ACB، BAC، BCA، CAB و CBA متوجه می‌شویم که در کل ۶ حالت ممکن است. به این کار جایگشت می‌گوییم.

تعریف: به هر حالت کنار هم چیدن اشیایی متمایز که ترتیب قرار گرفتن آن‌ها اهمیت داشته باشد، یک جایگشت از آن اشیاء گفته می‌شود.

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز $= n!$

جایگشت‌های طنابی: در یک حالت خاص جایگشت، چند شی متمایز باید همیشه کنار هم باشند. برای حل این مسائل تصور می‌کنیم این چند شیء را با طناب به هم می‌بندیم و همه آن‌ها را به عنوان یک شیء با اشیاء دیگر جایگشت می‌دهیم. دقت کنید که گاهی باید جایگشت اشیاء طناب‌پیچ شده را با هم نیز حساب کرد. (حاصل‌ضرب)

جایگشت‌های یک در میان

مثال: ۳ کتاب تاریخ متمایز و ۴ کتاب فلسفه متمایز داریم. به چند حالت می‌توانیم آن‌ها را یک در میان بچینیم؟

با کتاب‌های فلسفه شروع می‌کنیم و آن‌ها را با فاصله می‌چینیم. تعداد جایگشت‌ها $۴!$ می‌شود. سپس کتاب‌های تاریخ را در ۳ فاصله بین کتاب‌های فلسفه می‌چینیم که تعداد جایگشت‌هایشان $۳!$ می‌شود.

با توجه به اصل ضرب تعداد جایگشت‌های نهایی این کتاب‌ها برابر $(۳!)(۴!)$ می‌باشد.

اگر تعداد کتاب‌های تاریخ و فلسفه برابر می‌بود اولین کتاب از چپ می‌توانست تاریخ یا فلسفه باشد (در مثال قبل اولین کتاب سمت چپ فقط می‌توانست تاریخ باشد) با احتساب این حالت در مثال دوم تعداد کل جایگشت‌ها برابر با $(۴!)(۴!)(۲)$ می‌شود.

جمع‌بندی:

۱ تعداد جایگشت‌های یک در میان n چیز متمایز و $(n-۱)$ چیز متمایز دیگر: $n!(n-۱)!$

۲ تعداد جایگشت‌های یک در میان n چیز متمایز و n چیز متمایز دیگر: $(۲)(n!)(n!)$

جایگشت‌های r شیء از n شیء متمایز

به‌طور خلاصه در این مبحث n شیء متمایز داریم که می‌خواهیم از بین آن‌ها r شیء را انتخاب کنیم و به ترتیب بچینیم. پس در این جایگشت‌ها هم ترتیب و هم انتخاب اشیاء اهمیت دارد.

تعداد جایگشت‌های r تایی از n شیء متمایز: $P(n,r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

جایگشت اشیاء تکراری

اگر در بین n شیء، اشیایی داشتیم که تکراری بودند، یعنی اگر جای آن‌ها را با هم عوض کنیم حالت جدیدی از جایگشت پدید نمی‌آید: کل جایگشت‌ها را به جایگشت اشیای تکراری تقسیم می‌کنیم.

مثال: چند جایگشت از حروف کلمه mathematics وجود دارد؟

$$\frac{۱۱!}{۲!(m)\times ۲!(a)\times ۲!(t)} = \frac{۱۱!}{(۲!)(۲!)(۲!)}$$

مثال: با حروف کلمهٔ "computer" و بدون تکرار حروف

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حرف C شروع شوند.

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف c, o, m کنار هم باشند.

راه‌حل:

الف) $\underline{۱}\ \underline{۷}\ \underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۴}\ \underline{۳}\ \underline{۲}\ \underline{۱} = ۱\times ۷! = ۷!$

ب) سه حرف com یک حرف حساب می‌شود پس در کل ۶ حرف داریم خود سه حرف هم می‌توانند جابه‌جا شوند. پس $۶!\times ۳!$

مثال: با حروف جهانگردی و بدون تکرار حروف:

الف) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که با حروف نقطه‌دار شروع شود؟

راه‌حل:

$$\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underline{۶}\times\underline{۷}\times\underline{۸}=۲۰۱۶۰$$

$$\underline{۱}\times\underline{۲}\times\underline{۳}\times\underline{۴}\times\underline{۵}\times\underline{۶}\times\underline{۷}\times\underline{۳}\Rightarrow ۷!\times ۳$$

جایان‌های

درس سوم: ترکیب

تعریف: به هر حالت انتخاب r شیء از n شیء متمایز که ترتیب انتخاب اشیاء اهمیتی نداشته باشد، ترکیب r تایی از n شیء گفته می‌شود.

تعداد ترکیب‌های r شیء از n شیء متمایز: $C(n,r)=\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{(n-r)!\times r!}=\dfrac{P(n,r)}{r!}$

دلیل تقسیم جایگشت به $r!$ برای محاسبه ترکیب این است که r شیء با $r!$ جایگشت دارند که در $P(n,r)$ این جایگشت‌ها حالت‌های متفاوتی می‌سازند اما در ترکیب، صحبت از انتخاب است. پس ترتیب‌های متفاوت اشیاء حالت‌های متفاوتی درست نمی‌کنند. (حالت‌های ترکیب از جایگشت کمتر است)

نکته

۱ $\binom{n}{۱}=n$

۲ $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۳ $\binom{n}{۲}=\dfrac{n(n-۱)}{۲}$ و $\binom{n}{۳}=\dfrac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}$

۴ $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ اگر بخواهیم با مثال توضیح دهیم یعنی حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۶ نفر با حالت‌های کنار گذاشتن ۲ نفر از ۶ نفر برابر است. برای کنار گذاشتن هم باید انتخاب کرد. پس: $\binom{۶}{۲}\times\binom{۶}{۴}$

۵ اگر در r شیء که از n تا انتخاب می‌کنیم، باید حتماً k عضو از n حضور داشته باشند: $\binom{n-k}{r-k}$

چون آن k شیء را انتخاب کرده کنار می‌گذاریم و از اشیای باقی‌مانده r-k دیگر انتخاب می‌کنیم.

۶ اگر در r شیء که از n تا انتخاب می‌کنیم، k عضو از n حتماً نباید حضور داشته باشند. $\binom{n-k}{r}$

چون k شیء را از محدوده انتخاب خارج کرده و از اشیای باقی‌مانده r تا انتخاب می‌کنیم.

مسائل جفت نشدن

فرض کنید می‌خواهیم از بین ۶ زن و شوهر ۳ نفر را انتخاب کنیم به گونه‌ای که هیچ‌کدام با هم زن و شوهر نباشند. برای حل این‌گونه مسائل ابتدا به تعداد اشیاء خواسته شده جفت انتخاب می‌کنیم؛ یعنی اول باید ۳ زن و شوهر را از بین بقیه انتخاب کنیم. $\binom{۶}{۳}$ سپس توجه می‌کنیم که در هر جفت ۲ انتخاب برای ما وجود دارد.

مثلاً در زن و شوهر ۱، می‌توانیم یا خانم را انتخاب کنیم یا آقا؛ و این در دو زوج دیگر نیز صادق است. پس انتخاب یک نفر از بین هر زوج می‌شود: $\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}$ سپس با توجه به اصل ضرب حالت‌های کل را محاسبه می‌کنیم. $\binom{۶}{۳}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۱۶۰$

مثال: در یک کیسه ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی و ۳ مهره سبز موجود است و همه مهره‌ها متفاوت هستند. اگر سه مهره با هم تصادفی خارج کنیم، تعداد حالت‌هایی را حساب کنید که:

الف) فقط دو مهره قرمز باشد.

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

راه‌حل:

الف) $\binom{5}{2}+\binom{7}{1}=10\times 7=70$

ب) $\binom{4}{1}\binom{8}{2}+\binom{4}{2}\binom{8}{1}+\binom{4}{3}=4\times 28+6\times 8+4=164$

مثال: اگر $P(n,4)=12C(n-2,2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید.

راه‌حل:

$$\left.\begin{array}{l} P(n,4)=\dfrac{n!}{(n-4)!} \\ C(n-2,2)=\dfrac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{\overbrace{n!}^{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}}{\cancel{(n-4)!}}=12\times\dfrac{\cancel{(n-2)!}}{2\cancel{(n-4)!}}\Rightarrow n(n-1)=6\Rightarrow n=3$$

مثال: در تساوی مقابل مقدار n را به دست آورید. $\binom{n}{2}=28$

راه‌حل:

$$\binom{n}{2}=28\rightarrow\dfrac{n!}{2!\times(n-2)!}=\dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2\times\cancel{(n-2)!}}=28\rightarrow n(n-1)=56\rightarrow\boxed{n=8}$$

مثال: الف) از میان شش کتاب مختلف به چند طریق می‌توان چهار کتاب را کنار هم در یک قفسه چید؟

ب) از بین ۴ دانش‌آموز دهم، ۳ دانش‌آموز یازدهم و ۲ دانش‌آموز دوازدهم به چند روش می‌توان انجمن علمی ۵ نفره تشکیل داد به‌طوری که حداقل سه دانش‌آموز دهمی داشته باشد.

راه‌حل:

الف) جابه‌جایی ۴ کتاب گروه جدید ایجاد می‌کند یعنی چیدمان کتاب abcd باچیدمان adcb یکی نیست. پس:

$$P(6,4)=\dfrac{6!}{(6-4)!}=\dfrac{6\times5\times4\times3\times2!}{2!}=360$$

ب) یعنی می‌تواند انجمن شامل ۳ یا ۴ دانش‌آموز دهمی باشد. پس:

$$\binom{4}{3}\binom{5}{2}+\binom{4}{4}\binom{5}{1}=4\times10+1\times5=45$$

فصل هفتم

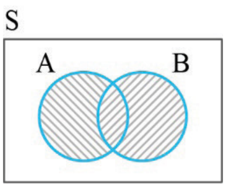
درس اول: دنبال یا اندازه‌گیری شانس

پدیده یا آزمایش‌های تصادفی: پدیده یا آزمایش‌هایی که تمام حالت‌های ممکن اتفاق افتادن آن‌ها را بدانیم اما نتوانیم نتیجه آن‌ها را به‌صورت دقیق پیش‌بینی کنیم.

فضای نمونه‌ای: در یک آزمایش تصادفی، مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه را با S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نمایش می‌دهیم.

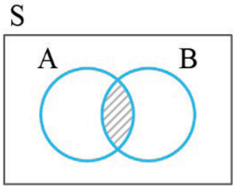
پیشامدهای تصادفی: هر زیرمجموعه از فضای S را یک پیشامد تصادفی در S می‌نامیم.

پیشامدها و برخی اعمال روی آن‌ها

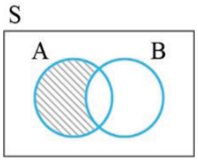


۱ **اجتماع دو پیشامد $(A\cup B)$:** زمانی که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد. (A رخ بدهد، یا B بدهد یا هر دو رخ بدهند $A\cap B$)

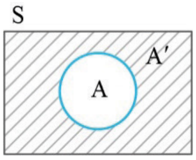
۲ اشتراک دو پیشامد $(A\cap B)$: زمانی که دو پیشامد با هم رخ بدهند (حتماً هم A رخ بدهد هم B رخ بدهد)



۳ تفاضل دو پیشامد $(A-B)$: زمانی که پیشامد A رخ بدهد ولی پیشامد B رخ ندهد.



٤ متمم یک پیشامد (A'): متمم پیشامد A زمانی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

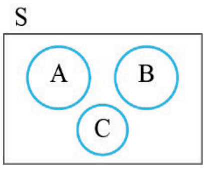


نکته با توجه به نمودار $A\cup A'=S$ و $A\cap A'=\varnothing$

پیشامدهای ناسازگار:

تعریف: هرگاه بین دو پیشامد، اشتراک تهی شود $(A\cap B=\varnothing)$ به A و B دو پیشامد ناسازگار گفته می‌شود.

هرگاه بیش از دو پیشامد داشتیم که هر کدام با همهٔ دیگر پیشامدها ناسازگار باشد، آن‌ها را دوبه‌دو ناسازگار می‌گوییم.



$A\cap B=\varnothing$ $\quad$ $A\cap C=\varnothing$ $\quad$ $B\cap C=\varnothing$

مثال: **دو تاس را با هم پرتاب می‌کنیم:**

الف) پیشامد A را بنویسید که در آن مجموع اعداد رو شده ۷ باشد.

ب) پیشامد B را بنویسید که در آن اعداد رو شده عدد اول باشند.

ج) آیا دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟

راه‌حل:

الف) $A=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

ب) $B=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$

ج) خیر، زیرا $A\cap B=\{(۵,۲),(۲,۵)\}=\varnothing$

مثال: **خانواده‌ای دارای ۳ فرزند است.**

الف) فضای نمونه‌ای مربوط به فرزندان خانواده را بنویسید.

ب) پیشامد A که در آن "فقط دو فرزند اول هم‌جنس باشند" را مشخص کنید.

راه‌حل:

الف) $n(S)=۲^۳=۸$

ب) A={ (پ و پ و د) و (د و د و پ)}

مثال: **یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:**

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن حداقل عدد رو شده تاس ۳ باشد.

راه‌حل:

الف) $S=\left\{\begin{matrix}(۱,\text{ر}),(۲,\text{ر}),\dots,(۶,\text{ر})\\(۱,\text{پ}),\dots,\ (۶,\text{پ})\end{matrix}\right\}$

$$ب)\ A=\left\{\begin{matrix}(۳,ر),(۴,ر),(۵,ر)(۶,ر)\\(۳,پ)(۴,پ)(۵,پ)(۶,پ)\end{matrix}\right\}n(A)=۸$$

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه‌گیری شانس)

تعریف: اگر S فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و A یک پیشامد در فضای S باشد. احتمال رخداد پیشامد A یعنی $P(A)$ به‌صورت $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ تعریف می‌شود.

احتمال رخداد یک پیشامد عددی حقیقی بین یک و صفر است. هر چه احتمال رخداد A بیشتر باشد، $P(A)$ به یک نزدیک‌تر و هر چه احتمال رخداد آن کمتر باشد، $P(A)$ به صفر نزدیک‌تر است.

نکته

$$P(S)=\frac{n(S)}{n(S)}=۱ \quad و \quad P(\varnothing)=\frac{n(\varnothing)}{n(S)}=۰$$

✓ احتمال رخداد پیشامد $A\cup B$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

✓ اگر پیشامدهای A و ناسازگار باشند. $P(A\cap B)=۰$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

✓ احتمال رخ ندادن پیشامد A (A'):

$$\left.\begin{matrix}A\cup A'=S\\P(S)=۱\end{matrix}\right\}P(A)=P(A')=۱\Rightarrow P(A')=۱-P(A)$$

✓ از بین رابطه در حالتی استفاده می‌کنیم که محاسبه رخداد A' و سپس کم کردن آن از S، از محاسبه مستقیم A آسان‌تر باشد.

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$

مثال: در کیسه‌ای ۵ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. اگر از این کیسه سه مهره به تصادف خارج کنیم چقدر احتمال دارد هر سه مهره همرنگ باشد.

راه‌حل: هر سه مهره همرنگ یعنی هر سه آبی یا هر سه قرمز باشند. پس

هر سه مهره همرنگ یعنی هر سه آبی یا هر سه قرمز باشند. پس

$$n(A)=\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}=۴+۱۰=۱۴$$

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=۸۴ \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۸۴}$$

مثال:اگر ۸ نفر که دو نفر آن‌ها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چقدر احتمال دارد دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟

راه‌حل: A': دو برادر کنار هم باشند $\xrightarrow{متمم}$ A: هر دو برادر کنار هم نباشند.

$$n(S)=۸! \qquad n(A')=۲!\times ۷!$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۲\times\cancel{۷!}}{۸\times\cancel{۷!}}=\frac{۱}{۴} \qquad p(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

مثال: یک فروشگاه دو نوع کارت اعتباری B و A را می‌پذیرد. اگر ۰/۳۴ درصد مشتریان کارت نوع A و ۰/۶۲ درصد کارت نوع B و ۰/۱۵ درصد هر دو نوع کارت را همراه داشته باشند، چقدر احتمال دارد مشتریان با در اختیار داشتن "حداقل" یکی از این دو کارت از این فروشگاه خرید کند؟

راه‌حل:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۳۴+۰/۶۲-۰/۱۵=۰/۸۱$$

درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

تعریف آمار: مجموعه‌ای از ارقام، اعداد و اطلاعات

تعریف علم آمار: مجموعه روش‌هایی شامل ۱- جمع‌آوری اعداد و ارقام ۲- سازماندهی و نمایش ۳- تحلیل و تفسیر داده‌ها و ۴- نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب، در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

جامعه یا جمعیت آماری

تعریف: مجموعه همه چیزهایی که درباره ویژگی (های) آن‌ها تحقیق صورت می‌گیرد.

عضو جامعه آماری: هر یک از افراد و یا اشیای جامعه

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه

نمونه‌ی آماری

تعریف: بخشی از جامعه که برای مطالعه ویژگی (های) مدنظر انتخاب می‌شود.

عضو نمونه آماری: هر یک از افراد و یا اشیای انتخاب شده

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه

درس سوم: متغیر و انواع آن

تعریف: ویژگی از اعضای یک جامعه می‌باشد که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند.

مقدار متغیر: عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود.

انواع متغیر- کمی: قابل اندازه‌گیری هستند. (قد، وزن، دما)

کیفی: قابل اندازه‌گیری نیستند. (گروه خونی، تحصیلات، جنسیت افراد)

انواع متغیرهای کمی

۱ **کمی پیوسته:** متغیری که اگر بتواند مقادیر x و y را اختیار کند، هر مقدار بین آن‌ها را نیز بتواند. (طول، وزن، زمان)

۲ **کمی گسسته:** متغیری که پیوسته نباشد، یعنی فقط بتواند مقادیر مشخص و مجزایی را اختیار کند. (تعداد)

انواع متغیرهای کیفی

۱ **کیفی ترتیبی:** متغیری که در آن نوعی ترتیب طبیعی و منطقی وجود داشته باشد. (سطح تحصیلات)

۲ **کیفی اسمی:** متغیری که ترتیبی نیست، یعنی در آن نوعی رتبه‌بندی وجود نداشته باشد. (جنسیت، وضعیت هوا)

مثال: نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) قد	ب) شاخص توده بدن
ج) میزان هوش	د) مراحل تحصیلی
هـ) گروه خونی	و) سن
ک) رنگ چشم	گ) تعداد دوستان

راه‌حل:

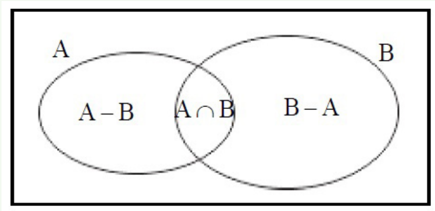
الف) کمی پیوسته	ب) کمی پیوسته
ج) کیفی ترتیبی	د) کیفی ترتیبی
ه) کیفی اسمی	و) کمی پیوسته
ک) کیفی اسمی	گ) کمی گسسته

ریاضی دهم

فصل ۱

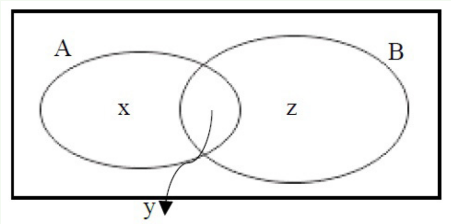
سوال ۱ با بررسی نقایص ۷۰ محصول یک کارخانه، مشخص شد تعداد محصولاتی که فقط نقص A را دارند دو برابر تعداد محصولاتی است که فقط نقص B را دارند. همچنین تعداد محصولاتی که هر دو نقص را دارند، نصف تعداد محصولاتی است که فقط نقص B را دارند. چند محصول فقط نقص A را دارند؟ (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: با توجه به نمودار ون، می‌دانیم:



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \quad \text{یا} \quad n(A\cup B)=n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)$$

راه حل:



$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=۷۰ \\ \left.\begin{array}{l} x=۲z \\ y=\frac{۱}{۲}z \end{array}\right\} x=۲z=۴y \end{array}\right\} ۴y+۲y+y=۷۰ \Rightarrow y=۱۰ \rightarrow \begin{cases} x=۴۰ \\ z=۲۰ \end{cases}$$

بنابراین ۴۰ محصول فقط نقص A را دارند.

سوال ۲ در یک دنباله ی حسابی جمله‌ی دهم و جمله‌ی سوم به ترتیب ۱۱ و ۳۲ می‌باشد. این دنباله دارای چند جمله‌ی مثبت است؟ (فرزانگان ۱ فارس دی ۱۴۰۰)

پاسخ: جمله عمومی دنباله حسابی: $t_n=a+(n-۱)d$

برای پیدا کردن تعداد جملات یک دنباله در بازه‌ای خاص، ابتدا جمله عمومی آن دنباله را پیدا کرده و سپس در بازه موردنظر قرار می‌دهیم تا بازه مطلوب n را پیدا کنیم

راه‌حل:

$$\left.\begin{array}{l} t_۳=a+\overbrace{(۳-۱)}^{۲}d=۳۲ \rightarrow a+۲d=۳۲ \\ t_{۱۰}=a+\underbrace{(۱۰-۱)}_{۹}d=۱۱ \rightarrow a+۹d=۱۱ \end{array}\right\} ۹d-۲d=۱۱-۳۲ \Rightarrow ۷d=-۲۱ \Rightarrow d=-۳$$

$$t_۳=a+(۲)(-۳)=۳۲ \rightarrow a=۳۲+۶=۳۸ \Rightarrow \text{جمله عمومی}: t_n=۳۸-۳(n-۱)=-۳n+۴۱$$

$$t_n=-۳n+۴۱>۰ \rightarrow -۳n>-۴۱ \rightarrow ۳n<۴۱ \rightarrow n<\frac{۴۱}{۳};\ ۱۳ \Rightarrow$$

پس ۱۳ جمله مثبت داریم.

سوال ۳ **مقدار x را طوری بیابید که سه عبارت $x+۱, ۲x-۱, ۴x+۷$ تشکیل دنبالهٔ هندسی دهند. و جمله عمومی دنباله را بنویسید.** (سرای دانش بهبهان دی ۱۴۰۱ با تغییر)

پاسخ: اگر A و B و C، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، B واسطه حسابی A و C است.

یعنی: $A.C = B^۲$

جمله عمومی دنباله هندسی: $t_n = a.r^{n-۱}$

$$x+۱, ۲x-۱, ۴x+۷, \ldots \to (x+۱)(۴x+۷) = (۲x-۱)^۲ \to ۴x^۲+۱۱x+۷ = ۴x^۲-۴x+۱ \to ۱۵x = -۶ \Rightarrow x = \frac{-۶}{۱۵} = \frac{-۲}{۵}$$

دنباله به این صورت در می‌آید: $\frac{۳}{۵}, \frac{-۹}{۵}, \frac{۲۷}{۵}, \ldots$

می‌دانیم قدر نسبت یک دنباله هندسی (r) از تقسیم دو جمله متوالی برهم به دست می‌آید: $\dfrac{\frac{-۹}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = -۳$

بنابراین: $t_n = (\frac{۳}{۵}).(-۳)^{n-۱}$

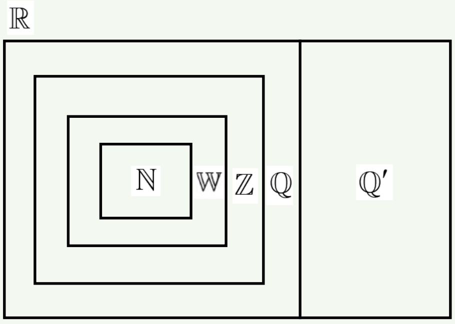
سوال ۴ **حاصل عبارت $(Q' \cup W)' \cap Z$ برابر کدام مجموعه است؟**

مجموعه‌های اعداد:

صحیح: Z — حسابی (۰ + طبیعی): W — طبیعی: N

حقیقی: IR — گنگ: Q' — گویا: Q

روابط بین مجموعه‌های اعداد:



روابط بین متمم مجموعه‌ها:

$\boxed{۱}\ (A')' = A$ $\qquad \boxed{۲}\ (A \cup B)' = (A' \cap B')$

$\boxed{۳}\ (A \cap B)' = A' \cup B'$ $\qquad \boxed{۴}\ (A - B) = A \cap B'$

پاسخ:

$$(Q' \cup W)' = Q \cap W'$$

$(Q \cap W') \cap Z = Z - W$ $\quad \{-۱, -۲, -۳, \ldots\}$ یعنی تمام اعداد حسابی منفی

سوال ۵ **جملات سوم، هفتم و نهم یک دنباله حسابی می‌توانند جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند. جمله چندم این دنباله حسابی، مساوی صفر است؟** (فرزانگان مسجدسلیمان دی ۱۴۰۱)

پاسخ: اگـر جـملات مختلـف یـک دنبالـه حسـابی، جـملات متـوالی یـک دنبالـه هنـدسی را بسـازند، معادلـه حسـابی هـر جملـه را در یـک دنبالـه هنـدسی قـرار می‌دهیـم و بـا آن‌هـا بـه عنـوان جـملات هنـدسی برخـورد می‌کنیـم. مـثلاً از روابـط واسـطه هنـدسی اسـتفاده می کنیم

دنباله هندسی : $t_3, t_7, t_9, \ldots \rightarrow a+2d, a+6d, a+8d, \ldots$

$$(a+6d)^2 = (a+2d)(a+8d) = a^2+12ad+36d^2 = a^2+10ad+16d^2 \rightarrow 2ad = -20d^2 \rightarrow 2a = -20d \Rightarrow a = -10d$$

جمله چندم دنباله حسابی برابر صفر است؟

$$t_n = a+(n-1)d \rightarrow -10d+(n-1)d = 0 \rightarrow (n-1)d = 10d \rightarrow n = 11$$

سوال ۶ در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی ۳۹ است. دنباله را بنویسید.

(شهید بهشتی اندیشمک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: می‌دانیم که در یک دنباله حسابی مجموع ۲ جمله کناری دو برابر جمله وسطی است و جمله عمومی دنباله‌های حسابی به این شکل است: $t_n = a+(n-1)d$

راه‌حل اول: تفاضل سـه جملـه اول بـا سـه جملـه بعـدی را هـم بـه صـورت جبـری و هـم عـددی محاسـبه کـرده و باهـم برابـر قـرار می‌دهیـم

$$(a_4+a_5+a_6)-(a_1+a_2+a_3) = 39-3 \rightarrow (3a+12d)-(3a+3d) = 39-3 = 36 \Rightarrow d = 4$$

حالا مجموع جبری و عددی سه جمله اول را برابر قرار می‌دهیم: $3a+3d = 3 \rightarrow a+d = 1 \;\; \underline{d=4} \;\; a = -3$

پس با توجه به جمله عمومی، دنباله به این شکل در می‌آید: $-3, 1, 5, 9, 13, 17, \ldots$

سوال ۷ الف) مجموعه اعداد گویای بین $[0,1]$ یک مجموعه .... است. (فرزانگان فارس دی ۱۴۰۰)

ب) دنباله .... و .... هم حسابی و هم هندسی است.

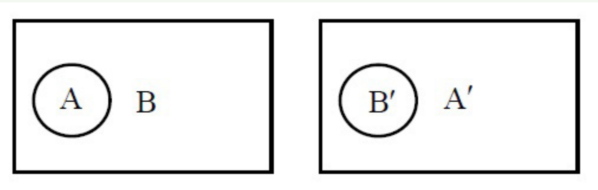
ج) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \square A'$ است.

د) واسطه هندسی بین دو عدد ۸ و ۱۸ برابر .... است. (سرای دانش بهبهان دی ۱۴۰۱)

پاسخ: الف) نامتناهی، یک مجموعه اعداد گویا همواره نامتناهی است.

ب) ثابت و غیرصفر.

ج) $B' \subseteq A'$. با توجه به نمودار هان ون:



د) ۱۲. در یک دنباله هندسی $x = 12 \leftarrow 8\times 18 = x^2 \leftarrow ac = b^2$

سوال ۸ در یک کلاس ۲۵ نفره ۱۳ نفر در تیم فوتبال و ۱۸ نفر در تیم والیبال عضویت دارند. اگر ۵ نفر در هیچ تیمی عضو نباشند. (فرزانگان ۱ فارس دی ۱۴۰۱)

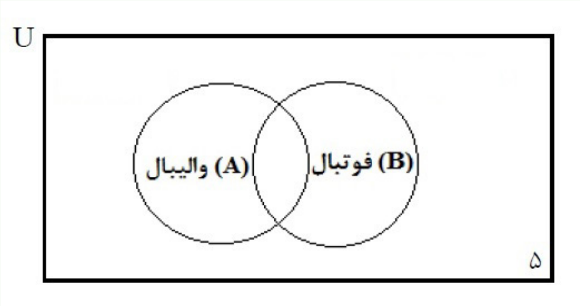
الف) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

ب) چند نفر در حداکثر یکی از دو رشته‌ی ورزشی فعالیت می‌کنند؟

پاسخ: تعداد اعضای اجتماع ۲ مجموعه:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

راه‌حل: با توجه به نمودار ون:



$$U=۲۵$$

$$n(A\cup B)=U-۵=۲۰$$

$$n(A\cup B)=\underbrace{n(A)}_{۱۸}+\underbrace{n(B)}_{۱۳}-n(A\cap B)=۲۰\to n(A\cap B)=۱۱$$

الف) افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند یعنی $n(B-A)$:

$$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)$$

$$n(B-A)=۱۳-۱۱=۲$$

ب) «حداکثر» یکی از دو رشته یعنی یا در رشته‌ای فعالیت نمی‌کند یا فقط در یکی فعالیت می‌کند.

یعنی هم جز کسانی که هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند:

$$n(U)-n(A\cap B)=۲۵-۱۱=۱۴$$

سوال ۹ بین دو عدد ۲۷ و $\frac{۱۶}{۳}$، ۳ واسطه هندسی درج می‌کنیم. دنباله تولید شده را بنویسید.

پاسخ: اگر n واسطه هندسی بین دو جمله a و c درج کنیم:

$$r=\sqrt[n+1]{\frac{c}{a}}$$

$$r=\sqrt[۳+۱]{\frac{\frac{۱۶}{۳}}{۲۷}}\to r=\sqrt[۴]{\frac{۱۶}{۸۱}}\to r=\sqrt[۴]{\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}}\Rightarrow r=\frac{۲}{۳}$$

سوال ۱۰ در یک دنباله حسابی $t_۳+t_۵=۱۲$ مجموع هفت جمله اول این دنباله چیست؟

پاسخ: روابط اندیسی بین جملات دنباله حسابی:

$$m,n,p,k\in N, m+n=p+k\Rightarrow t_m+t_n=t_p+t_k$$

* روابط اندیسی بین جملات دنباله هندسی:

$$m,n,p,k\in N, m+n=p+k\Rightarrow (t_m)(t_n)=(t_p)(t_k)$$

راه‌حل بر طبق روابط اندیسی:

$$t_۱+t_۷=t_۲+t_۶=t_۳+t_۵=\underbrace{t_۴+t_۴}_{۲t_۴}=۱۲$$

پس:

$$\underbrace{t_۱+\underbrace{t_۲+\underbrace{t_۳+\underset{\underset{۶}{\downarrow}}{t_۴}+t_۵}_{۱۲}+t_۶}_{۱۲}+t_۷}_{۱۲}=۴۲$$

فصل ۲

سوال ۱۱ اگر $\cos\theta = \frac{۳}{۵}$ و انتهای کمان θ در ربع چهارم باشد، سایر نسبت‌های مثلثاتی را حساب کنید.

پاسخ: با توجه به اتحاد $\sin^۲\theta + \cos^۲\theta = ۱$ می‌توان با داشتن sin یا cos دیگری را محاسبه کرد. با داشتن هم sin و هم cos می‌توان tan و cot را محاسبه کرد

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}, \quad \cot = \frac{\cos}{\sin}$$

راه‌حل:

$$\sin^۲\theta + \left(\frac{۳}{۵}\right)^۲ = ۱ \rightarrow \sin^۲\theta = \frac{۱۶}{۲۵} \rightarrow |\sin\theta| = \frac{۴}{۵}$$

$$\tan\theta = \frac{\frac{-۴}{۵}}{\frac{۳}{۵}} = \frac{-۴}{۳} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{۱}{\tan\theta} = \frac{-۳}{۴}$$

سوال ۱۲ مقدار عبارت روبرو را بیابید. (سرای دانش بهبهان دی ۱۴۰۱)

$$\frac{\cos ۶۰^\circ \sin ۳۰^\circ - \tan ۴۵^\circ}{۵\sin ۹۰^\circ - ۴\cos ۲۷۰^\circ}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای معروف:

	sin	cos	tan	cot
۳۰°	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$
۴۵°	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱
۶۰°	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
	sin	**cos**	**tan**	**cot**
۰°	۰	۱	۰	ت ن
۹۰°	۱	۰	ت ن	۰
۱۸۰°	۰	۱-	۰	ت ن
۲۷۰°	۱-	۰	ت ن	۰

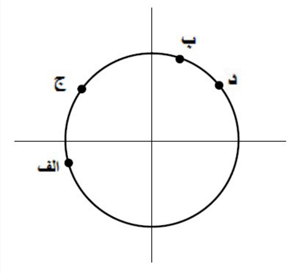
پاسخ:

$$\frac{(\cos ۶۰^\circ)(\sin ۳۰^\circ)-(\tan ۴۵^\circ)}{(۵)(\sin ۹۰^\circ)-(۴)(\cos ۲۷۰^\circ)}=\frac{\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)-(۱)}{۵(۱)-۴(۰)}=\frac{\frac{-۳}{۴}}{۵}=\frac{-۳}{۲۰}$$

سوال ۱۳ مشخص کنید هر کدام از زوایای زیر در کدام ربع مثلثاتی قرار دارند؟

الف) ۱۹۵° ب) -۲۸۰° ج) ۱۳۵° د) ۴۰۵°

پاسخ:



الف) سوم ب) اول

ج) دوم د) اول

اگر زاویه منفی بود کمان آن را در دایره مثلثاتی ساعتگرد حرکت می‌دهیم. اگر از ۳۶۰° بیشتر بود آنقدر ۳۶۰° از آن کم می‌کنیم تا عدد حاصل کمتر از ۳۶۰° شود

سوال ۱۴ ثابت کنید: (سرای دانش بهبهان دی ۱۴۰۱)

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{۱}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

پاسخ:

می‌دانیم:

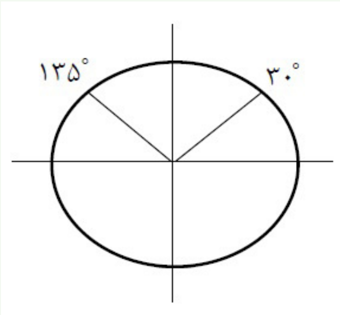
$$\tan=\frac{\sin}{\cos},\quad \cot=\frac{\cos}{\sin},\quad \sin^۲+\cos^۲=۱$$

$$\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha}{\cos\alpha.\sin\alpha}=\frac{۱}{\cos\alpha.\sin\alpha}$$

سوال ۱۵ ت) اگر $۱۵<\beta<۶۷/۵$ و $\sin ۲\beta=\frac{۲-۵m}{۳}$ باشد. حدود m را بیابید؟ (فرزانگان فارس دی ۱۴۰۰)

پاسخ: هرگاه بازه زاویه‌ای داده شده و بازه سینوس یا کسینوس آن خواسته می‌شود، نمی‌توانیم فقط sin یا cos زوایای دو طرف بازه را حساب کرده و جایگذاری کنم. یعنی اگر $\alpha<\theta<\beta$، لزوماً $\sin\alpha<\sin\theta<\sin\beta$ درست نیست. اگر α و β در دو ربع متفاوت دایره مثلثاتی قرار داشته باشند، sin یا cos آن‌ها در میان بازه به ۱ یا ۱- رسیده که ماکسیمم و مینیمم sin و cos هستند و باید آنها را در بازه $\sin\theta$ یا $\cos\theta$ قرار داد

راه‌حل:



$$۱۵^\circ<\beta<۶۷/۵^\circ\to ۳۰^\circ<۲\beta<۱۳۵^\circ$$

همانطور که میبینید sin در این بازه به ۱ (ماکسیمم) رسیده پس:

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}<\sin ۲\beta<\frac{\sqrt{۲}}{۲} & \times\\ \frac{۱}{۲}<\sin ۲\beta\le ۱ & \surd\boxed{۱}\end{cases}$$

$$\sin ۲\beta=\frac{۲-۵m}{۳}\to ۳\sin ۲\beta=۲-۵m\to ۳\sin ۲\beta-۲=-۵m\to\frac{-۳\sin ۲\beta+۲}{۵}=m\boxed{۲}$$

$$\boxed{۱},\boxed{۲}\to -۳\le -۳\sin ۲\beta<\frac{-۳}{۲}\to -۱\le -۳\sin ۲\beta+۲<\frac{+۱}{۲}\Rightarrow\frac{-۱}{۵}\le\frac{-۳\sin ۲\beta+۲}{۵}<\frac{+۱}{۱۰}\to\frac{-۱}{۵}\le m<\frac{+۱}{۱۰}$$

سوال ۱۶ پ) $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{۲\sqrt{۲}}{۵}$ باشد. مقدار $\tan\alpha + \cot\alpha$ را بدست آورید؟ (فرزانگان فارس دی ۱۴۰۰)

پاسخ: اتحاد مربع جمع و تفریق sin و cos:

$$(\sin \pm \cos)^۲ = ۱ \pm ۲\sin\cos$$

$$(\sin + \cos)^۲ = (\frac{۲\sqrt{۲}}{۵})^۲ = \frac{۸}{۲۵} = ۱ + ۲\sin\cos \to ۲\sin\cos = \frac{-۱۷}{۲۵} \Rightarrow \sin\cos = \frac{-۱۷}{۵۰} \quad \boxed{۱}$$

$$\tan + \cot = \frac{\cos^۲ + \sin^۲}{\cos.\sin} = \frac{۱}{\cos.\sin} \quad \boxed{۱} \quad \tan + \cot = \frac{-۵۰}{۱۷}$$

سوال ۱۷ اگر θ زاویه‌ای در ربع سوم دایره مثلثاتی باشد و $\sin\theta = \frac{-۵}{۱۳}$، حاصل $\tan^۲\theta + \cot^۲\theta$ را به دست آورید

پاسخ: اتحادهای لازم:

$$\sin^۲ + \cos^۲ = ۱$$

$$۱ + \tan^۲ = \frac{۱}{\cos^۲} \quad , \quad ۱ + \cot^۲ = \frac{۱}{\sin^۲}$$

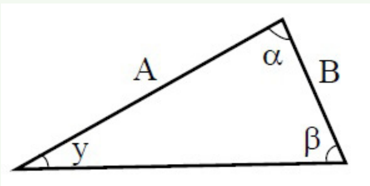
$$\begin{cases} \tan^۲ + \cot^۲ = \frac{۱}{\cos^۲} + \frac{۱}{\sin^۲} - ۲ \\ \frac{۲۵}{۱۶۹} + \cos^۲ = ۱ \to \cos^۲ = \frac{۱۴۴}{۱۶۹} \end{cases} \to \tan^۲ + \cot^۲ = \frac{۱۶۹}{۱۴۴} + \frac{۱۶۹}{۲۵} - ۲$$

سوال ۱۸ اگر اندازه دو ضلع یک مثلث ۶ و ۸ و زاویه بین آن‌ها ۱۲۰° باشد مساحت آن چقدر است؟

پاسخ:

محاسبه مساحت مثلث با سینوس یک زاویه و اضلاع آن:

$$\frac{۱}{۲}.\sin\alpha.A.B$$



راه‌حل:

$$\frac{۱}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times ۶ \times ۸ = ۱۲\sqrt{۳}$$

فصل ۳

سوال ۱۹ عبارت مقابل را ساده کنید. $\sqrt[۳]{\sqrt{۸}} + ۲^{\frac{۱}{۲}} + \sqrt[۳]{-۱۶} =$ (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: $\boxed{2}\ \sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ $\quad$ $\boxed{1}\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x}$

در رادیکال اعداد منفی با فرجه فرد، علامت منفی می‌تواند داخل یا بیرون رادیکال قرار بگیرد.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\ \sqrt[3]{-2^4} = -\sqrt[3]{2^4} = -2\sqrt[3]{2}\end{array}\right\} \sqrt{2} + \sqrt{2} + (-2\sqrt[3]{2}) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{2}$$

سوال ۲۰ **الف)** $\sqrt[6]{(1-\sqrt{7})^2} = \sqrt[3]{1-\sqrt{7}}$ **(درست / نادرست)** (فرزانگان ۱ فارس دی ۱۴۰۱)

ب) اگر n عددی زوج باشد، $\sqrt[n]{x^n} = \dots\dots\dots\dots$, $(\sqrt[n]{x})^n = \dots\dots\dots\dots$ (تألیفی)

پاسخ: الف) توان اعداد (عبارات) زیر رادیکال در صورت امکان با فرجه رادیکال ساده می‌شوند اما باید دقت کرد که ساده کردن‌ها تاثیری در جواب نهایی (به ویژه علامت آن) نگذارند

نادرست. زیرا $(1-\sqrt{7})$ یک عدد منفی است و رادیکال آن هم فرجه‌ای فرد دارد که یعنی عدد جواب نهایی منفی می‌شود.

اما $(1-\sqrt{7})^2$ یک عدد مثبت است که رادیکالی با فرجه مثبت دارد پس عدد جواب آن مثبت می‌شود.

در واقع: $\sqrt[6]{(1-\sqrt{7})^2} = \sqrt[3]{\sqrt{7}-1} \neq \sqrt[3]{1-\sqrt{7}}$

ب) $|x|$ / x . تمام اعداد با داشتن توان زوج به عددی مثبت تبدیل می‌شوند (جز صفر). همینطور تمام اعدادی که زیر رادیکال با فرجه زوج قرار دارند حتما باید مثبت باشند

در معادله اول x می‌تواند مثبت یا منفی باشد. (توان n زوج هر عددی را مثبت می‌کند که شرط زیر رادیکال با فرجه زوج بودن است). اما در معادله دوم x به تنهایی و قبل از به توان رسیدن زیر رادیکال رفته که یعنی حتماً مثبت $(x \geq 0)$ است.

پس دیگر قدر مطلق احتیاج ندارد

سوال ۲۱ **مخرج کسر مقابل را گویا کنید.** $\dfrac{1}{5+2\sqrt{6}}$

پاسخ: برای گویا کردن مخرج کسرها معمولا آن را به اتحاد مزدوج تبدیل می‌کنیم:

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{1}{5+2\sqrt{6}} \times \frac{5-2\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}} = \frac{5-2\sqrt{6}}{1} = 5-2\sqrt{6} = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$$

سوال ۲۲ **مقایسه کنید.**

الف) $\sqrt[3]{-(0/3)}\ \square\ \sqrt[5]{-(0/3)}$ $\qquad$ **ب)** $(0/7)^5\ \square\ (0/7)^2$

ج) $\sqrt[7]{-7}\ \square\ \sqrt[3]{-7}$ $\qquad$ **د)** $\left(\dfrac{-3}{5}\right)^3\ \square\ \left(\dfrac{-4}{5}\right)^4$

$1 < a$	$0 < a < 1$	$-1 < a < 0$	$a < -1$
$\dots < \sqrt[4]{a} < \sqrt[3]{a} < \sqrt{a} < a$	$\dots > \sqrt[3]{a} > \sqrt{a} > a$	$\dots < \sqrt[5]{a} < \sqrt[3]{a} < a$	$\dots > \sqrt[5]{a} > \sqrt[3]{a} > a$
ریشه بزرگ‌تر ←	ریشه بزرگ‌تر ←	ریشه بزرگ‌تر ←	ریشه بزرگ‌تر ←
حاصل کوچکتر	حاصل بزرگتر	حاصل کوچکتر	حاصل بزرگتر

پاسخ:

الف) $\sqrt[5]{-(۰/۳)} < \sqrt[3]{-(۰/۳)}$

ب) $(۰/۷)^۲ > (۰/۷)^۵$

ج) $\sqrt[3]{-۷} < \sqrt[5]{-۷}$

د) $\left(\frac{-۴}{۵}\right)^۴ > \left(\frac{-۳}{۵}\right)^۳$

سوال ۲۳ اگر $\sqrt{a\sqrt{\frac{۱}{a}}} = ۳$ باشد حاصل $\sqrt[5]{a^۴\sqrt{\frac{۱}{a}\sqrt{a}}}$ را بیابید؟ (فرزانگان ۱ فارس دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x} \quad (x^m)^n = x^{m.n} \quad x^m.x^n = x^{m+n} \quad x^{-m} = \left(\frac{۱}{x}\right)^m$$

$$\sqrt{a\sqrt{\frac{۱}{a}}} = ۳ \to a\sqrt{\frac{۱}{a}} = ۹ \to \sqrt{\frac{۱}{a}} = \frac{۹}{a} \to \frac{۱}{a} = \frac{۸۱}{a^۲} \Rightarrow a = ۸۱$$

$$\sqrt{۸۱} = ۹ \to \frac{۱}{۸۱} \times ۹ = \frac{۱}{۹} \to \sqrt{\frac{۱}{۹}} = \frac{۱}{۳} \times ۸۱^۴ = \frac{۱}{۳} \times ۳^{۱۶} = ۳^{۱۵} \to \sqrt[5]{۳^{۱۵}} = ۳^۳ = ۲۷$$

سوال ۲۴ ریشه دوم عدد ۴۳ را بیابید. (تقریبی)

پاسخ: برای پیدا کردن ریشه تقریبی یک عدد نزدیکترین مربع‌های کامل دو طرف آن را پیدا می‌کنیم. سپس با در نظر گرفتن ریشه‌های دوم آن‌ها اعدادی را امتحان می‌کنیم تا عدد موردنظر به صورت تقریبی به دست آید

$$۳۶ < ۴۳ < ۴۹ \to ۶ < \sqrt{۴۳} < ۷$$

۴۳ به ۴۹ نزدیکتر است تا ۳۶ پس از ۶/۵ به بعد شروع به توان رساندن می‌کنیم.

$$(۶/۵)^۲ = ۴۲/۲۵ \qquad (۶/۶)^۲ = ۴۳/۵۶$$

$(۶/۶)^۲$ فاصله کمتری تا ۴۳ نسبت به $(۶/۵)^۲$ دارد پس:

$$\sqrt{۴۳} \; ; \; ۶/۶$$

سوال ۲۵ عبارت $x^۶ - ۱$ را تجزیه کنید. (فرزانگان قائمشهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسـخ: اگـر عبـارتی بـرای تجزیـه مـا را بـه یـاد نـوعی اتحـاد خـاص میانـدازد، بـه سـادگی از همـان اتحـاد اسـتفاده کـرده و عبـارت را سـاده‌تر می‌کنیـم

اتحاد چاق و لاغر:

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

$$x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$$

سوال ۲۶ اگر $x+\frac{1}{x}=4$ مقدار عددی $a=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ را بدست آورید. (فرزانگان مسجدسلیمان دی ۱۴۰۱)

پاسخ: اتحاد مربع مجموع یا تفریق دو جمله:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$$

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x+2(\sqrt{x})\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{x}=\underbrace{x+\frac{1}{x}}_{4}+2=6\Rightarrow\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{6}$$

سوال ۲۷ حاصل عبارت زیر را بیابید. (فرزانگان ۱ فارس دی ۱۴۰۱)

$$\frac{2}{\sqrt[7]{a^2}}\times\sqrt[7]{16a^2}\times\sqrt[7]{8a^5}$$

پاسـخ: در عبـارات تـوان‌دار و رادیـکال دار، می‌تـوان بـا کسـری کـردن همـه توان‌ها و جمـع و تفریـق آنهـا بـه آسـانی حاصـل عبـارات را بـه دسـت آورد

$$\frac{2}{a^{\frac{2}{7}}}\times\underbrace{(16)}_{(2^4)}^{\frac{1}{7}}\times a^{\frac{2}{7}}\times\underbrace{(8)}_{(2^3)}^{\frac{1}{7}}\times a^{\frac{5}{7}}=\cancel{(a)}^{-\frac{2}{7}}\times 2\times\underbrace{2^{\frac{4}{7}}\times\cancel{(a)}^{\frac{2}{7}}\times 2^{\frac{3}{7}}}_{2}\times(a)^{\frac{5}{7}}=4\sqrt[7]{a^5}$$

سوال ۲۸ الف) هر عدد مثبت دارای .... ریشه چهارم است که .... یکدیگرند. (تألیفی)

ب) اگر $n\geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، b را یک .... می‌نامیم هرگاه: $b^n=a$ (تألیفی)

پاسخ: الف) هر عدد مثبت همواره دارای دو ریشه زوج (گویا یا گنگ) است که قرینه یکدیگر میباشند.

دو / قرینه

ب) اگر b ریشه nام عدد a باشد: $\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a$

ریشه nام عدد a

سوال ۲۹ به کمک اتحادها عبارت مقابل را تجزیه کنید. (فرزانگان مسجدسلیمان دی ۱۴۰۱)

$$\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1=$$

$$x^6+7x^3y^3-8y^6=$$

پاسخ: برای تجزیه عبارت‌های به شکل ax^2+bx+c با روش شکستن جملات، دو عدد را پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر b و ضربشان برابر ac شود. پس b را به صورت جمع این دو عدد نوشته و دسته بندی می‌کنیم. اگر $x^3=a$ و $y^3=b$ در نظر بگیریم معادله به صورت روبه‌رو در می آید: $a^2+7ab-8b^2$

دو عدد را پیدا می‌کنیم که جمع آن‌ها برابر $7b$ و ضرب آنها برابر $-8b^2$ شود $\leftarrow$ $-b$ و $8b$

پس بعد از تجزیه، عبارت این شکلی می‌شود:

$$(a+8b)(a-b)\rightarrow\underbrace{(x^3+8y^3)}_{\boxed{1}}\underbrace{(x^3-y^3)}_{\boxed{2}}$$

سپس با توجه به اتحادهای چاق و لاغر تجزیه می‌کنیم:

$$\overbrace{(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)}^{\boxed{1}}\overbrace{(x-y)(x^2+xy+y^2)}^{\boxed{2}}$$

سوال ۳۰ **مخرج کسر زیر را گویا کنید.** (فرزانگان مسجدسلیمان دی ۱۴۰۱)

$$\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$$

پاسخ: برای گویا کردن مخرج کسرها ابتدا ساده کردن با صورت را در نظر میگیریم و اگر همچنین امکانی نداشتیم. سپس به سراغ ضرب کردن توان‌ها و اتحادها می‌رویم

مخرج قابل ساده شدن با صورت نیست و ما را به یاد اتحاد چاق و لاغر می‌اندازد. پس به سراغ ضرب کردن می‌رویم.

$$\frac{\sqrt[3]{3}-1}{\underbrace{\sqrt[3]{9}}_{x^2}-\underbrace{\sqrt[3]{3}}_{xy}+\underbrace{1}_{y^2}}\times\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\underbrace{\sqrt[3]{3}}_{x}+\underbrace{1}_{y}}=\frac{\sqrt[3]{9}-1}{\underbrace{3}_{x^3}+\underbrace{1}_{y^3}}=\frac{\sqrt[3]{9}-1}{4}$$

سوال ۳۱ **تا حد امکان تجزیه کنید.** (علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران)

$$x^3-2x^2-x+2$$

پاسخ: یکی از روش‌های تجزیه دسته‌بندی عبارت‌هاست. به طوری که پس از فاکتورگیری دارای عامل مشترک باشند.

دو جمله اول را با هم و دو جمله بعدی را نیز با هم دسته‌بندی می‌کنیم: $(x^3-2x^2)+(-x+2)$

می‌بینیم که اگر x^2 را از دسته اول فاکتور بگیریم به دسته دوم شباهت پیدا می‌کند: $x^2(x-2)+(-x+2)$

اما علامت دو دسته با هم متفاوت است که برای راحتی یک علامت منفی از دسته دوم فاکتور میگیریم.

$$x^2(x-2)-(x-2)$$

و حالا تجزیه را کامل می‌کنیم:

$$x^2(x-2)-(x-2)=(x^2-1)(x-2)\Rightarrow(x-1)(x+1)(x-2)$$

سوال ۳۲ **حاصل عبارت** $\frac{4}{4-x^2}+\frac{x+1}{x^2+3x+2}-\frac{x+1}{x^2-x-2}$ **را به دست آورید.** $(x\neq\pm2,-1)$

(علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران)

پاسخ: برای حل اینگونه سوالات باید ابتدا مخرج کسرها را تجزیه کرد تا عوامل مشترک پیدا شوند و بتوانیم بین مخرج‌ها ک.م.م بگیریم. پس هر مخرج را به ک.م.م میرسانیم، با یکی شدن مخرج‌ها، حاصل عبارت را با استفاده از صورت‌ها به دست می‌آوریم. دقت داشته باشد که جواب آخر معادله نباید هیچ کدام از مخرج‌های صورت سوال را صفر کند

$$\frac{\cancel{x+1}}{(x-2)(\cancel{x+1})}-\frac{\cancel{x+1}}{(x+2)(\cancel{x+1})}+\frac{4}{(2-x)(2+x)}=\frac{1}{x-2}\left(\frac{x+2}{x+2}\right)-\frac{1}{x+2}\left(\frac{x-2}{x-2}\right)+\frac{-4}{\underbrace{-(2-x)}_{x-2}(2+x)}$$

$$=\frac{x+2}{x^2-4}-\frac{x-2}{x^2-4}+\frac{-4}{x^2-4}=\frac{x+2-x+2-4}{x^2-4}=0$$

سوال ۳۳ یک موشک در ارتفاع ۲۰ متری از سطح زمین با زاویهٔ 30° پرتاب می‌شود، پس از طی ۳۰۰۰ متر توسط سایه آن روی زمین، موشک به چه ارتفاعی از سطح زمین می‌رسد؟ (علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران دی ۹۷ با تغییر)

پاسخ: اگر زاویه بین یک خط و جهت مثبت محور xها، α باشد ← شیب خط همان $\tan\alpha$ می‌شود.

اگر α زاویه منفرجه یا باز باشد ← شب خط ($\tan\alpha$) منفی می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l}\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ y=ax+b\end{array}\right\} y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+20 \rightarrow \text{متر از روی زمین طی کرده } 3000\ (x)\ \text{سایه آن} \rightarrow y=1000\sqrt{3}+20$$

فصل ٤

سوال ۳۴ معادلات زیر را به روش‌های خواسته شده حل کنید. (علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران)

الف) $x^2-4x+3=0$ (روش مربع کامل)

ب) $3x^2+5x+2=0$ (روش Δ)

پاسخ: مربع کامل: در این روش هدف این است که با کم یا اضافه کردن اعداد به یک اتحاد مربع کامل برسیم.

برای این منظور ضریب x را نصف کرده و به توان ۲ می‌رسانیم: b^2. سپس به دو طرف معادله عددی اضافه می‌کنیم که در سمت عبارت جبری عدد تنها (c) به b^2 تبدیل شود. سپس ادامه اتحاد را حل می‌کنیم

روش Δ (دلتا) یا روش کلی: دلتا در یک معادله درجه دوم ($ax^2+bx+c=0$) برابر است با $\Delta: b^2-4ac$ با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است برای ریشه‌ها پیش بیاید

A: $\Delta>0$ در این صورت معادله دو ریشه داشته که با معادله $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند.

B: $\Delta=0$. در این صورت معادله یک ریشه برابر با $x=\dfrac{-b}{2a}$ دارد.

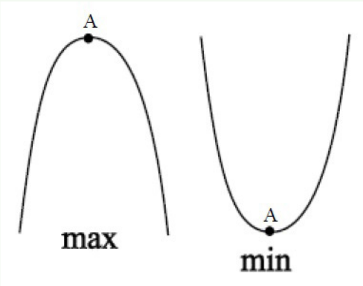
C: $\Delta<0$. در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد. حالا این سوالو واسم حل کن!

نکته ۱) اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم: $a+b+c=0 \leftarrow$ یکی از ریشه ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

۲) اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم: $a+c=b \leftarrow$ یکی از ریشه ها ۱- و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

سوال ۳۵ **موشکی با زاویه معینی به هوا شلیک شده است و ارتفاع موشک t ثانیه پس از پرتاب از معادله $y=-5t^2+50t+55$ بدست می‌آید. معین کنید پس از چند ثانیه موشک به بیشترین ارتفاع خود می‌رسد؟ پس از چند ثانیه موشک به زمین برخورد می‌کند؟** (فرزانگان قائمشهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: هر معادله به شکل $y=ax^2+bx+c$ نمودار یک سهمی را نشان می‌دهد ماکسیمم یا مینیمم عرضی که در یک سهمی وجود دارد رأس سهمی خوانده می‌شود. (A)



اگر علامت ضریب a مثبت $\leftarrow$ سهمی رو به بالا $\leftarrow$ راس سهمی کمترین عرض و مینیمم

اگر علامت ضریب a منفی $\leftarrow$ سهمی رو به پایین $\leftarrow$ راس سهمی بیشترین عرض و ماکسیمم

در یک معادله استاندارد، مختصات راس سهمی به صورت $A\left(\frac{-b}{2a},\frac{-\Delta}{4a}\right)$ خواهد بود.

بیشترین ارتفاع موشک یعنی راس سهمی، با توجه به معادله استاندارد داده شده راس سهمی را به دست می‌آوریم

در ثانیه ۵ موشک به بالاترین ارتفاع می‌رسد. $\frac{-b}{2a}=\frac{-50}{-10}\Rightarrow t=5$

برخورد زمین و موشک یعنی ریشه های سهمیِ حرکت موشک.

$$\begin{cases}\Delta=b^2-4ac\\ x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}\end{cases}\Rightarrow \Delta=2500-4(-5)(55)\rightarrow\Delta=3600\rightarrow x=\frac{-50\pm60}{-10}\begin{cases}x=11 & \checkmark\\ x=-1 & (\text{غ.ق.ق})\end{cases}$$

سوال ۳۶ **ابتدا معادله سهمی را بیابید که مرکز تقارن آن $(2,3)$ و از نقطه $(3,5)$ بگذرد و سپس آن را رسم کنید.**
(شهید بهشتی بیرجند خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: • معادله سهمی با استفاده از نقاط آن:

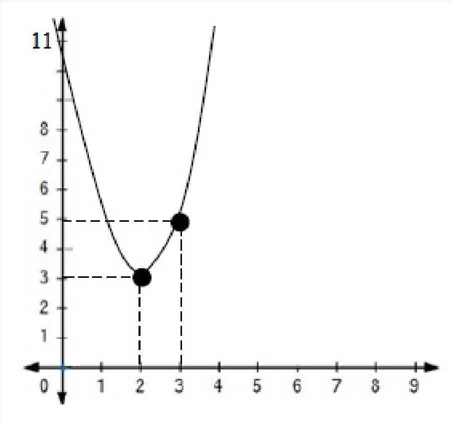
اگر نقاط مناسبی از سهمی را داشته باشیم می‌توانیم با استفاده از معادله $y=ax^2+bx+c$ معادله سهمی را به دست آوریم.

دقت کنید که اگر راس سهمی داده شده بود، هم می‌توانید به عنوان یک نقطه در معادله آن را جایگذاری کنید و هم می‌توانید با توجه به $x=\frac{-b}{2a}$ ، b و a یا با توجه به $A(h,k)$ ، h و k را پیدا کنید

$$y=ax^2+bx+c\begin{cases} A:(2,3)\to\frac{-b}{2a}=2\Rightarrow b=-4a \quad \boxed{1} \\ (2,3),(3,5)\begin{cases}4a+2b+c=3\\ 9a+3b+c=5\end{cases}\to 5a+b=2 \quad \boxed{2}\end{cases}$$

$$\boxed{1},\boxed{2}\ 5a+(-4a)=2\Rightarrow a=2,b=-8,c=11\Rightarrow 2x^2-8x+11$$

در رسم نمودار مختصات تقاطع سهمی با محورها اهمیت دارد.



سوال ۳۷ اگر معادله $x^2+4x+m=0$ دارای ریشه حقیقی نباشد، حدود m را حساب کنید.

(شهید بهشتی بهشهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: دلتا در یک معادله درجه دوم ($ax^2+bx+c=0$) برابر است با $\Delta: b^2-4ac$ با توجه به علامت Δ سه حالت ممکن است برای ریشه‌ها پیش بیاید

A: $\Delta>0$ در این صورت معادله دو ریشه داشته که با معادله $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ به دست می‌آیند.

B: $\Delta=0$. در این صورت معادله یک ریشه برابر با $x=\frac{-b}{2a}$ دارد.

C: $\Delta<0$. در این صورت معادله ریشه حقیقی ندارد.

نکته: اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم. $a+b+c=0 \leftarrow$ یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

نکته: اگر در معادله درجه ۲ استاندارد داشته باشیم. $a+c=b \leftarrow$ یکی از ریشه‌ها ۱- و دیگری $\frac{-c}{a}$ است.

$$\Delta<0\to b^2-4ac<0\to b^2<4ac\Rightarrow 16<4(1)(m)\to m>4$$

سوال ۳۸ یکی از جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $3x^2+Kx-10=0$ برابر ۵ است مقدار K را بیابید.

(علامه طباطبایی منطقه ۵ تهران دی ۹۷)

پاسـخ: جـواب هـر معادلـه‌ای در آن صـادق اسـت. پـس اگـر در معادلـه‌ای مجهـولی داشـتیم و می‌توانسـتم جـواب آن را بـه هـر صـورتی بـه دسـت بیاوریـم، جـواب را در معادلـه صـدق می‌دهیـم

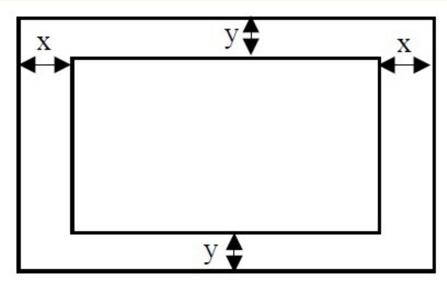
$$۳(۵)^۲ + K(۵) - ۱۰ = ۰ \rightarrow ۷۵ + ۵K - ۱۰ = ۰ \rightarrow ۵K = -۶۵ \Rightarrow K = -۱۳$$

سوال ۳۹ **الف) یک عکس به ابعاد ۱۵×۱۲ سانتیمتر را درون یک قاب مستطیلی به مساحت ۳۰۴ سانتیمتر مربع قرار داده‌ایم. اگر فاصله تمام لبه‌های عکس تا قاب یکسان باشد، ابعاد قاب عکس را بیابید.**

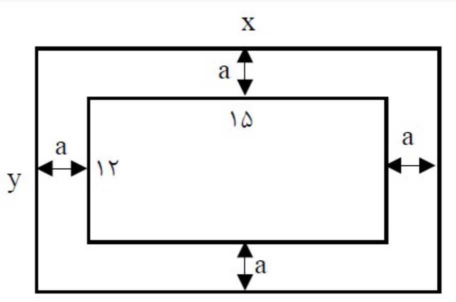
(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲ با تغییر)

پاسخ:

در سـوالاتی کـه یـک مسـتطیل را درون مسـتطیل دیگـری قـرار می‌دهیـم (عکـس درون قـاب، فـرش درون اتـاق) فقـط همیـن نکتـه را بایـد در نظـر داشـته باشـیم کـه طـول مسـتطیل کوچکتـر ۲x، و عـرض آن ۲y از طـول و عـرض مسـتطیل بزرگتـر، کوچکترنـد.



شکل موردنظر صورت سوال را رسم می‌کنیم.



$$(۱۵ + ۲a)(۱۲ + ۲a) = ۳۰۴ \rightarrow ۴a^۲ + ۵۴a + ۱۸۰ = ۳۰۴ \rightarrow ۴a^۲ + ۵۴a - ۱۲۴ = ۰ \rightarrow ۲a^۲ + ۲۷a - ۶۲ = ۰$$

$$\Delta = (۲۷)^۲ - ۴(۲)(-۶۲) = ۱۲۲۵ \rightarrow a = \frac{-۲۷ + \sqrt{۱۲۲۵}}{۴} = ۲$$

$$y = ۱۲ + ۲a = ۱۶, x = ۱۵ + ۲a = ۱۹$$

سوال ۴۰ **تعیین علامت کنید.**

$$p(x) = \frac{(۳x - ۲)(۱ - x)}{۵ - ۲x}$$

پاسخ: • عبارت‌های درجه اول

۱- ریشه عبارت را به دست می‌آوریم.

$$ax+b=۰\to x=\frac{-b}{a}$$

۲- در جدول تعیین علامت قرار می‌دهیم.

x	$-\infty$	$x<\frac{-b}{a}$	$\frac{-b}{a}$	$x>\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$		مخالف علامت a	۰	موافق علامت a	

• ضرب و تقسیم چند عبارت درجه اول:

۱- ریشه هر عبارت را به دست می‌آوریم.

۲- ریشه‌ها را در جدول تعیین علامت از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم.

۳- همه عبارت‌ها را در ستون سمت چپ قرار داده و در سطر خودش با ریشه خودش تعیین علامت می‌کنیم.

علامت‌های هر ستون را در هم ضرب کرده در آخرین سطر قرار می‌دهیم.

$$p(x)=\frac{\overbrace{(۳x-۲)}^{x=\frac{۲}{۳}}\overbrace{(-۱-x)}^{x=-۱}}{\underbrace{۵-۲x}_{x=\frac{۵}{۲}}}$$

x	$-\infty$	-۱		$\frac{۲}{۳}$		$\frac{۵}{۲}$	$+\infty$
$۳x-۲$	−		−	۰	+		+
$-۱-x$	+	۰	−		−		−
$۵-۲x$	+		+		+	۰	−
$p(x)$	−	۰	+	۰	−	ت ن	+

سوال ۴۱ نامعادله روبه‌رو را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید. (شهید بهشتی بهشهر خرداد ۱۴۰۲)

$$\frac{۱۶-x^۲}{x^۲-۶x-۷}\le ۰$$

پاسخ: در تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم ممکن است عبارت قابل تجزیه به چند عبارت درجه اول باشد. اگر سرعت و مهارت بیشتری دارید مستقیماً عبارت درجه دوم را تعیین علامت کنید.

$$\frac{۱۶-x^۲\ \to x_۱=۴,x_۲=-۴}{x^۲-۶x-۷\to x_۱=-۱,x_۲=۷}$$

بازه هایی که در آن‌ها عبارت ≤ ۰ است:

$$(-\infty,۴]\cup(-۱,۴]\cup(۷,+\infty)$$

x	$-\infty$	-۴		-۱		۴		۷	$+\infty$
$۱۶-x^۲$	−	۰	+		+	۰	−		−
$x^۲-۶x-۷$	+		+	۰	−		−	۰	+
$p(x)$	−	۰	+	ت ن	−	۰	+	ت ن	−

سوال ۴۲ مجموعه جواب نامعادله مقابل را بیابید. (شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

$$\left|\frac{۲x+۳}{x-۱}\right|\ge ۲$$

پاسخ: در نامعادلات قدر مطلقی دو حالت داریم:

حالت اول: $|x| \le a \to -a \le x \le a$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
$x-1$	$-$		۰		$+$

حالت دوم: $|x| \ge a \to x \ge a, x \le -a$

$$\boxed{1}\quad \frac{2x+3}{x-1} \ge 2 \to \frac{2x+3-2(x-1)}{x-1} \ge 0 \Rightarrow \frac{5}{x-1} \ge 0$$

$$\boxed{2}\quad \frac{2x+3}{x-1} \le -2 \to \frac{2x+3+2(x-1)}{x-1} \le 0 \Rightarrow \frac{4x+1}{x-1} \le 0$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{4}$		۱		$+\infty$
$4x+1$	$-$		۰	$+$			$+$
$x-1$	$-$			$-$	۰		$+$
$p(x)$	$+$		۰	$-$	ت ن		$+$

دقت کنید که خود عدد یک مخرج را صفر می‌کند.

$\boxed{1}$ بازه جواب : $(1, +\infty)$

$\boxed{2}$ بازه جواب : $\left[-\frac{1}{4}, 1\right)$

در پایان دو بازه را اجتماع میگیریم:

$$\underline{1 \cup 2}\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right) - \{1\}$$

سوال ۴۳ نامعادله مقابل را حل کنید.

$$\frac{x^2+2x-3}{3} > \frac{x^2-6x+5}{5}$$

پاسخ: برای حل نامعادلات درجه دوم دقت داشته باشید که بر عکس تساوی، نمی‌توانیم عوامل مشترک دو طرف نامعادله را با هم ساده کنیم (زیرا از علامت مجهول نامطلع هستیم و می‌دانیم مجهول منفی می‌تواند جهت نامعادله را عوض کند.)
بع د از بین بردن مخرج در صورت امکان، همه عبارت را به یک طرف منتقل کرده و سپس تعیین علامت می‌کنیم

$$5(x^2+2x-3) > 3(x^2-6x+5) \to 5x^2+10x-15 > 3x^2-18x+15 \to 2x^2+28x-30 > 0$$

$$\to x^2+14x-15 > 0 \quad \underline{x_1 = 1, x_2 = -15}$$

$\Rightarrow$ بازه جواب : $(-\infty, -15) \cup (1, +\infty)$

x	$-\infty$	-15		۱	$+\infty$
$p(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

سوال ۴۴ نامعادله قدر مطلقی بنویسید که مجموعه جواب آن بازه $(1,9)$ باشد. (فرزانگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: اگر در صورت سوال یک بازهٔ جواب داده شده بود به احتمال زیاد معادله قدر مطلقی به صورت $|x| < a$ و اگر دو بازهٔ جواب داده شده بود به احتمال زیاد معادله به شکل $|x| > a$ خواهد بود

در این سوال داریم $1 < x < 9$ پس معادله قدر مطلقی به صورت $|x| < a$ بوده است.

مثال روبه‌رو را در نظر بگیرید:

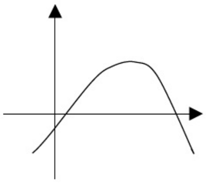
$$|x+b| < a \to -a < x+b < a \Rightarrow -a-b < x < a-b$$

پس نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} -a-b = 1 \\ a-b = 9 \end{cases} \to -2b = 10 \Rightarrow b = -5, a = 4$$

در پایان: $|x+b| < a \to |x-5| < 4$

سوال ۴۵ **با توجه به سهمی مقابل، در معادله استاندارد آن، علامت ضرایب a، b و c را بیابید.**



پاسخ: ۱- a: اگر دهانه سهمی به بالا $\leftarrow a>۰$ و اگر دهانه سهمی به پایین $\leftarrow a<۰$

۲- b: با استفاده از معادله $x=\dfrac{-b}{۲a}$ و توجه به علامت طول راس و علامت a.

۳- c: همان محل برخورد سهمی با محور yها   ۱- سهمی رو به پایین پس علامت a منفی.

۲- محل برخورد با محور yها منفی پس علامت c منفی.

۳- راس سهمی مثبت و a منفی پس با توجه به $A:\dfrac{-b}{۲a}$ علامت b مثبت.

سوال ۴۶ **نامعادله روبه‌رو را حل کنید.**

$$۲<\frac{(۴x+۳)^۲}{۲}<۸$$

پاسخ: در نامعادله‌های دوگانه که در هر دو طرف عدد داریم نیازی به جدا کردن نامعادله‌ها نیست و فقط هر کاری که برای ساده کردن عبارت جبری انجام می‌دهیم روی آن اعداد هم پیاده می‌کنیم

$$\xrightarrow{\times ۲} ۴<(۴x+۳)^۲<۱۶ \rightarrow (۲<|۴x+۳|<۴)\begin{cases} ۲<۴x+۳<۴ \\ -۴<۴x+۳<-۲ \end{cases}$$

$$۲<\frac{(۴x+۳)^۲}{۲}<۸ \rightarrow ۴<(۴x+۳)^۲<۱۶$$

از آنجا که $(۴x+۳)$ به توان ۲ رسیده نمی‌دانیم

در اصل علامت مثبت داشته یا منفی. پس باید هر دو حالت را در نظر بگیریم.

$$\begin{cases} ۲<۴x+۳<۴ \rightarrow -۱<۴x<۱ \rightarrow \frac{-۱}{۴}<x<\frac{۱}{۴} \\ -۴<۴x+۳<-۲ \rightarrow -۷<۴x<-۵ \rightarrow \frac{-۷}{۴}<x<\frac{-۵}{۴} \end{cases} \rightarrow x\in\left\{\left(\frac{-۱}{۴},\frac{۱}{۴}\right)\cup\left(\frac{-۷}{۴},\frac{-۵}{۴}\right)\right\}$$

سوال ۴۷ **نامعادله زیر را حل کرده و جواب را به صورت بازه نشان دهید.**

$$\frac{(x^۲+x+۶)(x-۱)^۹}{x^۲+|x|}\le ۰$$

پاسخ: در تعیین علامتها حواستان به ۳ چیز باشد

۱- توان فرد تأثیری در علامت عبارت ندارد اما توان زوج علامت بعد و قبل ریشه را مثبت می‌کند.

۲- علامت قبل و بعد ریشه درون قدر مطلق مثبت است.

۳- ریشه‌های مخرج کل عبارت را تعریف نشده می‌کنند.

$$\frac{\overbrace{x^۲+x+۶}^{\text{بدون ریشه}}\ \overbrace{(x-۱)^۹}^{x=۱}}{\underbrace{x^۲}_{x=۰}+\underbrace{|x|}_{x=۰}}\le ۰$$

x	$-\infty$	۰		۱	$+\infty$
$x^۲+x+۶$	+		+		+
$(x-۱)^۹$	−		−	۰	+
$x^۲$	+	۰	+		+
$\|x\|$	+	۰	+		+
$p(x)$	−	ت ن	−	۰	+

بازه جواب : $(-\infty,۱]-\{۰\}$

سوال ۴۸ **نامعادله زیر را حل کرده و پاسخ را به صورت بازه نمایش دهید.**

$$\frac{x}{x-1} \le \frac{x+1}{x-2}$$

پاسخ: در نامعادلاتی که مخرج کسر(ها) مجهول است نمی‌توان آن را مستقیماً در صورت طرف دیگر ضرب کرد و در معادله قرار داد؛ زیرا علامت آن معلوم نیست و اگر منفی باشد جهت نامعادله باید عوض می‌شده است.

$$\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x-2} \le 0 \rightarrow \frac{x^2-2x-x^2+1}{(x-1)(x-2)} \le 0 \Rightarrow \frac{\overbrace{-2x+1}^{x=\frac{1}{2}}}{\underbrace{(x-1)}_{x=1}\underbrace{(x-2)}_{x=2}}$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$		۱		۲	$+\infty$
$-2x+1$	+	۰	−		−		−
$x-1$	−		−	۰	+		+
$x-2$	−		−		−	۰	+
$p(x)$	+	۰	−	ت ن	+	ت ن	−

بازه جواب : $\left[\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty)$

سوال ۴۹ **الف) درجه عبارت جبری، .... از x است که در عبارت وجود دارد.**

ب) تعداد ریشه‌های یک معادله درجه دوم می‌تواند ....، .... یا .... باشد.

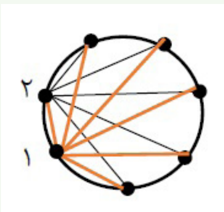
ج) با توجه به معادله $y=a(x-h)^2+k$، محور تقارن سهمی خط عمودی .... می‌باشد.

د) در یک سهمی اگر $\Delta > 0$ باشد نمودار به .... قسمت تقسیم می‌شود که علامت قسمت .... متفاوت است

پاسخ: الف) بزرگترین توانی　　ب) ۰، ۱ یا ۲　　ج) $x=h$　　د) ۳- میانی

سوال ۵۰ **در یک لیگ فوتبال جمعاً ۱۱۰ بازی انجام شده است. اگر هر دو تیم، دوبار با یکدیگر مسابقه داده باشند، تعداد تیمهای حاضر در این لیگ چند است و رابطه بین تعداد تیمها و تعداد بازیها چیست؟**

پاسخ: اگر در یک مجموعه، تعدادی عضو داشته باشیم، و هر دو عضو یکبار با هم ارتباط برقرار کنند (دست بدهند، بازی کنند، ....)، تصور می‌کنیم با هر ارتباط بین دو عضو پُلی به وجود می‌آید. پس اگر عضو ۱ به n عضو دیگر پُل بزند، عضو ۲ به n-۱ عضو دیگر پل میزند. (زیرا پُل بین عضو ۱ و ۲ در بین پُلهای ۱ به اعضای دیگر محاسبه شده است) برای درک بهتر به شکل روبرو دقت کنید:



عضو ۱ ← ۶ پُل زده　　　　عضو ۲ ← ۵ پُل زده

هر دو تیم با هم دوبار مسابقه دادند و ۱۱۰ بازی انجام شده. پس اگر هر دو تیم یک بار بازی می‌کردند ۵۵ مسابقه برگزار میشد.

$$n+n-1+n-2+....+2+1=55 \rightarrow \frac{(1+n)\times n}{2}=55$$

$$\rightarrow n(n+1)=110 \rightarrow n=10$$

پس ۱۰ تیم در این لیگ شرکت کرده‌اند.

فصل ۵

سوال ۵۱ **الف) تابعی که دامنه و بردش برابر باشد یک تابع .... است.** (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

ب) اگر f یک تابع خطی باشد که $f(3)=8$ و $f(2)=5$ باشند، .... = $f(x)$. (نصیری لارستان خرداد ۱۴۰۲)

ج) هنگامی مجموعهای از زوجهای مرتب تابع میشوند که ....، همگی .... باشند. (تالیفی)

د) در انتقال افقی یک تابع، دامنه آن .... و برد آن .... (از لحاظ تغییر کردن) (تالیفی)

پاسخ: الف) در تابع همانی، ورودی هر چه باشد خروجی هم همان است. (دامنه و برد برابر) اما در تابع ثابت، خروجی تابع به ازای هرگونه ورودی، ثابت است و تغییری نمی‌کند

ب) برای پیدا کردن ضابطه توابع خطی، با داشتن دو نقطه از تابع و جایگذاری آن‌ها در معادله کلی، $f(x)=ax+b$ می‌توان به ضابطه دست یافت

ج) دقت داشته باشید که در یک تابع، محور xها معادل مولفه‌های اول زوجهای مرتب، و محور yها معادل مولفه‌های دوم زوجهای مرتب هستند. از آنجا که در یک تابع باید به هر x فقط یک y تعلق بگیرد، هیچ دو زوج مرتبی با مولفه‌های دوم متفاوت نباید مولفه‌های اول یکسان داشته باشند

د) انتقال افقی تابع یعنی حرکت آن به چپ و راست (راستای محور xها)

میدانیم که دامنه یک تابع در محور xها و برد آن در محور yها تعریف می‌شود.

الف) همانی

ب)
$$\left.\begin{array}{l} f(۳)=۳a+b=۸ \\ f(۲)=۲a+b=۵ \end{array}\right\} a=۳, b=-۱ \Rightarrow f(x)=۳x-۱$$

ج) مولفه‌های اول – متفاوت

د) تغییر می‌کند - ثابت می‌ماند.

سوال ۵۲ مقادیر x و y را طوری بیابید که رابطه‌ی زیر تابع شود. (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

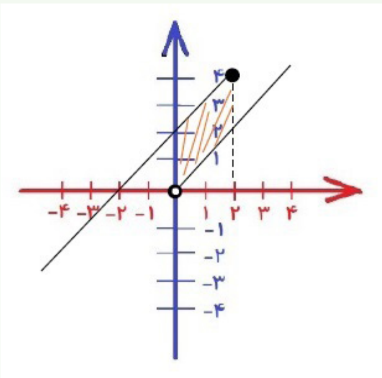
$$f=\{(-۱,۲x-y),(۲,۴),(-۱,-۱),(x,x-y),(۲,x+y)\}$$

پاسخ: مجموعه زوجهای مرتب زمانی تابع است که همه مولفه‌های اول با هم متفاوت باشند. اگر در دو زوج مرتب مولفه‌های اول یکسان داشتیم مولفه‌های دوم نیز قطعاً برابرند

$$\left.\begin{array}{l} (-۱,۲x-y)=(-۱,\ -۱)\to ۲x-y=-۱ \\ (۲,۴)=(۲,x+y)\to x+y=۴ \end{array}\right\} ۳x=۳\to x=۱, y=۳$$

سوال ۵۳ آیا معادله $f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ x+۲ & x\le ۲\end{cases}$ یک تابع است؟ چرا؟ (فرزانگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در حل مسائل توابع چند ضابطه‌ای بهترین راه کشیدن نمودار است. اما برای حل سریع‌تر و خلاصه‌تر، سعی کنید ثابت کنید که به یک x، دو y نسبت داده شده تا تابع نبودن ضابطه معلوم شود.



با توجه به نمودار مقابل:

در بازه $(۰,۲]$ به یک x می‌توان دو y نسبت داد.

(به بیان دیگر، یک خط عمودی در بازه دامنه، نمودار را در دو جا قطع می‌کند)

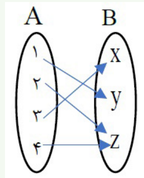
پس این معادله ضابطه یک تابع نیست.

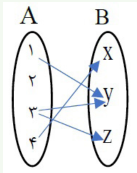
سوال ۵۴ مجموعه‌های $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{x,y,z\}$ را در نظر بگیرید. به کمک نمودار پیکانی:

الف) رابطه‌ای از A به B بکشید که تابع باشد.

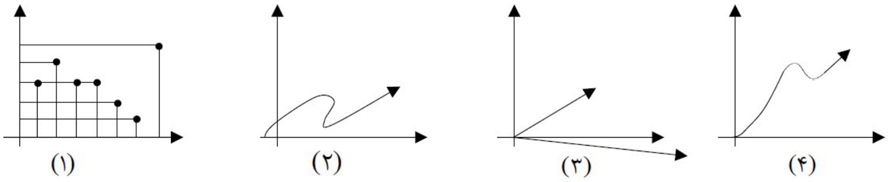
ب) رابطه‌ای از A به B بکشید که تابع نباشد.

پاسـخ: در رســم نمودارهــای پیــکانی یــک تابــع فقــط باید توجه داشــته باشید کــه از همه عضوهــای مجموعه مبــدأ (A)، یــکی و فقط یکی پیــکان بیــرون بزنــد. بــه عضــو مجموعه مقصــد (B) می‌توانــد پیکانی وارد نشــود یا بیــش از یک پیکان وارد شــود

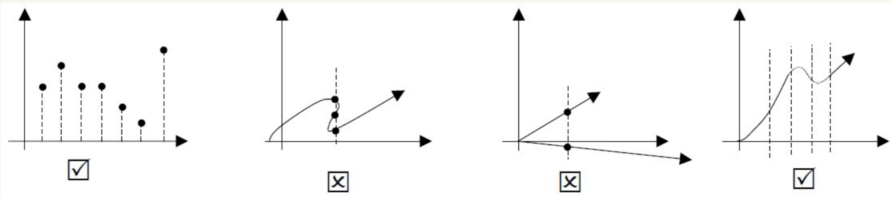
الف) 

ب) 

سوال ۵۵ **کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ (ممکن است بیش از یک مورد باشد)**

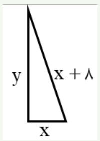


پاسـخ: راحت‌تریــن راه بــرای تشــخیص تابــع بــودن یــا نبــودن یــک نمــودار، کشــیدن خطهــای عمــودی روی آن اســت. اگــر یــک خــط عمــودی نمــودار را در دو نقطــه قطــع کنــد، آن نمــودار تابــع نیســت



سوال ۵۶ **در یــک مثلث قائم‌الزاویه، طول وتر ۸ واحد بیشتر از طول کوچک‌ترین ضلع قائمه است. رابطه‌ای ریاضی بنویسید که مساحت این مثلث را برحسب کوچک‌ترین ضلع قائمه آن بیان کند**

پاسـخ: بــرای حــل اینگونــه ســوالات، رســم شــکل و پیــاده کــردن اطلاعــات ســوال روی آن، بهتریــن راه اســت. ضلــع مجهــول را براســاس داده‌هــا بــه دســت می‌آوریــم و ســپس آن را در معادلــه خواســته شــده قــرار می‌دهیــم



$$\boxed{۱}\quad x^۲ + y^۲ = (x+۸)^۲ = x^۲ + ۱۶x + ۶۴ \rightarrow y^۲ = ۱۶x + ۶۴ \Rightarrow y = \sqrt{۱۶x + ۶۴}$$

مساحت مثلث : $\frac{xy}{۲} \xrightarrow{\boxed{۱}} \frac{x}{۲}\sqrt{۱۶x+۶۴} = ۲x\sqrt{x+4}$

سوال ۵۷ **اگر در یک تابع خطی $f(۰)=۳$ ، $f(۲)=۵$ باشد، ابتدا ضابطه‌این تابع خطی را بنویسید سپس $f(f(۱))$ را به دست آورید.**

(سلاله کرج خرداد ۱۴۰۲)

پاسـخ: توابع خطی. معادلهٔ کلی:

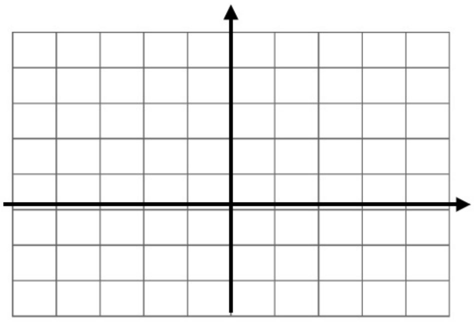
$$f(x) = \overset{\text{شیب خط}}{\vec{a}}\; x + \overset{\text{عرض از مبدأ}}{\vec{b}}$$

اگر تابع خطی از نقطه (c,d) عبور کند می‌توان c را به جای x و d را به جای $f(x)$ صدق داد.

$$\left.\begin{matrix} f(۰) = a(۰) + b = ۳ \\ f(۲) = ۲a + b = ۵ \end{matrix}\right\} b = ۳, a = ۱ \Rightarrow f(x) = x + ۳$$

$$f(۱) = ۱ + ۳ = ۴ \rightarrow f(f(۱)) = f(۴) = ۴ + ۳ = ۷$$

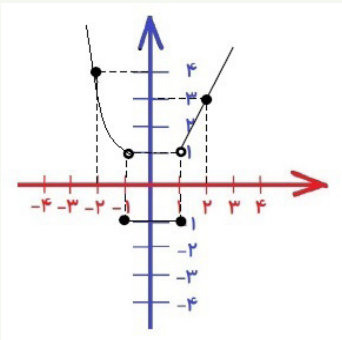
سوال ۵۸ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x<-1 \\ -1 & -1\le x\le 1 \\ 2x-1 & x>1 \end{cases}$ را رسم کنید. (سما زنجان خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ: برای رسم نمودار یک تابع، دو نقطه از دامنه را مشخص کرده و در معادله قرار می‌دهیم تا دو نقطه $A(x_1,y_1)$ و $B(x_2,y_2)$ داشته باشیم. پس با توجه به معادله آنها را به هم وصل کرده و نمودار را تکمیل می‌کنیم.

در توابع چند ضابطه‌ای این کار را برای هر بازه جداگانه در دامنه تکرار می‌کنیم.

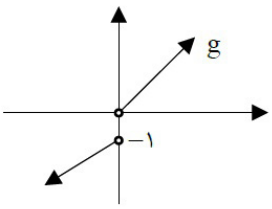
$$\begin{cases} x^2 & x<-1 \to (-1,1),(-2,4) \\ -1 & -1\le x\le 1 \to (-1,-1),(1,-1) \\ 2x-1 & x>1 \to (1,1),(2,3) \end{cases}$$



همانطور که می‌بینید در رسم توابع چند ضابطه‌ای بهترین اعداد دامنه برای نقطه‌گذاری، اعداد مشترک بین بازه‌های بین دو معادله مختلف هستند. (مثلاً در این سوال ۱ و ۱-)

ولی اگر اعداد مشترک را نداشتیم بهترین گزینه‌ها اعداد ابتدا و انتهای هر بازه است.

سوال ۵۹ با توجه به نمودار تابع زیر، دامنه و برد را حساب کنید. (اندیشه های شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ: محاسبه دامنه تابع از روی نمودار:

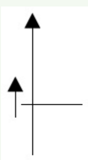
۱- ابتدا و انتهای بازه دامنه را مشخص می‌کنیم.

۲- در بازه این دامنه خطی عمودی را از چپ به راست حرکت می‌دهیم:

۳- اگر این خط عمودی به نقطه، یا بازه‌ای رسید، که نمودار در آن وجود نداشت، آن نقطه یا بازه را از دامنه حذف می‌کنیم.

محاسبه برد تابع از روی نمودار:

کاملاً شبیه محاسبه دامنه عمل می‌کنیم. تنها تفاوت در مرحله دوم است که یک خط افقی را از پایین به بالا حرکت می‌دهیم.



دامنه: خط عمودی در نقطه ۰ (صفر) روی نمودار نیست: $D_g=R-\{0\}$ برد: خط افقی در بازه $[-1,0]$ روی نمودار نیست:

$R_g=R-[-1,0]$

سوال ۶۰ **نمودار تابع** $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۱ & x\geq ۰ \\ -۲x-۴ & -۱\leq x<۰ \end{cases}$ **را رسم کرده، دامنه و برد تابع را معلوم کنید.**

(فرزانگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: محاسبه دامنه تابع بدون نمودار:

۱- در توابع چند ضابطه‌ای به بازه‌ها و علامت‌های $\leq$ و $<$ دقت کنید.

۲- اگر در معادله تابعی کسری وجود داشت که مخرج آن دارای x بود، ریشه مخرج را از بازه دامنه حذف کنید. (چون مخرج صفر معادله تابع را تعریف نشده می‌کند.)

۳- به محدودیت‌های دامنه‌ای که در صورت سوال قرار داده شده توجه کنید.

محاسبه برد تابع بدون نمودار: شکل کلی و تقریبی نمودار در بازه دامنه‌ی آن را تصور کنید. محور yها را در نظر بگیرید تا بفهمید به صورت کلی برد تابع به چه شکلی است. سپس محاسبات لازم را از روی دامنه و معادله انجام دهید. دقت کنید که اگر نقاطی از دامنه حذف شده بودند، y آن نقاط از برد نیز حذف کنید

دامنه تابع:

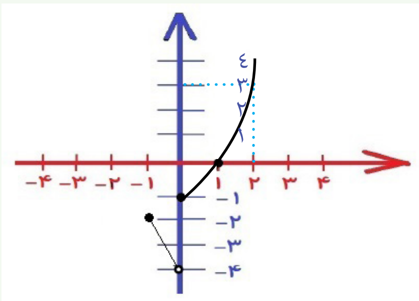
$$D_{f(x)}=[-۱,+\infty) \leftarrow [-۱,۰)\cup[۰,+\infty)$$

برد تابع: تصور کلی $x^{۲}-۱ \leftarrow$  تصور کلی $-۲x-۴ \leftarrow$ 

$$x^{۲}-۱\xrightarrow{x=۰}۰-۱=-۱\Rightarrow[-۱,+\infty)$$

$$-۲x-۴ \begin{cases} \xrightarrow{x=-۱} ۲-۴=-۲ \\ \xrightarrow{x=۰} ۰-۴=-۴ \end{cases} \Rightarrow (-۴,-۲]$$

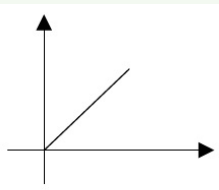
$$\Rightarrow R_{f(x)}=(-۴,-۲]\cup[-۱,+\infty)$$



سوال ۶۱ **تابع** $f(x)=\dfrac{x^{۳}-۲x^{۲}+ax+b}{g(x)}$ **یک تابع همانی با دامنه** $R-\{۱\}$ **است. مقادیر a و b را بیابید.**

(فرزانگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در توابع همانی، ورودی هر چه باشد خروجی نیز همان خواهد بود. $f(x)=x$



با توجه به توضیحات باید تحلیل کرد که چگونه $\dfrac{x^{۳}-۲x^{۲}+ax+b}{g(x)}$ را می‌توان تبدیل به x کرد.

عبارت صورت کسر یک عبارت درجه سوم است، پس یعنی x در یک عبارت درجه دوم ضرب شده، اما این عبارت درجه دوم به گونه‌ای دوباره ازبین رفته (چون یک تابع همانی درجه اول است)

پس نتیجه میگیریم $g(x)$ همان عبارت درجه دومی (۱) است که در صورت هم وجود دارد (صورت با مخرج زده می‌شود و دوباره x را تحویل میگیریم)

همچنین با توجه به صورت سوال ($D_f=R-\{۱\}$) ریشه مخرج $g(x)$ برابر یک (۲) است.

تابع $g(x)$ ریشه مضاعف ۱ دارد.

$$\xrightarrow{۱,۲} g(x)=(x-۱)^{۲}=x^{۲}-۲x+۱\rightarrow\frac{x(x^{۲}-۲x+۱)}{g(x)}=\frac{x^{۳}-۲x^{۲}+x}{g(x)}$$

با توجه به معادله به دست آمده: $a=۱, b=۰$

سوال ۶۲ **اگر تابع f ثابت و** $f(۲)=۵$ **و تابع** $g=\left\{(۵,a-۱),(-۱,-۱),(\frac{b}{۳},۲)\right\}$ **همانی باشد، حاصل** $f(b-۲)+g(\frac{a}{۲})$ **را بیابید.**

(فرزانگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در یک تابع ثابت، مقدار تابع (خروجی) به ازای همه ورودی‌ها یک عدد ثابت خواهد بود. $f(x)=k$

① $f(x)$ تابع ثابت و $f(۲)=۵ \Rightarrow f(x)=۵ \Rightarrow f(b-۲)=۵$

$g(x)$ تابع همانی ($f(x)=x$)

$۵=a-۱\rightarrow a=۶,\quad \frac{b}{۳}=۲\rightarrow b=۶$

② $g(\frac{a}{۲})=g(۳)=۳$

$\longrightarrow$ ①② $f(b-۲)+g\left(\frac{a}{۲}\right)=f(۴)+g(۳)$

$۵+۳=۸$

سوال ۶۳ **با استفاده از نمودار** $f(x)=|x|$ **نمودار تابع** $y=۱-|x-۲|$ **را به کمک انتقال رسم کنید.**

(اندیشههای شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: رسم توابع به کمک انتقال:

۱- انتقال عمودی: $f(x)\pm K$

با اضافه کردن عدد K به کل ضابطه نمودار ($f(x)$)، نمودار در جهت محور yها به سمت بالا (اگر $K>۰$) و یا پایین (اگر $K<۰$) منتقل می‌شود

نکته: در انتقال عمودی دامنه تابع بدون تغییر مانده اما برد فرق می‌کند.

۲- انتقال افقی: $y=f(x\pm K)$

برای فهم انتقال افقی ابتدا باید توجه داشت که تابع f ضابطه خود را بر هر گونه ورودی به طور تمام و کمال اعمال می‌کند.

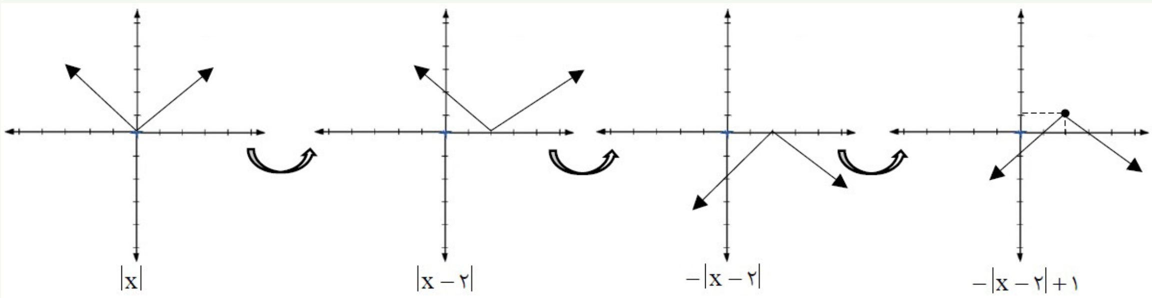
مثلاً اگر $f(x)=x^۲$ پس $f(x+۱)=(x+۱)^۲$. به زبان ساده‌تر اگر ورودی دیگری به جز x داشتیم آن را کامل و بدون جدا کردن اجزایش به جای x جای‌گذاری می‌کنیم

با اضافه کردن عدد K به ورودی نمودار f، نمودار در جهت محور xها به سمت راست (اگر $K<۰$) و یا به سمت چپ (اگر $K>۰$) منتقل می‌شود

نکته: در انتقال افقی برد تابع بدون تغییر مانده اما دامنه فرق می‌کند.

۳- قرینگی: $y=-f(x)$

برای رسم قرینه نمودار $f(x)$ نسبت به محور xها کافی است کل ضابطه را در یک منفی ضرب کنیم. (دامنه ثابت مانده اما برد فرق می‌کند)



سوال ۶۴ **در تابع** $f(x)=\begin{cases}x^۲+ax & x\le ۱\\ -x^۳+۲ax & x\ge ۱\end{cases}$ **، مقدار** $f(\sqrt{۲}-۱)$ **را بیابید.**

(فرزانگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: اگر معادله‌های یک تابع چند ضابطه‌ای دارای مجهول بودند، در اکثر سوالات بازه‌های دامنه دارای اشتراکاتی هستند که با جایگذاری آن‌ها و مساوی قرار دادن ضابطه‌ها، می‌توان مجهول را پیدا کرد

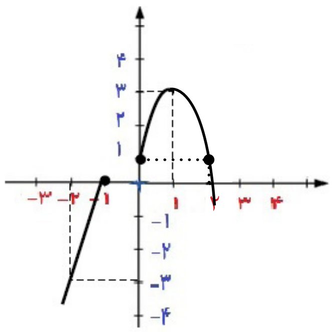
در $f(x)$، $x=1$ در هر دو ضابطه صدق می‌کند یعنی هر دو به ازای ۱ خروجی یکسانی تحویل می‌دهند.

$$\begin{cases} x^2+ax \xrightarrow{x=1} 1+a \\ -x^3+2ax \xrightarrow{x=1} -1+2a \end{cases} \Rightarrow 1+a=2a-1 \to 2=a \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x^2+2x & x\le 1 \\ -x^3+4x & x\ge 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2}-1<1 \to f(\sqrt{2}-1)=(\sqrt{2}-1)^2+2(\sqrt{2}-1)=\cancel{2}-\cancel{2\sqrt{2}}+1+\cancel{2\sqrt{2}}-\cancel{2}=1$$

سوال ۶۵ ضابطه و دامنه و برد تابع f را بیابید.

(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ: بنوشتن ضابطه تابع از روی نمودار آن:

۱- نوع تابع را مشخص می‌کنیم (خطی، درجه ۲، درجه ۳، قدر مطلق)

۲- با توجه به روش‌های انتقال تابع، نمودار را از حالت استاندارد به حالت مورد نظر می‌رسانیم.

* برای انتقال $f(x)$، ترتیب اعمال انتقال به این صورت است:

۱- چپ و راست کردن ۲- اعمال ضریب x ۳- اعمال قرینگی نسبت به محور yها ۴- اعمال قرینگی نسبت به محور xها ۵- اعمال ضریب $f(x)$ ۶- بالا و پایین کردن

$$\overset{4}{-}\overset{5}{a}f(\overset{3}{-}\overset{2}{b}x+\overset{1}{c})+\overset{6}{d}$$

البته این روش پیشرفته‌تری است که در پایه‌های بعد می‌خوانید. سوالات سهمی پایه دهم با استفاده از معادلات $y=a(x-h)^2+K$ یا $y=ax^2+bx+c$ قابل حل هستند

در قسمت خطی این تابع دو نقطه را داریم که برای نوشتن ضابطه کافی هستند: $(-2,-3),(-1,0)$

$$\frac{0-(-3)}{-1-(-2)}=\frac{3}{1}=3 \to f(x)=3x+3$$

برای قسمت سهمی می‌توانیم هم از انتقال استفاده کنیم و هم از فرمول $f(x)=a(x-h)^2+K$ که در واقع همان فرمول آماده انتقال است. نقطه $(0,1)$ را داریم و برای سهمی $(1,3)$ است

$$1=a(0-1)^2+3 \to 1=a+3 \to a=-2 \to f(x)=-2(x-1)^2+3=-2x^2+4x+1$$

$$f(x)=\begin{cases} 3x+3 & x\le -1 \\ -2x^2+4x+1 & x\ge 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} D_f=R-(-1 \text{ و } 0) \\ D_f=(-\infty \text{ و } 3] \end{array}$$

سوال ۶۶ اگر f یک تابع خطی باشد که در آن $f(2)=0$ و نمودار آن از نقطه $(1,5)$ نیز بگذرد، مجموعه جواب نامعادله $f(\frac{2}{x})<0$ را معلوم کنید.

(فرزانگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در مفهوم تابع خواندیم که تابع مانند یک دستگاه عمل می‌کند. ورودی را می‌گیرد، اعمالی روی آن انجام می‌دهد، و خروجی را تحویل می‌دهد. بنابر این به طور مثال اگر تابع f با ورودی x، $ax+b$ را تحویل می‌دهد، با ورودی $x^۳$، $ax^۳+b$ را تحویل می‌دهد. به بیانی دیگر هر تغییری بر x روی ضابطه $f(x)$ اعمال می‌شود.

تابع خطی داریم که دو نقطه از آن معلوم هستند: $(۱,۵),(۲,۰)$

$$\frac{۵-۰}{۱-۲}=-۵\to f(x)=-۵x+۱۰$$

$f(\frac{۲}{x})$ یعنی به جای همه xها $\frac{۲}{x}$ می‌گذاریم:

$$f(\frac{۲}{x})=-۵(\frac{۲}{x})+۱۰=\frac{-۱۰+۱۰x}{x}$$

$$\to\frac{۱۰x-۱۰}{x}<۰\to$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
10x-10	-		-	0	+
x	-	0	+		+
$f(x)$	+	ت ن	-	0	+

بازه جواب: $(۰,۱)\Leftarrow$

سوال ۶۷ اگر $f(۵x-۲)=x^۲+۱$ باشد حاصل عبارت مقابل را بیابید.

$$\frac{f(۸)-f(۳)}{۱+f(-۷)}=$$

(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: گاهی در تابع، ورودی x خالص نیست و ضریب یا چیزهای دیگری به همراه دارد. در این صورت اگر ورودی خاصی داشتیم که جواب آن را میخواستیم (مثلاً اعداد)، به سادگی ورودی تابع f را برابر آن عدد قرار می‌دهیم و x خالص را به دست می‌آوریم؛ سپس x را در ضابطه تابع جایگذاری می‌کنیم. (این سوالات در اصل نوعی از ترکیب توابع هستند که در سال‌های بعد راه‌حل زیباتر و جبری‌تر آن‌ها را یاد می‌گیرید.)

$$\begin{cases} f(۸)\to ۵x-۲=۸\to x=۲\to x^۲+۱=۵ \\ f(۳)\to ۵x-۲=۳\to x=۱\to x^۲+۱=۲ \\ f(-۷)\to ۵x-۲=-۷\to x=-۱\to x^۲+۱=۲ \end{cases}$$

$$\frac{f(۸)-f(۳)}{۱+f(-۷)}=\frac{۵-۲}{۱+۲}=۱$$

فصل ۶ و ۷

سوال ۶۸ با استفاده از ارقام ۱،۲،۳،۴،۵،۶،۷،۸،۹ چند عدد ۹ رقمی با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

(شهید بهشتی بهشهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل دو مرحله باشد به گونه‌ای که برای انجام مرحله اول m روش، و برای هر کدام از این m روش، بتوان مرحله دوم را به n روش انجام داد، برای انجام کل کار $m\times n$ روش وجود دارد

تعقیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k روش باشد، و برای انجام مرحله اول $m_۱$ روش، برای مرحله دوم $m_۲$ روش، ... و برای مرحله kام m_k روش وجود داشته باشد، برای انجام کل کار $m_۱\times m_۲\times\ldots\times m_k$ روش وجود دارد

برای اولین رقم از سمت چپ ۹ گزینه داریم. یک رقم در آن جایگاه قرار می‌دهیم. پس برای دومین رقم یک گزینه را از دست داده‌ایم و ۸ گزینه دیگر داریم. به همین ترتیب تا نهمین رقم پیش می‌رویم

$$۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۹!$$

سوال ۶۹ با ارقام ۰ و ۳ و ۲ و ۵ و ۴ چند عدد ۴ رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت؟ (سلاله کرج خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در مسائلی که از اصول ضرب و جمع به صورت جداگانه استفاده می‌کنیم، اجزاء مختلف از هم مستقل هستند. اما در برخی مسائل دیگر، حالت‌های ممکن برای یک جزء مربوط و مشروط به حالت‌هایی هستند که ممکن است در جزئی دیگر اتفاق بیفتد. برای حل چنین سوالاتی ابتدا باید جزء‌های مربوط را تشخیص داد، حالت‌های جزئی که دیگری به آن بستگی دارد را جدا کرد. سپس به طور جداگانه برای هر حالت اصل ضرب را به کار برده و در نهایت اصل جمع را روی تمام جواب‌های به دست آمده اعمال می‌کنیم.در این سوال، جای‌گذاری ارقام اول و دوم و سوم از چپ مشروط به رقم یکان است، چون زوج بودن عدد به یکان آن بستگی دارد. بر این اساس یکان‌های زوج را جدا می‌کنیم

برای هزارگان ۴ انتخاب داریم. با اصل ضرب ادامه می‌دهیم.

$$۴\times۳\times۲\times\underbrace{۱}_{۰}=۲۴$$

برای هزارگان ۳ انتخاب داریم چون صفر نمی‌تواند اولین رقم

$$\begin{cases}۳\times۳\times۲\times\underbrace{۱}_{۲}=۱۸\\ ۳\times۳\times۲\times\underbrace{۱}_{۴}=۱۸\end{cases}$$

سمت چپ باشد. برای صدگان هم ۳ رقم داریم چون یک رقم در هزارگان استفاده شده اما حالا می‌توانیم از صفر هم استفاده کنیم. با اصل جمع کل حالت‌ها را به دست می‌آوریم: $۲۴+۱۸+۱۸=۶۰$

✡ کسانی که دستشان در حل این سوالات گرم شده می‌دانند که فقط صفر یک استثناست و بقیه یکان‌ها را می‌توان همزمان در یک خانه قرار داد: $۳\times۳\times۲\times\underbrace{۲}_{۲,۴}$

سوال ۷۰ **چند عدد شش رقمی بدون تکرار ارقام با اعداد ۱ تا ۶ می‌توان نوشت که در آنها ارقام ۲ و ۳ کنار هم نباشند.** (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: • متمم: گاهی آسان‌تر است که به جای محاسبه تمام حالت‌های ممکن (مطلوب)، حالت‌های نامطلوب را بشماریم و از تعداد کل حالت‌های انجام کاری کم کنیم

• جایگشت‌های طنابی: در یک حالت خاص جایگشت، چند شیء متمایز باید همیشه کنار هم باشند.

برای حل این مسائل تصور می‌کنیم این چند شیء را با طناب به هم می‌بندیم و همه آنها را به عنوان یک شیء با اشیاء دیگر جایگشت می‌دهیم. دقت دارید که گاهی باید جایگشت اشیاء طناب پیچ شده را با هم نیز حساب کرد. (اصل ضرب) بهترین راه این است که تعداد کل حالت‌ها، و تعداد حالت‌هایی که ۲ و ۳ کنار هم هستند را محاسبه کنیم و سپس آنها را از هم کم کنیم. ۲ و ۳ را یک بسته در نظر میگیریم پس ۵ شیء داریم: $۵!$

۲ و ۳ طناب پیچ شده ممکن است (۳,۲) یا (۲,۳) باشند و این اهمیت دارد: $۲\times۵!$

تعداد کل حالت‌ها $۶!$ است. پس: $۶!-(۲\times۵!)=۷۲۰-۲۴۰=۴۸۰$

سوال ۷۱ **با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف:**

الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان نوشت که در آن حروف کلمه «گردی» کنار هم باشند؟ (سلاله کرج خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعداد جایگشتهای n شیء متمایز $=n!$

قسمت دوم، جایگشت طنابی است که در سوال قبل توضیح داده شد.

الف) $۸!$

ب) اگر «گردی» را یک بسته محسوب کنیم، جایگشت اولیه می‌شود $۵!$. (ج، هـ، ن، ا، گردی). از آنجا که ترتیب حروف در بسته اهمیتی ندارد، جایگشت آنها می‌شود $۴!$ (گ، د، ر، ی) $\Leftarrow ۵!\times۴!$

سوال ۷۲ **۴ دانش‌آموز و ۵ معلم در یک صف ایستاده‌اند. تعداد حالت‌هایی را به دست آورید که:**

الف) معلم‌ها و دانش‌آموزها یک در میان ایستاده باشند.

ب) نفر وسط معلم باشد.

ج) معلم‌ها کنار هم و دانش‌آموزان کنار هم باشند. (شهید بهشتی بهشهر خرداد ۱۴۰۲ با تغییر)

پاسخ: در جایگشت‌های یک در میان، عمدتاً دو نوع شیء داریم. اگر تعداد یک نوع شیء از تعداد نوع دیگر، ۱ واحد بیشتر باشد، نوع بیشتر را (مثلاً □) در اطراف میچینیم و جایگشت می‌دهیم؛ و نوع کمتر (مثلاً △) را بین آنها چیده و جایگشت می‌دهیم: □△□△□△□

اگر تعداد اعضای هر دو نوع برابر باشد، دو حالت داریم: △□△□ یا □△□△ که برای محاسبه تعداد حالت‌ها، جایگشت هر دو نوع را حساب کرده ضربدر ۲ می‌کنیم.

جمع‌بندی:

۱- تعداد جایگشتهای یک در میان n چیز متمایز و $(n-۱)$ چیز متمایز دیگر: $n!(n-۱)!$

۲- تعداد جایگشت‌های یک در میان n چیز متمایز و (n) چیز متمایز دیگر: $(۲)(n!)(n!)$

الف) با توجه به توضیحات: $۴!\times ۵!$

ب) کلاً ۹ نفر در صف داریم. نفر وسط (یعنی پنجم) که معلم است ۵ حالت دارد. ۸ جایگاه دیگر در صف می‌تواند به معلم یا دانش‌آموز اختصاص داشته باشد: $۵\times ۸!$

ج) دو بسته داریم. در یک بسته جایگشت ۴ دانش‌آموز و در بسته دیگر جایگشت ۵ معلم داریم: $۵!\times ۴!\times ۲!$

سوال ۷۳ **اگر ۳ مهره قرمز، ۴ مهره آبی، ۵ مهره زرد و ۲ مهره سبز داشته باشیم؛ کنار هم چیدن این مهره‌ها چند حالت به وجود می‌آورد؟**

پاسخ: اگر در بین n شیء، اشیایی داشتیم که تکراری بودند، یعنی اگر جای آنها را با هم عوض کنیم، حالت جدیدی از جایگشت پدید نمی‌آید: کل جایگشت‌ها را بر جایگشت اشیای تکراری تقسیم می‌کنیم

تعداد کل مهره‌ها: $۳+۴+۵+۲=۱۴$ جایگشت: $\frac{۱۴!}{۳!\times ۴!\times ۵!\times ۲!}$

توضیح: به عنوان مثال اگر در جایگاه چهارم مهره آبی داشته باشیم، فرقی ندارد که مهره آبی شماره ۱ باشد، یا شماره ۲ یا غیره. بنابراین حالت جدیدی به وجود نمی‌آید

سوال ۷۴ **با حروف کلمه‌ی «جمهوری» و بدون تکرار حروف، چند کلمه‌ی سه حرفی می‌توان نوشت که:**

الف) شامل حرف نقطه دار نباشد.

ب) شامل حرف نقطه‌دار باشد. (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: • جایگشت‌های r شئ از n شئ متمایز:

به طور خلاصه در این مبحث n شئ متمایز داریم که میخواهیم از بین آنها r شئ را انتخاب کنیم و به ترتیب بچینیم. پس در این جایگشت‌ها هم ترتیب و هم انتخاب اشیاء اهمیت دارد

تعداد جایگشت‌های rتایی از n شئ متمایز: $P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$

الف) حرف چ همیشه نقطه‌دار است بنابراین کنار گذاشته می‌شود. حرف (ی) اگر در اول یا وسط کلمه بیاید نقطه‌دار می‌شود. پس دو حالت برای انتخاب از حروف «م، هـ، ر، و، ی» داریم:

۱- از ۴ حرف دیگر (جز چ و ی) ۳ حرف انتخاب کرده و می‌چینیم: $۱: P(۴,۳)=\frac{۴!}{(۴-۳)!}=۴!=۲۴$

۲- حرف «ی» را در جایگاه آخر کلمه‌ی سه حرفی قرار می‌دهیم، و برای دو جایگاه دیگر از ۴ حرف حالت اول استفاده می‌کنیم:

$$۲: P(۴,۲)=\frac{۴!}{(۴-۲)!}=۴\times ۳=۱۲$$

حالا دو حالت را با هم جمع می‌کنیم: ۱ و ۲: $۱۲+۲۴=۳۶$

ب) این بخش در واقع متمم بخش قبلی محسوب می‌شود. پس به جای حساب کردن حالت‌ها در این بخش، تعداد کل حالت‌ها و حالت‌های بخش قبل را از هم کم می‌کنیم

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!}=۶\times ۵\times ۴=۱۲۰\rightarrow ۱۲۰-۳۶=۸۴$$

سوال ۷۵ **در یک کلاس تعدادی از دانش‌آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی‌اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه هستند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند. او این دو نفر را به ۲۸ روش می‌تواند از بین داوطلبان انتخاب کند. تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟** (شهید بهشتی بهشهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعداد ترکیبهای r شئ از n شئ متمایز:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}=\frac{P(n,r)}{r!}$$

در ترکیب برخلاف جایگشت ترتیب انتخاب اشیاء اهمیتی ندارد.

نکته: هر فاکتوریل را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد و آنگونه نوشت: اعداد بزرگتر × فاکتوریل عدد کوچکتر.

$$n!=n(n-۱)!=n(n-۱)(n-۲)!=n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!=\dots$$

$$\frac{n!}{(n-۲)!\times ۲!}=۲۸\rightarrow (n)\times(n-۱)(n-۲)!=۵۶\times(n-۲)!\rightarrow n(n-۱)=۵۶\Rightarrow n=۸$$

سوال ۷۶ **الف) در معادله $\binom{۱۲}{۷}=\binom{۱۲}{۲n-۱}$ چند مقدار برای n وجود دارد؟** (فرزانگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

نکته‌های ترکیب:

$$\binom{n}{1}=n \quad (۱)$$

$$\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \quad (۲)$$

$$\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \quad , \quad \binom{n}{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (۳)$$

(۴) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ ← اگر بخواهیم با مثال توضیح دهیم یعنی حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۶ نفر با حالت‌های کنار گذاشتن ۲ نفر از ۶ نفر برابر است. برای کنار گذاشتن هم باید انتخاب کرد پس $\binom{6}{2}=\binom{6}{4}$

از آنجا که $\binom{12}{7}=\binom{12}{5}$ پس دو حالت وجود دارد:

$$\left.\begin{aligned} 2n-1=7 &\to n=4 \\ 2n-1=5 &\to n=3 \end{aligned}\right\}$$

سوال ۷۷ اگر $P(n,4)=12C(n-2,2)$ باشد، مقدار n را به دست آورید. (اندیشه‌های شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

$$\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{12(n-2)!}{(n-4)!\times 2!}\to 2n!=12(n-2)!\to (n)(n-1)(n-2)!=6(n-2)!\to (n)(n-1)=6\Rightarrow n=3$$

سوال ۷۸ یک آشپز ده نوع ادویه دارد، با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند. این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند هر گاه دو نوع ادویه باشند که با هم نمی‌توانند استفاده شوند؟

(فرزانگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: هرگاه نتوانیم n شیء را با هم در یک بسته قرار دهیم، از راه متمم عمل می‌کنیم. یعنی تعداد حالت‌هایی که آن n شیء درون یک دسته باشند را، از تعداد حالت‌های کل کم می‌کنیم

$$\left.\begin{aligned} &\binom{10}{3}=\frac{10!}{7!\times 3!}=\frac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}=120 \\ &\text{حالات نامطلوب}:\ \binom{8}{1}=8 \end{aligned}\right\} 120-8=112$$

حالات نامطلوب یعنی دو ادویه در بسته هستند و می‌خواهیم از ۸ تای دیگر یکی را به بسته اضافه کنیم.

سوال ۷۹ **۵ جفت کفش داریم. به چند طریق می‌توان ۳ لنگه کفش انتخاب کرد به صورتی که هیچ دو تایی با هم جفت نباشند؟**

پاسخ: برای حل اینگونه مسائل ابتدا به تعداد اشیاء خواسته شده جفت انتخاب می‌کنیم و جدا از بقیه میگذاریم پس توجه می‌کنیم که در هر جفت ۲ انتخاب برای ما وجود دارد. بعد با توجه به اصل ضرب تعداد حالت‌های کل را محاسبه می‌کنیم

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!\times۲!}=\frac{۵\times۴}{۲\times۱}=۱۰$$

هر کدام از این ۳ جفت (که به ۱۰ حالت انتخاب می‌شوند) می‌توان لنگه چپ یا راست را انتخاب کرد.

$$۱۰\times\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}=۸۰$$

سوال ۸۰ **ب) از بین ۴ دانش‌آموز دهم، ۳ دانش‌آموز یازدهم و ۲ دانش‌آموز دوازدهم به چند روش می‌توان انجمن علمی ۵ نفره تشکیل داد به طوری که حداقل سه دانش‌آموز دهمی داشته باشد.** (سما زنجان خرداد ۱۴۰۲)

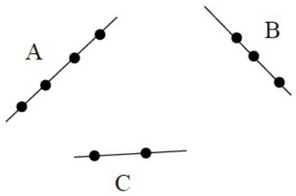
پاسخ: در سؤالاتی که از حداقل و حداکثر استفاده شده، نگاه کنید که آیا محاسبه خود حالت (حداقل و حداکثر) راحتتر است یا متمم آن

محاسبه خود حالت (حداقل) راحتتر است چون کلاً یا ۳ دهمی داریم یا ۴ تا. برای بقیه اعضای انجمن پایه‌ای تعریف نشده پس افراد یازدهم و دوازدهم را با هم نظر می‌گیریم:

$$\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۴}\binom{۵}{۱}=۴۰+۵=۴۵$$

سوال ۸۱ **چند مثلث می‌توان رسم کرد که رأسهای آن روی نقاط مشخص شده در شکل زیر باشد؟**

(فرزانگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ: اگر چند خط داشتیم که روی آنها نقطه کشیده شده، و از ما می‌خواهند شکلی رسم کنیم که رئوس آن روی نقاط مشخص شده باشند. از ترکیب برای پیدا کردن حالت‌های رئوس روی هر خط استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر بیش از دو خط داشته باشیم، ممکن است در رسم شکل اصلاً از برخی خطوط استفاده نشود

اگر هر رأس از یک ضلع باشد:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}=۲۴$$

گر دو رأس روی A و رأس دیگر روی B یا C باشد:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}=۳۰$$

اگر دو رأس روی B و رأس دیگر روی A یا C باشد:

$$\binom{۳}{۲}\binom{۶}{۱}=۱۸$$

اگر دو رأس روی C و رأس دیگر روی Aیا B باشد:

$$\binom{۲}{۲}\binom{۷}{۱}=۷$$

سوال ۸۲ **در یک تیم ۱۰ نفره، میخواهیم یک گروه ۵ نفره را برای مسابقات انتخاب کنیم. اگر A در گروه باشد B هم حتماً هست و C حتماً نیست. اما B و C مشکلی ندارند که همزمان در گروه باشند. به چند حالت می‌توان این گروه ۵ نفره را انتخاب کرد؟**

پاسخ:

✲ اگر در r شیئی که از n تا انتخاب می‌کنیم، باید حتماً k عضو از n حضور داشته باشند: $\binom{n-k}{r-k}$

چون آن k شئ را انتخاب کرده کنار می‌گذاریم و از اشیای باقیمانده $r-k$ دیگر انتخاب می‌کنیم.

✲ اگر در r شیئی که از n تا انتخاب می‌کنیم، k عضو از n حتماً نباید حضور داشته باشد: $\binom{n-k}{r}$

چون k شئ را از محدوده انتخاب خارج کرده و از اشیای باقیمانده r تا انتخاب می‌کنیم.

اگر A در گروه باشد B حتماً هست. پس ۲ نفر از ۵ نفر انتخاب شده‌اند. C حتماً نیست پس از لیست انتخاب‌ها کنار می‌رود. ۷ نفر در تیم می‌مانند که به ۳ نفرشان برای گروه احتیاج داریم: $\binom{۷}{۳}=۳۵$

اگر A در گروه نباشد، از لیست انتخاب‌ها کنار رفته. B و C می‌توانند با هم باشند، پس ۹ نفر در تیم می‌مانند که باید ۵ نفر از بین آنها انتخاب کرد. $\binom{۹}{۵}=۱۲۶$

تعداد کل حالات: $۳۵+۱۲۶=۱۶۱$

سوال ۸۳ **از یک مجموعه سه عضوی به یک مجموعه پنج عضوی چند تابع می‌توان تعریف کرد؟**

(شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: با توجه به فصل تابع میدانیم که باید از هر عضو مجموعه مبدأ یک پیکان خارج شود، اما در مجموعه مقصد ممکن است هیچ، یا بیش از یک پیکان به اعضا وارد شود

پس از هر کدام از سه عضو مجموعه مبدأ باید ۵ پیکان خارج شود: $۵\times۵\times۵=۵^{۳}$

مجموعه مقصد تأثیری در نتیجه نهایی ندارد.

سوال ۸۴ **تاس سالمی را دو بار پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:** (فرزانگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

الف- تعداد اعضای فضای نمونه

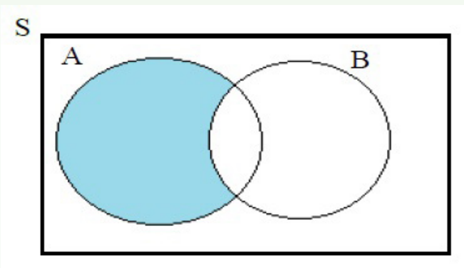
ب- پیشامد A که در آن مجموع اعداد رو شده برابر ۸ باشد.

پ- پیشامد B که در آن حاصل ضرب اعداد داده شده ۱۲ باشد.

ت- پیشامد آن که A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

پاسخ: • فضای نمونه‌ای: در یک آزمایش تصادفی، مجموعه شامل همه حالت‌های ممکن را فضای نمونه‌ای می‌گوییم. فضای نمونه را با S و تعداد اعضای آن را با $n(S)$ نشان می‌دهیم.

تفاضل دو پیشامد $(A-B)$: زمانی که پیشامد A رخ بدهد ولی پیشامد B رخ ندهد (از دو پیشامد فقط A رخ بدهد)



الف) دفعهٔ اول پرتاب، ۶ حالت برای تاس وجود دارد و دفعه دوم هم ۶ حالت:

$۶\times۶=۳۶$

ب) حالت‌ها را مینویسیم: $A=\{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)\}$

پ) $B=\{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۴),(۴,۳)\}$

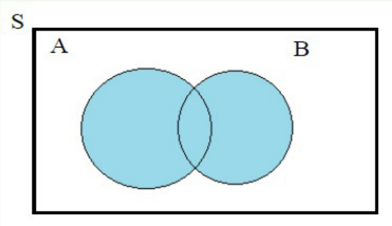
ت) $A-B=\{(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳)\}$ ← A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

سوال ۸۵ **۲ تاس آبی و قرمز را با هم میاندازیم اگر پیشامدهای A و B را به صورت زیر معرفی کنیم: A: پیشامد آن که هر ۲ تاس زوج بیاید و B: پیشامد آن که مجموع ۲ تاس ۷ باشد.** (فرزانگان آمل خرداد ۱۴۰۲)

الف) پیشامد $A \cup B$ را تشکیل دهید.

ب) اگر C: پیشامد آن که دو تاس فرد و مجموع ۶ باشد، بررسی کنید آیا پیشامدهای $A \cup B$ و C ناسازگارند؟

پاسخ: اجتماع دو پیشامد $(A \cup B)$: زمانی که حداقل یکی از دو پیشامد رخ دهد. (یا A رخ بدهد یا B رخ بدهد، یا هر دو رخ بدهند: $(A \cap B)$



• پیشامدهای ناسازگار:

تعریف: هرگاه بین دو پیشامد اشتراک تهی شود $(A \cap B = \varnothing)$ به A و B دو پیشامد ناسازگار گفته می‌شود

الف)

A = (عدد زوج آبی) ۳ × (عدد زوج قرمز) ۳ = ۹ : $\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$

$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

$A \cup B=\{(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶),(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

ب) بله ناسازگارند. $C=\{(۱,۵),(۳,۳),(۵,۱)\} \rightarrow (A \cup B) \cap C=\varnothing$

سوال ۸۶ **یک تاس و یک سکه را پرتاب می‌کنیم. مطلوب است:** (نیکان رامسر خرداد ۱۴۰۲)

الف) فضای نمونه این آزمایش تصادفی

ب) پیشامد A که در آن حداقل عدد رو شده تاس ۳ باشد.

پاسخ: در سوالاتی که از حداقل و حداکثر استفاده شده، نگاه کنید که آیا محاسبه خود حالت (حداقل و حداکثر) راحتتر است یا متمم آن

الف) S={(ر،۱)،(ر،۲)،(ر،۳)،(ر،۴)،(ر،۵)،(ر،۶)،(پ،۱)،(پ،۲)،(پ،۳)،(پ،۴)،(پ،۵)، (پ،۶)}

ب) A={(ر،۳)،(ر،۴)،(ر،۵)،(ر،۶)،(پ،۳)،(پ،۴)،(پ،۵)، (پ،۶)} $(۲\times۶)-(۲\times۲)=۸$

سوال ۸۷ **خانواده‌ای دارای سه فرزند است.**

الف) فضای نمونه را بیابید.

ب) پیشامد اینکه «حداقل ۲ فرزند دختر باشند» را مشخص کنید. (سلاله کرج خرداد ۱۴۰۲)

ج) پیشامد اینکه «فقط دو فرزند اول همجنس باشند» را مشخص کنید. (شهید بهشتی بیرجند خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: فضای نمونه را به سادگی با اصل ضرب به دست آورده و پیشامدهای خواسته شده را می‌نویسیم. بهتر است برای مطمئن شدن محاسبه ریاضی این پیشامد را هم انجام دهید

الف) هر فرزند می‌تواند یا دختر و یا پسر باشد: $۲\times۲\times۲=۸$

ب) g: دختر و b: پسر $\{(g,g,b),(g,b,g),(b,g,g),(g,g,g)\}$

ج) $\{(b,b,g),(g,g,b)\}$

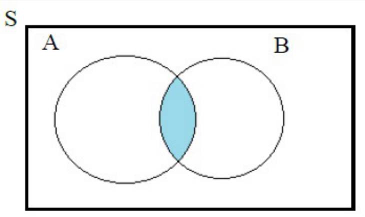
سوال ۸۸ **احتمال اینکه امین در آزمون ریاضی قبول شود ۶۰ درصد و احتمال قبولی او در آزمون رانندگی ۳۰ درصد است. در صورتی که احتمال قبولی امین در حداقل یکی از این دو آزمون برابر ۷۲ درصد باشد، با چه احتمالی در هر دو آزمون قبول خواهد شد؟** (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: احتمال رخ دادن پدیده در حداقل یکی از پیشامدها، یعنی یا پیشامد A، یا پیشامد B، یا هر دو $(A\cap B)$ که به عبارت دیگر همان $P(A\cup B)$ است

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$۷۲\%=۶۰\%+۳۰\%-P(A\cap B)\rightarrow P(A\cap B)=۱۸\%$$

به احتمال ۱۸٪ در هر دو آزمون قبول می‌شود.

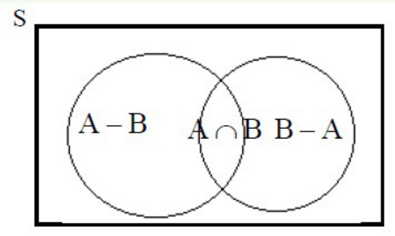
اشتراک دو پیشامد $(A\cap B)$: زمانی که دو پیشامد با هم رخ بدهند (حتماً هم A رخ بدهد هم B رخ بدهد)



سوال ۸۹ احتمال اینکه مریم در درس ریاضی قبول شود ۰/۴۸ و احتمال این که در فیزیک قبول شود ۰/۳۷ و احتمال قبولی در هر دو درس ۰/۲۰ است
احتمال این که فقط در یکی از دو درس قبول شود را بدست آورید. (فرزانگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: اگر A و B دو پیشامد دارای اشتراک باشند، احتمال رخ دادن فقط یکی از آنها برابر است با:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \text{ و } P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$P(A)=۰/۴۸\quad P(B)=۰/۳۷\quad P(A\cap B)=۰/۲۰$$
$$\rightarrow P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)=۰/۴۸+۰/۳۷+۲(۰/۲)=۰/۴۵$$



سوال ۹۰ ۳۵٪ افراد یک جامعه از محصولات شرکت A و ۲۰٪ از محصولات شرکت B و ۱۵٪ از محصولات هر دو شرکت استفاده می‌کنند. فردی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال آن را بیابید که از هیچ یک از محصولات A و B استفاده نکند. (شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: • احتمال رخداد پیشامد $(A\cup B)$:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اگر پیشامدهای A و B ناسازگار باشند.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

احتمال رخ ندادن پیشامد A (A'):

$$\left.\begin{array}{l}A\cup A'=S\\ P(S)=۱\end{array}\right\}P(A)+P(A')=۱\Rightarrow P(A')=۱-P(A)$$

از این رابطه در حالتی استفاده می‌کنیم که محاسبه رخداد A' و سپس کم کردن آن از S، از محاسبه مستقیم A آسانتر باشد.

• احتمال رخداد فقط پیشامد A $(A-B)$:

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$$
$$P(S)=۱۰۰\%\qquad P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۴۰\%$$
$$\rightarrow P(A\cup B)'=P(S)-P(A\cup B)=۶۰\%$$

سوال ۹۱ اگر ۸ نفر که دو نفر آنها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چه قدر احتمال دارد دو برادر کنار یکدیگر نباشند؟ (اندیشه‌های شریف رشت خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: بیشتر سوال‌های احتمال با تسلط بر فصل قبل و انواع روش‌های شمردن حل می‌شوند. مثلاً در این سوال از جایگشت‌های طنابی و قانون متمم کمک می‌گیریم

اگر پیشامد A کنار هم نبودن دو برادر باشد، پیشامد A' کنار هم بودن آنهاست و راحت‌تر محاسبه می‌شود.

$$\left.\begin{array}{l} n(s)=۸! \\ n(A')=۲!\times ۷! \end{array}\right\} P(A')=\frac{۲\times ۷!}{۸!}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

سوال ۹۲ در کیسه‌ای ۷ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره زرد وجود دارد ۳ مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه دقیقاً دو مهره همرنگ باشند چقدر است؟ (فرزانگان قائم شهر خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

دو مهره همرنگ می‌توانند سفید، سیاه یا زد باشند. $n(s)=\binom{۱۴}{۳}$

دو مهره سفید: $\binom{۷}{۱}\binom{۷}{۲}$ دو مهره سیاه: $\binom{۱۰}{۱}\binom{۴}{۲}$ دو مهره زرد: $\binom{۱۱}{۱}\binom{۳}{۲}$

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۴}{۲}\binom{۱۰}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۱۱}{۱}}{\binom{۱۴}{۳}}=\frac{۲۴۰}{۳۶۴}=\frac{۶۰}{۹۱}$$

سوال ۹۳ کیسه‌ای حاوی ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز است. می‌خواهیم از این کیسه ۳ مهره به تصادف خارج کنیم. احتمال آن را بیابید که حداکثر دو مهره سفید باشد. (شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: حداکثر دو مهره سفید، یعنی یا دو مهره سفید، یا یک مهره سفید، یا هیچ مهره سفید. بهتر است که پیشامد متمم را محاسبه کرده و از پیشامد کل کم کنیم

پیشامد متمم (A') یعنی هر سه مهره سفید باشند:

$$n(A')=\binom{۵}{۳}$$

$$P(A')=\frac{\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۱}{۲۲}\to P(A)=۱-\frac{۱}{۲۲}=\frac{۲۱}{۲۲}$$

سوال ۹۴ در یک جعبه ۲ مهره سبز و ۴ مهره قرمز و ۲ مهره سیاه وجود دارد، هر گاه ۲ مهره خارج کنیم با کدام احتمال این دو مهره همرنگ نیستند. (شهید بهشتی بیرجند خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: در این سوال مقدار حل تقریباً یکسان است، چه از متمم برویم و چه خود احتمال A را محاسبه کنیم. به هر حال برای روانتر شدن دستتان از راه متمم استفاده می‌کنیم

$$n(s)=\binom{۸}{۲},\quad n(A')=\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۲\ \text{سبز}}\ \underbrace{\binom{۴}{۲}}_{۴\ \text{قرمز}}\ \underbrace{\binom{۲}{۲}}_{۲\ \text{سیاه}}\to P(A')=\frac{۱+۶+۱}{۲۸}=\frac{۲}{۷}\to P(A)=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

سوال ۹۵ **در یک جعبه ۵ مهره قرمز و ۶ مهره آبی وجود دارد. ۴ مهره انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که حداقل ۲ مهره آبی باشد؟** (شهید نصیری لارستان خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: حداقل ۲مهره آبی یعنی ۲ یا ۳ یا ۴ مهره آبی، پیشامد متمم آن ۰ یا ۱ مهره آبی است پس باز هم از راه متمم استفاده می‌کنیم

$$n(s)=\binom{۱۱}{۴},\quad n(A')=\binom{۵}{۴}+\binom{۶}{۱}\times\binom{۵}{۳}\rightarrow P(A')=\frac{۶۵}{۳۳۰}=\frac{۱۳}{۶۶}$$

$$\rightarrow P(A)=۱-\frac{۱۳}{۶۶}=\frac{۵۳}{۶۶}$$

همانطور که دیدید طراحان سوالات ترم دوم علاقه خاصی به استفاده از قانون متمم، در سوالاتی به شکل‌های مختلف دارند. حتماً این قانون را در دو فصل اخیر زیاد تمرین کنید

سوال ۹۶ **متغیر و انواع آن را به طور کامل تعریف کنید.** (شهید بهشتی سبزوار خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعریف: متغیر، ویژگی از اعضای یک جامعه میباشد که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از عضوی به عضو دیگر تغییر می‌کند

+ مقدار متغیر: عددی که به ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود.

انواع متغیر:

۱- کمّی: قابل اندازه‌گیری هستند. (قد، وزن، دما)

۲- کیفی: قابل اندازه‌گیری نیستند. (گروه خونی، تحصیلات، جنسیت افراد)

سوال ۹۷ **جاهای خالی را پر کنید.**

علم آمار مجموعه روش‌هایی است که شامل ....، ....، .... و در نهایت .... مناسب در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی می‌شود. (سما زنجان خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ: تعریف علم آمار: مجموعه روش‌هایی شامل

۱- جمع‌آوری اعداد و ارقام ۲- سازماندهی و نمایش ۳- تحلیل و تفسیر داده‌ها و ۴- نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی مناسب، در مورد پدیده‌ها و آزمایش‌های تصادفی

سوال ۹۸ **جامعه یا جمعیت آماری و نمونه آماری را تعریف کنید.**

پاسخ:

- جامعه یا جمعیت آماری

تعریف: مجموعه همه چیزهایی که درباره ویژگی(های) آنها تحقیق صورت می‌گیرد.

+ عضو جامعه آماری: هر یک از افراد و یا اشیای جامعه

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه

- نمونه‌ی آماری

تعریف: بخشی از جامعه که برای مطالعه ویژگی(های) مدنظر انتخاب می‌شود.

+ عضو نمونه آماری: هریک از افراد و یا اشیای انتخاب شده

+ اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه

سوال ۹۹ **انواع متغیرها و زیر مجموعه‌های آنها را نوشته و توضیح دهید.**

پاسخ:

♦ انواع متغیرهای کمّی

۱- کمّی پیوسته: متغیری که اگر بتواند مقادیر x و y را اختیار کند، هر مقدار بین آنها را نیز بتواند. (طول، وزن، زمان)

۲- کمّی گسسته: متغیری که پیوسته نباشد. یعنی فقط بتواند مقادیر مشخص و مجزایی را اختیار کند. (تعداد)

♦ انواع متغیرهای کیفی

۱- کیفی ترتیبی: متغیری که در آن نوعی ترتیب طبیعی و منطقی وجود داشته باشد. (سطح تحصیلات)

۲- کیفی اسمی: متغیری که ترتیبی نیست، یعنی در آن نوعی رتبه‌بندی وجود نداشته باشد (جنسیت، وضعیت هوا)

سوال ۱۰۰ **برای هر یک از متغیرهای آماری زیر یک مثال بیاورید.** (شهید بهشتی اندیمشک خرداد ۱۴۰۲)

الف) کمّی پیوسته: .... **ب) کمّی گسسته:** ....

ج) کیفی اسمی: .... **د) کیفی ترتیبی:** ....

پاسخ: الف) وزن اشخاص ب) تعداد بردهای یک بازیکن

ج) گروه خونی د) مدارج علمی (دیپلم، لیسانس و ...)