جزوهٔ حسابان دوازدهم

گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

نوتروفیل

نوتروفیل، حامی عدالت آموزشی

حسابان

پیش‌نیازها

۱ اتحادهای جبری:

$(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm 2ab \rightarrow$ مربع دوجمله‌ای $\rightarrow$ توان ۲

$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3 \rightarrow$ مکعب دوجمله‌ای $\rightarrow$ توان ۳

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)\rightarrow$ مزدوج

$a^3\pm b^3=\underbrace{(a\pm b)}_{\text{لاغر}}\ \text{و}\ \times\underbrace{(a^2\mp ab+b^2)}_{\text{چاق}}\rightarrow$ چاق و لاغر

$(x+b)(x+a)=x^2=(a+b)x+ab\rightarrow$ جمله مشترک

اتحادهایی که به پیشنهاد من حتماً حفظ شوند:

$x^3\pm 3x^2+3x\pm 1=(x\pm 1)^3$

$x^3\pm 6x^2+12x\pm 8=(x\pm 2)^3$

$x^3\pm 9x^2+27x\pm 27=(x\pm 3)^3$

$x^2\pm 2x+1=(x\pm 1)^2$

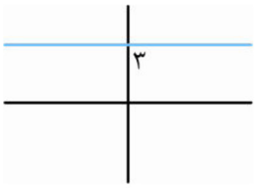
$x^2\pm 4x+4=(x\pm 2)^2$

$x^2\pm 6x+9=(x\pm 3)^2$

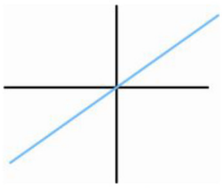
$4x^2\pm 4x+1=(2x\pm 1)^2$

انواع توابع:

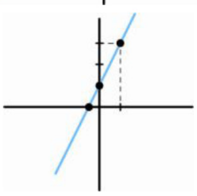
✓ تابع ثابت $\quad y=k \quad y=3$



✓ تابع همانی (نیمساز ناحیه «۱» و «۳») $\quad y=x \quad y=x$



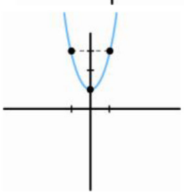
✓ تابع خطی $\quad y=ax+b \quad y=2x+1$



✓ توابع چندجمله‌ای $\quad y=ax^n+bx^{n-1}+\dots+z \quad y=2x^2+1$

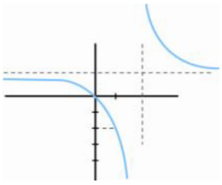
↓

توضیح داده شود $\quad n\in W$



✓ توابع گویا:

$$y=\frac{\text{چندجمله ای}}{\text{چندجمله ای}} \qquad y=\frac{x+3}{x-2}$$



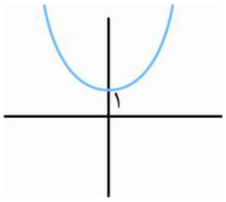
توجه، توجه: توابع چندجمله‌ای گویا هستند ولی توابع گویا چندجمله‌ای نیستند.

فصل ۱: تابع

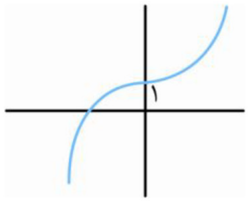
انتقال توابع
- عمودی ← جابجایی توابع رو محور "y" ها
- افقی ← جابجایی توابعی روی محور "x" ها

انتقال عمودی: با جمع و یا تفریق عددی با یک تابع مرجع و یا مادر اتفاق می‌افتد که باید به اندازهٔ آن نمودار تابع را بالا و یا پایین ببریم.

مثال:



$$\underbrace{g(x)}_{\text{}} = \underbrace{f(x)}_{\text{تابع مادر}} + \underbrace{k}_{\text{عدد}}$$



عددی که باعث انتقال شده است $\leftarrow +۱$ $\underbrace{g(x) = \underbrace{x^۳}_{\text{تابع مادر}}}_{\text{تابع نهایی}}$ ، عددی که باعث انتقال عمودی شده است $\leftarrow -۱$ $\underbrace{f(x) = \underbrace{x^۲}_{\text{تابع مادر}}}_{\text{تابع‌نهایی}}$

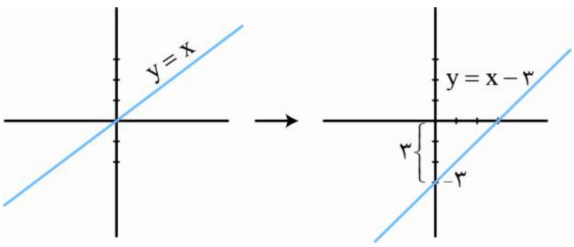
"cos x"	"sin x"
"$x^۳$"	"$x^۲$"

خطر! توابعِ مادر توابعی هستند که ما رسم آنها را می‌شناسیم و بلدیم آنها را رسم کنیم مانند اصطلاحاً در توابع جبری باید حداکثر یک "x" ببینیم و اگر تعداد "x" ها از یک بیشتر باشد باید آن را به یک کاهش دهیم مانند:

$$x^۲+۲x+۳ \rightarrow \underbrace{x^۲+۲x+۱}_{(x+۱)^۲}+۲ \Rightarrow \underbrace{(x+۱)^۲}_{\text{تابع مادر}}+۲ \rightarrow$$ عددی که باعث انتقال می‌شود

طریقه رسم:

۱ رسم تابع مادر



$\underbrace{x}_{\text{تابع مادر}}$ -۳ عدد

۲ انتقال

۳ ... ادامه دارد

نکته فوق سری: شاید براتون سؤال شه که چرا ننوشتم انتقال عمودی. در جواب می‌تونم بگم به دلیل اینکه ما اعمال دیگر هم داریم که روی تابع انجام می‌شوند.

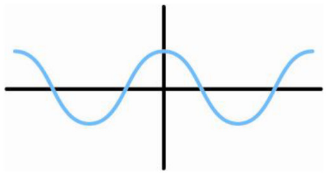
نکات فوق حرفه‌ای: انتقال عمودی فقط روی برد تابع تأثیر میگذارد که اگر تابع کراندار باشد یعنی تابع بین دو عدد تغییر کند و یا به زبان ریاضی $|f(x)| \le m$ باشد، می‌توانیم آن عددی که به تابع مادر اضافه یا کم شده است را با دوسر برد جمع و یا تفریق کنیم تا برد جدید نمایان شود.

اندکی مثال حل شده

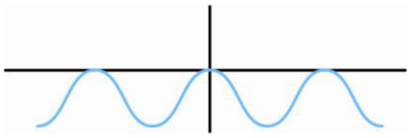
۱ تابع زیر را با کمک $\cos(x)$ رسم کنید. (امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۹) $\cos x - ۱$ عدد

تابع مادر

۱ رسم نمودار تابع مادر



۲ انتقال

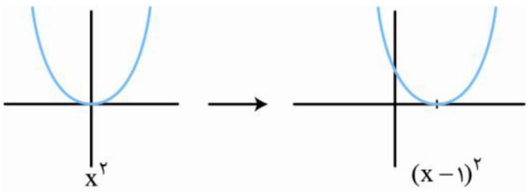


انتقال افقی: در این انتقال عدد با x جمع می‌شود نه یک تابع جدا و باعث انتقال تابع روی محور x ها می‌شود. این انتقال تأثیری روی برد توابع ندارد و صرفاً روی دامنه تابع تغییر ایجاد می‌کند. $g(x) = F(x+k)$

خطر ! در این قسمت (انتقال افقی) برعکس انتقال عمودی تغییراتی که روی x ها انجام می‌دهیم برعکس است یعنی اگر عدد با x جمع شود تابع به جای حرکت به جلو به سمت عقب حرکت می‌کند ولی خب در انتقال عمودی ما اگر عددی را با تابع مادر جمع کنیم با توجه به علامتش اگر مثبت بود موافق با آن تابع را به سمت بالا و اگر منفی بود موافق با علامت به سمت پایین تابع را انتقال می‌دهیم.

مثال:

$(x-۱)^۲$



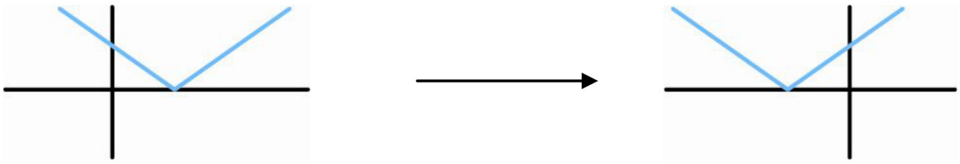
در مرحله اول چون درجه چندجمله‌ای «۲» است یعنی تابع از توابع درجه «۲» است ما نمودار $x^۲$ را رسم می‌کنیم و بعد با توجه به جمع عدد با "x" با توجه به علامت عدد آن را یک واحد یا به سمت چپ و یا به سمت راست می‌بریم ولی حال کدام سمت؟!

به عنوان مثال تصور کنید $F(۱) = ۰$ است. اگر با x تابع F عددی جمع یا از آن کم شود،مثلا $g(x) = F(x+۲)$ حال باید به g عددی بدهیم که جلوی F را ۱ کند تا ریشه های تابع g به دست آید.

$$x + ۲ = ۱ \rightarrow x = -۲$$

یعنی حال اگر ما به g عدد ۱- بدهیم جلوی F عدد ۱ ظاهر می‌شود و از آنجا که ما می‌دانیم $F(۱) = ۰$ است،پس ریشه g عدد ۱- است.

و این یعنی تابع $g(x)$ محور x ها را در ۱- قطع می‌کند در و تابع $F(x)$ محور x ها را در «۱» قطع می‌کرد و رابطه‌ای که بین F و g داشتیم این بود که x های تابع F را با ۲ جمع کردیم تبدیل به تابع g شد.



$g(x)=F(x+۲)$ $F(x)$

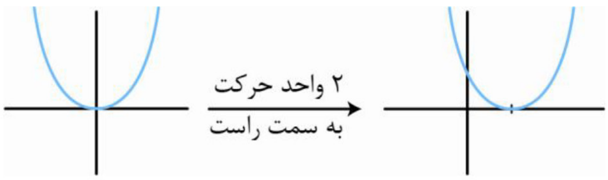
با توجه به توضیحات فوق برخلاف تصور خیلی ها که تابع به سمت عقب می‌رود، تابع به سمت جلو می‌رود.

روش متفاوت

محل برخورد تابع با محور x ها درواقع جایی است که مقدار تابع «صفر» می‌شود یعنی همان ریشه تابع است. مثلاً در مثال بالا ریشه تابع $x^۲$، صفر است یعنی با قرار دادن صفر در تابع صفر به ما می‌دهد ولی بعد از کم شدن «۱» از x ریشه تابع «۱» می‌شود یعنی در نقطه $x=۱$ با محور x ها برخورد می‌کند.

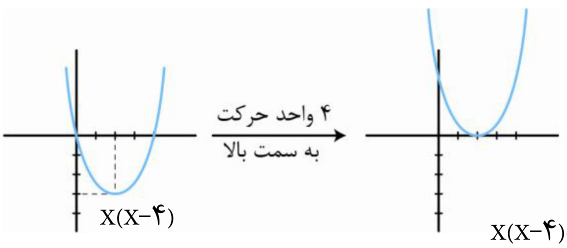
روش ۳

وقتی تابعی را به صورت بسته به ما می‌دهند مثلاً: $(x-۲)^۲$ ما می‌توانیم آن را با انتقال عمودی هم رسم کنیم. برای این کار تابع را باز می‌کنیم $(x^۲-۴x+۴)$ و داخل $x^۲-۴x$ از یک x فاکتور می‌گیریم و تابع را با توجه به ریشه‌ها رسم می‌کنیم و تابع رسم شده را به اندازه ۴ واحد به بالا می‌بریم.



$x^۲$ $(X-۲)^۲$

$$(x-۲)^۲=\underbrace{x^۲-۴x}_{x(x-۴)}+۴=\underbrace{x(x-۴)}_{\text{تابع مادر}}+\underbrace{۴}_{\text{عدد}}$$



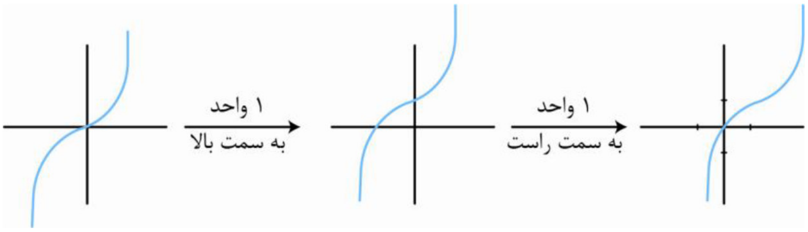
$X(X-۴)$ $X(X-۴)+۴$

توجه توجه: این‌روش‌بیشتر اوقات برای تواع درجه ۲ کاربرد دارد و کاربرد چندانی برای توابع درجه ۳ ندارد دلیلش هم این است که در توابع درجه ۳ وقتی از x فاکتور می‌گیریم پیدا کردن ریشه‌های تابع درجه ۲ بدست آمده کار ساده‌ای نیست که کار ما را سخت می‌کند.

$$\underbrace{x^۳+۳x^۲+۳x}_{x(x^۲+۳x+۳)}+۱$$

توجه توجه: توابع می‌توانند هم انتقال افقی و هم انتقال عمودی را داشته باشند مانند:

$F(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x+۱-۱\Rightarrow(x-۱)^{۳}+۱$ (خرداد ۱۴۰۲)



توجه! تقدم و تأخر انتقال‌ها را به صورت مفصل بعد از تدریس انبساط و انقباض‌ها توضیح می‌دهم.

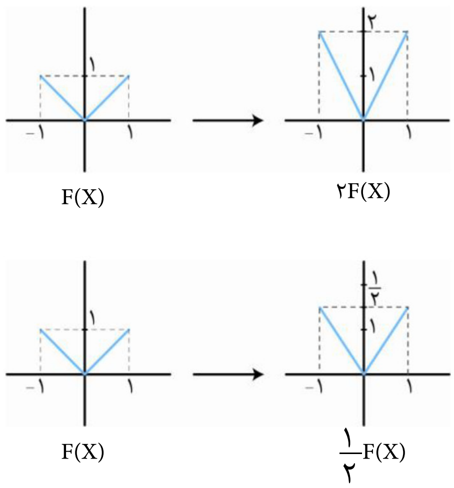
انبساط و انقباض عمودی

در این حالت عددی در یک تابع ضرب می‌شود که باعث کوچک و یا بزرگ شدن تابع در راستای محور yها شود که این بزرگ شدن برای اعداد بزرگتر از «۱» (انبساط) و کوچک شدن (انقباض)برای اعداد بین صفر و «۱» است.

$kf(x)$

انبساط $\rightarrow k>۱$

انقباض $\rightarrow ۰<k<۱$



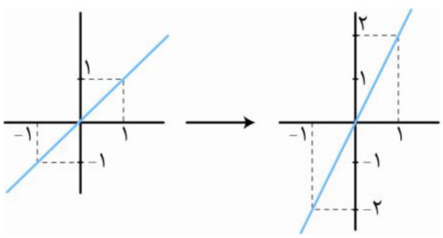
یک سوال حال اگر k عددی منفی باشد چه؟! در این حالت نمودار تابع را نسبت به محور "x" ها قرینه می‌کنیم. یعنی x نقاطی که روی تابع هستند را دستکاری نمی‌کنیم و y آن نقاط را در "-k" ضرب می‌کنیم و روی محور نشان می‌دهیم و نقاط جدید را به هم وصل می‌کنیم و تبریک می‌گم شما نمودار $k\in\mathbb{N}$ و $-kF(x)$ رو رسم کردین.

نکته حرفه‌ای: در انبساط و انقباض عمودی دامنه توابع ثابت و برد توابع k برابر می‌شود یعنی با داشتن سروته برد (برای توابع کراندار) تابع $F(x)$ می‌توانید برد تابع $kF(x)$ را بدست آورید به طوری که دامنه ثابت است.

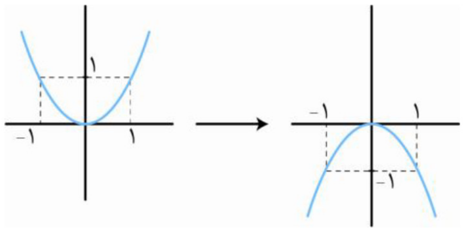
$F(x):[a,b]\rightarrow[d,c]$ $\qquad$ $kF(x):[a,b]\Rightarrow[kd,kc]$

کمی مثال:

$k=۲$ $\qquad$ $g(x)=۲x$ $\qquad$ $F(x)=x$



$f(x)=x^۲$ $\qquad$ $g(x)=-x^۲$ $\qquad$ $k=-۱$

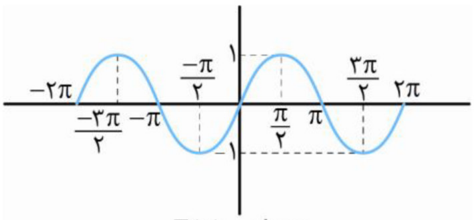


انبساط و انقباض افقی

دوستان دقیقاً مثل انتقال‌های افقی که برعکس انتقال‌های عمودی بود اینجا هم قضیه برعکسه. خودمونی بگم تغییراتی که روی xها انجام می‌دیم، x برعکس اون تغییراتو اعمال می‌کنه ولی خب y ها نه! Y ها دقیقاً همون تغییری که ما روشون انجام می‌دیم همون تغییرو اعمال می‌کنه.

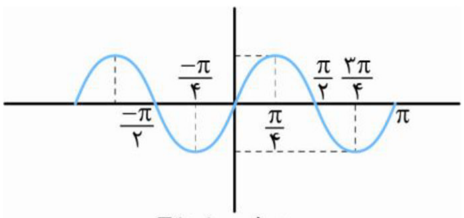
بذارید روی یک مثال قشنگ توضیح بدم. مثلاً داریم: $f(x)=\sin x$ و بخواهیم $f(۲x)=\sin(۲x)$ رو بکشیم.

باید اول تابع $f(x)$ را رسم کنیم که به صورت زیر است:

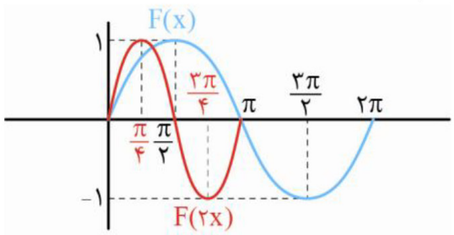


$F(x)=\sin x$

حال برای رسم $F(۲x)$باید توجه داشته باشیم که اعمال تغییر روی "x"ها برعکس است که این یعنی برخلاف نظر خیلی‌ها به جای اینکه "x"ها «۲» برابر شوند باید «$\frac{۱}{۲}$» برابر شوند ولی خب یک سوال ایجاد می‌شود که چرا؟! در باکس پایین توضیح می‌دهم.



$F(۲x)=\sin ۲x$



همان‌طور که دقت می‌کنید ضرب یک عدد در "x" در دوره تناوب $\sin x$ نیز تأثیر داشت که دلیل آن را در فصل بعد بررسی می‌کنیم.

جواب سوالی‌که در مثال بالا پیش آمد

سوال اینه که چرا وقتی یک عدد در "x" ضرب میشه معکوسش اعمال میشه؟ درواقع این سوالو من قبلاً جواب دادم ولی از اونجایی که خیلی برام مهمین دوباره میگم ☺

فرض کنید $F(a)=a$ وقتی عددی در "x" ضرب می‌شود مثلاً «۳» می‌شود $F(۳a)$. حال اگر بخواهیم تابع F به ما عدد "a" رو بده باید جلوی تابع "a" بشه. دقت کنید جلوی تابع "a" بشه نه "x" و جلوی تابع F جلوی تابع F، «۳x» وجود دارد که باید برابر "a" بشه پس داریم:

$$۳x=a \Rightarrow \boxed{x=\frac{a}{۳}}$$

یعنی باید به $F(۳x)$، $\frac{a}{۳}$ بدیم که به ما a بده در صورتی که قبلاً در تابع $F(x)$ با دادن a به تابع به ما a می‌داد. پس نتیجه می‌گیریم که باید در اعمال تغییر در "x" ها برعکس عمل کنیم.

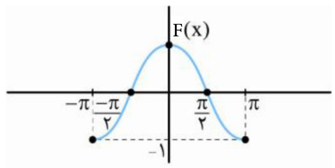
توجه توجه! خطر!

داخل امتحان نهایی حتماً حتماً باید جدول نقطه یابی را رسم کنید وگرنه نمره‌ای به شما تعلق نمی‌گیرد. همچنین سعی کنید در امتحان هیچ چیز رو داخل ذهنتون حساب نکنید و از نوشتن زیاد نترسید چون به نوشته‌های شما نمره می‌دهند نه به تفکراتتان.

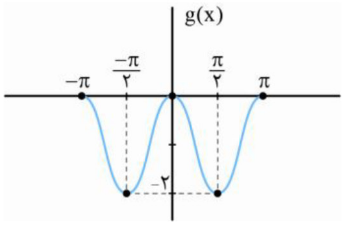
تمرین

(شهریور ۹۹) $g(x)=\cos ۲x-۱$ $F(x)=\cos(x)$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π
f(x)	−۱	۰	۱	۰	−۱



x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{۲}$	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π
g(x)	۰	−۲	۰	−۲	۰

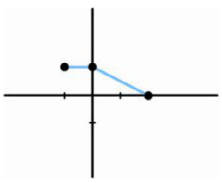


نکته: تقدم تأخر در انتقال و انبساط انقباض

از انبساط و انقباض نه در کنکور و نه در امتحانات نهایی سوال‌نیامده‌ولی از انتقالات سوالات فراوانی آمده

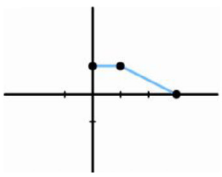
نمودار F(x) به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x)=F(x-۱)+۲$ را رسم کنید و دامنه آن را بنویسید. (دی ۱۴۰۰)

مرحله اول: انتخاب اینکه اول انتقال عمودی یا افقی را انجام دهیم (فرقی نداره)



F(X)

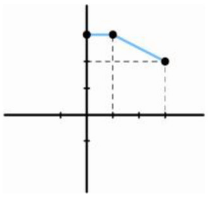
مرحله دوم: ما انتقال افقی را انتخاب می‌کنیم چون نیاز به دقت بالایی دارد.



F(X−۱)

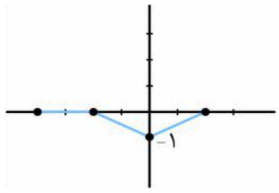
مرحله سوم: انتقال عمودی رو انجام می‌دهیم.

F(X−۱) +۱

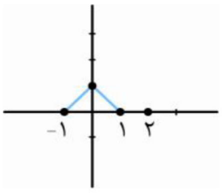


$Dg(x)=[۰,۳]$

اگر نمودار تابع $F(x)$ به صورت زیر باشد نمودار تابع $g(x)=k\,F(k'x+a)+b$ مقادیر k و k'، a، b را بیابید.



g(x)



F(x)

جواب: $\boxed{a,b=۰}$ $\boxed{k,k'=-\frac{۱}{۲}}$ ← منفی به دلیل قرینه شدن تابع نسبت به محور x ها و y هاست.

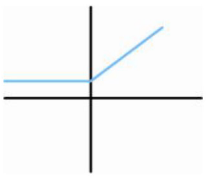
به دلیل اینکه نه تابع بالا و یا پایین شده و نه چپ و راست فقط نسبت به محور x ها و y ها قرینه شده و در یک ضریب ضرب شده.

$k=-\frac{۱}{۲}$ ← چون برد تابع نصف شده

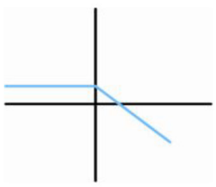
$k'=-\frac{۱}{۲}$ ← چون دامنه تابع «۲» برابر شده

توابع صعودی و نزولی

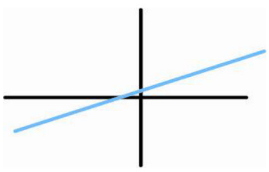
توابع:
- صعودی
- هم صعودی و هم نزولی
- نه صعودی و نه نزولی
- نزولی



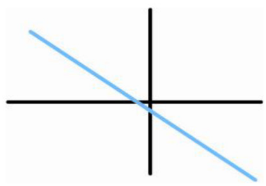
صعودی



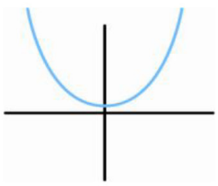
نزولی



صعودی (اکید



نزولی (اکید)

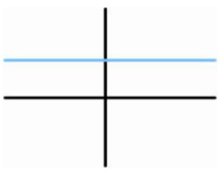


نه نزولی و نه صعودی

(باید بازه بندی بشه)

$[۰,+\infty) \Rightarrow$ صعودی

$(-\infty,۰] \Rightarrow$ نزولی



هم صعودی و هم نزولی

بخش‌پذیری

قضیه تقسیم‌ها:

$$\underbrace{F(x)}_{\text{مقسوم}}=\underbrace{p(x)}_{\text{مقسوم‌علیه}}\underbrace{q(x)}_{\text{خارج‌قسمت}}+\underbrace{r(x)}_{\text{باقی‌مانده}}$$

توجه توجه: همیشه باید درجه باقی‌مانده از مقسوم کمتر باشد. در غیر این صورت تقسیم را ادامه می‌دیم تا این اتفاق بیفتد.

نکته: اگر $r(x)=۰$ باشد یعنی $F(x)$ بر $p(x)$ بخش‌پذیر است.

نکته حرفه‌ای: اگر $p(x)$ درجه اول باشد، می‌توانید با گذاشتن ریشه آن در معادله قضیه تقسیم باقی‌مانده($r(x)$) را بدست آورید.

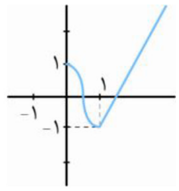
مثال: اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $F(x)=x^۴+kx^۲-۳$ بر $\underbrace{x+۱}_{p(x)}$ برابر $\underbrace{۲}_{r(x)}$ باشد، k را تعیین کنید.

(شهریور ۱۴۰۱)

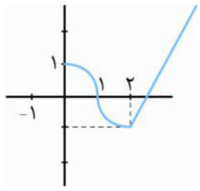
$$p(-۱)=۰$$

$$x^۴+kx^۲-۳=q(x)(x+۱)+\overset{۲}{r(x)}\overset{x=-۱}{\Rightarrow}۱+k-۳=۲\Rightarrow\boxed{k=۴}$$

انقباض افقی



F(۲x)



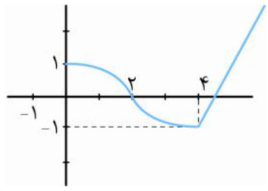
F(x)

طول‌ها $\frac{۱}{k}$ برابر می‌شوند

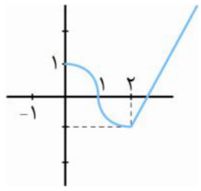
$F(kx)$

$k>۱$

انبساط افقی



$F(\frac{۱}{۲}x)$

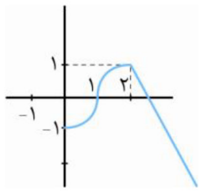


F(x)

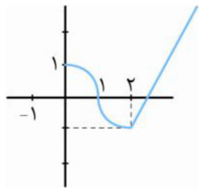
طول‌ها $\frac{۱}{k}$ برابر می‌شوند

$F(Kx)$

$۰<k<۱$



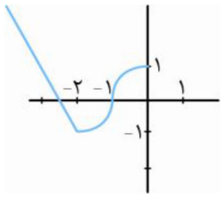
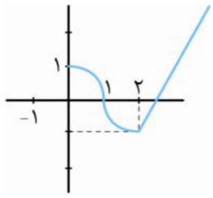
$-F(x)$



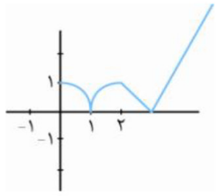
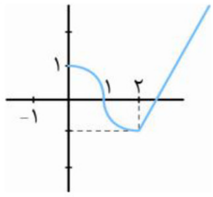
F(x)

نسبت به محور x ها قرینه می‌شود

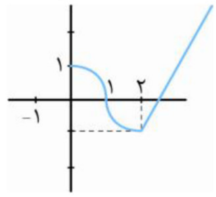
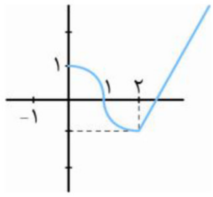
$-F(x)$

نسبت به محور y ها قرینه می‌شود — $F(-x)$

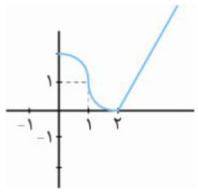
بخشی که زیر محور x هاست را قرینه کرده و در بالای محور x ها می‌کشیم — $|F(x)|$

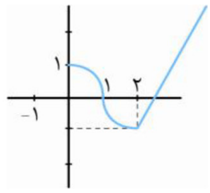



بخشی که سمت چپ محور y هاست را پاک کرده و قرینه بخش سمت راست را در سمت چپ می‌کشیم — $F(|x|)$

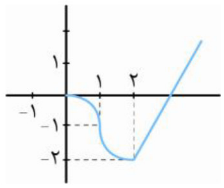
جمع‌بندی۱

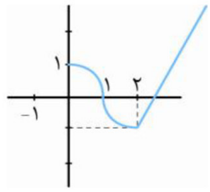
انتقال عمودی


$F(x)+۱$


$F(x)$

k واحد به سمت بالا — $F(x)+k$, $k>۰$

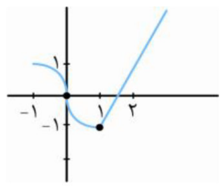
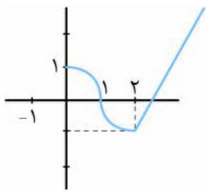

$F(x)-۱$


$F(x)$

k واحد به سمت پایین — $F(x)-k$, $k>۰$

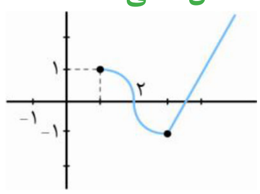
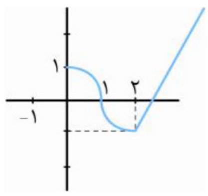
انتقال عمودی فقط روی برد تأثیر می‌گذارد

انتقال افقی

k واحد به سمت چپ — $F(x+k)$, $k>۰$

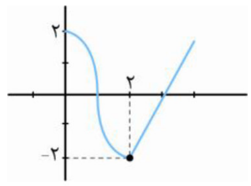
انتقال افقی

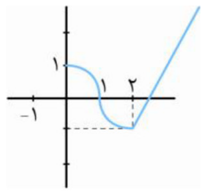
k واحد به سمت راست — $F(x-k)$, $k>۰$

انتقال افقی فقط روی دامنه تأثیر می‌گذارد

انبساط عمودی



$۲F(x)$

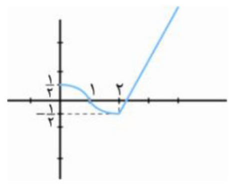


$F(x)$

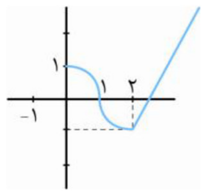
عرض‌ها k برابر می‌شوند

$kF(x)$
$k > ۱$

انقباض عمودی



$\frac{۱}{۲}F(x)$



$F(x)$

عرض‌ها k برابر می‌شوند

$kF(x)$
$۰ < k < ۱$

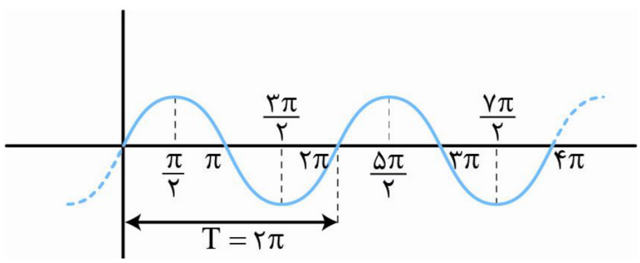
مفاهیم

دوره تناوب: دوره تناوب معمولاً برای توابع مثلثاتی کاربرد دارد. به طور کلی و هر تابعی که یک واحد تکرارشونده داشته باشد دوره تناوب دارد به کوچکترین واحد تکرارشونده دوره تناوب می‌گویند.
حواستان به دامنه باشد مخصوصاً در توابع tan و cot

به زبان ریاضی

$$\forall T \in R \quad s.t \qquad F(x) = F(x+T) = F(x.T)$$

اگر شرط مقابل برقرار باشد می‌گوییم که تابع دوره تناوب T را دارد.
حال تعریف بالا چه می‌گوید. می‌گوید که T به شرطی دوره تناوب است که اگر F(x) را به اندازه T به سمت راست یا چپ انتقال دهیم باز روی خود تابع قرار بگیرد.

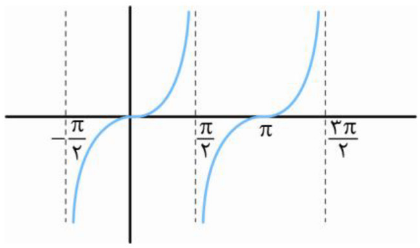


دوره تناوب توابع مثلثاتی به صورت زیر حساب می‌شوند:

	T	Max	Min
$a\sin(bx)+c$	$\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a\rvert+c$	$-\lvert a\rvert+c$
$a\cos(bx)+c$	$\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}$	$\lvert a\rvert+c$	$-\lvert a\rvert+c$
$a\tan(bx)+c$	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	$+\infty$	$-\infty$
$a\cot(bx)+c$	$\frac{\pi}{\lvert b\rvert}$	$+\infty$	$-\infty$

توابع تانژانت tan و کتانژانت cot

در کتاب فقط نمودار تابع تانژانت و دامنه آن آمده است و خب مسلماً نیازی هم به آن نیست ولی خب نمودار cot را نیز رسم می‌کنیم.

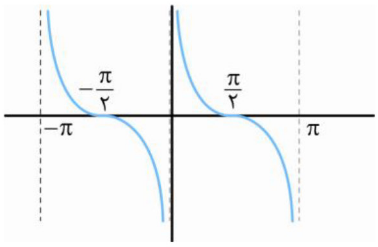


$F(x) = \tan(x)$

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} | a \neq k\pi + \frac{\pi}{۲}\right\} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$T = \pi$$



$g(x) = \cot(x)$

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

معادلات مثلثاتی

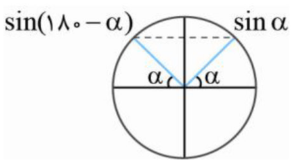
معادلات مثلثاتی:
- تعداد جواب‌ها رو خواست ← رسم نمودار و شمارش تعداد نقاط برخورد
- جواب‌ها رو خواست ← بدست آوردن معادله کلی جواب و عددگذاری

مفاهیم

معادلات مثلثاتی همانند همان معادلات جبری هستند فقط در آنها توابع مثلثاتی وجود دارد.

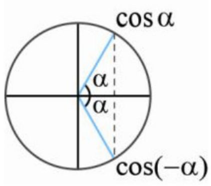
معادله کلی جواب‌های توابع مثلثاتی:

$\sin x = \sin\alpha$



$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

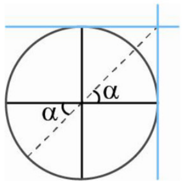
$\cos x=\cos\alpha$



$$\left.\begin{array}{l} x=2k\pi+\alpha \\ x=2k\pi-\alpha \end{array}\right\} k\in\mathbb{Z}$$

$\tan x=\tan\alpha$

$\text{cptx}=\cot\alpha$



$$x=k\pi+\alpha \quad k\in\mathbb{Z}$$

نکات کمکی

سعی کنید در معادلات مثلثاتی، عبارت را جوری ساده کنید که به ضرب دو عبارت مساوی صفر و یا به برابری دو تابع مثلثاتی برسید و خب این مهارت با تمرین زیاد بدست می‌آید.

فرمول‌هایی که باید حفظ باشید

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

مثال: معادله $\cos 3x-\cos x=0$ را حل کنید.

$$\cos 3x=\cos x$$

$$3x=2k\pi+x\Rightarrow \cancel{2}x=\cancel{2}k\pi\Rightarrow x=k\pi$$

$$3x=2k\pi-x\Rightarrow 4x=2k\pi\Rightarrow x=\frac{k\pi}{2}$$

k	1	2	3	4
x	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

جواب‌های معادله مثلثاتی $4\sin x+-2\sqrt{3}=0$ را در بازه $[0,2\pi]$ بدست آورید. **(خرداد ۹۹)**

$$4\sin x=-2\sqrt{3}\Rightarrow\sin x=-\overbrace{\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}}^{\sin 240}\Rightarrow\sin x=\sin 240$$

$$x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$$

$$x=(2k+1)\pi-\frac{4\pi}{3}$$

$$x=\frac{5\pi}{3} \qquad x=\frac{4\pi}{3}$$

معادله $\sin x \cos x = \frac{۱}{۴}$ **را حل کنید.** **(خرداد ۱۴۰۲)**

$$\sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x \Rightarrow \frac{\cancel{۱}}{\cancel{۲}}\sin ۲x = \frac{\cancel{۱}}{\cancel{۴}}\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \overset{\sin\frac{\pi}{۶}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}}$$

$$۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶}$$

معادله $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ **را حل کنید.** **(دی ۱۴۰۱)**

$$\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱ = ۱ - ۲\sin^۲ x$$

برای ساختن معادله ساده‌ای از این معادله پیچیده باید عدد «۱» رو از بین ببریم و درنتیجه از فرمولی برای $\cos ۲x$ استفاده می‌کنیم که در آن «۱-» دارد.

$$۲\cos^۲ x - \cancel{۱} - \cos x - \cancel{۱} = ۰$$

$$\cos x(۱۲\cos x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \overset{\cos\frac{\pi}{۲}}{\cancel{۰}} \\ ۲\cos x - ۱ = ۰ \rightarrow \cos x = \overset{\cos\frac{\pi}{۲}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}} \end{cases}$$

تذکر: خطر: هیچ‌وقت در معادله‌ها **ساده نکنید** چون باعث حذف بعضی از جواب‌ها می‌شود.

حدهای نامتناهی:

حدهای نامتناهی از اسمشان معلوم است که حدهایی هستند که پایان و انتهای آن‌ها معلوم نیست و یا به زبان ریاضی "x" به چه عددی باید میل کند و یا نزدیک شود که مقدار "y" به ∞ میل کند، که در حد کتاب دوازدهم $\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}}$ می‌شود.

تذکر: صفری که در مخرج کسری است که جواب حد آن بی‌نهایت است، صفر حدی است و خود صفر نیست چون اگر خود صفر باشد:

۱) کسر تعریف نشده است؛

۲) ما در حد هستیم و عددهایی که در حد هستند خود آن عدد نیستند؛ فقط اعدادی هستند که به شدن به آن عدد نزدیک می‌شوند و به خاطر نزدیک بودن آن خود آن عدد را می‌گیریم.

بگذارید با یک مثال روشن‌تون کنم:

$$\lim_{x\to ۲} ۲x = ۴$$

«۴» خود «۴» نیست، فقط عددی هست که خیلی به «۴» نزدیک می‌شود.

x خود «۲» نیست،یک عددی نزدیک به «۲» هست.

مثال: حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۲x+۳}{(x-۱)} \quad \begin{cases} \to ۱^+ : \frac{۲}{۰^+} = +\infty \\ \to ۱^- : \frac{۲}{۰^-} = -\infty \end{cases}$$

تذکر: باید حساب کنید که صفری که در مخرج هست، صفر مثبت است یا صفر منفی؛ چون در علامت ∞ تأثیر دارد. مثلاً:

$$\frac{+\text{عددی}}{۰^+} = +\infty$$

$$\frac{+\text{عددی}}{۰^-} = -\infty$$

$$\frac{-\text{عددی}}{۰^+} = -\infty$$

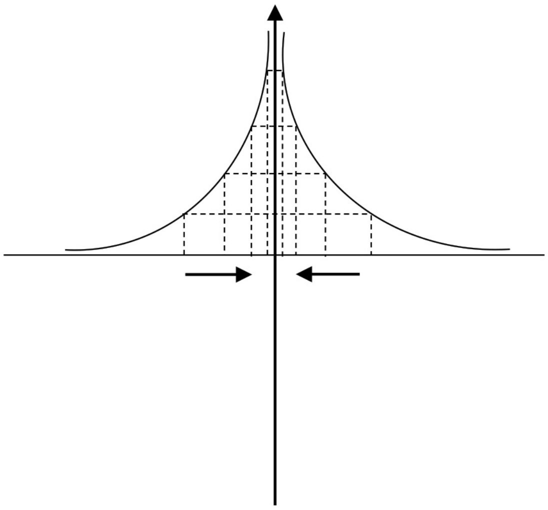
$$\frac{-\text{عددی}}{۰^-} = +\infty$$

$$\frac{\text{عدد}}{۰} = \text{تعریف نشده}$$

مثال: حد تابع زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x=۰}\frac{۱}{x^۲} \quad \begin{cases} \to ۰^- \to \frac{۱}{(۰^-)^۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \\ \to ۰^+ \to \frac{۱}{(۰^+)^۲} = \frac{۱}{۰^+} = +\infty \end{cases} \to +\infty$$

هرچه x به سمت صفر میل می‌کند، y به سمت ∞ می‌رود.



$$f(x)=\frac{۱}{x^{۲}}$$

مجانب قائم: وقتی جواب حدی می‌شود ∞ (چه مثبت و چه منفی) می‌گوییم که آن تابع در آن نقطه مجانب قائم دارد.

$$\forall x \in R \quad s.t \quad \lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$$

درنتیجه: $f(x)$ در a دارای مجانب قائم است.
یا $x=a$ ← مجانب قائم.

مثال: حاصل حدهای زیر را بیابید.

(شهریور ۱۴۰۱) $$\lim_{x\to ۲^-}\frac{[x]-۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{[۲^-]-۲}{۲^- -۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{[۱]-۲}{۲^- -۲}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

(شهریور ۱۴۰۲) $$\lim_{x\to ۱^-}\frac{[x]-۱}{(x-۱)^{۲}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{[۱^-]-۱}{(۱^- -۱)^{۲}}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{[۰]-۱}{(۱^- -۱)^{۲}}=\frac{-۱}{(۰^-)^{۲}}=\frac{-۱}{۰^+}=+\infty$$

(دی ۱۴۰۱) $$\lim_{x\to ۲^+}\frac{ax-۳}{(۲-x)^{۳}}=+\infty \qquad a=? \qquad \frac{۲a-۳}{۰^-}=+\infty$$

از آنجا که ۰^- و جواب $+\infty$ پس صورت نیز باید عددی منفی باشد که بشود $\frac{\text{عددی}\ -}{۰^-}=+\infty$ پس داریم:

$$۲a-۳<۰ \quad \to a<\frac{۳}{۲}$$

حد در بی‌نهایت:

مفاهیم: یعنی وقتی "x" میل می‌کند به سمت ∞، تابع $f(x)$ به سمت چه عددی نزدیک می‌شود و برای محاسبه این حد از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم که یعنی از هر عبارت، عبارتی را برمی‌داریم که بزرگترین توان یا درجه را داشته باشد. بعد از ساده‌سازی اگر به عدد رسیدیم، گوییم که تابع حد در بی‌نهایت دارد ولی اگر به ∞ رسیدیم گوییم تابع حد در بی‌نهایت ندارد.

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۲}+x-۱}{x^{۲}+۳x+۴}\sim\frac{x^{۳}}{x^{۲}}=۱$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۴}+۳x^{۳}+x^{۲}-x+۱}{۳x^{۴}+x^{۳}+x^{۲}+۵x-۸}\sim\frac{۲x^{۴}}{۳x^{۴}}=\frac{۲}{۳}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۴}+۳x-۱}{۲+x-x^{۴}}\sim\frac{x^{۴}}{-x^{۴}}=-۱$$ (شهریور ۱۴۰۲)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^{۲}+۲x+۱}{۴x-۱}\sim\frac{-x^{۲}}{۴x}=\frac{-x}{۴}=\frac{+\infty}{۴}=+\infty$$ (شهریور ۱۴۰۱)

مجانب افقی: هرگاه حد در بی‌نهایت تابعی موجود بود، گوییم که تابع دارای مجانب افقی است و مجانب افقی آن را همان عددی که به سمت آن ∞ در میل می‌کند، گوییم.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+۴}{x-۴}\sim\frac{x}{x}=۱$$

$y=۱ \leftarrow$ مجانب افقی

مثال: اگر $y=۲$ مجانب افقی تابع $f(x)=\frac{ax^{۲}+۱}{۲x^{۲}-۳x}$ باشد، مقدار a کدام است؟ (شهریور ۱۴۰۱)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^{۲}+۱}{۲x^{۲}-۳x}=۲\quad\rightarrow\quad\frac{ax^{۲}}{۲x^{۲}}=۲\quad\rightarrow\quad\frac{a}{۲}=۲\quad\rightarrow\quad a=۴$$

هنگامی $y=۲$ مجانب افقی تابع است که حد تابع در بی‌نهایت وجود داشته باشد. پس حد تابع در بی‌نهایت را مساوی "۲" قرار می‌دهیم و از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم.

اگر $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^{۲}+x}{۲x^{۲}+۳}=۷$ باشد، مقدار m را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^{۲}+x}{۲x^{۲}+۳}=۷\quad\rightarrow\quad\frac{mx^{۲}}{۲x^{۲}}=۷\quad\rightarrow\quad\frac{m}{۲}=۷\quad\rightarrow\quad m=۱۴$$

وقتی حد تابع در بی‌نهایت وجود دارد، یعنی بزرگترین درجه بالا با بزرگترین درجه مخرج برابر است؛ پس $m\neq ۰$ و از هم‌ارزی پرتوان استفاده می‌کنیم و $m=۱۴$ بدست می‌آید.

فصل ۴: مشتق

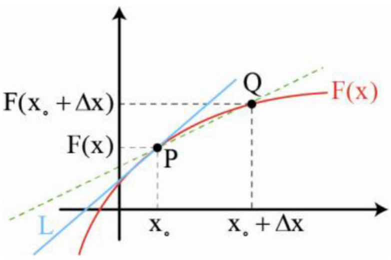
فرض کنید نمودار تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ به صورت زیر باشد. نقطه P را با مختصات $P=(x_\circ ,F(x_\circ))$ روی نمودار تابع F در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط L خطی است که بر نمودار تابع F مماس است. بدین معنی که خط L فقط در نقطه P تابع F را قطع می‌کند. حال چطور می‌توان به خط L معنا بخشید و آن را تعریف کرد.

به عبارت دیگر چطور می‌توان شیب این خط را تعریف کرد؟

برای این کار فرض کنید نقطه $Q(x_\circ+\Delta x ,F(x_\circ+\Delta x))$ یک نقطه دیگر باشد که روی F قرار دارد. می‌دانیم که شیب خط PQ برابر است با: $M_{PQ}=\dfrac{F(x_\circ+\Delta x)-F(x_\circ)}{\Delta x}$

نکته آن است که با نزدیک شدن نقطه Q به نقطه P شیب خطوط PQ به شیب خط L نزدیک می‌شود. با این ملاحظه شیب خط متصور شده Lرا به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

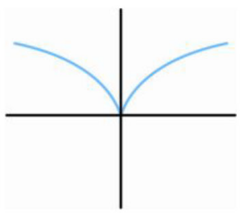
برای تابع $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ شیب خط مماس بر تابع F در نقطه $(x_\circ)$ را به صورت $\lim\limits_{\Delta x\to\circ}\dfrac{F(x_\circ+\Delta x)-F(x_\circ)}{\Delta x}$



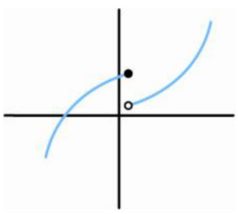
به زبون خودمونی: اگر از یک تابع مشتق بگیریم و داخل مشتق نمودار یک x جایگذاری کنیم عددی که مشتق به ما می‌دهد شیب خط مماس است که از نقطه x بر تابع مماس شده.

شرط لازم برای مشتق‌پذیری، پیوستگی است ولی کافی نیست یعنی تابعی که مشتق پذیر است حتماْ پیوسته هم هست ولی تابعی که پیوسته است لزوماً مشتق‌پذیر نیست.

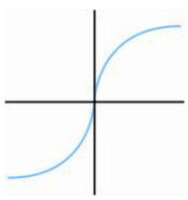
نقاط مشتق‌پذیر



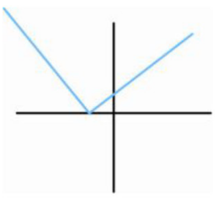
نقاط گوشه ای



ناپیوسته



مماس قائم



نقاط زاویه‌دار

$F(x)=x^n \qquad F'(x)=nx^{n-1} \qquad (n\in\mathbb{R})$

یک حالت عمومی‌تر حالتی است که میشه برای فرمول مشتق نوشت یعنی شما هر نوع تابعی که دارید که بتوان آن را به صورت توان‌دار نوشت به راحتی با فرمول بالا می‌توان مشتق آن را حساب کرد.

مثال:

$$\sqrt[2]{x}=x^{\frac{1}{2}}\xrightarrow{\text{مشتق}}\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$1)\ F(x)=x^n\to F'(x)=nx^{n-1}$$

$$2)\ F(x)=u^n\to F'(x)=n\times u'\times u^{n-1}$$

u یک تابع دلخواه

$$\left.\begin{aligned}&3)\ F(x)=v\times u\to F'(x)=v'\times u+v\times u'\\&4)\ F(x)=\frac{u}{v}\to F'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}\end{aligned}\right\}$$

که در آن v و u توابعی مجزا هستند.

$$5)\ (F\pm g)'=F'(x)\pm g'(x)$$

$$6)\ (kF(x))'=kF'(x)\qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$7)\ y=\sqrt{x}\to y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$8)\ F(x)=\sqrt[3]{x}\to F'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$9)\ \left(\frac{1}{F(x)}\right)'=\frac{-F'(x)}{F^2(x)}$$

همه توابعی که در اینجا مشتق آنها را می‌نویسیم می‌توان با فرمول تعریف مشتق: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$ یا $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$ می‌توان آنها را ثابت کرد.

$$10)\ (Fog)'=g'(x)\times F'(g(x))$$

$$11)\ F(x)=x^n\Rightarrow F'(x)=nx^{(n-1)}\Rightarrow \underset{\text{مشتق مرتبه 2}}{\underset{\downarrow}{F''(x)}}=n(n-1)x^{(n-2)}$$

$$12)\ F(x)=\sin x\to F'(x)=\cos x$$

$$13)\ F(x)=\sin u\to F'(x)=u'\cos x$$

$$14)\ F(x)=\cos x\to F'(x)=-\sin x$$

$$15)\ F(x)=\tan x\to F'(x)=1+\tan^2 x$$

$$16)\ F(x)=\tan u\to F'(x)=u'(1+\tan^2 u)$$

$$17)\ F(x)=\cot x\to F'(x)=-(1+\cot^2 x)$$

$$18)\ F(x)=\cot u\to F'(x)=-\sin xu'(1+\cot^2 u)$$

مثال: اگر $F(x)=x^2-3x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $F'(1)$ را حساب کنید. **(شهریور ۱۳۹۹)**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x-(-2)}{x-1}=\frac{0}{0}$$ مبهم

مشتق آنها صفر است ولی نقاط اکسترمم حساب نمی‌شود.

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}} = \boxed{-1} \quad \checkmark$$

$$F'(x)=2x-3 \xRightarrow{x=1} \boxed{F'(1)=-1} \quad \checkmark$$

مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

(دی ۱۴۰۰) $F(x)\sin^3(5x)=3\sin^2(5x)\times\cos(5x)\times 5=10\sin^2(5x)\times\cos(5x)$

(دی ۱۴۰۰) $F(x)=1(x^2-6)^3(\frac{1}{4}x+1)=3(x^2-6)(2x)(\frac{1}{4}x+1)+(\frac{1}{4})(x^2-6)^3$

(شهریور ۱۴۰۱) $F(x)=\dfrac{9x+1}{x-x^2}=\dfrac{(9)(x-x^2)-(1-2x)(9x+1)}{(x-x^2)^2}$

مثال: مشتق‌پذیری تابع $F(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 3x+1 & x<1 \end{cases}$ را در $x=1$ بررسی کنید.

اول پیوستگی: $\begin{cases} 1^+ \to 2 \\ 1 \to 2 \\ 1^- \to 2 \end{cases}$ پیوسته است

از ضوابط مشتق می‌گیریم: $\begin{cases} 2x & x>1 \\ 3 & x<1 \end{cases}$

تابع در $x=1$ مشتق پذیر نیست. $F'_+(1)\neq F'_-(1)$

اگر $F(x)=\cos(2x)$ **باشد مقدار** $F''(\frac{\pi}{8})$ **را بدست آورید.**

$$F(x)=\cos(2x)\to F'(x)=-\sin(2x)\times 2\to F''(x)=-2\times\cos(2x)\times 2$$

$$F''(x)=-4\cos(2x)\to F''(\frac{\pi}{8})=-4\underbrace{\cancel{\cos(\frac{\pi}{4})}}_{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{F''(\frac{\pi}{8})=-2\sqrt{2}}$$

فصل ۵: کاربرد مشتق

مفاهیم

بحرانی: نقاطی هستند که یا مشتق‌پذیر نیستند و یا مشتق در آن نقاط صفر است.

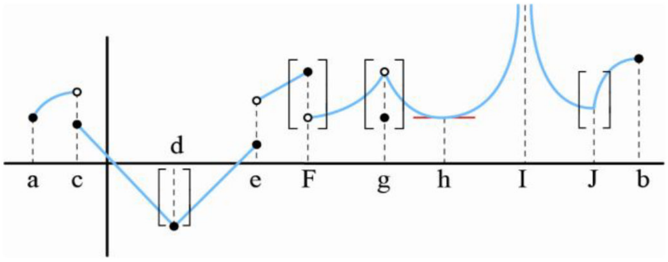
اکسترمم نسبی: نقاطی که مشتق در آن نقاط صفر و یا وجود ندارد و آن نقطه یا نسبت اطراف خود بالاتر یا پایین تر است. (نمودار F' باید تغییر علامت بدهد).

اکسترمم مطلق: نقاطی هستند که نسبت به تمام نقاط تابع یا بالاتر هستند یا پایین‌تر. (سروته باز، جز این نقاط قبول هستند).

تذکر: نقاط بحرانی باید حتماً عضو دامنه باشند مثلاً:

$F(x)=\frac{۱}{x}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. در $x=۰$ بحرانی نیست

توجه: نقاط اکسترمم بحرانی هستند ولی نقاط بحرانی الزاماً اکسترمم نیستند یا به زبانی دیگر همه نقاطی که اکسترمم هستند حتماً بحرانی هستند ولی نقاطی که بحرانی هستند حتماً اکسترمم نیستند.



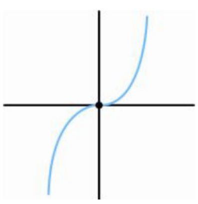
نقاط اکسترمم نسبی: d، h، J، F و g

بحرانی: a، c، d، e، F، g، h، J، b

نقطه اکسترمم ← اکسترمم مطلق:
- Max مطلق ← بالاترین نقطه نمودار تابع
- Min مطلق ← پایین‌ترین نقطه نمودار تابع

نقطه اکسترمم ← اکسترمم نسبی:
- Max نسبی ← نقطه‌ای که نسبت به نقاط همسایگی آن نقطه بالاتر باشد
- Min نسبی ← نقطه‌ای که نسبت به نقاط همسسایگی آن نقطه پایین‌تر باشد.

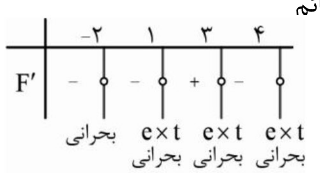
$x^۳$



خطر: نقاطی هستند که مشتق آنها صفر است ولی اکسترمم نیستند مانند نمودار تابع $x^۳$ به صورت روبرو است که در $x=۰$ مشتق آنها صفر است ولی نقطه‌اکسترمم حساب نمی‌شود.

نکته حرفه‌ای: بحرانی تمام ریشه‌های F' هستند ولی اکسترمم نسبی ریشه‌های غیرمکرر زوج F' هستند.

مجانب قائم



$F'(x)=(x\overset{۳}{-}۳)(x\overset{۴}{-}۴)(x\overset{-۲}{+}۲)^۲(x\overset{۱}{-}۱)$

۱ و ۲- و ۴ و ۳ : نقاط بحرانی

۳ و ۴ و ۱ : نقاط ext نسبی

توجه: ما برای نقاط ext <u>نسبی</u> مقدار <u>"x"</u> را اعلام می‌کنیم ولی برای ext مطلق مقدار "y" را اعلام می‌کنیم.

اگر $F(x)$ در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و $F(a)=F(b)$ باشد، تابع F حتماً در این بازه هم Max مطلق و هم Min مطلق دارد.

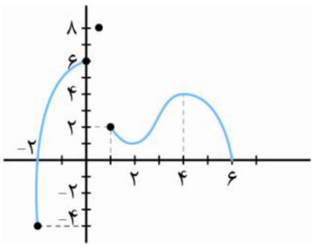
با توجه به نمودار داده شده، سوالات زیر را پاسخ دهید. **(خرداد ۱۴۰۱)**

Max مطلق ۸

Min مطلق ۴-

Max نسبی ۴

Min نسبی ۲



ضرایب a و b را در تابع $F(x)=x^۳+ax-b$ طوری پیدا کنید که نقطه $(۱,۲)$ <u>اکسترمم نسبی</u> تابع باشد.

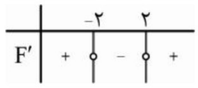
(شهریور ۱۴۰۱)

$F(۱)=۲\Rightarrow ۱+\overset{-۳}{a}-b=۲\Rightarrow \boxed{b=-۴}$

$F'(۱)=۰\Rightarrow F'(x)=۳x^۲+a\Rightarrow ۳+a=۰\Rightarrow \boxed{a=-۳}$

بزرگ‌ترین بازه‌ای که $x^۳-۱۲x+۴$ در آن بازه نزولی اکید است؟ (۲ و ۲-)

$F'(x)=۳x^۲-۱۲=\cancel{۳(x^۲-۴)}$
$(x-۲)(x+۲)$



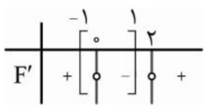
نکته: اگر تابع مشتق را تعیین علامت کنید، ۳ حالت پیش می‌آید:

$F'(x)=۰\leftarrow$ تابع ثابت است $\Leftarrow$ شیب $=۰$ $\Leftarrow$ هم نقاط ext نسبی و مطلق هستند.

$F'(x)\geq ۰$ تابع صعودی است و اگر $F'(x)>۰$ باشد تابع صعودی اکید است.

$F'(x)\leq ۰$ تابع نزولی است و اگر $F'(x)<۰$ باشد تابع نزولی اکید است.

Ext های مطلق تابع $F(x)=x^۳-۳x^۲+۱$ را در بازه $[-۱,۱]$ تعیین کنید. **(خرداد ۱۴۰۰)**



$F'(x)=۳x^۲-۶x=۳\underset{۰}{x}(\underset{۲}{x-۲})$

$F(-۱)=-۱-۳+۱=-۳$

$F(۰)=+۱$

$F(۱)=۱-۳+۱=-۱$

$Min=-۳$ مطلق

$Max=۱$ مطلق

بهینه‌سازی

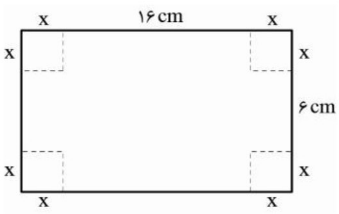
تابع فرض ← تابعی هست که از اطلاعات سوال می‌توان آن را نوشت. (رابطه بین دو متغیر رو دربیار)

تابع هدف ← تابعی هست که که سوال از ما آن را سوال می‌کند. (یک متغیرش کنید)

وقتی که تابع هدف تک متغیره شد از آن مشتق می‌گیریم و نقاط بحرانی را محاسبه می‌کنیم.

مثال: ورق فلزی مستطیل شکلی به طول ۱۶cm و عرض ۶cm در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های به ضلع x برش دهیم و آنها را کنار گذاریم. سپس لبه‌ی جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن شود. (شهریور ۱۴۰۰)

۱) $x \in (۰,۱)$



$$\left.\begin{array}{l} \text{طول}: ۱۶-۲x \\ \text{عرض}: ۶-۲x \\ \text{ارتفاع}: x \end{array}\right\} v=(۱۶-۲x)(x)(۶-۲x)=۴x^۳-۴۴x^۲+۹۶x$$

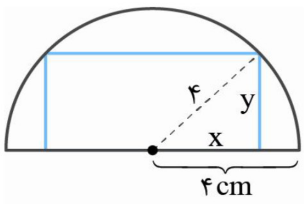
$$v'=\frac{۱۲x^۲-۸۸x+۹۶=۰}{۴} \Rightarrow ۳x^۲-۲۲x+۲۴=۰$$

$x_۱=۶\notin(۰,۳)$ ✗

$x_۲=\frac{۴}{۳}$ ✓

۱) اگر x خارج این محدوده باشد عرض مکعب صفر می‌شود و مکعب نمی‌تواند طول صفر داشته باشد

یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴cm باشد، طول و عرض مستطیل را طوری بدست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.



$\text{طول}=۲x$

$\text{عرض}=y=\sqrt{۱۶-x^۲}$

$x^۲+y^۲=۱۶ \Rightarrow y=\sqrt{۱۶-x^۲}$

$x \in (۰,۴)$

$$S_{(x)}=۲x\sqrt{۱۶-x^۲} \Rightarrow \sqrt{۶۴x^۲-۴x^۴}$$

$$S'_{(x)}=۴\frac{۱۲۸x-۱۶x^۳}{۲\sqrt{۶۴x^۲-۴x^۴}}=۰ \Rightarrow \begin{array}{l} ۱۲۸x-۱۶x^۳=۰ \\ ۱۶x(۸-x^۲)=۰ \\ (۲\sqrt{۲}-x)(۲\sqrt{۲}+x) \end{array} \quad \begin{array}{ll} x_۱=۰ & ✗ \\ x^۲=۲\sqrt{۲} & ✓ \\ x_۲=-۲\sqrt{۲} & ✗ \end{array}$$

$\text{طول}=۴\sqrt{۲}$

$\text{عرض}=۲\sqrt{۲}$

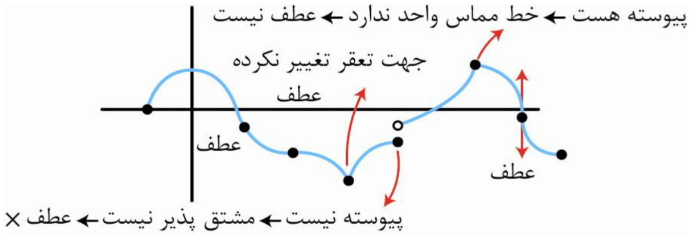
نقطه عطف و جهت تقعر

نقطه عطف ← نقطه‌ای از تابع است که جهت تقعر در آن نقطه عوض می‌شود.

تقعر ← جهت گودی تابع رو تقعرمی‌گویند،مثلا« [U] » تقعر رو به بالا « [∩] »تقعر رو به پایین است.

$-x^۲$ $\qquad$ $x^۲$

$F''(x)<۰ \swarrow$ $\qquad$ $\searrow F''(x)>۰$



توجه: در نقطه عطف تابع باید پیوسته و خط مماس واحد داشته باشد، در غیر این صورت گوییم

از نکته بالا نتیجه می‌گیریم که همه نقاط عطف وجود دارند به شرطی که یا $F''(x)=۰$ یا موجود نباشد ولی هر جایی که $F''(x)=۰$ بود و یا موجود نبود لزوماً نقطه عطف نیست.

جهت تعقر و نقطه عطف نمودار تابع $F''(x)=-x^۳+۳x^۲+۱$ را بدست آورید. **(دی ۱۳۹۷)**

$$F'(x)=-۳x^۲+۶x \to F''(x)=-۶x+۶ \xrightarrow{F''(x)=۰} -۶x+۶=۰ \Rightarrow \boxed{x=۱}$$

x	$-\infty$	۱	$+\infty$
y'	+	∘	−
y	∪		∩

نقطه عطف

نقطه عطف $\boxed{x=۱}$

اگر نقطه $A(-۱,۱)$ نقطه‌ی عطف منحنی $F(x)=x^۳+ax^۲+bx-۱$ باشد، مقادیر b و a را بدست آورید.

$$F'(x)=۳x^۲+۲ax+b \to F'(x)=۶x+۲a \xrightarrow[\text{چون نقطه عطف هست}]{F''(-۱)=۰} -۶+۲a=۰ \Rightarrow \boxed{a=۳}$$

$F(-۱)=۱$

$$=-\cancel{۱}+\overset{۳}{\cancel{a}}-b-\cancel{۱} \Rightarrow \boxed{b=۰}$$

رسم نمودار تابع

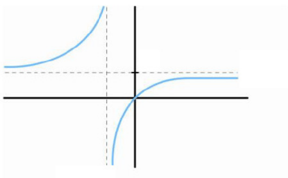
برای توابع هموگرافیک اول مجانب‌های قائم و مجانب‌های افقی آن را بدست‌می‌آوریم وآنها را روی صفحه مختصات رسم می‌کنیم بعد از تابع یک بار مشتق می‌گیریم و تعیین علامت می‌کنیم تا وضعیت یکنوایی تابع مشخص بعد تابع را رسم می‌کنیم.

(نمره دارد)

جدول رفتار و نمودار تابع $x=۱$ را رسم کنید. (دی ۱۴۰۰)

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x-۲}{x+۲}=\frac{-۴}{۰}=\infty \quad ۲^+ \to -\infty \quad -۲^- \to +\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x-۲}{x+۲}=۱ \to \text{مجانب افقی}$$



مجانب قائم $\boxed{x=-۲}$

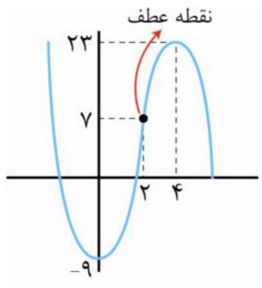
همیشه صعودی هست $y'=\dfrac{۴}{(x+۲)^۲}>۰$

x		−۲	
y'	+	⋮	+
y	↗ $+\infty$	⋮	$-\infty$ ↗

برای توابع درجه ۳

از تابع ۲ بار مشتق می‌گیریم و جهت تقعر تابع را مشخص می‌کنیم و با تعیین علامت $F'(x)$ رفتار یکنوایی تابع را بررسی می‌کنیم و با توجه به علامت $x^{۳}$ نمودار را رسم می‌کنیم.

جدول رفتار و نمودار تابع $F(x)=-x^{۳}+۶x^{۲}-۹$ را رسم کنید. **(شهریور ۱۴۰۰)**



x		۰		۲		۴	
$F'(x)$	− ↘		+ ↗		+ ↗		− ↘
$F''(x)$	+ ∪		+ ∪	۰	− ∩		− ∩
$F(x)$							

$$F'(x)=-۳x^{۲}+۱۲x=-۳\underset{۰}{x}\,(\underset{۴}{x-۴})$$

$$F''(x)=-۶x+۱۲=-۶\underset{۲}{(x-۲)}$$

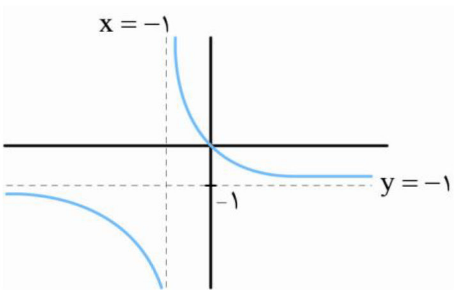
جدول رفتار و نمودار تابع $F(x)=\dfrac{-x}{x+۱}$ را رسم کنید.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{x+۱}=-۱\Rightarrow\boxed{y=-۱}$ مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to-۱}\dfrac{-x}{x+۱}=\infty\Rightarrow\boxed{x=-۱}$ مجانب قائم

$F'(x)=\dfrac{-۱}{(x+۱)^{۲}}<۰\leftarrow$ همیشه نزولی اکید

x		-۱	
$F'(x)$	−		−
$F(x)$	↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘



فصل اول: تابع

سوال ۱ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = f(ux)$ از انبساط (انقباض) نمودار تابع $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می‌آید. × (خرداد ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$f(x) \xrightarrow{\text{دامنه نمودار } f(x) \text{ در } \frac{۱}{۲} \text{ ضرب می‌شود}} f(۲x)$$

* گفتیم که تغییرات روی دامنه همیشه برعکس اعمال می‌شوند؛ مثلاً:

ب) نقطهٔ $(-۸, ۶)$ روی نمودار $y = f(x)$ با نقطهٔ $(-۸, ۱۲)$ $\big((-۸, ۳)\big)$ روی نمودار $y = \frac{۱}{۲}f(x)$ متناظر است. ×

(دی ماه ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$f(-۸) = ۶ \qquad \frac{۱}{۲}f(-۸) = \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳$$

درسنامه: روشی که من برای این نمونه سؤالات استفاده میکنم به این صورت است که ابتدا نقطه مورد نظر را به دست میآورم، بعد مقدار f آن را نیز به دست میآورم؛ بعد اعمال را روی نقاط انجام میدهم. در مثال واضح‌تر است. به عنوان مثال:

$$f(۶) = ۲ \qquad \frac{۱}{۲}f(۶) = ? \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۲ = ۱$$

سوال ۲ اگر نقطهٔ $(۲, ۶)$ روی تابع $f(۲x)$ باشد، با چه نقطه‌ای روی نمودار $\frac{۱}{۲}f(۳x)$ متناظر است؟

پاسخ:

ابتدا نقطهٔ اصلی را که روی $f(x)$ است پیدا میکنیم. در این سؤال گفته که نقطه $(۲, ۶)$ روی $f(۲x)$ هست؛ یعنی به «x»، «۲» می‌دهیم و «۶» می‌گیریم؛ یعنی:

$$f(\underbrace{۲\overset{۲}{x}}_{۴}) = ۶ \Rightarrow f(۴) = ۶$$

به دست آوردیم که $f(۴) = ۶$ است. حال از این داشته استفاده می‌کنیم.

به این صورت که جلوی $f(۳x)$ را، یعنی $۳x$ را مساوی «۴» می‌گذاریم و «x» نقطهٔ متناظر را به دست می‌آوریم.

$$۳x = ۴ \Rightarrow x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow f(۳x) \xrightarrow{x=\frac{۴}{۳}} f\left(\cancel{۳}\left(\frac{۴}{\cancel{۳}}\right)\right) \Rightarrow f(۴) = ۶$$

$$\frac{۱}{۲}f(۳x) \Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۶ = ۳$$

پس نقطهٔ متناظر $\left(\frac{۴}{۳}, ۳\right)$ است.

سوال ۳ اگر بازهٔ $[-۲, ۱]$ دامنهٔ تابع $f(x)$ باشد، دامنهٔ تابع $f(۳x + ۱)$ برابر .... است. (شهریور ۱۳۹۹)

پاسخ:

f بین $[-۲, ۱]$ تعریف شده است؛ یعنی اگر عددی خارج از این بازه به f نسبت بدهیم، f در آن نقاط تعریف نشده است. پس یعنی $۳x + ۱$ باید اعدادی بین $[-۲, ۱]$ به ما بدهد؛ چون f در بین آن اعداد $[-۲, ۱]$ تعریف شده است.

$$-۲ \le ۳x + ۱ \le ۱ \Rightarrow -۳ \le ۳x \le ۰ \Rightarrow -۱ \le x \le ۰ \Rightarrow x \in [-۱, ۰]$$

$\le$: چون دامنه بسته است، به همین دلیل اکید نیست.

پس دامنهٔ تابع $f(۳x + ۱)$ به صورت $[-۱, ۰]$ است.

سوال ۴ نقطهٔ $(۲ ,۱-)$ در تابع $y = f(۲x+۱) - ۱$ متناظر با چه نقطه‌ای روی تابع $y = f(x)$ است؟ (خرداد ۱۳۹۹- خارج)

پاسخ:

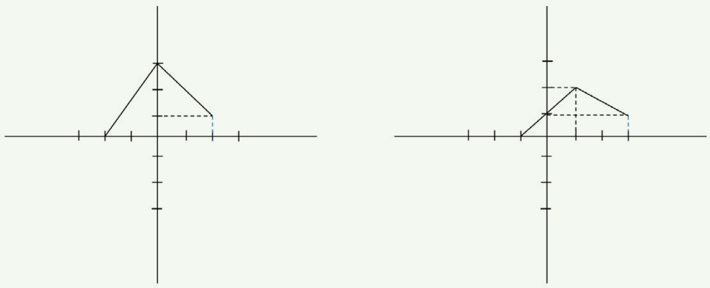
ابتدا در تابع $f(۲x+۱) - ۱$ به جای «X»، ۲ می‌گذاریم؛ چون ۲ دامنهٔ $f(۲x+۱) - ۱$ است.

$$f(۲(۲)+۱) - ۱ = -۱ \Rightarrow \boxed{f(۵) = ۰}$$

حال فهمیدیم که متناظر نقطهٔ $(۲ ,۱-)$ روی تابع $f(۲x+۱) - ۱$، روی تابع $f(x)$، $(۵, ۰)$ است؛ که سؤال همین را نیز از ما خواسته است

سوال ۵ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنهٔ تابع g را تعیین کنید. (خرداد- ۱۴۰۱)

پاسخ:



$D_y = [-۱ ,۳]$

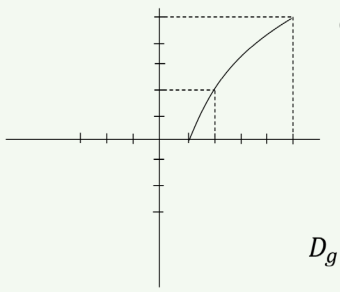
* همانگونه که قبلاً خواندیم، انتقالات روی x ها به صورت برعکس هستند؛ امّا انتقالات روی محور yها نه، به صورت مستقیم انجام میشوند.

سوال ۶ الف) نمودار تابع $f(x) = \sqrt{a}$ را در بازه $[۰ ,۴]$ رسم کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

ب) به کمک نمودار $f(x)$ نمودار تابع $g(x) = ۲f(x-۱)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد g را تعیین کنید.

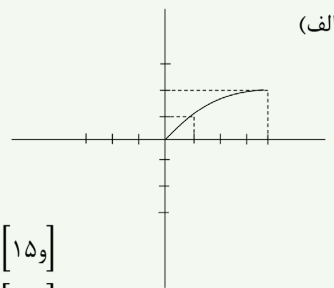
پاسخ:

ب)



$g(x)$

الف)



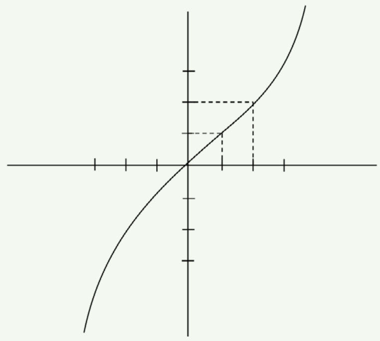
$f(x)$

$D_g = [۱ ,۵]$

$R_g = [۰ ,۴]$

سوال ۷ نمودار تابع $g(x)=x^۳-۳x^۲+۳x$ را به کمک انتقال نمودار $f(x)=x^۳$ رسم کنید، سپس اکیداً یکنواختی تابع $g(x)$ را در تمام دامنهٔ خود بررسی کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:



ضابطهٔ تابع $g(x)$ با اضافه و کم کردن عدد «۱»، میتواند به یک ضابطهٔ زیبا تبدیل شود. به گونهٔ زیر:

$$\underbrace{x^۳-۳x^۲+۳x-۱}_{(X-۱)^۳}+۱ \Rightarrow (X-۱)^۳+۱$$

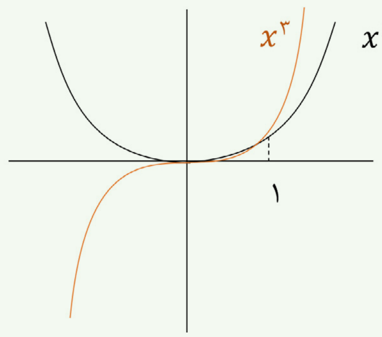
از آنجا که تعریف روبه‌رو برای g صادق است و یا $\forall\, a>b \Rightarrow g(a)>g(b)$

با توجه به شکل نمودار خواهیم فهمید که تابع $g(x)$ در $\mathbf{R}$ که دامنه‌اش است صعودی اکید است.

سوال ۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۳۹۹)

نمودار تابع $y=x^۳$ در بازهٔ $[۰,۱]$ ، پایینتر از نمودار $y=x^۳$ قرار دارد.

پاسخ:



سوال ۹ اگر $\frac{۱}{۱۲۵} \le \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۲x+۱}$ باشد، حدود x را بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

ابتدا پایه‌ها را به صورت توان‌دار و به صورت یک عدد در بازهٔ $(۱,+\infty)$ می‌نویسیم:

$$(۵^{-۱})^{۲x+۱} \le (۵^{-۳}) \Rightarrow ۵^{-۲x-۱} \le ۵^{-۳}$$

حال که پایه‌ها با هم برابرند و پایه‌ها بزرگتر از «۱» هستند، می‌توان نامساوی را برای توان‌ها نوشت.

$$-۲x-۱ \le -۳ \Rightarrow -۲x \le -۲ \Rightarrow \boxed{x \ge ۱}$$

سوال ۱۰ اگر $log^{(x+1)} \leq log^{(2x-3)}$ ، حدود x را بیابید. (شهریور ۱۳۹۸)

پاسخ:

از آنجا که مبناهای log با هم برابر و بزرگتر از یک است [یعنی تابع صعودی است]، می‌توان عبارات در پرانتز را با آن نامساوی آورد؛ یعنی به صورت زیر:

$$x+1 \leq 2x-3 \Rightarrow \boxed{4 \leq x}$$

سوال ۱۱ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چند جمله‌ای بر و بخشپذیر باشد. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

طبق قضیه تقسیم که در کتاب درس بود، ما اگر ریشه مقسوم‌علیه ما را در تابع مقسوم بگذاریم، جواب باید صفر شود؛ پس:

$$P(1)=0 \to 1-a+b+2=0 \to \boxed{b-a=-3}(I)$$

$$P(-2)=0 \to -8-4a-2b+2=0 \xrightarrow{\div(-2)} +4+2a+b-1=0 \to \boxed{2a+b=-3} \quad (II)$$

$$(II)-(I) \Rightarrow 2a\cancel{+b}\cancel{-b}+a=-3+3 \Rightarrow \boxed{a=0}, \boxed{b=-3}$$

سوال ۱۲ اگر چند جمله‌ای $\frac{x^2+ax-8}{P(a)}$ بر $x-a$ بخشپذیر باشد، مقدار a را تعیین کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

طبق قضیه تقسیم داریم:

$$P(a)=0 \Rightarrow a^2+a^2-8=0 \Rightarrow 2a^2=8 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_1=2 \\ a_2=-2 \end{matrix}}$$

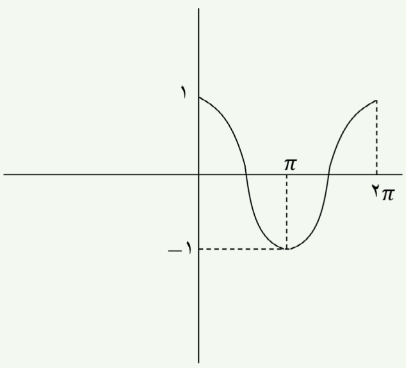
※ نکته: اگر عبارت $P(a)$ بر $x-a$ بخشپذیر باشد، داریم که $P(a)=0$ چون:

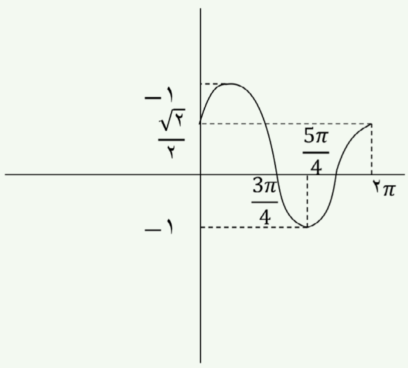
$P(a)=(x-x)\big(a(x)\big)+y \to 0 \to$ چون بخش پذیره

$P(a)=0$

سوال ۱۳ نمودار تابع $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ را به کمک نمودار $y=\cos(x)$ رسم کنید. $\left[0, 2\pi\right]$ (خرداد ۱۴۰۰)

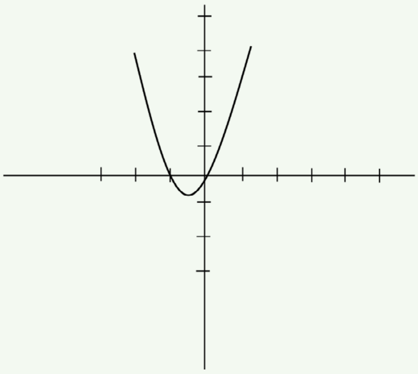
پاسخ:





سوال ۱۴ ابتدا با رسم نمودار تابع $f(x) = x^۲ + ۲x$ را رسم نمائید. سپس تعیین کنید که این تابع در چه بازهای اکیداً صعودی و در چه بازهای اکیداً نزولی است. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:



نزولی اکید $\rightarrow (-\infty, -۱)$

صعودی اکید $\rightarrow (-\infty, -۱)$

$f(x) = x(x + ۲)$

* برای رسم نمودار ابتدا آن را به سادهترین عاملها تجزیه میکنیم و سعی کنید به عوامل درجه یک یا عوامل درجه یک توان‌دار تبدیل کنید که آن عوامل همان ریشههای تابع هستند. مثلاً

$f(x) = x^۳ + x^۲ \rightarrow f(x) = x^۲(x + ۱)$

فصل دوم: مثلثات

سوال ۱۵ ضابطهٔ تابع به فرم $y = a\cos(bx) + c$ را بنویسید که دورهٔ تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار مینیمم آن ۲- باشد.

پاسخ:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۲ = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \boxed{|b| = \pi}$$

$$\left.\begin{aligned} |a| + c &= ۴ \\ -|a| + c &= -۲ \end{aligned}\right\} ۲c = ۲ \Rightarrow c = ۱$$

$$|a| = \boxed{\begin{array}{c} \cos(\pi x) + ۳ \\ -\cos(\pi x) + ۳ \\ \cos(-\pi x) + ۳ \\ -\cos(+\pi x) + ۳ \end{array}}$$

سوال ۱۶ دورهٔ تناوب تابع $y = ۸\cos\left(\frac{x}{۳}\right)$ برابر .....۶π..... است.

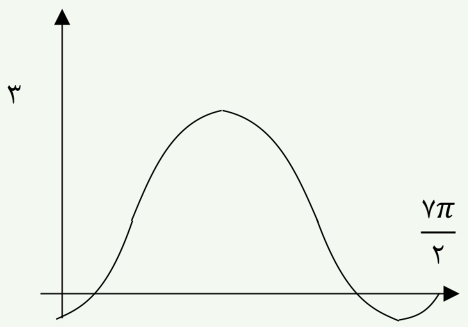
پاسخ:

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۳}} = \boxed{۶\pi}$$

دورهٔ تناوب یک تابع مثلثاتی از فرمول $T = \frac{۲\pi}{|b|}$ به دست می‌آید.

سوال ۱۷ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \underbrace{a + b\sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right)}_{a+b\cos(x)}$ است. a و b را بیابید؟ (کنکور ۱۴۰۱)

پاسخ:



$|b| + a = ۳$

این سؤال دشوارتر از سؤال‌های امتحان نهایی است ولی برای تمرین در خانه مناسب است.

ابتدا دقت میکنیم که تابع "cos" به صورت نزولی، $(x = ۰)$ شروع به حرکت می‌کند ولی در این نمودار تابع به صورت صعودی شروع کرده؛ پس یعنی نمودار نسبت به محور "x" ها قرینه شده که لازمه این، این است که $b < ۰$ باشد. نقطه‌ای را که به ما داده شده است را نیز می‌توانیم در تابع بگذاریم و تابع را مساوی صفر قرار دهیم تا دو معادله بر حسب a و b بهدست بیاریم.

$$a + b\cos\left(\frac{۷\pi}{۳}\right) = ۰ \Rightarrow a + \frac{b}{۲} = ۰ \Rightarrow \boxed{a = -\frac{b}{۲}}$$

$$|b| + a = ۳ \xRightarrow{b<۰} -b + \underbrace{a}_{-\frac{b}{۲}} = ۳ \Rightarrow -\frac{۳b}{۲} = ۳ \Rightarrow \boxed{b = -۲} \quad \boxed{a = ۱}$$

سوال ۱۸ ضابطهٔ یک تابع سینوس با دورهٔ تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینمم ۳ را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$T=۳ \qquad Max=۵ \qquad Min=۳ \qquad \underbrace{\frac{۲\pi}{|b|}=۳}_{|b|=\frac{۲\pi}{۳}} \qquad \left.\begin{matrix}|a|+c=۵\\ -|a|+c=۳\end{matrix}\right\} ۲c=۸ \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}c=۴\\ |a|=۱\end{matrix}}$$

$$\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}x\right)+۴=-\sin\left(-\frac{۲\pi}{۳}x\right)+۴$$

$$-\sin\left(\frac{۲\pi}{۳}x\right)+۴=\sin\left(-\frac{۲\pi}{۳}x\right)+۴$$

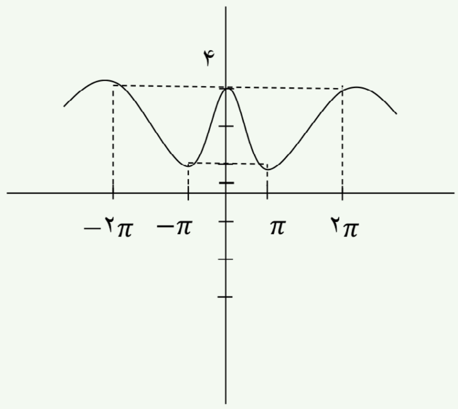
* یادآوری: فرمولهایی که مقادیر **Max** و **Min** و دورهٔ تناوب را حساب کردیم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\rightarrow \sin,\cos \qquad\qquad |a|+c=Max$$

$$T=\frac{\pi}{|b|}\rightarrow \tan,cot \qquad\qquad -|a|+c=Min$$

سوال ۱۹ نمودار تابع به صورت زیر است. حاصل **a+b** را به دست آورید. $(b>۰)$ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:



$$Max=۴\rightarrow |۱|+a=۴\rightarrow \boxed{a=۳}\checkmark \qquad f(x)=a+\cos(bx)$$

$$Min=۲\rightarrow -|۱|+a=۲\rightarrow \boxed{a=۳}\checkmark$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow ۲\pi=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=۱ \begin{matrix}\nearrow \boxed{b=۱}\checkmark\\ \searrow b=-۱\times\end{matrix} \qquad \boxed{a+b=۴}$$

سوال ۲۰ اگر دورهٔ تناوب $y=\sin(bx)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد، مقدار **b** برابر $\underline{b=\mp ۶}$ است. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

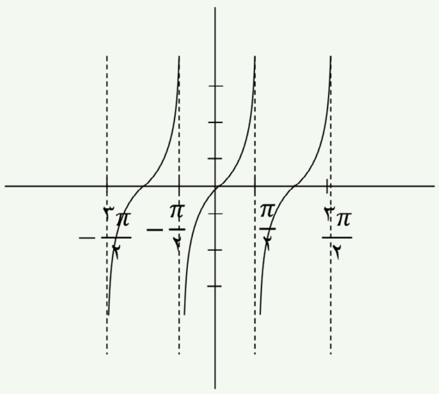
$$\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{|b|}\Rightarrow |b|=۶\Rightarrow b=\mp ۶$$

سوال ۲۱ دامنهٔ تابع $y = \tan ۳x$ برابر است با .... (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

※ با توجه به تعریف تابع tan که برابر است با $\frac{sin}{cos}$ در بعضی نقاط مانند $\frac{\pi}{۲}$ مخرج این کسر به سمت صفر میل میکند ولی صورت کسر به سمت «۱»؛ و به همین دلیل مقدار تابع به سمت «∞» میل میکند و چون ∞ عددی تعریف نشده است، میگوییم که تابع tan در این نقاط (نقاطی که cos برابر صفر می‌شود) تعریف شده نیست.

از روی نمودار زیر میتوان این برداشت را کرد.



همانگونه که مشاهده میشود در نقاط $k\pi + \frac{\pi}{۲}; k \in z$ تابع tan تعریف نشده است. برای به دست آوردن این نقاط کافی است cos را مساوی صفر قرار دهید و معادله را حل کنید.

$$\tan ۳x = \frac{\sin ۳x}{\cos ۳x} \Rightarrow \cos ۳x = ۰ \qquad ۳x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \boxed{x = \frac{k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۶}}; k \in z$$

سوال ۲۲ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (دی ۱۳۹۷)

تابع tan در دامنهٔ خود صعودی است. ✓

※ حال اگر سؤال را دستکاری کنیم و بگیم:

تابع tan در R صعودی است. ×

پاسخ:

در این حالت عبارت، عبارتی غلط است؛ زیرا تابع در $\frac{\pi}{۲}$ از $+\infty$ به $-\infty$ میرود، که این خودش نوع نزولی است؛ یعنی تابع تانژانت فقط در دامنهٔ خودش صعودی است و نه R

سوال ۲۳ دورهٔ تناوب تابع برابر است. (دی ۱۳۹۷، خرداد ۱۳۹۹ خارج، شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$T_{tan} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{۱} \Rightarrow \boxed{T = \pi}$$

※ یادآوری: گفتیم که دورهٔ تناوب tan از فرمول $T = \frac{\pi}{|b|}$ به دست میآید.

سوال ۲۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. (شهریور ۱۴۰۰)

در بازهٔ $\frac{۳\pi}{۲} < \theta < ۲\pi$ مقدار $\tan\theta$ از مقدار $\sin\theta$ کوچک‌تر است. ✓

پاسخ:

* برای فهم بهتر اینکه چرا $\tan\theta$ بزرگتر از $\sin\theta$ در بازهٔ $۰ < \theta < \frac{\pi}{۲}$ است، می‌توان اینگونه تفکر کرد که:

$$\sin\theta = \sin\theta \xrightarrow{\text{تقسیم یک طرف به } \cos\theta} \sin\theta \le \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \sin\theta \le \tan\theta \quad \forall\theta \in \left(۰, \frac{\pi}{۲}\right) \quad \le$$

چون تابع $|\cos\theta| \le ۱$ است و هر عدد بر یک عدد بین بازهٔ $(۱ \text{ و } ۰)$ تقسیم شود، عدد بزرگتر می‌شود، میتوان دریافت که $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ بزرگتر مساوی $\sin\theta$ است.

سوال ۲۵ معادله $\sin ۳x = \sin ۲x$ را حل کنید. (شهریور ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$\sin ۳x = \sin ۲x \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + ۲x \to x = ۲k\pi & k \in z \\ ۳x = ۲k\pi + \pi - ۲x \to x = \frac{۲k\pi}{۵} + \frac{\pi}{۵} & k \in z \end{cases}$$

* برای حل معادلات مثلثاتی ابتدا باید سعی کنید معادله را به فرم (برای **sin**):

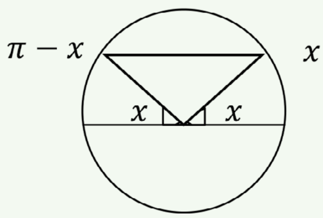
$$\sin kx = \square \qquad\qquad \sin kx = \sin k'x$$

و همچنین این فرمها را برای **cos** به دست آورید. حال برای به دست آوردن نقاط دقیق برای **sin**:

به این صورت است که با توجه به دایره مثلثاتی، تمام نقاطی که روی دو خط آبی قرار میگیرند جواب هستند.

برای **sin**:

$$\boxed{kx = ۲k\pi + \pi - k'x} \qquad \begin{cases} \sin kx = \sin k'x \\ \boxed{kx = ۲k\pi + k'x} \end{cases}$$

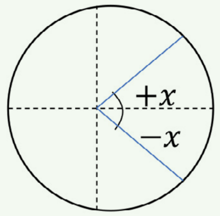


برای **cos**:

به این صورت است که باز با توجه به دایره مثلثاتی خواهیم داشت:

$$\boxed{kx = ۲k\pi - k'x} \qquad \begin{cases} \cos kx = \cos k'x \\ \boxed{kx = ۲k\pi + k'x} \end{cases}$$

دو خط آبی و همه نقاطی که در تناوبهای بعدی روی این نقاط قرار میگیرند جواب هستند.



توجه کنید: معادلات **tan** تا به حال در امتحان نهایی نیامده است؛ ولی من یک اشاره کوچک بعداً به آن خواهم کرد.

سوال ۲۶ معادله $۲\sin ۳x - \sqrt{۲} = ۰$ را حل کنید. (خرداد ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$۲\sin ۳x - \sqrt{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۳x = \sin\frac{\pi}{۴} \begin{cases} \nearrow ۳x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \\ \searrow ۳x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \end{cases}$$

$$x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۱۲} \forall k \in z \qquad x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۴} \forall k \in z$$

سوال ۲۷ معادله‌ی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ را حل کنید. (دی ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\frac{۱}{۲}\underbrace{(\cancel{۲\sin x\cos x})}_{\sin ۲x} = \frac{\sqrt{۲}}{\cancel{۴}_{۲}} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۴}$$

$$\left.\begin{array}{l} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۸} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۴} \Rightarrow x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸} \end{array}\right\} \forall k \in z$$

* یادآوری: فرمول مثلثاتی دو برابر کمان به صورت زیر بود.

$$۲\sin\cos x = \sin ۲x$$

$$\cos ۲x = cos^{۲}x - sin^{۲}x = ۲cos^{۲}x - ۱ = ۱ - ۲sin^{۲}x$$

سوال ۲۸ معادله $\cos ۳x = \cos x$ را حل کنید. (دی ۱۳۹۷ و شهریور ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\cos ۳x = \cos x \begin{cases} \nearrow ۳x = ۲k\pi + x \to x = k\pi \ (1) \\ \searrow ۳x = ۲k\pi - x \to x = \frac{k\pi}{۲} \ (2) \end{cases}$$

به دلیل اینکه رابطهٔ ۲ نقاطی که از رابطهٔ ۱ نیز به دست می‌آید را نیز شامل می‌شوند؛ پس رابطهٔ ۲ کلی‌تر است و آن را به عنوان جواب نهایی قبول میکنیم.

$$x = \frac{k\pi}{۲} \forall k \in z$$

سوال ۲۹ معادلهٔ مثلثاتی $۲cos^{۲}x + \cos x = ۰$ را حل کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\cos x(۲\cos x + ۱) = ۰ \begin{cases} \nearrow \cos x = ۰ \\ \searrow ۲\cos x + ۱ = ۰ \to \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x = \cos\frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

سوال ۳۰ معادلهٔ $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ در بازهٔ $[۰ , \pi]$ چند جواب دارد؟ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\cos ۲x = ۲\cos^{۲} x - ۱$$

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\cos^{۲}x - ۱ - cos\ x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰$$

$$\cos x = \overbrace{۰}^{\cos\frac{\pi}{۲}} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \quad \forall k \in z\ (۱)\ x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}(۲)$$

مجموع جواب‌های ۱ و ۲ هر دو یک سری نقاط را نمایش میدهند؛ پس هر کدام را که بگوییم جواب معادله است.

$$\cos x = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\cos\frac{\pi}{3}} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \qquad x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}\ \forall k \in z$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\pi}{2}} \text{ و } \boxed{x_2 = \frac{\pi}{3}} \qquad x_1 \text{ و } x_2 \in [0, \pi]$$

خطر: هیچگاه در حل معادله در دو عبارت را ساده نکنید، زیرا باعث حذف جواب می‌شود. مثلاً:

$x^2 = x$ ← مـا اگـر یـک x را از طرفیـن سـاده کنیـم، جـواب $\boxed{x = 0}$ حـذف میشـود. فقـط در صـورتی میتـوان سـاده کـرد کـه ریشـه عبـارت سـاده شـده را اعلام کنیـم.

سوال ۳۱ معادلهٔ $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید. (خرداد ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x \cancel{-1} + \cos x \cancel{+1} = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos x + 1) = 0 \begin{cases} \nearrow \cos x = \underbrace{0}_{\cos\frac{\pi}{2}} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \forall k \in z \\ \searrow 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{\cos\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \end{array}\right\} \forall k \in z$$

معادلات تانژانتی (اختیاری):

فرمـول «تانژانـت جمـع دو کمـان» را بـه خاطـر داشـته باشـید، بهتـر اسـت؛ ولی تـا بـه حـال از معـادلات تانژانـتی در امتحانـات نهـایی سـؤال نیامـده اسـت.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\xRightarrow{\text{صورت و مخرج تقسیم بر } \cos\alpha\cos\beta} \frac{\frac{\sin\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} + \frac{\cancel{\cos\alpha}\sin\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \boxed{\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}}$$

سوال ۳۲ تساوی $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ را ثابت کنید.

پاسخ:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \xRightarrow[\beta = x]{\alpha = \frac{\pi}{4}} \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\overbrace{\cancel{\tan\frac{\pi}{4}}}^{1} + \tan x}{1 - \underbrace{\cancel{\tan\frac{\pi}{4}}}_{1}\tan x} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$

سوال ۳۳ (تمرین) مقادیر $\tan 15^\circ$ و $\tan 75^\circ$ را به دست آورید.

پاسخ: ❋ نکته: برای $\tan(\alpha - \beta)$ کافی است به جای «β»، «$-\beta$» بگذارید.

$$15^\circ = \overbrace{45^\circ}^{\alpha} - \overbrace{30^\circ}^{\beta}$$
$$75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$$

فصل سوم: حدهای نامتناهی

تذکر خیلی مهم: جواب حدهایی که ∞ می‌شود؛ یعنی حد تابع وجود ندارد، چون مقدار تابع به عدد مشخص میل نمیکند و $+\infty$ فقط نمادی است که نشان میدهد حد این تابع از هر عدد مثبتی بزرگتر است؛ پس جواب حدهایی که ∞ می‌شوند، حد آن توابع وجود ندارد در آن نقطه

سوال ۳۴ مقدار a را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{(۲-x)^۳}$ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

ابتدا صفر مثبت بودن یا منفی بودن مخرج را محاسبه میکنیم.

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{ax-۳}{\underbrace{(۲-x)^۳}_{*}} = \frac{۲a-۳}{۰^-} = +\infty \Rightarrow ۲a-۳<۰ \Rightarrow a<\frac{۳}{۲}$$

* ۲ از یک مقدار بیشتر از ۲ کم میشود؛ مثلاً $(۲-۲/۱)$ که عدد منفی است، کمتر از صفر است.

برای ∞ شدن جواب، وقتی مخرج صفر است باید صورت به سمت عدد میل کند، که در این سؤال عددی منفی است؛ چون صفر، صفر منفی است و برای $+\infty$ شدن نیاز به یک عدد منفی داریم.

سوال ۳۵ حاصل $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \left(\frac{x+۱}{\tan x}\right) = ۰$ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \left(\frac{x+۱}{\tan x}\right) = \left.\begin{matrix} \nearrow \frac{\pi}{۲}^+ \to \frac{\frac{\pi}{۲}+۱}{-\infty} = ۰ \\ \searrow \frac{\pi}{۲}^- \to \frac{\frac{\pi}{۲}+۱}{+\infty} = ۰ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \left(\frac{x+۱}{\tan x}\right) = ۰$$

* یادآوری:

$$\frac{\text{عدد} > ۰}{\text{حدس } ۰^+} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد}}{\text{مطلق } ۰} = \text{تعریف نشده}$$

$$\frac{\text{عدد} > ۰}{۰^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد}}{\infty} = ۰ \qquad \frac{۰}{۰} = \text{مبهم}$$

سوال ۳۶ حد زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

$$\lim_{x\to ۲^-} \frac{[x]-۲}{x-۲} = \frac{\overbrace{[۲^-]}-۲}{۲^- - ۲} = \frac{-۱}{۰^-} = +\infty$$

پاسخ:

میتوانید به جای عددی کوچکتر از ۲ بگذارید. مثلاً ۱/۹، که اگر جواب مثبت شد یعنی $^+$. است و اگر جواب منفی شد یعنی $^-$. است

سوال ۳۷ حد تابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{(x-۲)^۲} = \lim_{x\to ۲^+} \frac{x+۲}{x-۲} = \frac{۲+۲}{۲^+-۲} = \frac{۴}{۰^+} = +\infty$$

سوال ۳۸ حد زیر را به دست آورید. (خرداد ۱۳۹۹)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x^2}=1+\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=1+\infty=+\infty$$

سوال ۳۹ حد تابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{5x}{|2x-1|}=\frac{\frac{5}{2}}{0^+}=+\infty$$

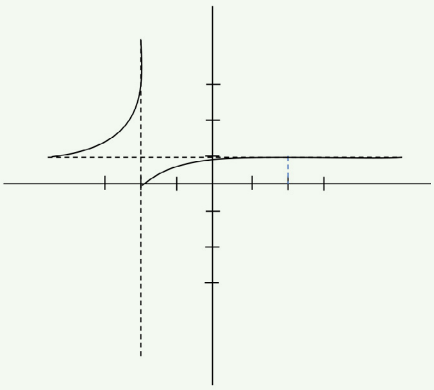
چون مخرج در قدر مطلق است و جواب قدر مطلق همیشه عددی مثبت است؛ پس بدون محاسبه کمتر یا بیشتر بودن صفر مخرج آن را صفر بیشتر میگذاریم.

سوال ۴۰ با توجه به شکل، حدود توابع زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۳۹۸)

$$\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$$

پاسخ:



سوال ۴۱ حد تابع زیر را محاسبه کنید. (شهریور ۱۳۹۸)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{2x^3-4x}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}}{2\cancel{x^3}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

* یادآوری: برای محاسبه حد در بینهایت از همارزی هر توان استفاده میکنیم؛ یعنی از جملات صورت و مخرج آن عبارت که بزرگترین درجه را داراست برمیداریم و هم ارز با تابع قرار میدهیم و حد آن تابع جدید را محاسبه میکنیم.

سوال ۴۲ حاصل حد تابع $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-2}$ برابر است با ......۳...... . (خرداد ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-2}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}}=\boxed{3}$$

سوال ۴۳ مجانبهای قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{3x-5}{x^2+2}$ را در صورت وجود بیابید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-5}{x^2+2}\sim\lim_{x\to+\infty}\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}=\frac{3}{\infty}=0$$

$y=0\rightarrow$ مجانب افقی

$x^2+2=0\rightarrow$ ریشه نمی‌دهد یعنی تابع مجانب قائم ندارد.

※ یادآوری: هر تابع وقتی به سمت ∞ میل میکرد، میگوییم مجانب قائم دارد که <u>معمولاً</u> در ریشه‌های مخرج که صورت را صفر نمیکنند. این اتفاق میافتد و هر وقت حد تابع در ∞ را محاسبه کنیم؛ عدد به دست آمده (در صورت وجود) مجانب افقی تابع گفته میشود.

سوال ۴۴ مجانبهای قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{3x}{x^3-1}$ را محاسبه کنید. (دی ۱۳۹۷)

پاسخ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^3-1}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{3}\,2}}=\frac{3}{\infty}=0\Rightarrow\boxed{y=0}\rightarrow$$ مجانب افقی

$$x^3-1=0\Rightarrow x=1\qquad\lim_{x\to1}\frac{3x}{x^3-1}=\begin{cases}\nearrow 1^+\rightarrow\frac{3}{0^+}=+\infty\\ \searrow 1^-\rightarrow\frac{3}{0^-}=-\infty\end{cases}\Rightarrow\boxed{x=1}\rightarrow$$ مجانب قائم

سوال ۴۵ مجانبهای قائم و افقی تابع $f(x)=\frac{1-x^2}{x^2+x}$ را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2}{x^2+x}\sim\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{-x^2}}{\cancel{x^2}}=-1\Rightarrow y=-1\rightarrow$$ مجانب افقی

$$x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0$$

$\nearrow\ x=0\rightarrow\lim_{x\to0}\frac{1-x^2}{x^2+x}\begin{cases}\nearrow 0^+\rightarrow\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \searrow 0^-\rightarrow\frac{1}{0^-}=-\infty\end{cases}\boxed{x=0}$ مجانب قائم

$\searrow\ x=-1\rightarrow\lim_{x\to-1}\frac{1-x^2}{x^2+x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to-1}\frac{(1-x)(1+x)}{x(x+1)}=-2$ مجانب قائم نیست

فصل چهارم: مشتق

سوال ۴۶ درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. (دی ۱۴۰۱)

اگر $f'_{(1)} = 2$ و $g'_{(1)} = -3$ باشند، حاصل $(3f+g)'_{(1)}$ برابر ۹ است. ×

پاسخ: $(3f_{(1)})' + g'_{(1)} = 3f'_{(1)} + g'_{(1)} = 6 - 3 = 3$

سوال ۴۷ اگر دو تابع با هم جمع شوند و مشتق مجموع دو تابع را می‌خواست، می‌توان جدا جدا مشتق توابع را بگیریم و بعد از مشتق‌گیری مجموع آن‌ها را محاسبه می‌کنیم.

پاسخ: $(x^n)' = n\,x^{n-1} \qquad (kx^n)' = k(n)x^{n-1} k \in R \qquad k' = 0$

$$\left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - b'a}{b^2} \quad b \neq 0 \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

برای راحتی کار با توابع رادیکالی بهتر است رادیکال را به صورت توان کسری بنویسید و با استفاده از فرمول مشتقگیری $[kx^n = knx^{n-1}]$ مشتق آن را بگیرید.

سوال ۴۸ فرمولهای مشتقگیری با استفاده از تعریف مشتق $\left[\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x+x_0}\right]$ قابل اثبات است؛ آنجا که توابع $y = x$ و یا توابع $y = x^n$ راحتی برای مشتق‌گیری هستند. اثبات فرمول مشتق این توابع را بر عهده شما واگذاری میکنم و خود تابع $y = \sqrt{x}$ را در فرمول مشتقی اثبات میکنم.

پاسخ: $f(x) = \sqrt{x} \qquad f(x_b) = \sqrt{x_0}$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}}{(\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})} = {}^1/_{2\sqrt{x_0}}$$

[سؤال «۱۰» امتحان نهایی] (خرداد ۱۴۰۲)

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

سوال ۴۹ اگر $f'_{(2)} = -1$ و $g'_{(2)} = 3$ باشد، در این صورت $(2f+3g)'_{(2)}$ برابر با ۷ است. (دی ۱۳۹۸)

پاسخ: $(2f)'_{(2)} + (3g)'_{(2)} = \underbrace{2f'_{(2)}}_{-2} + \underbrace{3g'_{(2)}}_{9} = 7$

سوال ۵۰ اگر f و g توابعی مشتق‌پذیر باشد و $\begin{cases} g'_{(۲)} = ۲ \text{ و } f_{(۲)} = ۳ \\ g_{(۲)} = -۳ \text{ و } f'_{(۲)} = ۱ \end{cases}$ مقادیر $(fg)'_{(۲)}$ و $(f+g)'_{(۲)}$ را به دست آورید. (دی ۱۳۹۷)

پاسخ:

$$(fg)'_{(۲)} = f'_{(۲)}g_{(۲)} + g'_{(۲)}f_{(۲)}$$

$$۱ \times (-۳) + ۲ \times ۳ = -۳ + ۶ = \boxed{۳}$$

$$(f+g)'_{(۲)} = f'_{(۲)} + g'_{(۲)} = ۱ + ۲ = \boxed{۳}$$

* مشتق ضرب، تقسیم، جمع و تفریق توابع به صورت زیر است.

$$(fg)' = fg' + g'f \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^۲} \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

مشتق ترکیب توابع نیز با فرمول زیر به دست می‌آید.

$$f(g(x)) = g'(x) \times f'(g(x))$$

در صورتی می‌توان از فرمول مشتق‌گیری روبهرو استفاده کنید که g در نقطه‌ای که در آن مشتق میگیریم، مشتق‌پذیر باشد و f نیز در نقطهٔ $g_{(\text{آن نقطه})}$ مشتقپذیر باشد. مثال:

$$f_{(x)} = |x| \qquad g_{(x)} = x^۲ \qquad x = ۰ \qquad \left[f_{(g_{(۰)})}\right]'$$

اگر توجه کنید در نقطهٔ $x = ۰$ مشتقپذیر است ولی f در نقطهٔ $g_{(۰)}$ مشتقپذیر نیست؛ پس نمیتوان مشتق تابع $f_{(g_{(۰)})}$ را به دست آورد.

سوال ۵۱ مشتق هر یک از توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) (شهریور ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$\text{الف) } g_{(x)} = (x^۲ + ۳x + ۱)^۷ \rightarrow \left.\begin{array}{l} g_{(x)} = x^۷ \\ U_{(x)} = x^۷ + ۳x + ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow h_{(x)} = f'_{(u(x))} \Rightarrow u'_{(x)} \times f'_{(u(x))}$$

$$\Rightarrow (۲x + ۳)(۷(x^۲ + ۳x + ۱)^۶)$$

$$\text{ب) } h_{(x)} = \frac{x^۲ - ۵x + ۷}{-۲x + ۹} = \frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} \Rightarrow \frac{f'g - g'f}{g^۲} = \frac{(۲x - ۵)(-۲x + ۹) - (-۲)(x^۲ - ۵x)}{(-۲x + ۹)^۲}$$

روش دیگر مشتق‌گیری که بیشتر خودمونی هست، اینگونه است که از خارجی‌ترین تابع شروع به مشتق‌گیری می‌کنیم و به سمت داخل حرکت می‌کنیم

و به این نکته هم توجه کنیم که توان همیشه خارجیترین است. برای مثا: قسمت الف سؤال بالا.

$$(x^۲ + ۳x + ۱)^۷ \Rightarrow ۷\underbrace{(x^۲ + ۳x + ۱)^۶}_{۱*} \times \underbrace{۲x + ۳}_{۲*}$$

۱* مشتق یک چیز به توان ۷، می‌شه هفت ضرب در اون چیز به توان ۶

۲* وقتی تابع‌های خارجی تمام شد و به چیز رسیدیم، مشتق اون چیز رو هم ضرب می‌کنیم.

* داخلی‌ترین تابع را بگیرید که کارتون راحت‌تر بشه.

$$\left(\frac{۳x^۲ + ۴}{۴x - ۲}\right)^۴ \Rightarrow \underbrace{۴\left(\frac{۳x^۲ + ۴}{۴x - ۲}\right)^۳}_{۱*} \times \underbrace{\frac{(۶x)(۴x - ۲) - (۴)(۳x^۲ + ۴)}{(۴x + ۲)}}_{۲*}$$

۱* چیز به توان ۴ مشتق میشه، چهار ضرب در چیز به توان ۳

۲* به چیز رسیدیم؛ پس مشتق چیز رو ضرب می‌کنیم.

سوال ۵۲ مشتق توابع را حساب کنید.

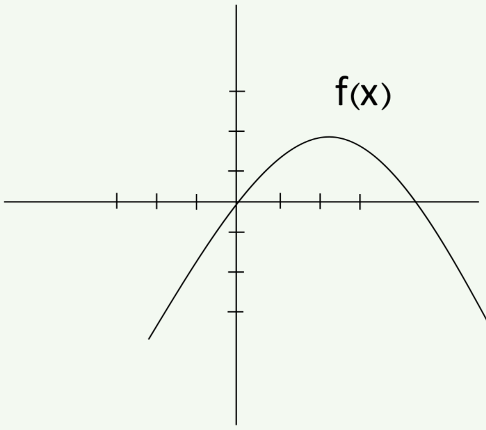
(خرداد ۱۳۹۸) ۵۳) $y=\frac{x^۲-۱}{x^۳+۲x+۱}=\frac{(۲x)(x^۳+۲x+۱)-(۳x^۲+۲)(x^۲-۱)}{(x^۳+۲x+۱)^۲}$

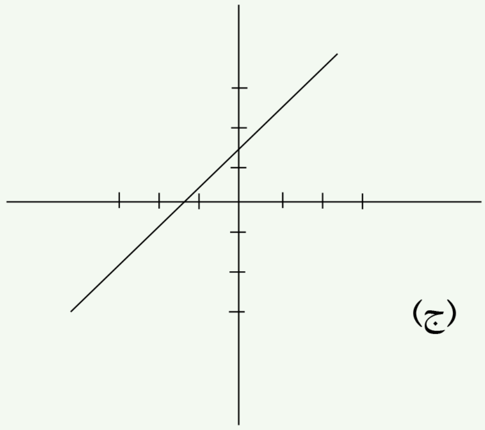
(خرداد ۱۳۹۸) ۵۴) $y=cos^۳(۲x)=۳cos^۲(۲x)\times-\sin(۲x)\times ۲\rightarrow$

(خرداد ۱۳۹۹) ۵۵) $y=sin^۳x+cos^۲x=۳sin^۲x\times\cos x+\left(۲\cos x\times(-\sin x)\right)$

(شهریور ۱۴۰۱) ۵۶) $(۴x^۲-۵x)^۳\left(\sqrt{a}+۱\right)=۳(۴x^۲-۵x)^۲(۸x-۵)\left(\sqrt{x}+۱\right)+\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\right)(۴x^۲-۵x)^۳$

(شهریور ۱۴۰۱) ۵۷) $\sin(۳x^۲)\Rightarrow ۶x\times\cos(۳x^۲)$





(ج)

$$\left.\begin{array}{l} f_{(x)}=\sin(x) \\ g_{(x)}=۳x^۲ \end{array}\right\} fog\Rightarrow g'_{(x)}=\times f_{(g'_{(x)})}$$

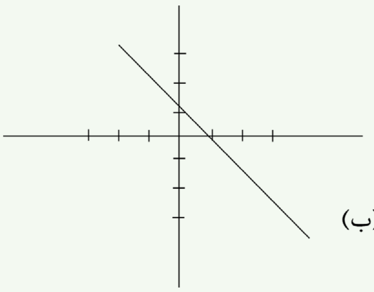
(تیر ۱۳۹۸) ۵۸) $sin^۳(۲x+۱)=۳sin^۲(۲x+۱)\times\cos(۲x+۱)\times ۲$

(دی ۱۴۰۱) ۵۹) $\underbrace{\sqrt{۷x}}_{\sqrt{۷}\sqrt{x}}(۳x^۲+۲)=\sqrt{۷}\times\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲+۲)+(۶x)\left(\sqrt{۷x}\right)$

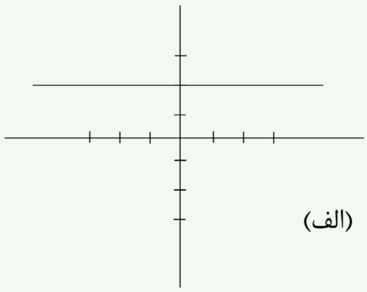
(دی ۱۴۰۱) ۶۰) $cos^۳(۲x)-\frac{۱}{x}=۳cos^۲(۲x)-\sin(۲x)\times ۲-\left(-\frac{۱}{x^۲}\right)$

سوال ۶۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. با بیان دلیل مشخص کنید کدام یک از نمودارهای زیر نمودار مشتق تابع است. (خرداد ۱۳۹۸)

پاسخ:



(ب)✓



(الف)

نمودار مشتق تغییرات شیب نمودار را به ما نشان میدهد و از روی شکل نمودار f میتوان فهمید در ابتدا شیب تابع مثبت بوده و تابع صعودی است و در یک عدد مثبت شیب نمودار صفر شده و تغییر علامت داده؛ یعنی شیب نمودار از صعودی بودن به نزولی بودن تغییر فاز داده است. پس تنها شکلی که ویژگیهای فوق را دارد قسمت (ب) است.

سوال ۶۲ مشتق تابع زیر را محاسبه کنید.

پاسخ:

$$۵\tan x + \sin(x^۲) \Rightarrow ۵(tan^۲x + ۱) + \cos(x^۲) \times ۲x$$

※ مشتق توابع **tan** و **cot** به صورت زیر است.

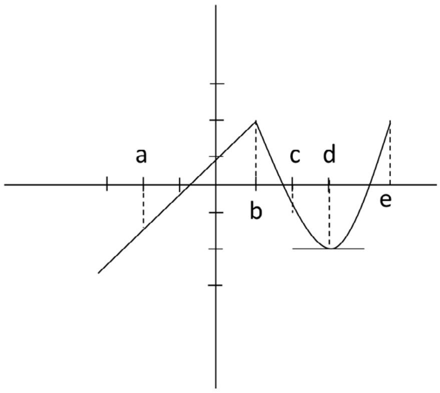
$$\tan x \xrightarrow{\prime} (۱ + tan^۲x) \qquad \cot x \xrightarrow{\prime} -(۱ + cot^۲x)$$

سوال ۶۳ با در نظر گرفتن نمودار تابع **f** در شکل مقابل از بین نقاط مشخص شده مطلوب است؛ طول نقطه‌هایی که: (شهریور ۱۴۰۱)

الف) تابع در آن پذیر نیست. **b**

ب) مماس در آن موازی محور طولها است. **d**

ج) مشتق و مقدار تابع در آن مثبت است. **e**



پاسخ:

توضیحات تکمیلی:

الف) توابع در جاهایی مشتقناپذیرند که یا در آنها پیوسته نباشند، یا مشتق چپ و راست آن با هم برابر نباشند و یا وجود نداشته باشد (به بینهایت میل کند {جواب تعریف مشتق بینهایت شود.})؛ که در شکل بالا به دلیل برابر نبودن مشتقات چپ و راست تابع مشتقپذیر نیست.

ب) اگر به ما بگویند که خط مماس موازی محور xها و یا عمود بر محور yها باشد، یعنی جایی که شیب خط مماس بر آن نقطه صفر است.

ج) در جاهایی که تابع در حال صعود است، گوییم که مشتق تابع مثبت است و در جاهایی که نمودار بالای محور xها است، تابع مقدار مثبت اختیار میکند؛ یعنی ما دنبال جایی هستیم که هم بالای محور xها و هم در حال صعود باشدکه نقطهٔ **e** جواب مسئله است.

سوال ۶۴ معادله خط مماس بر منحنی $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$ در نقطهٔ $A\left(۲ \text{ و } f(۲)\right)$ واقع بر نمودار تابع بنویسید. (خرداد ۱۳۹۹)

پاسخ:

$$f'(x) = -۲x + ۱۰ \rightarrow f'(۲) = ۶ \rightarrow \overbrace{"۲"}^{\text{شیب خط مماس در نقطه}}$$
$$f(۲) = -۴ + ۲۰ = ۱۶$$

$$\left\{\begin{array}{l} h(x) = \overbrace{mx}^{۶} + \overbrace{h}^{۴} = \boxed{۶x + ۴} \\ m = ۶ \\ f(۲) = h(۲) \Rightarrow h = ۴ \end{array}\right.$$

※ وقتی میگوییم یک خط در یک نقطه بر منحنی مماس است؛ یعنی در آن نقطه مقدار تابع با مقدار خط مماس برابر است؛ زیرا در این نقطه خط با منحنی در تماس است.

سوال ۶۵ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ متوسط آن در بازه $0\le t\le 4$ می‌شود؟ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\left.\begin{matrix} m(0)=0 \\ m(4)=10 \end{matrix}\right\} \underset{\text{در بازه } [0 \text{ و } 4]}{\text{شیب متوسط}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+2 \to m'(t)=\underset{\text{در بازه } [0 \text{ و } 4]}{\text{شیب متوسط}} \to \frac{1}{2\sqrt{t}}+\cancel{2}=\cancel{2}/5 \to \frac{1}{\sqrt{t}}=1 \to \boxed{t=1}$$

* آهنگ متوسط در یک بازه یعنی سر و ته بازه را با یک خط به هم وصل کنیم و شیب آن خط را محاسبه کنیم. آن شیب میشود شیب متوسط تابع در آن بازه.

سوال ۶۶ اگر $f(x)=cos2x$ باشد مقدار $f''\left(\frac{\pi}{8}\right)$ را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$f(x)=cos2x \xrightarrow{'} f'(x)=-2\sin(2x)\xrightarrow{'} f''(x)=-2\cos(2x)\times 2$$

$$f''\left(\frac{\pi}{8}\right)=-4\cos\underbrace{\left(\cancel{4}\left(\frac{\pi}{\cancel{8}}\right)\right)}_{\frac{\pi}{4}}=-4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\to\boxed{-2\sqrt{2}}$$

سوال ۶۷ مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

۶۸) $$\frac{4\tan x}{3x^2-1}=\frac{4\times(1+\tan^2 x)(3x^2-1)-(6x)(4\tan x)}{(3x^2-1)^2}$$

۶۹) $$(5x^3-x)^9\left(\sqrt{2x+1}\right)=9(5x^3-x)^8\times(15x^2-1)\left(\sqrt{2x+1}\right)+\left(\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}\times 2\right)(5x^3-x)$$

* مشتق توابع پیچیده مثل مثال «۶۷» از تکنیک که توابع را -- در نظر بگیریم راحتتر است مشتق‌گیری.

سوال ۷۰ در تابعی با ضابطهٔ $f(t)=\frac{120}{t}+5$ مجموع آهنگ لحظه‌ای تغییر در لحظهٔ $t=2$ و آهنگ متوسط تغییر تابع $f(t)$ در بازه $[6 \text{ و } 4]$ را بیابید.

پاسخ:

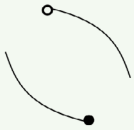
$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix} f(4)=30+5=35 \\ f(6)=20+5=25 \end{matrix}\right\} \text{متوسط } m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{25-35}{6-4}=-5 \\ f'(t)=120\times\frac{-1}{t^2}\to f'(2)=\frac{-120}{4}=-30 \end{matrix}\right\} -30-5=-35$$

سوال ۷۲ جای خالی را پر کنید.

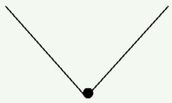
اگر f در x=a پیوسته $\underset{\text{.............}}{\overset{\text{نباشد}}{\rule{2cm}{0.4pt}}}$ ، آنگاه f در x=a مشتق‌ناپذیر است.

مشتق‌ناپذیری

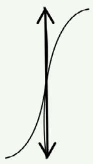
۱) ناپیوسته



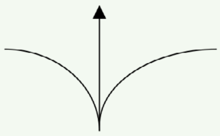
۲) نقاط گوشه (زاویه‌دار)



۳) نقاطی که مشتق آن‌ها به بی‌نهایت میل می‌کند.



در این نقاط تابع خط مماس واحد دارد ولی مشتق‌پذیر نیست.



سوال ۷۳ مشتق پذیری تابع $f(x)\begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$ را x=۰ بررسی کنید.(شهریور۱۳۹۹)

پاسخ:

شرط اول پیوستگی: $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) \to \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \quad f(0) = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$$

پس تابع پیوسته است در ؛ حال مشتق تابع را میگیریم.

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{\cancel{2}} - 0}{\cancel{x}} = 0 \qquad f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = 0$$

به دلیل برابر نبودن مشتقات چپ و راست تابع، تابه در x=۰ مشتقپذیر نیست.

سوال ۷۴ مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطهٔ x=۱ بررسی کنید. (دی ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & x \geq 1 \\ 3x + 1 & x < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$$

پس تابع در f پیوسته است در x=۱ ؛ حال مشتق تابع را محاسبه میکنیم.

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overset{x^2-1}{\cancel{x^2+3-4}}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} x + 1 = 2$$

$$f'_+(1) = 2 \neq f'_-(1) = 3$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\overset{3x-3}{\cancel{3x+1-4}}}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{3\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = 3$$

پس تابع در $x = 1$ مشتق‌پذیر نیست؛ به دلیل اینکه مشتقات آن (راست و چپ) با هم برابر نیست.

سوال ۷۵ خط مماس بر منحنی $y = x^۲ - ۴x + ۵$ در کدام نقطه:

الف) موازی خط $۶y - ۳x = ۱$ است؟

پاسخ:

$$۶y = ۳x + ۱ \to y = \frac{۱}{۲}a + \frac{۱}{۶} \to \boxed{m = \frac{۱}{۲}}$$

$$y = x^۲ - ۴x + ۵ \xrightarrow{\prime} y' = ۲x - ۴ \to ۲x - ۴ = \frac{۱}{۲} \to ۲x = \frac{۹}{۲} \to \boxed{x = \frac{۹}{۴}}$$

برای این که موازی باشد باید شیب‌ها با هم برابر باشند

اگر عمود بر یک خط را می خواست شیب باید قرینه و معکوس باشد.

سوال ۷۶ مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} ۳a - ۴ & x < ۱ \\ ۲x^۲ - ۳ & x \geq ۱ \end{cases}$ را در نقطه $a = ۱$ بررسی کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$\lim\limits_{x\to۱^+} f(x) = \lim\limits_{x\to۱^-} f(x) = f(۱) = -۱ \Longrightarrow$ در $x = ۱$ تابع پیوسته است

$$\lim_{x\to۱^+} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to۱^+} \frac{۲x^۲ - ۳ - (-۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to۱^+} \frac{۲x^۲ - ۲}{x - ۱} = \lim_{x\to۱^+} \frac{۲(x + ۱)(x - ۱)}{x - ۱}$$

$$\Longrightarrow ۲(۲) = ۴ \Rightarrow \boxed{f'_+(۱) = ۴}$$

$$\lim_{x\to۱^-} \frac{f(x) - f(۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to۱^-} \frac{۳x - ۴ - (-۱)}{x - ۱} = \lim_{x\to۱^-} \frac{۳(x - ۱)}{x - ۱} = ۳ \Longrightarrow \boxed{f'_-(۱) = ۳}$$

چون مشتقات چپ و راست با هم برابر نیستند پس تابع در $f'_+(۱) \neq f'_-(۱) \Longrightarrow$

$x = ۱$ مشتق پذیر نیست.

سوال ۷۷ درست یا نادرست عبارت زیر را مشخص کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

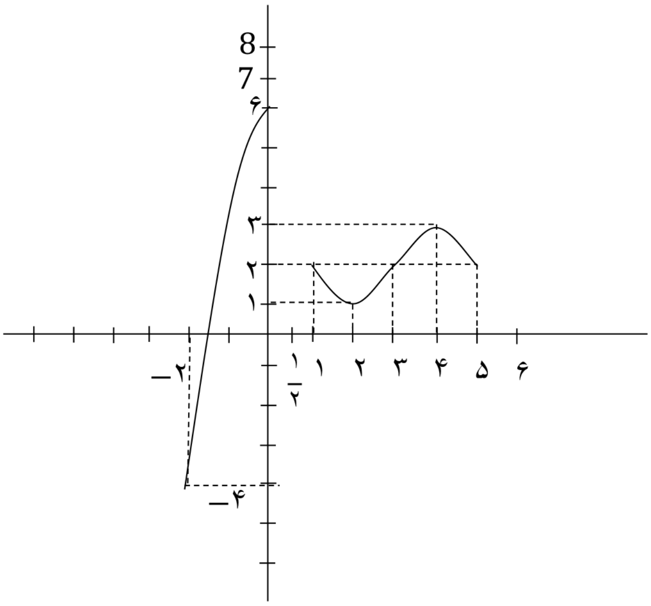
تابع $f(x) = [x]$ در نقطه $x = ۱$ مشتق پذیر است. ×

پاسخ:

* از آنجا که می‌دانیم تابع $[x]$ در $x = ۱$ اصلاً پیوسته نیست که بتواند مشتق پذیر باشد.

فصل پنجم: نقاط بحرانی

سوال ۷۸ با توجه به نمودار $f(x)$ به سؤالات داده شده پاسخ دهید. (خرداد ۱۴۰۱)



الف) مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید ۸

ب) مقدار مینیمم را بنویسید. ۴−

پ) طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید. ۴

ت) طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید. ۲

پاسخ:

* برای اکسترمم های مطلق حتماً باید y یا عرض نقطه اعلام شود اما برای اکسترمم های نسبی حتما x یا طول نقاط را اعلام کنید.

* نقاطی که در یکی از همسایگی‌های چپ و یا راست خود تعریف شده نیستند نمی‌توانند اکسترمم نسبی باشند ولی برای اکسترمم مطلق شدن (در صورت بودن) مشکلی ندارند. مثلاً در مثال بالا نقطه $(\frac{1}{2}$و$8)$ به دلیل این که تابع در همسایگی آن نقطه تعریف نشده است نمی‌تواند ماکزیمم نسبی اعلام شود و فقط ماکزیمم مطلق اعلام می‌شود.

سوال ۷۹ جاهای خالی را کامل کنید.

الف) اگر تابع $f(x)$ در بازه (a,b) صعودی باشد، علامت مشتق $f(x)$ در این بازه مثبت است. (تیر ۹۸)

اگر $f'(x) > 0$ باشد تابع صعودی اکید است/ اگر $f'(x) \geq 0$ باشد صعودی / اگر $f'(x) < 0$ نزولی اکید / اگر $f'(x) \leq 0$ نزولی است.

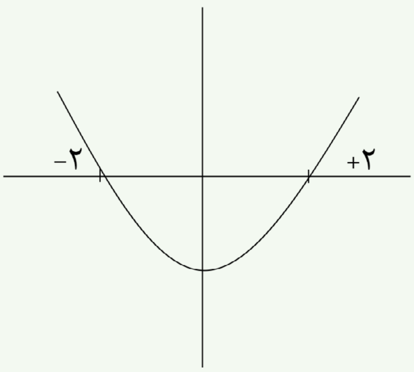
ب) بزرگ‌ترین بازه‌ای از R که تابع $h(x) = x^2 - 12x + 4$ در آن نزولی اکید باشد، بازه $(-2,+2)$ است.

(خرداد ۹۹ خارج)

پاسخ:

$h'(x) = 3x^2 - 12 \Rightarrow 3(x^2 - 4) \Rightarrow 3(x-2)(x+2)$

برای به دست آوردن وضعیت صعودی نزولی بودن یک تابع ابتدا از تابع مشتق می‌گیریم و بعد مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم.



* دقت کنید با توجه به سؤال که گفته نزولی اکید نباید نقاطی را که مشتق صفر می‌شود را محاسبه کنیم یعنی بازه باید باز باشد.

سوال ۸۰ ضرایب b,a را طوری بیابید که نقطه (۲,۱) اکسترمم نسبی تابع شود. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

وقتی نقطه‌ای اکسترمم نسبی می‌شود که آن نقطه ریشه مشتق تابع $f(x) = x^3 + ax - b$ باشد یعنی خواهیم داشت که:

$$f'(x) = x^3 + a \xrightarrow[\text{نسبی}]{\text{اکسترمم } (۲ \text{ و } ۱)} 3(1)^2 + a = 0 \Rightarrow a = -3$$

نقطه باید روی تابع باشد که اکسترمم آن تابع باشد یعنی آن نقطه در تابع صدق کند یعنی

$$f(1) = 2 \Rightarrow 1 - 3 - b = 2 \Rightarrow b = -4$$

نمودار تابعی را بنویسید که مشتق آن:

سوال ۸۱ در یک نقطه برابر صفر شود $y = x^2$ تابعی می‌خواهد که یک اکسترمم نسبی داشته باشد در یک نقطه نمودار تابع با محور x ها موازی باشد.

سوال ۸۲ در تمام نقاط مثبت باشد $y = x$ تابعی صعودی یا اکیداً صعودی می‌خواهد.

سوال ۸۳ در تمام نقاط منفی باشد $y = -x$ تابعی نزولی یا اکیداً نزولی می‌خواهد.

سوال ۸۴ در $x=۲$ برابر ۳ باشد. $y=x^۲-x$ تابعی مثال بزنید که در نقطه $x=۲$ شیب خط مماس برابر ۳ باشد.

سوال ۸۵ در تمام نقاط یکسان باشد $y=۲x$ و $y=۲$ مشتق توابع ثابت و یا توابعی که شیب خط مماس بر آن‌ها در تمام نقاط برابر است را می‌گویند.

سوال ۸۶ مقدار اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^۳+۳x^۲-۱۲x$ را در بازه [۲ و ۱-] مشخص کنید.

(دی ۹۸) (شهریور ۹۹ با اندکی تغییر)

پاسخ:

$$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲\Rightarrow ۶x^۲+۶x-۱۲\overset{\div ۶}{\Rightarrow} x^۲+x-۲=۰$$

$$\Rightarrow (x-۱)(x+۲)=۰$$

$f(-۱)=۱۳$ مطلق

$f(۲)=۴$

$f(۱)=-۷\to min$ مطلق

نقاط بحرانی $\checkmark x_۱=۱$
$x_۲=-۲ \times \to$ در بازه نیست

* برای سؤالاتی که از ما اکسترمم‌های مطلق را می‌خواهد باید نقاط بحرانی را محاسبه کنید و در تابع بگذارید علاوه بر این‌ها نقاط ابتدایی و انتهایی بازه را نیز در تابع گذاشته و مقدار آن را محاسبه کنید بیشترین مقدار را max و کم‌ترین را min مطبق می‌نامیم

سوال ۸۷ مقادیر اکسترممهای نسبی و مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^۳+x^۲$ را در بازهی [۲,۳-] به دست آورید.

پاسخ:

$f'(x)=x^۲+۲x\to x^۲+۲x=۰\to x(x+۲)=۰$ نقاط بحرانی $\begin{cases}x_۱=-۲\\ x_۲=۰\end{cases}$

	۲-	۰	۳
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		↘	↗

Min نسبی

$$f(-۲)=\frac{-۸}{۳}+\frac{۱۲}{۳}=\frac{۴}{۳}$$

$f(۰)=۰\to$ مطلقMin

$f(۳)=۱۸\to$ مطلق Max

$y=۱۸\to$ مطلق Max $\qquad x=۰\to$ نسبی و مطلق Min

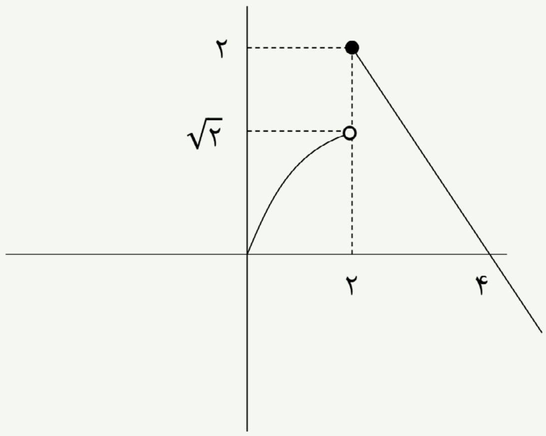
Max نسبی هم ندارد

* برای بدست آوردن اکسترممهای نسبی ← جدول تعیین علامت f' و تعیین صعودی نزولی f

برای بدست آوردن اکسترممهای مطلق ← نقاط بحرانی را محاسبه و بدست آوردن مقادیر سر و ته نقاط بحرانی تابع

سوال ۸۸ اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & ۰\le x<۲\\ ۴-x & x\le ۲\end{cases}$ را به دست آورید.

پاسخ:



$\sqrt{x}$ $\quad [۰,۲) \overset{'}{\Rightarrow} \frac{۱}{۲\sqrt{x}}=۰$ × ریشه ندارد

$۴-x \quad [۲,+\infty) \overset{'}{\Rightarrow} -۱=۰$ × ریشه ندارد

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$f(۲)=۲$	$f(۰)=۰$
بینهایت عددی تعریف نشده است و نمی‌تواند Min یا Max باشد	Max مطلق	Min نسبی نمی‌تواند باشد چون چپ صفر

سوال ۸۹ جهت تقعر و نقطه عطف نمودار تابع $f(x)=x^۳+۳x+۱$ را بدست آورید. (تیر ۱۳۹۸)

پاسخ:

$$f'(x)=۳x^۲+۳\Rightarrow \overbrace{f'(x)=۰}^{\text{نقاط بحرانی}}\Rightarrow ۳x^۲+۳=۰\Rightarrow x^۲=-۱ \;\times$$

$$f''(x)=۶x\Rightarrow f''=۰\Rightarrow ۶x=۰\Rightarrow \boxed{x=۰}$$

$f(۰)=۱\rightarrow$ نقطه عطف

		۰
$f''(x)$	-	+
	$\cap$	$\cup$

سوال ۹۰ جهت تقعر و مختصات نقطه عطف تابع $f(x) = x(x^۲ - ۳) + ۱$ را تعیین کنید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ \to f''(x) = ۶x \Rightarrow ۶x = ۰ \Rightarrow \boxed{x = ۰}$

(۱,۰): نقطه عطف

		۰	
f''	−		+
$f(x)$	∩		∪

سوال ۹۱ اگر نقطه عطف $A\ (-۱,۱)$ نقطه عطف تابع با ضابطه $f(x) = ax^۳ + bx^۲ + ۲$ ، باشد. مقادیر **a , b** را بدست آورید. خرداد(۱۴۰۱)

پاسخ:

$f''(x) = ۳ax^۲ + ۲bx \to f''(x) = ۶ax + ۲b \xRightarrow{x=-۱} \boxed{-۶a + ۲b = ۰}\quad \mathrm{I}$

$-۳a + b = ۰$

$f(-۱) = ۱ \Rightarrow -a + b + ۲ = ۱ \Rightarrow \boxed{b - a = -۱}\quad \Pi$

$\mathrm{I} - \Pi \Rightarrow (-۳a + b) - (b - a) = (۰) - (-۱)$

$-۲a = ۱ \Rightarrow \boxed{a = -\frac{۱}{۲}} \qquad \boxed{b = \frac{-۳}{۲}}$

سوال ۹۲ با رسم جدول تغییرات تابع زیر نشان دهید که تابع در چه بازهای صعودی و در چه بازهای نزولی است؟

(خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$f(x) = \frac{۱}{۲}x^۴ + x^۲ + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۲x^۳ + ۲x = ۲x(x^۲ + ۱)$

بحرانی نقطه $\boxed{x_۱ = ۰}$

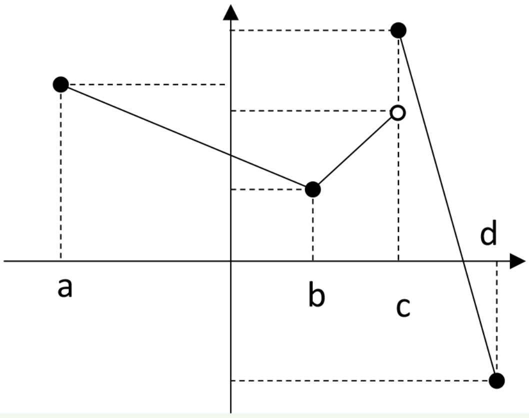
		۰	
$f'(x)$	−		+
$f(x)$	↘		↗

نزولی $\to (-\infty, ۰]$

صعودی $[۰, +\infty)$

※ اضافی: در نقطه $x = ۰$ سوال بالا ما یک اکسترمم داریم که نسبی هم است [نسبت به اطراف خود پایینتره} و هم مطلق [نسبت به تمام نقاط پایینتره] هست. این نقطه هم مینیمم مطلق هست هم نسبی

سوال ۹۳ در شکل مقابل طول نقاط اکسترمم مطلق و نسبی را مشخص کنید (خرداد ۱۴۰۲)



پاسخ:

مینیمم مطلق $\to d$

ماکزیمم مطلق و نسبی $\to c$

مینیمم نسبی $\to b$

سوال ۹۳ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

۹۴) $\frac{2x-1}{x-2}$ (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

مجانب قائم $\to x = 2$

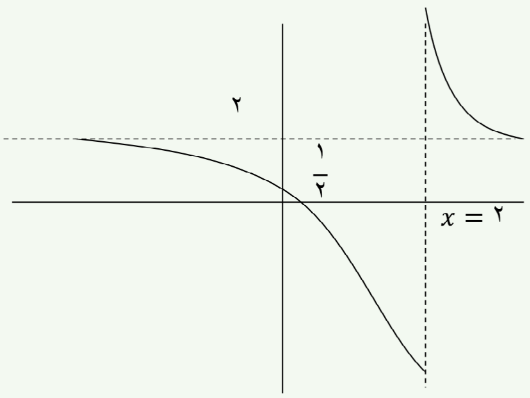
مجانب افقی $\to y = 2$

	۲	
$f'(x)$	-	-
$f(x)$	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow$

$$f'(x)\frac{\overbrace{2(x-2)}^{2x-4}-\overbrace{(1)(2x-1)}^{-2x+1}}{(x-2)^2}=\frac{-3}{(x-2)^2}<0$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{x-2}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-1}{x-2}=\frac{3}{0^-}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$



* برای رسم یک نمودار مجانبهای آن را مشخص کنید. بعد از تابع مشتق بگیرید تاوضعیت صعودی / نزولی تابع را به دست آورید. اگر تابع درجه ۳ بود باید مشتق مرتبه دوم آن را نیز بگیرید تا وضعیت تقعر تابع به دست آید.

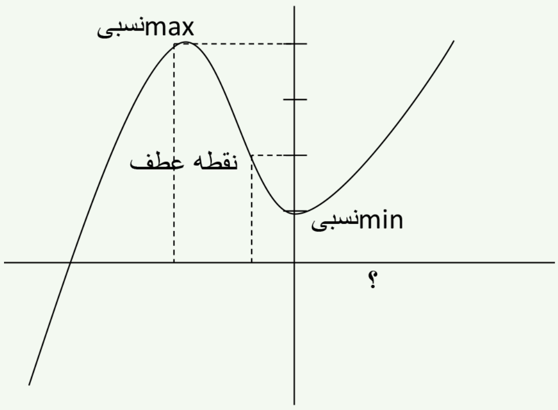
۹۵) $f(x) = x^۳ + ۳x^۲ + ۱$ (خرداد ۱۳۹۹ خارج)

$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x \Rightarrow ۳x(x+۲) \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_۱ = ۰ \\ x_۲ = -۲ \end{Bmatrix}$ نقاط بحرانی

پاسخ:

$f''(x) = ۶x + ۶ \Rightarrow ۶(x+۱) \Rightarrow \boxed{x = -۱}$ نقطه عطف

	۰	۱	-۲-	
$f'(x)$	+	-	-	+
$f''(x)$	-	-	+	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗
	∩		∪	
		Max نسبی	عطف نقطه	Min نسبی



$(-۱, ۳)$ نقطهٔ عطف

۹۶) $\dfrac{x+۱}{x-۲}$ (دی ۱۳۹۷)

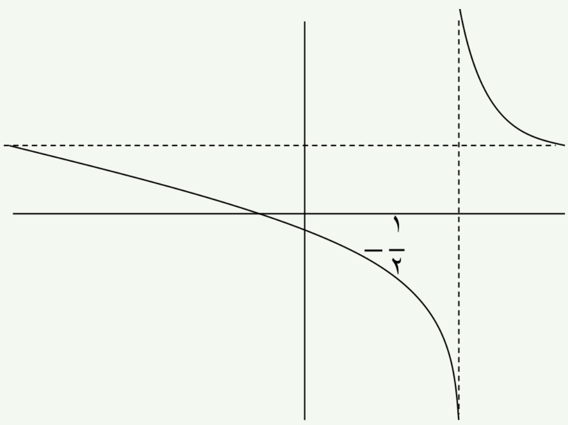
پاسخ:

$x = ۲ \rightarrow$ مجانب قائم

$y = ۱ \rightarrow$ مجانب افقی

$f'(x) \dfrac{(x-۲) - x - ۱}{(x-۲)^۲} = \dfrac{-۳}{(x-۲)^۲} < ۰$

f'		۲	
f	-		-
	$\searrow -\infty$		$\searrow +\infty$



۹۷) $\frac{x+3}{1-x}$ (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$f'(x)=\frac{1-x+x+3}{(1-x)^2}$

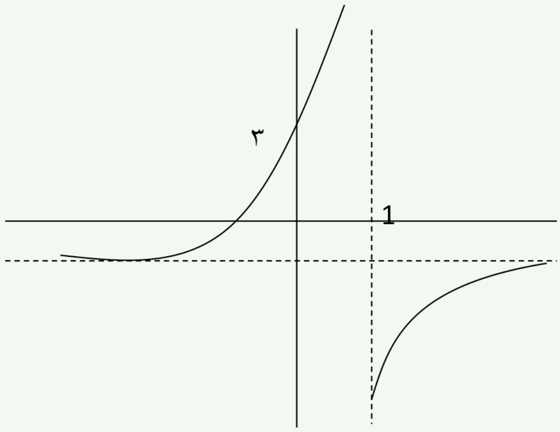
$=\frac{4}{(1-x)^2}$

>0

$x=1 \rightarrow$ مجانب قائم

$y=-1 \rightarrow$ مجانب افقی

		۱	
$f'(x)$	+		+
f	+∞↗		-∞↗



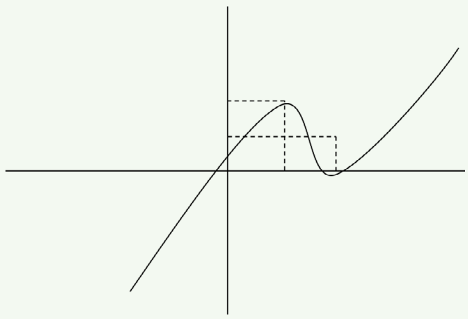
۹۸) $\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$

پاسخ:

$f'(x)=x^2-4x+3 \Rightarrow (x-1)(x-3)\begin{cases}x_1=1\\x_2=3\end{cases}$ بحرانی

$f''(x)=2x-4=2(x-2) \rightarrow x=2$ نقطه عطف

	۱	۲	۳	
f'	+	-	-	+
f''	-	-	+	+
f	↗	↘	↘	↗
	∩		∪	



$f(2)=\frac{8}{3}-8+6=\frac{2}{3} \Rightarrow (2 , \frac{2}{3})$ نقطه عطف

۹۹) $\frac{2x-x}{x+1}$ (خرداد ۱۴۰۰)

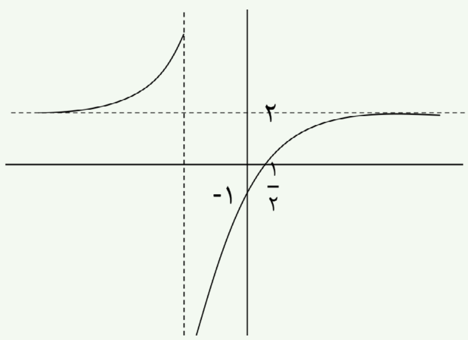
پاسخ:

$x=-1$ مجانب قائم

$y=2$ مجانب افقی

$f'(x)=\frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2}>0$

		-۱	
f'	+		+
f	+∞↗		-∞↗



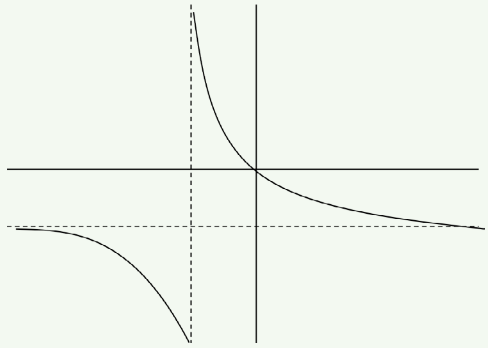
۱۰۵) $\frac{-x}{x+۱}$ (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

مجانب قائم $x=-۱$

مجانب افقی $y=-۱$

$$f'(x)=\frac{-x-۱+x}{(x+۱)^۲}<۰$$



		-۱	
f'	$-$		$-$
f	$-\infty\searrow$		$+\infty\searrow$

جمعبندی رسمی نمودارها:

توابع گویا:

۱- پیدا کردن مجانبها

۲- پیدا کردن مشتق تابع و مشخص کردن صعودی نزولی تابع

۳- کشیدن جدول رفتار تابع

۴- کشیدن نمودار

درجه۳:

۱- پیدا کردن مشتق تابع و وضعیت صعودی و یا نزولی تابع

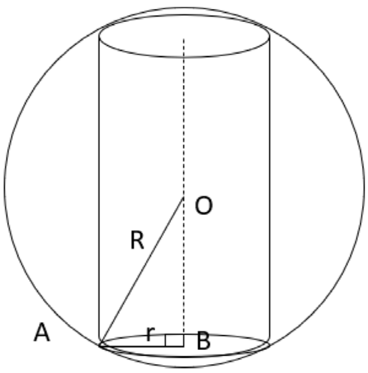
۲- پیدا کردن مشتق مرتبه۲ تابع و تعیین وضعیت مقعرهای تابع

۳- مساوی صفر قرار دادن مشتقات مرتبه ۱ و ۲ برای بدست آوردن نقاط بحرانی و نقطه عطف

۴- کشیدن نمودار

سوال ۱۰۱ در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

ارتفاع استوانه را h مینماییم و از آنجا که o وسط h است.



پاسخ:

داریم: $oB=\frac{h}{۲}$

$$Ao^۲=oB^۲+AB^۲$$

$$R^۲=\frac{h^۲}{۴}+r^۲$$

حجم استوانه برابر است با:

$$V=\pi r^۲h=\pi\left(R^۲-\frac{h^۲}{۴}\right)h\Rightarrow V(h)=\pi R^۲h-\frac{\pi}{۴}h^۳$$

$$۰\le h\le ۲R$$

برای به دست آوردن نقاط بحرانی از تابع مشتق میگیریم:

$$V'(h) = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2$$

$$0 = \pi R^2 - \frac{3\pi}{4}h^2 \Rightarrow \pi R^2 = \frac{3\pi}{4}h^2 \Rightarrow \frac{4\pi R^2}{3\pi} = h^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{2R}{\sqrt{3}}}$$

این یعنی اگر ارتفاع استوانه $\frac{2}{\sqrt{3}}$ برابر R باشد بیشترین حجم استوانه را خواهیم داشت.

سوال ۱۰۲ ورق فلزی مستطیل شکل، به طول ۱۶ سانتی‌متر و عرض ۶ سانتی‌متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهارگوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم. سپس لبه جعبه را به اندازه a برمی‌گردانیم تا یک جعبه سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن گردد؟ (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

طول جعبه = $16 - 2x$ و $x \in (0 , 8)$

عرض جعبه = $6 - 2x$ و $x \in (0 , 3)$

حجم جعبه:

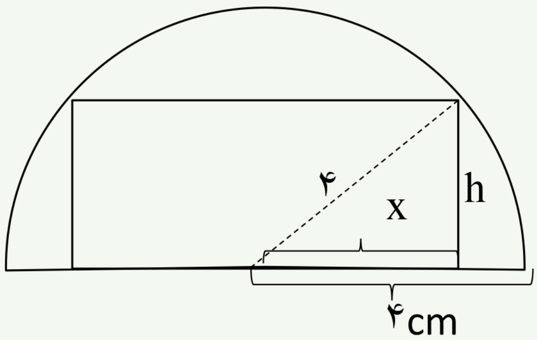
$$V(x) = x(16-2x)(6-2x) \to V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x \text{ و } x \in (0,3)$$

$$V'(x) = 12x^2 - 88x + 96 \xrightarrow{\div 2} 6x^2 - 44x + 48 \xrightarrow{\div 2} 3x^2 - 22x + 24 = 0 \begin{cases} x = 6 \\ x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

از آنجا که $6 \notin (0,3)$ نیست پس قابل قبول نیست و فقط $x = \frac{3}{4}$ قابل قبول است که بیشترین مقدار حجم ممکن را جعبه دارد.

سوال ۱۰۳ یک مستطیل در یک نیم دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد؟ (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:



$$x^2 + h^2 = 16 \to h = \sqrt{16 - x^2}$$

$$\text{مستطیل } S = h \times 2x \to (\sqrt{16 - x^2}) \times 2x$$

$$s'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}} \times 2x + 2 \times \sqrt{16 - x^2} = 0$$

$$2\sqrt{16-x^2} = \frac{4x^2}{2\sqrt{16-x^2}} \Longrightarrow 16 - x^2 = x^2 \Longrightarrow x^2 = 8$$

$$x = \pm 2\sqrt{2}$$

از آنجا که کمیت طول نمی‌تواند منفی باشد یعنی $-2\sqrt{2}$ قابل قبول نیست.

سوال ۱۰۴ جدول تغییرات تابع زیر را رسم کنید و نمودار تابع را بکشید.

$f(x) = ۳x^۳ - ۲x + ۵$

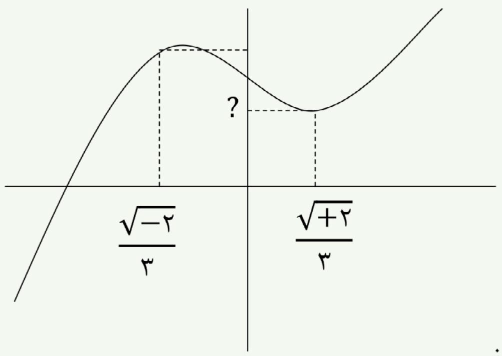
$f'(x) = ۹x^۲ - ۲$

$f''(x) = ۱۸x \rightarrow \frac{x = ۰}{\text{نقطه عطف}}$

نقاط بحرانی $\boxed{x = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۳}}$

پاسخ:

	$-\infty$ … $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ … ۰	۰ … $+\frac{\sqrt{۲}}{۳}$	$+\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ … $+\infty$
	+	-	-	+
f'	-	-	+	+
f''	↗	↘	↘	↗
		∩		∪



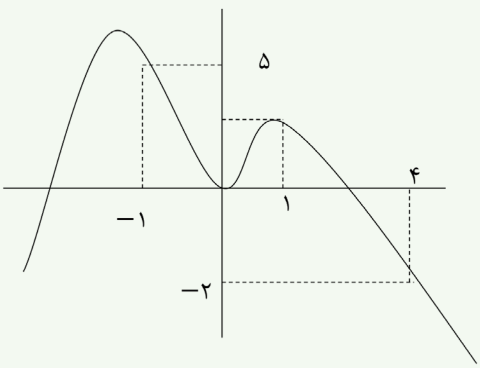
نقطه عطف$(۰ ,۵)$

سوال ۱۰۳ نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که شرایط زیر را داشته باشد.

پاسخ:

$(۱$ و $۱)$ اکسترمم نسبی از نوع ماکزیمم

$f(۰) = ۰ \quad f(-۱) = ۵ \qquad f(۴) = -۲$



* باید حواسمان باشد که نقطه‌ای را بالاتر از «۱» قرار دهیم تا نقطه (۱ و ۱) ماکزیمم نسبی شود اگر نقطه‌ای با عرقی بیشتر از «۱» نباشد نقطه (۱ و ۱) ماکزیمم مطلق می‌شود که به ماکزیمم نسبی ارجحیت دارد.