جزوهٔ هندسه ۳

گروه آموزشی مشاوره‌ای نوتروفیل

نوتروفیل، حامی عدالت آموزشی

هندسه۳ - فصل اول -ماتریکس و کاربردها

فصل اول: ماتریس و کاربردها

به آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی که شامل سطر و ستون است [ماتریس] می‌گویند.

$B=[b_{ij}]_{m\times n}$ $A=[a_{ij}]_{\underset{\text{سطر}}{m}\times \underset{\text{ستون}}{n}}$

هر مورد را [درایه] می‌گویند.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ قطر اصلی

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ قطر فرعی

انواع ماتریس

ماتریس صفر = تمام درایه‌ها اعداد صفر باشد. $[\bar{O}]$

ماتریس سطری = تنها دارای یک سطر است.

ماتریس ستونی = تنها دارای یک ستون است.

ماتریس مربعی = تعداد سطرها و ستون برابر است.

ماتریس قطری $\begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & b \end{bmatrix}$

درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی صفر است. (قطر اصلی می‌تواند صفر باشد یا نباشد.)

ماتریس اسکالر $\begin{bmatrix} a & \cdot \\ \cdot & a \end{bmatrix}$

درایه‌های روی قطر اصلی برابرند و قطری هم است.

ماتریس همانی $I=\begin{bmatrix} ۱ & \cdot \\ \cdot & ۱ \end{bmatrix}$

خطر خطر اگر همهٔ درایه‌ها یک باشد همانی نیست!!

ماتریس بالا مثلثی = ماتریس مربعی که درایه‌های پایین قطر اصلی همگی صفر هستند.

ماتریس پایین مثلثی = ماتریس مربعی که درایه‌های بالای قطر اصلی همگی صفر هستند.

تساوی ماتریس‌ها = دو ماتریس هم مرتبه را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های نظیر به نظیر آن‌ها برابر باشد.

جمع ماتریس‌ها = باید درایه‌ها را دو به دو جمع کنیم.

سؤال) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} z+۱ & ۹ \\ ۵ & x-۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۹ \\ x-y & ۷ \end{bmatrix}$ برابر باشد، مقدار $۲x+y-z$ را به دست آورید.

جواب) درایه‌های نظیر را برابر می‌گذاریم ⇐

$۲=z+۱$

$۱=z$

$۷=\cancel{x}-۲$ $\quad x-y=۵$

$۹=\cancel{x}$ $\quad ۹-y=۵$

$y=۴$

$۲(۹)+۴-۱=\boxed{۲۱}$

ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس = باید عدد را در تک‌تک درایه‌ها ضرب کرد.

✓خواص مهم

خاصیت جابه‌جایی ⇦ $A+B=B+A$

خاصیت شرکت‌پذیری ⇦ $A+(B+C)=(A+B)+C$

خاصیت عضو قرینه ⇦ $A+(-A)=\bar{O}$

$r\times A=\bar{O}$ $\quad r=۰$ یا $A=\bar{O}$

$A=B$ $\quad rA=rB$ $\quad r\neq ۰$

$r(A+B)=rA+rB$

ضرب ماتریس‌ها

داریم $\leftarrow A_{mp} \times B_{pn} = C_{mn}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{۱} & b_{۲} \\ a_{۳} & a_{۴} \end{bmatrix}$$

درایه سطر i ام و ستون j ام در ماتریس c، از ضرب سطر i ام A در ستون j ام B به دست می‌آید.

$$C_{ij}\begin{bmatrix} a_{۱} & a_{۲} & \cdots & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{۱} \\ b_{۲} \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_{۱} \times b_{۱} + a_{۲} \times b_{۲} + \ldots + a_n \times b_n$$

✓**نکته:** مجموع عناصر روی قطر اصلی AB برابر با عناصر روی BA است.

سؤال) $A \times B$ را محاسبه کنید.

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} ۰ & ۵ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ)

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۷ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} = a_{۱۱} \qquad ۰+۲۱=۲۱ \leftarrow a_{۱۱}$$

$$a_{۲۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad a_{۲۲} = ۰+۱=۱$$

$$a_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۷ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix} \qquad a_{۱۲} = ۱۰+۷=۱۷$$

$$a_{۲۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix} \qquad a_{۲۱} = ۰+۳=۳$$

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۲۱ & ۱۷ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

✓**نکته:** ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد.

خواص

$$A_{mn} \times I_n = A_{mn} \qquad A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) \qquad A \times (B \times C) = (A \times B) \times C \qquad \underset{B \neq C}{AB = AC}$$

✓**نکته:** ممکن است A و B ناتهی باشند اما $A \times B$ تهی شود یعنی ماتریس صفر به ما بدهد.

اگر A ماتریس مربعی باشد آن‌گاه اگر $A^{۲} = I$:

$$\begin{cases} A^{۲k} = I \\ A^{۲k+۱} = A \end{cases}$$

اگر ماتریس قطری مثل $A = \begin{bmatrix} r_{۱} & ۰ \\ ۰ & r_{۲} \end{bmatrix}$ را در ماتریس B ضرب کنیم نتیجه می‌گیریم که $AB = \begin{bmatrix} r_{۱}a & r_{۱}b \\ r_{۲}c & r_{۲}d \end{bmatrix}$ است.

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

اگر ماتریس اسکالر مثل $A = \begin{bmatrix} r & ۰ \\ ۰ & r \end{bmatrix}$ را در ماتریس B ضرب کنیم $\begin{bmatrix} r_a & r_b \\ r_c & r_d \end{bmatrix}$ به دست می‌آید.

اتحادها روی ماتریس‌ها برقرار است:

$$(A+B)^{۲} = A^{۲} + ۲AB + B^{۲}$$

$$(A-B)(A+B) = A^{۲} - B^{۲}$$

✓**نکته:** اگر A یک ماتریس قطری باشد برای محاسبه A^k کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان n برسانیم.

وارون ماتریس‌ها

برای هر ماتریس مربعی مانند A وارون آن را $A^{-۱}$ می‌نامیم و یا آن را ماتریس B می‌نامیم و $BA = AB = I$ و $AA^{-۱} = I$

شرط وارون‌پذیری $|A| \neq ۰$

$|A|$ دترمینان در ادامهٔ درس با آن آشنا می‌شویم ...

✓روش محاسبه وارون و خواصِ آن

$$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n \qquad (A^{-1})^{-1}=A$$

$$(KA)^{-1}=K^{-1}A^{-1} \qquad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{ad\ \ bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

✓**نکته:** وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.

دترمینان

اگر A ماتریس مربعی باشد $1\le n\le 3$ $|A|$ را داریم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad |A|=[ad-bc] \quad \text{(درجه ۲)}$$

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \Rightarrow a_{11}\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} a_{23} & a_{23} \\ a_{23} & a_{23} \end{vmatrix}+a_{12}\times(-1)^{1+2}\times\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{21} & a_{33} \end{bmatrix}+a_{13}\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

✓دستور ساروس برای محاسبه دترمینان (مخصوص۳x۳)

نکته: دترمینان ماتریس قطری از ضرب درایه‌های روی قطر اصلی به دست می‌آید.

نکته: اگر درایه‌های یک سطر یا ستون دترمینان در عددی ضرب شود حاصل دترمینان نیز در آن عدد ضرب می‌شود.

اگر عدد از دترمینان خارج شود به توان مرتبه ماتریس می‌رسد: $A_{mn}\ ,\ |KA|=K^n|A|$

دستگاه معادلات

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ باید $|A|\neq 0$ باشد.

$$\underset{\text{ماتریس‌ضرایب}}{A}\times\underset{\text{مجهول}}{x}=\underset{\text{ماتریس‌معلوم}}{B}\Rightarrow x=A^{-1}B$$

تعداد جواب دستگاه

۱ است. دو خط متقاطع داریم و دستگاه یک جواب دارد.

۲ است. دو خط موازی داریم و دستگاه جواب ندارد.

۳ است. دو خط بر هم منطبق داریم و دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

✓**نکته:** اگر $|A|\neq 0$ باشد دستگاه یک جواب دارد (دو خط متقاطع)

✓**نکته:** اگر $|A|=0$ باشد یا دستگاه فاقد جواب است (دو خط موازی) یا اینکه بی‌شمار جواب دارد. (دو خط بر هم منطبق)

سؤالات تکمیلی

ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $k|kA|=625$ برقرار باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ (0/25) \Rightarrow |A|=1 \quad (0/25)$$

$$k|kA|=k(k^3|A|)=k^4\times 1=625\Rightarrow k=\pm 5 \quad (0/25)$$

ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}y+۲ & x+۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A+B=\begin{bmatrix}۴ & ۵\\ ۳ & ۸\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مقادیر x و y را به دست آورید.

$x=۲$ (۰/۲۵) و $y=-۱$ (۰/۲۵)

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix}r & m-۱\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل $m+r$ برابر با .... است.

جواب) دو

ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ -۲ & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$ در رابطه $AX=B$ صدق می‌کنند. ماتریس X، کدام است؟

1) $\begin{bmatrix}۲ & ۱۳\\ -۱ & -۸\end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix}۲ & ۱۱\\ ۱ & -۶\end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix}۱ & ۱۳\\ -۱ & -۶\end{bmatrix}$ 4) $\begin{bmatrix}-۱ & -۱۲\\ ۱ & ۸\end{bmatrix}$

جواب) گزینه ۱ نکته: وارون ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ از دستور $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ حاصل می‌شود. پس:

$$AX=B\xrightarrow{A^{-۱}\times}\underbrace{A^{-۱}A}_{I}X=A^{-۱}B\xrightarrow{IX=X}X=A^{-۱}B$$

$$\Rightarrow X=\frac{۱}{-۴+۳}\begin{bmatrix}-۲ & -۳\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۱ & ۲\\ ۰ & ۳\end{bmatrix}=-۱\times\begin{bmatrix}-۲ & -۱۳\\ ۱ & ۸\end{bmatrix}\Rightarrow X=\begin{bmatrix}۲ & ۱۳\\ -۱ & -۸\end{bmatrix}$$

ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}۱ & ; & i=j\\ ۲ & ; & i\neq j\end{cases}$ تعریف شده است. مجموع درایه‌های ماتریس $A^۲-۴A$ کدام است؟

1) 12 2) 15 3) 18 4) 21

جواب) گزینه ۲ ابتدا درایه‌های ماتریس A را می‌نویسیم:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$$

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۲\\ ۲ & ۱ & ۲\\ ۲ & ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$$

$$A^۲-۴A=\begin{bmatrix}۹ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۹ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۹\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}۴ & ۸ & ۸\\ ۸ & ۴ & ۸\\ ۸ & ۸ & ۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۵ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر ۱۵ است.

اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & |A|\\ ۱ & |A| & ۱\\ ۱ & ۲ & ۰\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید.

جواب) $\underbrace{|A|=|A|(|A|-۲)+۱(۲)}_{(۰/۲۵)}\Rightarrow|A|^۲-۳|A|+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\\ |A|=۲\end{cases}$

سؤال) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & |A| \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد مقدار $|A|$ را بیابید.

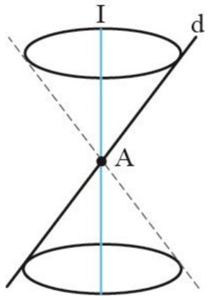
جواب) $|A|=|A|(|A|-۲)+۱(۲)\Rightarrow |A|^۲-۳|A|+۲=۰$

$$\begin{cases} |A|=۱ \\ |A|=۲ \end{cases}$$

سؤال) دستگاه $\begin{cases} ۲x+y=۴ \\ ۷x+۴y=۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

جواب) $R=A^{-۱}B\Rightarrow \dfrac{۱}{\cancel{ad-bc}}_{۱}\begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ $\quad x=۱$, $y=۲$

فصل۲ - آشنایی با مقاطع مخروطی

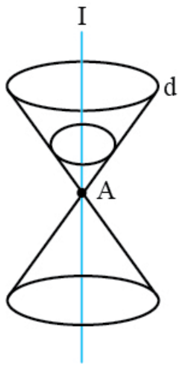


لایه مخروطی = سطح حاصل از دوران خط d حول خط I را می‌نامیم.

خط I را محور، نقطه A را رأس و خط d را مولد می‌نامیم.

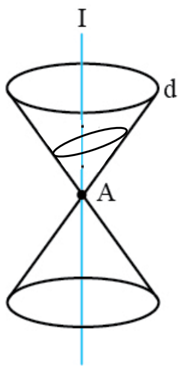
یادآوری: منظور از فصل مشترک خط و کره مجموعه نقاطی است که هم در صفحه و هم در کره قرار دارند.

حالات مختلف صفحه و سطح مخروط

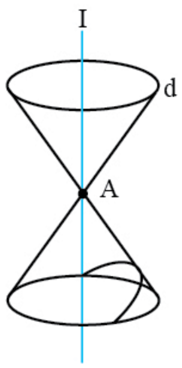


الف) اگر صفحه p بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، دایره داریم:

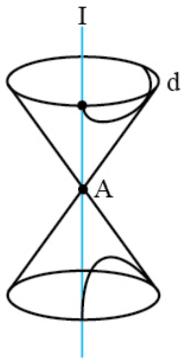
ب) اگر صفحه p بر محور I عمود نباشد و با مولد d نیز موازی نباشد و تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع‌کند، بیضی داریم.



پ) اگر صفحه p با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است و اگر از رأس مخروط عبور کند یک خط است.



ت) اگر صفحه p هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور I نباشد، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است.



مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا است که همه آن‌ها ویژگی مشترکی داشته باشند.

چند مکان معروف

۱ عمودمنصف پاره‌خط AB = مکان هندسی نقطه‌ای که از دو نقطه A و B به یک فاصله است خط عمودمنصف AB می‌گویند.

۲ نیمساز یک زاویه = مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه آن زاویه است که فاصله آن از دو ضلع زاویه برابر باشد.

۳ دایره = مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت به یک فاصله باشند دایره است.

۴ دو خط موازی = مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله مشخص باشند دو خط موازی در دو طرف خط d هستند

سؤال) نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد؟

جواب)

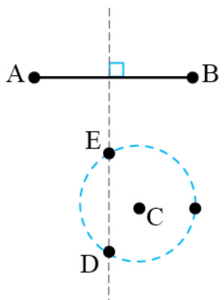
مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند عمود منصف AB است و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ باشد دایره‌ای به مرکز شعاع ۳ است.

نقطهٔ برخورد خط d و دایره (D,E) جواب است.

اگر خط d و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کند مسئله دو جواب دارد.

اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.

در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند جواب ندارد.



دایره

تعریف: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصله آن از نقطه‌ای ثابت واقع در آن صفحه مقداری ثابت باشد، آن نقطه ثابت را مرکز دایره و ان فاصله ثابت را شعاع می‌نامیم.

معادله استاندارد دایره $(x-\alpha)^2+(y-B)^2=R^2$

معادله ضمنی دایره $x^2+y^2+ax+by+c=0$

مرکز دایره $(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ $\qquad R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

توجه کنید که ضرایب x^2 و y^2 باید برابر و یک باشند یعنی گاهی نیاز است ضرایب را ساده کرد.

شرط دایره بودن این است که a^2+b^2-4c بزرگ‌تر از صفر باشد؛ که به آن Δ می‌گویند.

سؤال) اگر $x^2+y^2-2x-4y+k^2+1=0$ یک دایره باشد حدود K را بیابید؟

جواب)

باید $\Delta>0$ باشد:

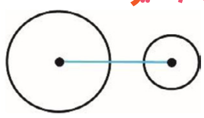
$$(-2)^2+(-4)^2-4(k^2+1)>0$$

$$4+16-4k^2-4>0$$

$$k^2<4 \qquad -2<k<2$$

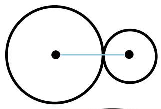
اوضاع نسبی دو دایره

1- متخارج



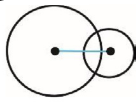
$d>R+R'$

2- مماس خارج



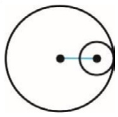
$d=R+R'$

3- متقاطع



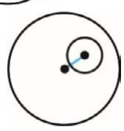
$|R-R'|<d<R+R'$

4- مماس داخل



$d=|R-R'|$

5- متداخل



$d<|R-R'|$

طول مماس مشترک خارجی دو دایره $TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$

طول مماس مشترک داخلی دو دایره $TT=\sqrt{d^2-(R+R')}$

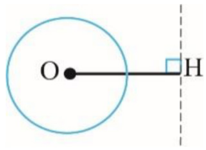
وتر مشترک دو دایره متقاطع

$$(x^2+y^2+ax+by+c)-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')\Rightarrow(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$$

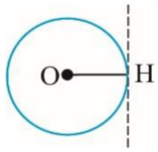
معادله مماس قائم بر دایره

اگر خطی در نقطه T بر دایره‌ای مماس باشد آن‌گاه خطی که مرکز دایره را به نقطه T وصل می‌کند قائم بر دایره می‌نامند. برای پیدا کردن شیب خط مماسی که در نقطه T بر دایره رسم می‌شود ابتدا شیب پاره‌خط OT را پیدا کرده و بعد معکوس و قرینه می‌کنیم.

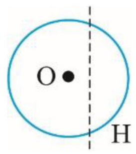
حالات خط و دایره



۱ نقطه مشترک ندارد $OH > R$



۲ یک نقطه مشترک دارد $OH = R$



۳ دو نقطه مشترک دارد $OH < R$

سؤال) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(1,-2)$ و بر دایره $x^2+y^2-2y-3=0$ مماس خارج باشد؟

جواب)

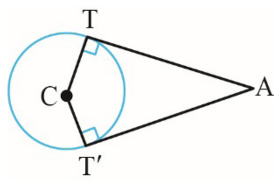
مرکز دایره $x^2+y^2-2y-3=0$ $(0,1)$ و شعاع آن $2=\frac{1}{2}\sqrt{0+4+12}$ است.

طول خط‌المرکزین $\sqrt{10}=\sqrt{(1-0)^2+(-2-1)^2}=OO'$ است. شرط مماس خارج $OO'=R+R'$ است پس معادله دایره می‌شود:

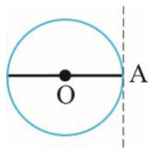
$(x-1)^2+(y+2)^2=(\sqrt{10}-2)^2$:

$$\sqrt{10}=R+2$$
$$\sqrt{10}-2=R$$

حالات نقطه و دایره



۱ $OA > r$ باشد نقطه خارج از دایره است.



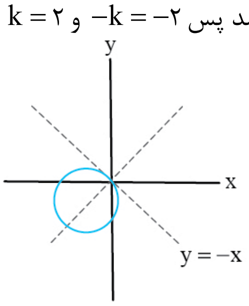
۲ $OA = r$ نقطه روی دایره است.

۳ $OA < r$ نقطه داخل دایره است.

سؤال) اگر دایره $x^2+y^2+2ka+4y=0$ در مبدأ مختصات بر نیمساز ربع دوم و چهارم باشد شعاع دایره چقدر است؟

جواب) این دایره را می‌کشیم و می‌فهمیم که نیمساز ربع اول و سوم یکی از قطرهای آن است پس مرکز دایره روی $y=x$ قرار دارد.

مختصات مرکز دایره $(-k,-2)$ است و چون روی نیمساز ربع اول و سوم است باید طول و عرض آن برابر باشد پس $-k=-2$ و $k=2$ است.



$$R=\frac{1}{2}\sqrt{(2k)^2+4^2-4\times 0}=\sqrt{16+16}=4\sqrt{2}$$

سؤال) معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $o(۱,-۱)$ و بر خط $۳x-۴y+۳=۰$ مماس باشد.

جواب)

$$d=\frac{|۳(۱)-۴(-۱)+۳|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۲ \qquad (x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۴$$

بیضی

تعریف = بیضی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که مجموع فاصله‌های آن از دو نقطه ثابت F', F واقع در همان صفحه مقداری ثابت باشد.

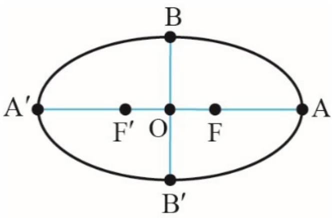
قرارداد = F', F را کانون بیضی و فاصله این دو نقطه از یکدیگر را فاصله کانونی می‌نامند و با $2c$ نمایش می‌دهند.

✓**نکته:** اگر M نقطه‌ای از بیضی باشد آن‌گاه $MF + MF' = 2a$، یعنی مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون مقدار ثابت $2a$ است.

رأس‌های A', A کانونی‌اند و $AA' = 2a \leftarrow$ قطر بزرگ

رأس‌های B', B ناکانونی‌اند و $BB' = 2b \leftarrow$ قطر کوچک

خطی که از F', F می‌گذرد و خطی که عمودمنصف FF' است محور تقارن است.



$$\left.\begin{array}{l} OA = a \\ OF = OF' = c \\ FA = a - c \\ OB = b \end{array}\right\} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

✓**نکته:** نقطه برخورد دو محور تقارن بیضی، مرکز تقارن آن است.

خروج از مرکز بیضی

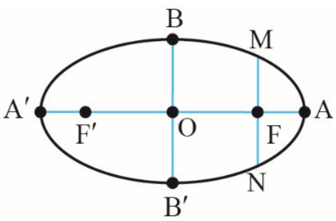
هرچه دو کانون بیضی به هم نزدیک‌تر باشند بیضی به دایره شبیه‌تر است و هر چقدر این دو کانون از یکدیگر دورتر باشند بیضی کشیده‌تر است.

خروج از مرکز بیضی را با e نمایش می‌دهند که معیار کشیدگی بیضی است. $0 < e < 1$ $\quad e = \frac{c}{a}$

✓**تذکر:** اگر e به سمت ۱ میل کند بیضی کشیده‌تر است و اگر به سمت صفر میل کند بیضی به دایره شبیه‌تر می‌شود.

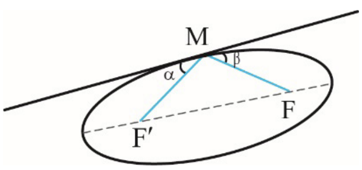
وتر کانونی بیضی

MN وتر کانونی است هر گاه از یکی از کانون‌های بیضی F', F عبور کند و بر آن عمود باشد.



$$MN = \frac{2b^2}{a}$$

خاصیت بازتابندگی بیضی



$\alpha = B$

اگر شعاع نوری از یکی از کانون‌های بیضی عبور کند و بر بدنه داخلی بیضی بتابد بازتابش آن از کانون دیگر عبور می‌کند.

سؤال) در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است؛

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.

$$۲a=۱۰\to a=۵ \qquad a^۲=b^۲+c^۲ \qquad e=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

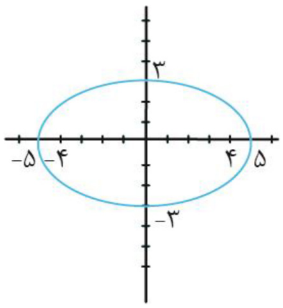
$$۲b=۶\to b=۳ \qquad c=۴$$

ب) مختصات کانون‌ها و مختصات دو سطر قطر بزرگ و دو سر قطر کوچک را به دست آورید.

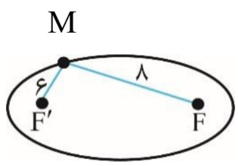
$A(۵,۰)$ $\quad F(۴,۰)$ $\quad B(۰,۳)$

$A'(-۵,۰)$ $\quad F'(-۴,۰)$ $\quad B'(۰,-۳)$

پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.



سؤال) در شکل روبه‌رو نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارد به طوری که $MF=۸$ و $MF'=۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید.



جواب)

می‌دانیم $MF+MF'=۲a$ پس $۲a=۱۴$ $\qquad a=۷$

$$\frac{c}{a}=\frac{۱}{۷}\xrightarrow{a=۷}c=۱$$

$$a^۲=b^۲+c^۲$$

$$b=۴\sqrt{۳}$$

سهمی

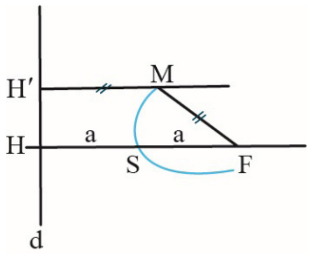
تعریف = مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از خط ثابت d و نقطه ثابت F به یک فاصله باشد.

فاصله F خط هادی را پارامتر سهمی می‌نامند و آن را با $2a$ نشان می‌دهند.

وتر کانونی سهمی = خطی که از کانون سهمی بر محور سهمی عمود می‌شود سهمی را در دو نقطه M و M' قطع می‌کند که به پاره خط MM' وتر کانونی می‌گویند.

✓**نکته:** دهانه سهمی رو به کانون است.

✓**نکته:** هر سهمی یک محور تقارن دارد که از کانون سهمی می‌گذرد و بر خط هادی عمود است.



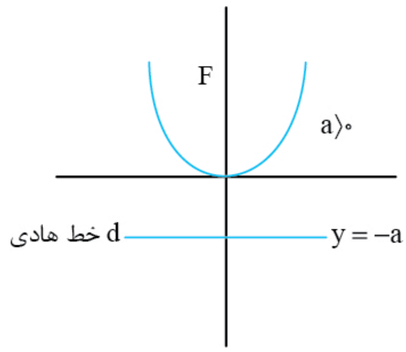
$MH' = MF$

$HS = SF = a$ فاصله کانونی

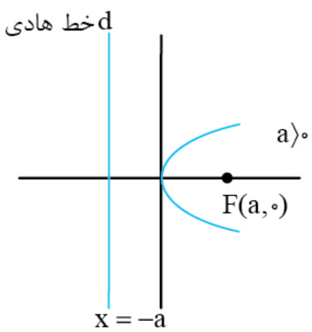
معادله استاندارد سهمی

$y^2 = 4ax$

سهمی قائم

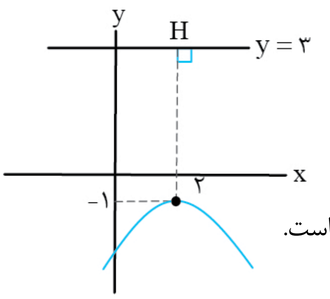


سهمی افقی



معادله سهمی با محور افقی که رأس آن (β,α) است: $(x-\alpha)^2 = 4a(y-B)$

معادله سهمی را بنویسید که رأس آن $S(2,-1)$ و خط هادی آن $y=3$ باشد، مختصات کانون سهمی را بنویسید.



جواب)

دهانه سهمی به طرف پایین است پس $a<0$ است چون $S(2,-1)$ است در نتیجه $\alpha = 2$ و $\beta = -1$ است. معادله آن $(x-2)^2 = -8(y+1)$ است و مختصات کانون $F(\alpha,\beta+a) = (2,-5)$ است.

سهمی افقی $Ay^2+By+cx+D=0$

دهانه سهمی	محور سهمی	خط هادی	کانون	معادله سهمی
رو به راست	خط $y=k$	$x=-a+h$	$(a+h,k)$	$(y-k)^2=4a(x-h)$
رو به چپ	خط $y=k$	$x=a+h$	$(-a+h,k)$	$(y-k)^2=-4a(x-h)$
رو به بالا	خط $x=h$	$y=-a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^2=4a(y-k)$
رو به پایین	خط $x=h$	$y=a+k$	$(h,a+k)$	$(x-h)^2=-4a(y-k)$

سؤال) معادله یک سهمی به صورت x^2+3x+5 داده شده است آن را به صورت متعارف بنویسید.

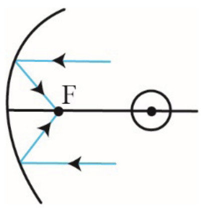
جواب)

$$x^2+3x=y-5$$

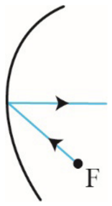
$$x^2+3x+\frac{9}{4}=y-5+\frac{9}{4}$$

$$(x+\frac{3}{2})^2=y-\frac{11}{4}$$

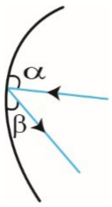
بازتابندگی آینه سهموی



۱ اگر اشعه نوری موازی محور کانونی سهمی بتابد بازتاب آن از کانون سهمی می‌گذرد.



۲ اگر اشعه نوری از کانون بر سهمی بتابد موازی محور کانونی سهمی بازتاب می‌کند.



۳ اگر اشعه نوری به آینه سهموی بتابد زوایای تابش و بازتابش با هم برابرند.

سؤال) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادلهٔ $y^2-2y-8x+9=0$ را بیابید.

جواب)

$(y-1)^2=8\ \ (x-1)$ فاصله کانونی $2=a$

ب) مختصات رأس کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

رأس سهمی $(1,1)$ معادله خط هادی $x=-1$

مختصات کانون $(3,1)$

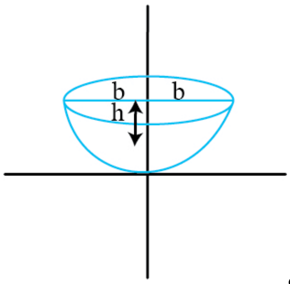
سؤال) سهمی با رأس $A(۱,۲)$ و کانون $F(۱,-۲)$ مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.

جواب)

سهمی قائم و دهانهٔ آن به سمت پایین می‌باشد.

$a = AF = ۴$ فاصله کانونی   معادله آن برابر است با $(x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$ معادله خط هادی $y = ۶$

دیش مخابرات



$h =$ عمق $b =$ شعاع دهانه آن $d =$ قطر دهانه

$b^۲ = ۴ah$ $d^۲ = ۱۶ah$ $a =$ فاصله کانونی

سؤال) اگر اندازه گودی یک دیش مخابراتی دو برابر شود فاصله کانونی این دیش چه تغییری می‌کند؟

جواب)

$$\frac{a'}{a} = \frac{\frac{b^۲}{۴(۲h)}}{\frac{b^۲}{۴h}} = \frac{۱}{۲}$$

سؤالات تکمیلی

۱۸ کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا بر دو نقطهٔ $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$، محور xها را با کدام طول‌ها قطع می‌کند؟

۱) $۱,-۳$ ۲) $۰,-۳$ ۳) $۲,-۱$ ۴) $۳,-۲$

جواب) گزینه ۱ می‌دانیم کوچک‌ترین دایرهٔ گذرا از دو نقطه $A(۲,۵)$ و $B(-۴,۱)$ دایره‌ای است که نقطه‌های A و B دو سر قطری از آن بوده و مرکز این دایره نقطه وسط پاره‌خط AB است. داریم:

$$\text{مرکز دایره}: M = \frac{A+B}{۲} = \left(\frac{۲-۴}{۲}, \frac{۵+۱}{۲}\right) = (-۱,۳)$$

$$\text{شعاع دایره}: R = \frac{|AB|}{۲} = \frac{\sqrt{(x_B-x_A)^۲+(y_B-y_A)^۲}}{۲} = \frac{\sqrt{(۲+۴)^۲+(۵-۱)^۲}}{۲} = \sqrt{۱۳}$$

$$(x+۱)^۲+(y-۳)^۲ = ۱۳$$

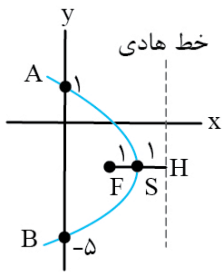
$$\xrightarrow{\text{تقاطع با محور xها } (y=۰)} (x+۱)^۲+۹ = ۱۳ \Rightarrow (x+۱)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x+۱ = ۲ \Rightarrow x = ۱ \\ x+۱ = -۲ \Rightarrow -۳ \end{cases}$$

۳۰ فاصله کانون تا خط هادی یک سهمی 2 واحد است. این سهمی محور yها را در دو نقطه به عرض‌های ۱ و ۵− قطع می‌کند. طول رأس آن با علامت مثبت کدام است؟

1) $\frac{۵}{۴}$　2) $\frac{۳}{۲}$　3) $\frac{۹}{۴}$　4) $\frac{۵}{۲}$

جواب)

با توجه به فرض، شکل سهمی به صورت مقابل می‌شود. در ضمن این سهمی، افقی و دهانهٔ آن رو به چپ بوده و داریم $a=۱$. فرض کنیم $S(\alpha,\beta)$



$$(y-\beta)^۲=-۴a(x-\alpha)\xrightarrow{a=۱}(y-\beta)^۲=-۴(x-۱)$$

$$A(۰,۱)\in\text{سهمی}\Rightarrow(۱-\beta)^۲=-۴(۰-\alpha)\Rightarrow(۱-\beta)^۲=۴a\Rightarrow(۱-\beta)^۲=(-۵-\beta)^۲$$

$$\beta(۰,-۵)\in\text{سهمی}\Rightarrow(-۵-\beta)^۲=-۴(۰-\alpha)\Rightarrow(-۵-\beta)^۲$$

$$\Rightarrow ۱-\beta=\pm(-۵-\beta)\Rightarrow\begin{cases}۱-\beta=-۵-\beta & \text{غ ق ق}\\ ۱-\beta=۵+\beta\Rightarrow\beta=-۲\end{cases}$$

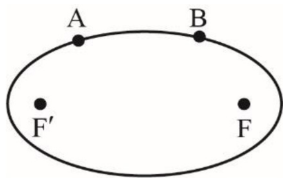
$$\Rightarrow(۱-\beta)^۲=۴a\Rightarrow(۱+۲)^۲=۴a\Rightarrow a=\frac{۹}{۴}:\text{طول رأس}$$

الف) مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، .... (نیمساز) آن زاویه است.
ب) بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست - نادرست)

سؤالات تکمیلی

در شکل روبه‌رو دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و 'F قرار دارند. اگر $AF'=BF$ و همچنین AF و 'BF یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید: مثلث 'FMF متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.

جواب)



نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:

$$\underset{(۰/۲۵)}{AF+AF'=۲a=BF+BF'}\xrightarrow{AF=BF}AF=BF'\ (۰/۲۵)$$

دو مثلث 'AFF و 'BFF بنا به حالت $(AF=BF'\ ,\ AF'=BF\ ,\ FF'=FF')$ برابری سه ضلع همنهشت هستند (۰/۵)، نتیجه دو زاویه $A\hat{F}F'=B\hat{F'}F$، (۰/۲۵) مثلث 'MFF متساوی‌الساقین است و $MF=MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره‌خط 'AFF (قطر کوچک بیضی) است. (25/0)

سوال) معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۱,۰)$ مرکز آن بوده و بر خط $x=-۳$ مماس باشد.

جواب)

$$OH=\frac{|۱+۳|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}}=۴\ (۰/۲۵)\ ,OH=R\ (۰/۲۵)\ ,(x-۱)^۲+y^۲=۱۶\ (۰/۲۵)$$

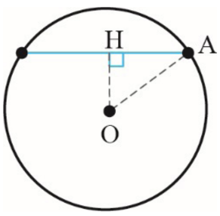
سوال) مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y+c=۰$ بر دایره $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ مماس بیرون باشد.

جواب)

$$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲ \Rightarrow O'(-۱,۱),\ r'=\sqrt{۲}\ \ (5/0)$$
$$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۲-c \Rightarrow O(۱,-۱)\ ,\ r=\sqrt{۲-c}\ \ (5/0)$$
$$OO'=۲\sqrt{۲}\ \ (25/0)$$
$$OO'=r+r' \xrightarrow{(۰/۲۵)} ۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۲-c} \Rightarrow c=۰\ \ (25/0)$$

سؤال) معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x+y=۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

جواب)



$$OH=\underbrace{\frac{|۲(-۱)+۱(-۱)-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}}_{(۰/۲۵)}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}\ \ (۰/۲۵)$$
$$\overset{\wedge}{AOH}(H=۹۰):OH^۲+AH^۲=OA^۲ \to (\sqrt{۵})^۲+۲^۲=r^۲\ (۰/۲۵)$$
$$r=۳\ (۰/۲۵) \to (x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۹\ (۰/۲۵)$$

سؤال) وضعیت نقطه $A(۱,-۲)$ نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ را تعیین کنید.

جواب)

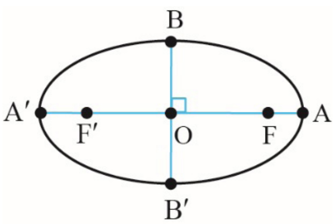
مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰ \to o(۱,-۱)\ ,\ r=\sqrt{۲}\ \ (5/0)$$
$$OA=۱\ \ (25/0) \to OA<r$$

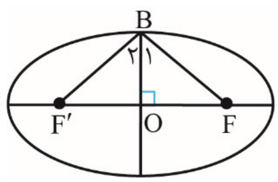
نقطه داخل دایره قرار دارد. (۰/۲۵)

سؤال) در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است، اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟

جواب)



$$۲a=\sqrt{۲}(۲b) \to a=b\sqrt{۲} \xrightarrow{(۰/۲۵)} \underbrace{\cos B_۱=\frac{OB}{BF}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{b}{b\sqrt{۲}}}_{(۰/۲۵)}=\underbrace{\frac{۱}{\sqrt{۲}}}_{(۰/۲۵)} \to B_۱=۴۵^\circ\ (۰/۲۵)$$



$$F\hat{B}F'=۲\times۴۵=۹۰^\circ\ \ (۰/۲۵)$$

سؤالات تکمیلی

الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی $x^۲-۴y+۸x=۰$ را به دست آورید،

ب) نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

جواب)

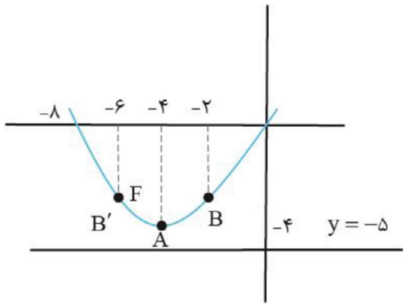
الف) فرم استاندارد سهمی به صورت $(x+۴)^۲=۴(y+۴)$ است. (۰/۵)

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا باز می‌شود. (۰/۵۲) رأس سهمی نقطه $A(-۴,-۴)$ است. (۰/۵۲) و $a=۱$ (۰/۵۲)،

مختصات کانون آن نقطه $F(-۴,-۴+۱)=(-۴,-۳)$ است (۰/۲۵). معادله خط هادی سهمی به صورت $y=-۴-۱=-۵$ است (۰/۵۲).

ب) نقاط کمکی $B(-۲,-۳)$ و $B'(-۶,-۳)$ (۰/۵)

رسم سهمی با استفاده از نقاط کمکی (۰/۵۲)



سؤال) سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است، به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، برخورد دایره و سهمی را بیابید

جواب)

$$y^۲=۴(x-۱)\to S(۱,۰)\ (۰/۲۵)\quad ,\quad F(۲,۰)\ (۰/۲۵)$$

$$(x-۲)^۲+y^۲=۹\ (۰/۲۵)\quad ,\quad \begin{cases} y^۲=۴x-۴ \\ y^۲=-x^۲+۴x+۵ \end{cases} \xrightarrow{(۰/۲۵)} \begin{cases} x=۳\ (۰/۲۵)\ \text{ق‌ق} \\ x=-۳\ (۰/۲۵)\ \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

$$M(۳,۲\sqrt{۲})\ ,\ M(۳,-۲\sqrt{۲})\ (۰/۲۵)$$

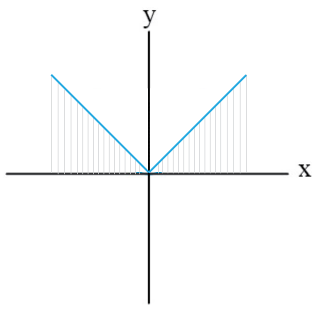
فصل سوم: بردارها

دستگاهِ مختصات در صفحه نمایانگر فضای دو بعدی R^2 می‌باشد.

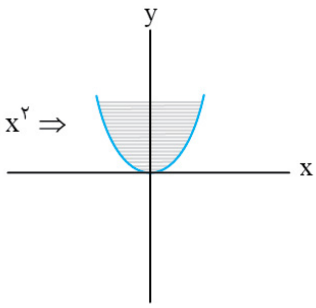
چگونه نقاط رابطه‌ای که به صورت نامساوی بیان شده مشخص کنیم؟

مثال: تمام نقاطی را مشخص کنید که در رابطه $y > x^2$ و $y \le |x|$ صدق می‌کند؟

$y \le |x| \Rightarrow$



$y \ge x^2 \Rightarrow$



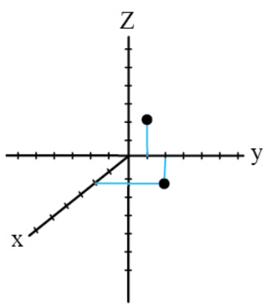
معرفی فضای R^3

محور / ناحیه	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

چگونه نقطه‌ای از فضای R^3 را که مختصات آن داده شده است نمایش دهیم؟

مثال: نقطه $A(2,1,3)$ را می‌خواهیم رسم کنیم:

روی محور xها نقطهٔ ۲ و روی محور yها نقطهٔ ۱ را می‌یابیم و بعد ۳ واحد روی محور z بالا می‌رویم.



محورهای مختصات و خواص آن

	ox	oy	oz	xy	xz	yz
تصویر قائم	$(x,0,0)$	$(0,y,0)$	$(0,0,z)$	$(x,y,0)$	$(x,0,z)$	$(0,y,z)$
قرینه	$(x,-y,-z)$	$(-x,y,-z)$	$(-x,-y,z)$	$(x,y,-z)$	$(x,-y,z)$	$(-x,y,z)$
فاصله	$\sqrt{y^2+z^2}$	$\sqrt{x^2+z^2}$	$\sqrt{x^2+y^2}$	$\sqrt{z^2}=\|z\|$	$\sqrt{y^2}=\|y\|$	$\sqrt{x^2}=\|x\|$

فاصله دو نقطه در فضای R^3 از فرمول روبه‌رو به دست می‌آید:

$$\sqrt{(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2+(z_0-z_1)^2}$$

بردارها در $R^{۲}$

هر خط جهت‌دار مانند $\overrightarrow{AB}$ را می‌گویند که ابتدای آن A و انتهای آن B است که بردارها را با $\vec{a}$ نشان می‌دهند.

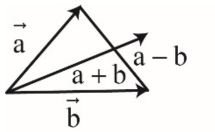
بردار مساوی (همسنگ) = به برداری می‌گوییم که هم‌اندازه و هم‌جهت باشد.

بردار قرینه = دو بردار موازی و هم‌اندازه که هم‌جهت نیستند را می‌گویند.

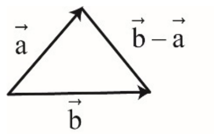
معمولاً مبدأ مختصات را به عنوان بردار صفر در نظر می‌گیریم و با $\overline{O}(۰,۰)$ نشان می‌دهیم. ابتدای هر بردار مانند $\vec{a}(a_۱,a_۲)$ را می‌توان مبدأ مختصات در نظر گرفت:

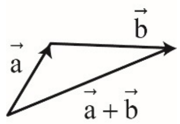
$$\vec{a}=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲}$$

جمع و تفریق بردار به روش متوازی‌الاضلاع



جمع و تفریق بردار به روش مثلث





طول بردار در $R^{۳}$

طول هر بردار مانند $\vec{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$ از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$|\vec{a'}|=\sqrt{a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲}$$

جمع دو بردار

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_۱+b_۱\ ,\ a_۲+b_۲\ ,\ a_۳+b_۳)$$

ضرب عدد در بردار

$$r\vec{a}=r(a_۱,a_۲,a_۳)$$

اگر $r>۰$ باشد بردار $r\vec{a}$ هم‌جهت $\vec{a}$ و اگر $r<۰$ باشد بردار $r\vec{a}$ در خلاف جهت بردار $\vec{a}$ است.

خواص جمع بردارها

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

$$r(\vec{a}+\vec{b})=r\vec{a}+r\vec{b}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overline{o}$$

بردارهای یکه در $R^{۳}$

$$i(۱,۰,۰)\qquad j=(۰,۱,۰)\qquad k=(۰,۰,۱)$$

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(۲,۱,۳)$ $\vec{b}=(-۵,۰,۲)$ $\vec{c}=(۱,-۲,۲)$ را در نظر بگیرید:

الف) بردار $\vec{a}+۲\vec{c}$ را به صورت مجموع مضاربی از بردارهای یکه بنویسید.

$$\vec{a}+۲\vec{c}=(۴,-۳,۷)=۴i-۳j+۷k$$

ب) طول بردار $۳a-۲\vec{b}$ را مشخص کنید.

جواب)

$$۳(۲,۱,۳)-۲(-۵,۰,۲)=(۱۶,۳,۵)$$

$$|۳\vec{a}-۲\vec{b}|=\sqrt{۱۶^۲+۳^۲+۵^۲}=\sqrt{۲۹۰}$$

ضرب داخلی

فرض کنید دو بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲)$ و $\vec{b}=(b_۱,b_۲)$ را داریم می‌خواهیم زاویه بین این دو بردار را پیدا کنیم:

ضرب داخلی یک بردار عدد حقیقی است.

$$\cos\theta=\frac{a.b}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$a.b=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$ به $a.b$ ضرب داخلی می‌گویند

تعریف: اگر $\vec{a}(a_۱,a_۲,a_۳)$ و $\vec{b}(b_۱,b_۲,b_۳)$ دو بردار در $R^۳$ باشند در این صورت:

$$\vec{a}.\vec{b}=a_۱b_۱+a_۲b_۲+a_۳b_۳$$

خواص ضرب داخلی

1- $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$

2- $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

3- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

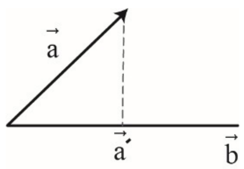
4- اگر $\vec{a},\vec{b}$ بر هم عمود باشند $\vec{a}.\vec{b}=۰$ است در واقع $\cos\theta$ برابر با $\frac{\pi}{۲}$ است.

5- $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\le|\vec{a}||\vec{b}|$

تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$

$$\vec{a'}=r\vec{a}$$

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\times\vec{b}$$



اگر اندازه بردار $\vec{a}$ بر بردار $\vec{b}$ را خواست از فرمول $|a'|=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(۳,m,۳)$ و $\vec{b}(m-۱,۲,۲m-۷)$ بر هم عمود هستند مقدار m را پیدا کنید.

جواب)

باید $a.b$ باشد.

$$(۳,m,۳).(m-۱,۲,۲m-۷)=۰$$
$$۳(m-۱)+m\times۲+۳(۲m-۷)=۰$$
$$۳m-۳+۲m+۶m-۲۱=۰$$
$$۱۱m=۲۴$$
$$m=\frac{۲۴}{۱۱}$$

سؤال) سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}(۰,۲,۱)$ در نظر بگیرید:

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ است، $\cos\theta$ را به دست آورید. $\vec{b}=(۱,۰,۱)$ $\quad$ $\vec{a}=(۲,۳,-۱)$

جواب) $\cos\theta=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$ $\quad$ $۱=\sqrt{۱۴}\sqrt{۲}\cos\theta$ $\quad$ $\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

$\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{d}}{\vec{d}}\times\vec{d}=\frac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰)$ $\quad$ $۱,-۲,۰$ $\quad$ $\vec{d}\quad\vec{b}\quad\vec{c}$

ضرب خارجی

می‌توان ضرب دو بردار را به گونه‌ای تعریف کرد که حاصل‌ضرب آن‌ها همواره یک بردار باشد.

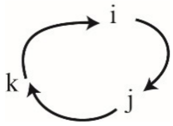
$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_۲ & a_۳\\ b_۲ & b_۳\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_۱ & a_۳\\ b_۱ & b_۳\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_۱ & a_۲\\ b_۱ & b_۲\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\Rightarrow(a_۲b_۳-a_۳b_۲,a_۳b_۱-a_۱b_۳,a_۱b_۲-a_۲b_۱)$$

می‌توان گفت $|a\times b|=|a||b|\sin\theta$

✓نکات مهم:

$i\times i=۰$ $\quad$ $i\times j=k$

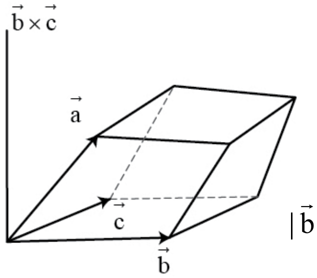


اگر در جهت فلش‌ها برویم مثبت است.

$a.(a\times b)=۰$ $\quad$ $b.(a\times b)=۰$ این خاصیت گویای این مطلب است که $b\perp a\times b$ و $a\perp a\times b$

دو بردار $\vec{b}$ و $\vec{a}$ با هم موازی هستند اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ باشد.

حجم متوازی‌السطوح



$\frac{\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})}{|\vec{b}\times\vec{c}|^۲}(\vec{b}\times\vec{c})=$ ارتفاع [تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}\times\vec{c}$]

چون قاعدهٔ این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شده پس مساحت آن برابر است با $|\vec{b}\times\vec{c}|$

از طریق دترمینان هم می‌توان مساحت را به دست آورد:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=\begin{vmatrix} i & j & k\\ a_۱ & a_۲ & a_۳\\ b_۱ & b_۲ & b_۳\end{vmatrix}$$

سؤال) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به طوری‌که $|\vec{a}|=۶$ و $|\vec{b}|=۴$ و زاویه بین آن‌ها ۳۰ درجه است مقدار عبارت $|۲\vec{a}\times\vec{b}|$ را محاسبه کنید.

جواب)

$$|۲\vec{a}\times\vec{b}|=|۲\vec{a}||\vec{b}|\sin ۳۰^\circ=۲(۶)(۴)(\frac{۱}{۲})=۲۴$$

سؤال) بردار $\vec{a}=(۴,-۴,۲)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیر هم‌جهت با $\vec{a}$ و به طول ۱۲ را طوری بیابید که $\vec{a}\times\vec{b}=۰$ باشد.

جواب)

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{۰}\Rightarrow\vec{b}\,||\,\vec{a}\to\vec{b}=(۴k,-۴k,۲k)$$

$$|\vec{b}|=۶|k|=۱۲$$

$$k=\pm۲\xrightarrow{k=-۲}\vec{b}=(-۸,۸,-۴)$$

سؤال) اگر $A(۴,۱,۳)$ ، $B(۲,۳,-۱)$ ، $C(-۳,۲,۶)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ باشد مساحت این متوازی‌الاضلاع چقدر است؟

جواب)

$$\overline{AC}=(-۷,۱,۳) \qquad \overline{AB}=(-۲,۲,-۴) \qquad \overline{AB}\times\overline{AC}=(۱۰,۳۴,۱۲)$$

$$\text{مساحت}=|\overline{AB}\times\overline{AC}|=\sqrt{۱۰^۲+۳۴^۲+۱۲^۲}=\sqrt{۱۴۰۰}=۱۰\sqrt{۱۴}$$

سؤالات تکمیلی

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به‌دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به‌دست آورید.

جواب)

الف)

$$\vec{a}.\vec{b}=(-۲,۰,۲).(۰,۲,۲)=۴ \quad (25/0)$$

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=۲\sqrt{۲} \quad (25/0)$$

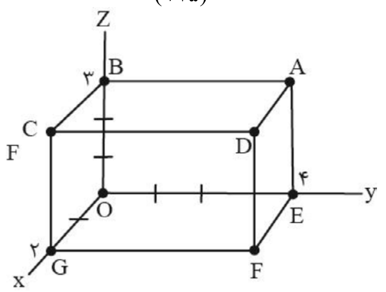
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۱}{۲}(۰/۲۵)\rightarrow\theta=۶۰^\circ(۰/۲۵)$$

ب)

$$\vec{a}+\vec{b}=(-۲,۰,۲)+(۰,۲,۲)=(-۲,۲,۴) \quad (25/0)$$

$$(\vec{a}+\vec{b})'=\underbrace{\frac{(\vec{a}+\vec{b}).\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}}_{(۰/۲۵)}\vec{b}=\underbrace{\frac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲)=(۰,۳,۳)}_{(۰/۵)}$$

سؤال) با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) نام وجه از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.

$$x=۲\,,\,۰\le y\le ۴\,,\,۰\le z\le ۳$$

ب) معادلات مربوط به پاره خط (یال) AD را بنویسید.

پ) مختصات نقطه D را بنویسید.

ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.

جواب)

الف) $CDFG$ $(25/0)$

ب) $\begin{cases}۰\le x\le ۲\\ y=۴\\ z=۳\end{cases}$ $(5/0)$

پ) $D(۲,۴,۳)$ $(25/0)$

ت) $y=۲$ $(5/0)$

سؤال) اگر $\vec{a}=(۲,-۳,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۲,-۴)$ باشند، حجم متوازی‌الاسطوحی که بر روی سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته شود کدام است؟

1) 225   2) 230   3) 245   4) 250

جواب) گزینه ۲ حجم متوازی‌السطوح ساخته بر روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ برابر $(\vec{a}\times\vec{b}).(\vec{a}\times\vec{b})$ یعنی $|\vec{a}\times\vec{b}|^۲$ است. داریم:

$$i\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ ۲ & -۳ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۴\end{vmatrix}=۱۰i+۹j+۷k$$

$$\text{حجم متوازی‌السطوح}=|\vec{a}\times\vec{b}|^۲=۱۰^۲+۹^۲+۷^۲=۱۰۰+۸۱+۴۹=۲۳۰$$

سؤال) دو بردار $\vec{a}=(۳,-۲,۱)$ ، $\vec{b}=-۲\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $R^۳$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)،

ب) طول بردار $\vec{a}+۲\vec{b}$ را حساب کنید.

پ) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را پیدا کنید.

جواب)

بردار $\vec{a}$ در ناحیه چهارم (۰/۵)

ب)

$$\vec{a}+۲\vec{b}=(۳,-۲,۱)+۲(-۲,۱,-۱)=(-۱,۰,-۱)\quad(5/0)$$
$$|\vec{a}+۲\vec{b}|=\sqrt{۲}\quad(25/0)$$

پ) ضرب خارجی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر آن‌ها عمود است. (۰/۲۵)

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۱,۱,-۱)\quad(5/0)$$

سؤال) دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با معلومات $|\vec{a}|=۵$ و $|\vec{b}|=۷$ و $\vec{a}-\vec{b}=۲\vec{i}+\vec{j}-۳\vec{k}$ مفروض‌اند. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر روی بردار $\vec{a}$، چند برابر $\vec{a}$ است؟

1) $۰/۷$ 2) $۰/۸$ 3) $۱/۲$ 4) $۱/۴$

جواب)

گزینه ۳ با توجه به فرض داریم:

$$|\vec{a}-\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲-۲\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow(\sqrt{۴+۱+۹})^۲=۲۵+۴۹-۲\vec{a}.\vec{b}$$
$$\Rightarrow ۱۴=۷۴-۲\vec{a}.\vec{b}\Rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۳۰$$

در نتیجه اندازه تصویر قائم $\vec{b}$ روی $\vec{a}$ برابر می‌شود:

$$\Rightarrow|\vec{b'}|=\frac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\frac{|۳۰|}{۵}=۶\Rightarrow\frac{|\vec{b'}|}{|\vec{a}|}=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

سؤال) بردارهای $\vec{a}=(-۱,\alpha,۲)$ و $\vec{b}=(-\frac{۲}{۳},\frac{۲}{۳},۲)$ در فضا مفروض‌اند. اگر بردار $(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})$ موازی بردار $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ باشد، مقدار α کدام است؟

1) صفر 2) 1

3) 3 4) هیچ مقداری برای α به دست نمی‌آید.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}=(-۱,\alpha,۲)\\ \vec{b}=(-\frac{۴}{۳},\frac{۲}{۳},۲)\end{array}\right\}\rightarrow\vec{a}\times\vec{b}=(۲\alpha-\frac{۴}{۳},-\frac{۲}{۳},\frac{۴\alpha-۲}{۳})$$

طبق فرض داریم:

$$(\vec{a}.\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b})\parallel\vec{c}\Rightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\parallel\vec{c}\Rightarrow\frac{۲\alpha-\frac{۴}{۳}}{-۱}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱}=\frac{\frac{۴\alpha-۲}{۳}}{-۱}\Rightarrow۲\alpha-\frac{۴}{۳}=\frac{۲}{۳}\rightarrow۲\alpha=۲\rightarrow\alpha=۱$$

هندسه دوازدهم

سوال ۱ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس .... میناميم. (دی ۹۷)

ب) رأس سهمی به معادله $y^2+2x-2y=0$، نقطه ای به مختصات .... است. (دی ۹۷)

پ) حاصل ضرب ماتریس ها خاصیت جا به جایی .... (دی ۹۷)

ت) در حالی که $\frac{c}{a}=1$، بیضی به یک .... تبدیل می شود. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

الف) ماتریس اسکالر　　ب) $\left(\frac{1}{2},1\right)$　　پ) ندارد　　ت) پاره خط

سوال ۲ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر برای ماتریس های متمایز A و B و C داشته باشیم: $AB=AC$، آنگاه $B=C$ است. (دی ۹۹)

ب) نقطه $(3,-2)$ روی دایره $x^2+y^2+2x=0$ قرار دارد. (دی ۹۹)

پ) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، حاصل $\vec{a}.\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=0$ است. (دی ۹۹)

ت) برای سه بردار $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به طول های واحد روی محورهای مختصات در R^2 داریم: $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

الف) نادرست　　ب) نادرست　　پ) درست　　ت) درست

سوال ۳ اگر $A=\left[a_{ij}\right]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & i<j \\ 2 & i=j \\ i+j & i>j \end{cases}$ باشد، درایه های a_{33}، a_{31} و a_{12} را بدست آورید. (دی ۹۹)

پاسخ:

$a_{12}=1-2=-1$　　$a_{31}=3+1=4$　　$a_{33}=2$

یادآوری: می دانیم درایه سطر iام و ستون jام در ماتریس C، از ضرب سطر iام در ستون jام بدست می آید.

سوال ۴ مقادیر x و y را از معادله زیر بدست آورید. (دی ۹۹)

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 4x-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 2x=4\Rightarrow x=2 \\ 4x-2=y-2\Rightarrow y=8 \end{cases}$$

سوال ۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۶ & ۲\\ ۲ & -۱ & ۱\end{bmatrix}$، حاصل $\left|-\frac{۱}{۲}A^{۴}\right|$ را بدست آورید. (۱۴۰۱)

پاسخ:

یادآوری: از روش دترمینان ساروس می رویم.

$$|A|=۲\Rightarrow\left|-\frac{۱}{۲}A^{۴}\right|=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^{۳}|A|^{۴}=-۲$$

سوال ۶ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases}۲x+my=۱\\ (m-۱)x+y=۳\end{cases}$ جواب نداشته باشد (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\Rightarrow\frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳}\Rightarrow m(m-۱)=۲\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

سوال ۷ اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ باشد و $|A|=-۲$، حاصل $\left||A|.A\right|$ را بیابید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\left||A|.A\right|=|-۲A|=(-۲)^{۳}|A|=-۸(-۲)=۱۶$$

سوال ۸ دستگاه $\begin{cases}(m-۲)x+۳y=m\\ ۴x+(m+۱)y=۲\end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصر به فرد می باشد؟ (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\begin{vmatrix}m-۳ & ۳\\ ۴ & m+۱\end{vmatrix}\neq۰\Rightarrow(m-۳)(m+۱)-۱۲\neq۰\Rightarrow\begin{cases}m\neq۵\\ m\neq-۳\end{cases}$$

$$m\in\mathbb{R}-\{۵,-۳\}$$

سوال ۹ ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۲\times۲}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}i^{۲}-j & i>j\\ i+j & i\leq j\end{cases}$ داده شده است. ماتریس $A^{-۱}$ را بدست آورید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۳ & ۴\end{bmatrix}\qquad |A|=-۱$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}۴ & -۳\\ -۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۴ & ۳\\ ۳ & -۲\end{bmatrix}$$

سوال ۱۰ اگر $A=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$ باشد، آن گاه دترمینان ماتریس A برابر .... است. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$|A|=-\sin^{۲}\theta-\cos^{۲}\theta=-۱$$

سوال ۱۱ اگر $A=\begin{bmatrix} a & ۸ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد، مقدار **a** برابر .... است.

پاسخ:

باید $|A|$ برابر با صفر باشد

$$(a\times -۴)-(۳\times ۸)=۰ \Rightarrow -۴a-۲۴=۰ \Rightarrow a=۶$$

سوال ۱۲ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & m-۲ \\ n+۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|A|+|B|$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۹)

پاسخ:

$$\begin{cases} m-۲=۰ \Rightarrow m=۲ \\ n+۱=۰ \Rightarrow n=-۱ \end{cases} \Rightarrow B=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|B|=۲(-۱)-۱(۷)+۱(-۲)=-۱۱ \quad , \quad |A|=۲$$

$$|A|+|B|=۲+(-۱۱)=-۹$$

سوال ۱۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A|^۳$ را محاسبه کنید. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$|A|=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۰ & ۲ & ۳ \\ ۰ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۰ & ۲ \\ ۰ & ۱ \end{matrix}=(۸+۰+۰)-(۰+۶+۰)=۲ \Rightarrow |A|=۲^۳=۸$$

سوال ۱۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $I_۳$ ماتریس همانی ۳×۳ باشد، حاصل عبارت زیر را بدست آورید. (دی ۹۹)

پاسخ:

$$|A\times B|+|۲I_۳|=$$

$$|A|=(۴-۹-۴)-(-۴-۱۲+۳)=-۹+۱۳=۴$$

$$|B|=-۶$$

$$|A\times B|+۸|I|=-۲۴+۸=-۱۶$$

سوال ۱۵ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}۳ & ۲\\ ۱ & ۵\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}x+۱ & y+۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A+B=\begin{bmatrix}۵ & ۴\\ ۸ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، آن گاه مقادیر x و y را بدست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\begin{cases}۲+x+۱=۵\Rightarrow x=۲\\ ۳+y+۲=۴\Rightarrow y=-۱\end{cases}$$

سوال ۱۶ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$، ماتریس A را بدست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۵ & ۲\\ ۷ & ۳\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}$$
$$=\frac{۱}{۱۵-۱۴}\begin{bmatrix}۳ & -۲\\ -۷ & ۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱ & ۲\\ ۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷ & ۴\\ ۱۷ & -۹\end{bmatrix}$$

سوال ۱۷ ماتریس A مربعی مرتبه سه به صورت $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i=j\\ j & i>j\\ ۰ & i<j\end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۰\\ -۱ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۵\end{bmatrix}$ باشد

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) دترمینان ماتریس B را محاسبه کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

الف) $\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۴ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۶\end{bmatrix}$

ب) $|B|=۳۹$

سوال ۱۸ دستگاه $\begin{cases}۲x+y=۴\\ ۷x+۴y=۱۵\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$x=A^{-۱}\times B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۴ & -۱\\ -۷ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۴\\ ۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ ۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\ y=۲\end{cases}$$

سوال ۱۹ اگر $A=\begin{bmatrix}۴ & a\\ b & -۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۲\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ باشد، مقادیر a و b را طوری بدست آورید که $A\times B$ ماتریس قطری باشد. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$A\times B=\begin{bmatrix}۴+۳a & -۸+۲a\\ b-۳ & -۲b-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲a-۸=۰\\ b-۳=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=۳\end{cases}$$

سوال ۲۰ ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۰ & i\neq j\end{cases}$ معرفی شده است. مقدار **k** را طوری پیدا کنید که رابطه $k\left|kA\right|=۶۲۵$ برقرار باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\left|A\right|=۱$$

$$k\left|kA\right|=k\left(k^{۳}\left|A\right|\right)=k^{۴}\times۱=۶۲۵\Rightarrow k=\pm۵$$

سوال ۲۱ با استفاده از ویژگی های ضرب ماتریس ها و ماتریس همانی **I**، درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

پاسخ:

$$(A-۳I)^{۲}=A^{۲}-۶A+۹I$$

$$(A-۳I)^{۲}=(A-۳I)(A-۳I)=A^{۲}-۳AI-۳IA+۹I^{۲}$$

$$=A^{۲}-۶A+۹I$$

می دانیم: $\begin{cases}AI=IA=A\\ I^{۲}=I\end{cases}$ پس داریم:

سوال ۲۲ اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}$ باشد، نشان دهید: (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{۵}A^{-۱}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ -۱ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{۱}{۵}A^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰}\\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰}\end{bmatrix}$$

$$۵A=\begin{bmatrix}۱۵ & -۵\\ ۵ & -۵\end{bmatrix}\Rightarrow(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{-۵۰}\begin{bmatrix}-۵ & ۵\\ -۵ & ۱۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰}\\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰}\end{bmatrix}$$

یادآوری: $A^{-۱}=\dfrac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$

سوال ۲۳ اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} & i>j \\ i^{۲} & i=j \\ ۲i-j & i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A-۳I$ را بدست آورید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$۲A-۳I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix}$$

سوال ۲۴ اگر ضرب ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد حاصل $\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix}$ را بیابید (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} ۴x+۳y & ۳x+۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴x+۶ & ۴y-۳ \\ ۳x+۸ & ۳y-۴ \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} ۳x+۸=۵\Rightarrow x=-۱ \\ ۳y-۴=۲\Rightarrow y=۲ \end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=-۲+۴-۲=۰$$

سوال ۲۵ دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید. (دی ۹۹)

پاسخ:

$$\begin{cases} ۳x-۵y=-۱ \\ ۲x+y=۸ \end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۳+۱۰=۱۳$$

$$^{-۱}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-۱}\times B\Rightarrow\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} -۱+۴۰ \\ ۲+۲۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x= \\ y= \end{cases}$$

سوال ۲۶ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B، دو ماتریس ۲×۲ باشند، آن گاه $|AB|=|A||B|$. (دی ۱۴۰۰)

ب) اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A|=۵$ باشد، آن گاه $|۲A|=۴۰$ است. (خرداد ۱۴۰۱)

پ) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد و $rA=rB$، آن گاه داریم: $A=B$. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

الف) درست ب) درست $۲^۳|A|=۴۰$ پ) درست

سوال ۲۷ اگر $A=\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $A=B$، در این صورت حاصل $x+۲y+۳z$ را بدست آورید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\begin{bmatrix}۲x & ۵\\ z & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & ۲x+y\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۳\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}\\ ۲x+y=۵\Rightarrow y=۲\\ z=-۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow x+۲y+۳z=\frac{-۱}{۲}$$

سوال ۲۸ اگر $A=[۲i-۳j]_{۳\times۲}$ و $B_{۲\times۳}=\begin{cases}-۱ & i\neq j\\ ۰ & i=j\end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را بدست آورید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix} \qquad B_{۲\times۳}=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۳\end{bmatrix}$$

$$|AB|=۴(۶)-۱(-۶)+۵(-۶)=۰$$

سوال ۲۹ الف) $A=\begin{bmatrix} \cdot & m \\ n & m-۲ \end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر **m** و **n** را بیابید. (دی ۱۴۰۱)

ب) اگر $b_{ij}=\begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$ و $B=\left[b_{ij}\right]_{۳\times۳}$، ماتریس **B** را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

پ) ماتریس $B^{۲}+۲I$ را محاسبه کنید. (**I** ماتریس همانی مرتبه ۳ است.)

پاسخ:

الف) $m-۲=\cdot \to m=۲ \to n=m=۲$

ب) $B=\begin{bmatrix} ۱ & \cdot & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۴ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$

پ) $B^{۲}+۲I=\begin{bmatrix} ۶ & ۱ & ۵ \\ ۸ & ۱\cdot & ۶ \\ ۱۸ & ۷ & ۷ \end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & ۱ \\ \cdot & ۱ & \cdot \\ ۱ & \cdot & \cdot \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۶ & ۱ & ۷ \\ ۸ & ۱۲ & ۶ \\ ۲\cdot & ۷ & ۷ \end{bmatrix}$

سوال ۳۰ اگر ماتریس $A=\left[a_{ij}\right]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i^{۲}-۱ & i=j \\ i-j & i>j \\ j-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} \cdot & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ & -۱ \\ ۵ & \cdot & ۲ \end{bmatrix}$ باشد:

الف) حاصل ماتریس $A\times B$ را بدست آورید. (شهریور ۹۸)

ب) دترمینان ماتریس **B** را به دست آورید.

پاسخ:

الف) $A=\begin{bmatrix} \cdot & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix} \quad A\times B=\begin{bmatrix} \cdot & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۸ \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & \cdot \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۲ & \cdot & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & ۳ & ۱۲ \\ ۱ & ۱\cdot & ۱۱ \\ ۱۹ & ۵ & ۴۲ \end{bmatrix}$

ب) $|B|=۲(۱۵)-۱(-۹)+\cdot(-۶)=۳۹$

سوال ۳۱ مقدار **m** را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۴ & m \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

باید $|A|=\cdot \Rightarrow ۲m-۴=\cdot \Rightarrow m=۲$

سوال ۳۲ اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ ۴ & ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A|+|B^۲|$ را بیابید. (شهریور ۹۹)

پاسخ:

$$|A|=۲\begin{vmatrix} +۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}=۲\times۱۰=۲۰$$

$$|B|=-۶\Rightarrow|B^۲|=۳۶ \qquad |A|+|B^۲|=۵۶$$

سوال ۳۳ به ازای چه مقداری از m، دستگاه معادلات $\begin{cases} x-۲y=۳ \\ mx+۶y=-۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟ (شهریور ۹۹)

پاسخ:

باید $|A|=۰$ شود. بنابراین:

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۶ \end{vmatrix}=۰\to ۶+۲m=۰\to m=-۳$$

سوال ۳۴ اگر $۳A=\begin{bmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A^{-۱}|$ را محاسبه کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$|۳A|=۴|A|^۲+۵\to ۴|A|^۲-۹|A|+۵=۰\to\begin{cases} |A|=۱\to|A^{-۱}|=۱ \\ |A|=\frac{۵}{۴}\to|A^{-۱}|=\frac{۴}{۵} \end{cases}$$

سوال ۳۵ اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، نشان دهید: (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{۵}A^{-۱}$$

$$A^{-۱}=\frac{-۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \qquad \frac{۱}{۵}A^{-۱}=\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۱۰} & \frac{۱}{۱۰} \\ -\frac{۳}{۱۰} & \frac{۱}{۱۰} \end{bmatrix}$$

می‌دانیم: $A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$۵A=\begin{bmatrix} ۱۵ & -۵ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix}\to(۵A)^{-۱}=\frac{۱}{-۵۰}\begin{bmatrix} -۵ & ۵ \\ -۵ & ۱۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}$$

سوال ۳۶ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d' و d به یک فاصله اند. نیمساز زاویه بین آن دو خط می باشد. (دی ۹۷)

ب) صفحه ای با مولد سطح مخروط دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی کند. فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است. (دی ۹۷)

پ) اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه های سطر دوم $A^۲$ برابر ۵ می باشد. (دی ۹۷)

ت) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در خارج بیضی است. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

الف) درست ب) نادرست پ) نادرست $A^۲=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۸ \\ -۱ & ۱ & -۴ \\ ۷ & ۶ & -۱ \end{bmatrix}$

ت) درست

سوال ۳۷ معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $A(۴,-۱)$ و $B(-۲,۱)$ دو سر قطری از آن باشد. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$|AB|=\sqrt{۶^۲+۲^۲}=۲\sqrt{۱۰}\rightarrow r=\sqrt{۱۰} \qquad O\left(\frac{۴-۲}{۲},\frac{-۱+۱}{۲}\right)=(۱,۰)$$

$$(x-۱)^۲+y^۲=۱۰$$

سوال ۳۸ حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲+y^۲-۳x+۵y+a=۰$ بتواند یک معادله دایره باشد. (دی ۹۷)

پاسخ:

می دانیم: $a^۲+b^۲-۴c>۰\rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰\rightarrow ۴a<۳۴\rightarrow a<\frac{۱۷}{۲}$

سوال ۳۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & b \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر .... است. (خرداد ۱۴۰۰)

ب) اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی، یک .... است. (خرداد ۱۴۰۰)

پ) اگر ماتریسی قطری باشد و تمام درایه های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را یک ماتریس .... می نامیم. (خرداد ۹۹)

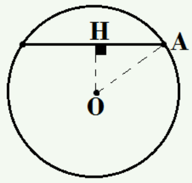
پاسخ:

الف) ۸ $\begin{vmatrix} ۲ & ۰ & f \\ ۰ & a & ۰ \\ e & c & d \end{vmatrix}\begin{matrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & a \\ e & c \end{matrix}$ ب) خط پ) اسکالر

باید: $\begin{cases} a=b=۲ \\ e=c=f=۰ \end{cases}$

سوال ۴۰ معادله دایره ای را بنویسید که $O(-1,-1)$ مرکز آن بوده و روی خط $2x+y=2$ وتری به طول ۴ ایجاد کند. (خرداد ۹۹)

پاسخ:



$$OH=\frac{2(-1)+1(-1)-2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

$$\overset{\Delta}{AOH}\left(\hat{H}=90^\circ\right):OH^2+AH^2=OA^2\rightarrow\left(\sqrt{5}\right)^2+2^2=r^2\rightarrow r=3$$

بنابراین: $(x+1)^2+(y+1)^2=9$

سوال ۴۱ وضعیت نقطه $A(1,-2)$ نسبت به دایره $x^2+y^2-2x+2y=0$ را تعیین کنید. (خرداد ۹۹)

پاسخ:

$OA=1$ $\qquad r=\sqrt{2}$ $\qquad O(1,-1)$ $\qquad x^2+y^2-2x+2y=0$

$OA<r$ پس نقطه داخل دایره است.

سوال ۴۲ معادله دایره ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد. (دی ۹۹)

پاسخ:

$$r=\frac{4(2)+3(-1)+5}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$$\begin{cases}x+y=1\\x-y=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$$

مرکز دایره $O(2,-1)$ و شعاع آن $r=2$ است. معادله دایره برابر با $(x-2)^2+(y+1)^2=4$ است.

سوال ۴۳ در نقطه $A(2,3)$ روی دایره به معادله $x^2+y^2-2x-2y=3$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم. معادله این خط مماس را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

پاسخ:

$O(1,1)$ $\qquad (x-1)^2+(y-1)^2=5$

$m_{OA}=\frac{3-1}{2-1}=2$ شیب خط مماس $m'=\frac{1}{m}=\frac{-1}{2}$

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-3)$$

سوال ۴۴ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد.

مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط AB است.

مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله اند، عمود منصف پاره خط CD است.

پاسخ:

محل برخورد دو عمود منصف، جواب مسئله است.

حالات ممکن: [یک جواب – بدون جواب – بی شمار جواب]

سوال ۴۵ معادله دایره ای را بنویسید که نقاط $O(-۲,۳)$ مرکز و $B(۱,-۱)$ یک نقطه از آن باشد. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$r = OB = \sqrt{(۱+۲)^۲ + (-۱-۳)^۲} = ۵ \qquad (x+۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۲۵$$

سوال ۴۶ معادله دایره ای را بنویسید که $O(۱,۰)$ مرکز آن بوده و بر خط $x = -۳$ مماس باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

می دانیم: $(x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲$

$$OH = \frac{|۱+۳|}{\sqrt{۱^۲+۰^۲}} = ۴ \qquad OH = R \qquad (x-۱)^۲ + y^۲ = ۱۶$$

سوال ۴۷ دایره های $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟ (دی ۹۷)

پاسخ:

مرکزها به ترتیب $O'(۱,۰)$ و $O(۰,۰)$ است.

$$OO' = \sqrt{۱^۲ + ۰} = ۱$$

شعاع ها به ترتیب $\sqrt{۵}$ و ۲ است.

$$|r - r'| = \sqrt{۵} - ۲ < OO' < r + r' = \sqrt{۵} + ۲$$

دو دایره متقاطع هستند.

سوال ۴۸ مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + c = ۰$ بر دایره $(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$ مماس بیرون باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$r' = \sqrt{۲} \qquad O'(-۱,۱) \qquad (x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$$

$$r = \sqrt{۲-c} \qquad (x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ - c \Rightarrow O(۱,-۱)$$

$$OO' = ۲\sqrt{۲} \qquad OO' = r + r' \to ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲} + \sqrt{۲-c} \to c = ۰$$

سوال ۴۹ الف) هر گاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می شود. اگر صفحه P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحه P و سطح ایجاد شده، بیضی است. (درست / نادرست)

ب) مکان هندسی مرکز همه دایره های با شعاع ثابت یک، که بر دایره $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$ مماس خارج باشند، دایره ای به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع ......۵...... است. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$r=۴ \qquad ۴+۱=۵$

سوال ۵۰ وضعیت خط $x+y=۲$ و دایره $x^۲+y^۲=۲$ را نسبت به هم مشخص کنید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$r=OM=\sqrt{(۱+۲)^۲+(-۱-۳)^۲}=۵ \qquad (x+۲)^۲+(y-۳)^۲=۲۵$

سوال ۵۱ در شکل رو به رو، نقطه M روی بیضی با کانون های F و F' قرار دارد به طوری که $MF=۸$ و $MF'=۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

بنا به تعریف بیضی: $MF+MF'=۲a$ پس داریم:

$۲a=۱۴\rightarrow a=۷ \qquad \frac{c}{a}=\frac{۱}{۷}\rightarrow c=۱$

$a^۲=b^۲+c^۲\rightarrow b=۴\sqrt{۳}$

سوال ۵۲ سهمی با رأس $A(۱,۲)$ و کانون $F(۱,-۲)$ مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

با توجه به رأس و کانون سهمی، دهانه آن رو به پایین و قائم است.

$a=AF=۴ \qquad (x-۱)^۲=-۱۶(y-۲)$

معادله خط هادی: $y=۶$

سوال ۵۳ اگر اندازه گودی یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصله کانونی این دیش چه تغییری می کند؟ (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

نصف می شود.

$$\frac{a'}{a}=\frac{\frac{b^۲}{۴(۲h)}}{\frac{b^۲}{۴h}}=\frac{۱}{۲}$$

سوال ۵۴ عبارت های زیر را کامل کنید.

الف) اگر در بیضی، خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود، کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به .... نزدیک تر می شود. (خرداد ۱۴۰۱)

ب) سهمی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک .... ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (شهریور ۹۹)

پ) اگر طول قطر بزرگ بیضی دو برابر فاصله کانونی آن باشد، خروج از مرکز بیضی برابر .... است. (شهریور ۹۹)

پاسخ:

الف) دایره ب) نقطه پ) $\frac{1}{2}$

سوال ۵۵ در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات، طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است:

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.

ب) مختصات کانون ها **F** و F'، مختصات دو سر قطر بزرگ **A** و A' و دو سر قطر کوچک **B** و B' را بدست آورید

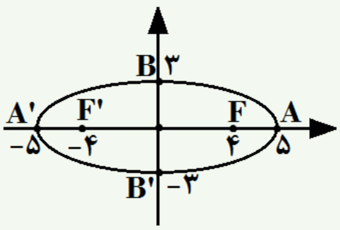
پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

الف) $\frac{c}{a}=\frac{4}{5}$ $\quad c=4 \quad a^2=b^2+c^2 \quad 2a=10\to a=5 \quad 2b=6\to b=3$

ب) $B(0,3),B'(0,-3) \quad , \quad F(4,0),F'(-4,0) \quad , \quad A(5,0),A'(-5,0)$

پ)



سوال ۵۶ الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادله $y^2-2y-8x+9=0$ را بیابید.

ب) مختصات رأس کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱)

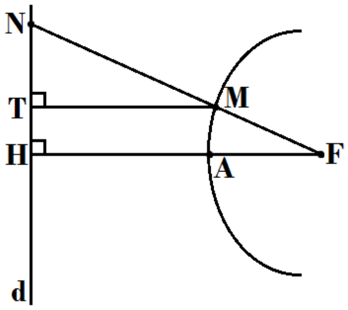
پاسخ:

الف) $(y-1)^2=8(x-1)$ فاصله کانونی $a=2$

ب) رأس سهمی $(1,1)$ معادله خط هادی $x=-1$

مختصات کانون آن $(3,1)$

سوال ۵۷ در شکل رو به رو، سهمی با رأس **A** و کانون **F** و خط هادی **d** رسم شده است. از کانون **F** به نقطه دلخواه **M** روی سهمی وصل کرده و امتداد داده ایم تا خط **d** را در **N** قطع کند و از نقطه **M**، **MT** را بر **d** عمود کرده ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA}=\frac{2NT}{TH}$. (خرداد ۱۴۰۱)

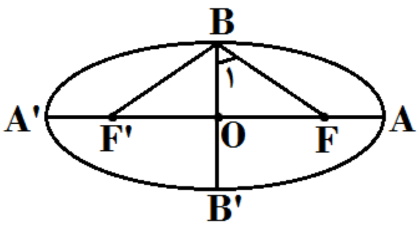


پاسخ:

با توجه به قضیه تالس در مثلث **NHF**: $MT \parallel FH$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{NM}{MF}=\frac{NT}{TH}\\&\frac{MT}{FH}=\frac{NM}{NF}\xrightarrow{MT=MF}\frac{NF}{FH}=\frac{NM}{MF}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{NF}{2FA}=\frac{NT}{TH}\xrightarrow{\times 2}\frac{NF}{FA}=\frac{2NT}{TH}$$

سوال ۵۸ اگر در بیضی، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟ (دی ۹۷)



پاسخ:

$$a=2b \qquad c^2=a^2-b^2=4b^2-b^2=3b^2 \qquad c=\sqrt{3}b$$

$$\tan B_1=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{3}b}{b}=\sqrt{3} \qquad \hat{B}_1=60^\circ \qquad F\hat{B}F'=2\times 60=120^\circ$$

سوال ۵۹ معادله سهمی را بنویسید که $F(1,-2)$ کانون و $S(1,2)$ رأس آن باشد. سپس معادله خط هادی آن را بنویسید. (دی ۹۷)

پاسخ:

سهمی با توجه به رأس و کانونش، رو به پایین است و $a=4$ و معادله خط هادی، $y=6$ است. معادله سهمی: $(x-1)^2=-16(y-2)$

سوال ۶۰ سهمی $y^2=2x+4y$ را در نظر بگیرید. (دی ۱۴۰۰)

الف) مختصات رأس کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.

پاسخ:

سهمی افقی و رو به راست است. $\quad (y-2)^2=2(x+2) \quad y^2=2x+4y$

رأس سهمی: $(-2,2)$ $\quad$ فاصله کانونی: $a=\frac{1}{2}$ $\quad$ کانون سهمی: $\left(\frac{-3}{2},2\right)$

معادله خط هادی: $x=-\frac{5}{2}$

مختصات نقاط برخورد با محور y، $(0,0)$ و $(0,4)$ و با محور xها $(0,0)$ است.

سوال ۶۱ در یک بیضی، مختصات کانون ها $F(4,0)$ و $F'(-2,0)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه $P(1,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار **m** را بیابید. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$PF+PF'=2a \qquad \sqrt{9+m^2}+\sqrt{9+m^2}=10 \to m=\pm 4$$

سوال ۶۲ مختصات نقطه برخورد سهمی $y^2+7x+5=0$ و دایره $x^2+y^2=25$ را بدست آورید. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\begin{cases} y^2+7x+5=0 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \to x^2+(-7x-5)=25 \to x^2-7x-30=0 \to \begin{cases} x=-3 \\ x=10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3 \to y^2=16 \to y=\pm 4 \to (-3,4) \quad , \quad (-3,-4) \\ x=10 \to y^2=-75 \end{cases}$$

سوال ۶۳ بیضی با قطرهای ۶ و ۱۰ مفروض است. خروج از مرکز بیضی را بدست آورید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$\begin{cases} 2a=10 \to a=5 \\ 2b=6 \to b=3 \end{cases} \to a^2=b^2+c^2 \to c=4 \to \frac{c}{a}=\frac{4}{5}$$

سوال ۶۴ معادله سهمی را بنویسید که $A(4,6)$ رأس و $y=3$ معادله خط هادی آن باشد. (شهریور ۹۹)

پاسخ:

سهمی قائم و دهانه آن رو به بالا است.

$a=3$ فاصله کانونی.

فرم استاندارد سهمی به صورت: $(x-h)^2=4a(y-k) \Rightarrow (x-4)^2=12(y-6)$

سوال ۶۵ معادله سهمی با کانون $F(1,2)$ و خط هادی $x=-3$ را بنویسید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$F(\alpha+a,\beta)=(1,2)\rightarrow\begin{cases}\alpha+a=1\\\beta=2\end{cases}$$

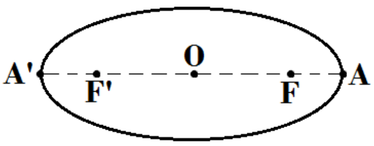
$$\left.\begin{array}{l}x=\alpha-a\\x=-3\end{array}\right\}\rightarrow\alpha-a=-3\xrightarrow{\alpha+a=1}\begin{cases}a=2\\\alpha=-1\end{cases}\qquad (y-2)^2=8(x+1)$$

سوال ۶۶ اگر در یک بیضی، طول AA' قطر بزرگ برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{3}{4}$ باشد، فاصله رأس **A** تا نزدیک ترین کانون را به دست آورید. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\frac{c}{a}=\frac{3}{4}\xrightarrow{a=8}c=6\qquad AF=a-c=2$$

سوال ۶۷ در بیضی رو به رو، نقاط **A** و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط **F** و F' کانون های بیضی هستند. ثابت کنید: $A'F'=AF$. (شهریور ۱۴۰۰)



پاسخ:

بنا به تعریف بیضی داریم:

$$AF'+AF=2a\quad,\quad A'F'+A'F=2a\rightarrow$$
$$A'F'+A'F=AF'+AF\rightarrow$$
$$A'F'+(A'F'+FF')=AF+(AF+FF')\rightarrow AF=A'F'$$

سوال ۶۸ سهمی به معادله $y^2-2y+8x+9=0$ را در نظر بگیرید. (شهریور ۱۴۰۰)

الف) مختصات رأس کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

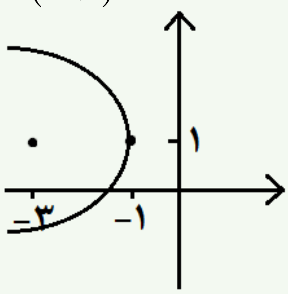
ب) نمودار سهمی را رسم کنید.

پاسخ:

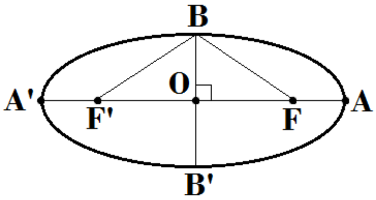
الف)

$$F(-3,1)\qquad y^2-2y+1=-8x-9+1$$
$$x=1\qquad (y-1)^2=-8(x+1)$$
$$A(-1,1)\qquad a=2$$

ب)



سوال ۶۹ در شکل مقابل، اگر $OA=a$، $OB=b$ و $OF=c$ باشد، ثابت کنید: $a^2=b^2+c^2$. (خرداد ۱۴۰۰)



پاسخ:

نقطه B روی عمود منصف پاره خط FF' قرار دارد: $BF=BF'$.

فاصله هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر با قطر بزرگ است:

$$BF+BF'=2a \to BF=BF'=a$$

بر اساس فیثاغورث در مثلث BOF: $OF^2+OB^2=BF^2 \to c^2+b^2=a^2$

سوال ۷۰ اگر خروج از مرکز بیضی برابر $\frac{3}{5}$ و طول قطر کوچک بیضی ۱۶ باشد، طول قطر بزرگ بیضی و فاصله کانون آن را به دست آورید. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

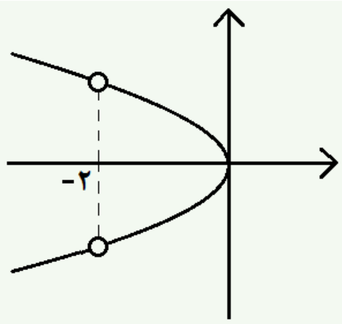
$$\frac{c}{a}=\frac{3}{5} \to c=\frac{3}{5}a \qquad b=8 \qquad a^2=b^2+c^2$$

$$a^2=64+\frac{9}{25}a^2 \to \begin{cases} a=10 \\ c=6 \end{cases}$$

طول قطر بزرگ ۲۰ و فاصله کانونی ۱۲ است.

سوال ۷۱ شکل کلی نمودار مربوط به روابط $x>-2$ و $y^2+x\le 0$ را در فضای دو بعدی رسم کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:



سوال ۷۲ نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه $B(1,0,1)$ در فضا مفروض اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$AB=(1,0,4)$$

مختصات نقطه $A(0,0,3)$، مختصات وسط AB برابر با $M\left(\frac{1}{2},0,2\right)$ و فاصله تا مبدأ مختصات $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2+2^2}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

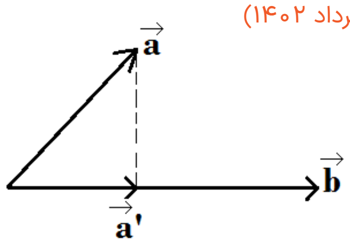
سوال ۷۳ زاویه بین دو بردار $\vec{a}(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}(۱,-۱,۰)$ را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$a.b=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \to ۳=۳\sqrt{۲}\cos\theta \to \cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \to \theta=۴۵^\circ$$

سوال ۷۴ نشان دهید تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}^۲}\vec{b}$ است. (خرداد ۱۴۰۲)

بردار $\vec{a}'$ با بردار $\vec{b}$ موازی است: $\vec{a}'\parallel\vec{b} \to \vec{a}'=k\vec{b}$.



پاسخ:

$$(\vec{a}-\vec{a}')\perp\vec{b} \to (\vec{a}-\vec{a}').\vec{b}=۰ \to \vec{a}.\vec{b}-(k\vec{b}).\vec{b}=۰$$

$$k=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲} \to \vec{a}'=k\vec{b}=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

سوال ۷۵ سه بردار $\vec{a}=۲\vec{i}+۳\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(۰,۲,۱)$ در نظر بگیرید.

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، $\cos\theta$ را بیابید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

پاسخ:

الف)

$$\vec{a}=(۲,۳,-۱) \qquad \vec{b}=(۱,۰,۱)$$

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \to ۱=\sqrt{۱۴}\sqrt{۲}\cos\theta \to \cos\theta=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

ب)

$$\vec{d}=\vec{b}-\vec{c} \qquad (۱,-۲,۰) \qquad \vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{d}}{|\vec{d}|^۲}\vec{d}=\frac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰)$$

سوال ۷۶ اگر $A(۲,-۱,۳)$ و $B(۳,۱,۴)$ و $C(-۱,۱,۰)$ سه رأس مثلث **ABC** باشند، مساحت مثلث **ABC** را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\overrightarrow{AB}=(۱,۲,۱) \qquad \overrightarrow{AC}=(-۳,۲,-۳) \qquad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-۸,۰,۸)$$

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=۴\sqrt{۲}$$

سوال ۷۷ برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=\cdot$. (خرداد ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\vec{a}.\vec{b}=\cdot \to |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\cdot \xleftrightarrow[|\vec{b}|\neq\cdot]{|\vec{a}|\neq\cdot} \cos\theta=\cdot \to \theta=\frac{\pi}{۲}$$

سوال ۷۸ اگر $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$ و $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(-۱,-۳,\cdot)$ باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶) \qquad \vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^۲}\vec{b}+\vec{c}=$$

$$\frac{(-۱,-۳,\cdot)(۲,-۳,۶)}{۴۹}(۲,-۳,۶)=\frac{۱}{۷}(۲,۳,-۶)$$

سوال ۷۹ مساحت متوازی الاضلاع که توسط بردارهای $\vec{a}=(۱,\cdot,۱)$ و $\vec{b}=(\cdot,۱,۱)$ تولید می شود را به دست آورید. (دی ۹۷)

پاسخ:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-۱,-۱,۱) \qquad S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۱+۱+۱}=\sqrt{۳}$$

سوال ۸۰ نقاط $A=(۱,۲,۱)$ و $B=(۲,۲,۱)$ و $C=(۳,۲,-۱)$ را در فضا در نظر می گیریم. کدام ها روی خط $\begin{cases} y=۲ \\ z=۱ \end{cases}$ قرار دارند؟ چرا؟ (دی ۹۹)

پاسخ: نقاط **A** و **B**؛ زیرا در این دو نقطه $y=۲$ و $z=۱$ می باشد.

سوال ۸۱ دو بردار $\vec{a}=(۱,۲,-۱)$ و $\vec{b}=(\cdot,۲,-۱)$ را در نظر بگیرید. (دی ۹۹)

الف) بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $R^۳$ واقع است؟

ب) طول بردار $۲\vec{a}-\vec{b}$ را به دست آورید.

پاسخ:

الف) در ناحیه ۵.

ب) $۲\vec{a}-\vec{b}=(۲,۲,-۱)\to|۲\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{۴+۴+۱}=\sqrt{۹}=۳$

سوال ۸۲ بردار $\vec{a}=(۴,-۴,۲)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیر هم جهت با $\vec{a}$ و به طول ۱۲ را طوری بیابید که $\vec{a}\times\vec{b}=\cdot$ باشد. (خرداد ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\cdot \qquad \vec{b}\parallel\vec{a} \qquad \vec{b}=(۴k,-۴k,۲k)$$

$$|\vec{b}|=۶|k|\to k=\pm۲ \qquad k=-۲\to\vec{b}=(-۸,۸,-۴)$$

سوال ۸۳ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض اند به طوری که $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲۶$ و $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$. اگر زاویه بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار $\vec{a}.\vec{b}$ را به دست آورید. (دی ۱۴۰۰)

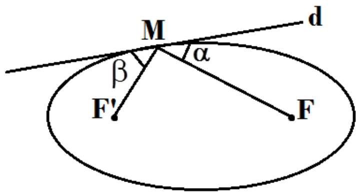
پاسخ:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \rightarrow ۷۲ = ۳(۲۶)\sin\theta \rightarrow \sin\theta = \frac{۱۲}{۱۳}$$

$$\cos\theta = \frac{۵}{۱۳} \qquad \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۳(۲۶)\frac{۵}{۱۳} = ۳۰$$

سوال ۸۴ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) در شکل رو به رو، اگر خط **d** در نقطه **M** بر بیضی مماس باشد و زاویه $F\hat{M}F' = ۵۰^\circ$ باشد، آن گاه اندازه زاویه $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = ۶۰^\circ$ است. (خرداد ۱۴۰۱)



ب) برای دو بردار واحد **i** و **j** حاصل ضرب خارجی $i \times j = ۰$ است. (خرداد ۱۴۰۱)

پ) برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ حاصل $\vec{a}.(\vec{a} \times \vec{b}) = ۰$ است. (دی ۹۹)

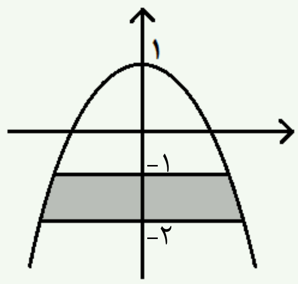
پاسخ:

الف) نادرست. $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = ۶۵^\circ$ ب) نادرست. $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ پ) درست.

سوال ۸۵ الف) معادله صفحه ای که بر محور zها در نقطه ای به مختصات $A = (۰,۰,۳)$ عمود باشد، ...... $z = ۳$ ...... است.

ب) شکل کلی مربوط به روابط $-۲ < y \leq -۱$ و $y < -x^۲ + ۱$ را در فضای دو بعدی رسم کنید. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:



سوال ۸۶ نقاط $A(۳,۱,۲)$ و $B(۳,-۲,۲)$ در $R^۳$ مفروضاند.

الف) طول پاره خط **AB** را به دست آورید.

ب) معادلات مربوط به پاره خط **AB** را بنویسید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

الف) $$|AB| = \sqrt{(۳-۳)^۲ + (-۲-۱)^۲ + (۲-۲)^۲} = ۳$$

ب) $x = ۳ \qquad -۲ \leq y < ۱ \qquad z = ۲$

سوال ۸۷ اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $R^۳$ باشند، حاصل $\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})$ را به دست آورید. (شهریور ۹۸)

پاسخ:

$$\vec{i}.(\vec{j}\times\vec{k})=\vec{i}.\vec{i}=|\vec{i}|^۲=|\vec{i}|^۲=۱$$

سوال ۸۸ سه بردار $\vec{a}(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}(۲,۱,-۲)$ مفروض اند. (شهریور ۹۸)

الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ را بدست آورید.

ب) حجم متوازی السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می شود را بدست آورید.

پاسخ:

الف)
$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲)=(-۹,۴,-۷)$$

ب)
$$|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=(۲,۳,۱)\times(-۲,-۲,-۳)=-۱۳$$

سوال ۸۹ بردارهای $\vec{a}(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. (شهریور ۹۹)

الف) زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

پاسخ:

الف)
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۴}$$

ب)
$$\vec{a}\times\vec{b}=(۲,-۱,۲)\times(۱,-۱,۰)=(۲,۲,-۱)$$

سوال ۹۰ مقدار m را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار $\vec{a}(m,۰,۲)$ و $\vec{b}(۲,-۲,۰)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\rightarrow ۲m=\left(\sqrt{m^۲+۴}\right)\left(۲\sqrt{۲}\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)\rightarrow ۴m^۲=۲m^۲+۸$$

$$\rightarrow m^۲=۴\rightarrow\begin{cases}m=۲ & \text{ق.}\\ m=-۲ & \text{غ.ق.}\end{cases}$$

سوال ۹۱ اگر سه بردار $\vec{a}(m,-۱,۱)$ و $\vec{b}(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}(۱,m,-۱)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰\qquad\begin{vmatrix}m & -۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۱\\ ۱ & m & -۱\end{vmatrix}=۰\qquad m^۲-۲m+۱=۰\rightarrow m=۱$$

سوال ۹۲ اگر $\vec{a}(-۲,۰,۱)$ و $\vec{b}(\vec{i}-۲\vec{j}+۳\vec{k})$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-\vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می شوند را حساب کنید. (شهریور ۱۴۰۲)

پاسخ:

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{j}=(-۲,-۱,۱) \qquad \vec{u}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}=-i+۷j+۵k$$

$$|\vec{u}\times\vec{b}|=\sqrt{۷۵} \qquad S=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

سوال ۹۳ مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\vec{a}(۲,m,-۱)$ و $\vec{b}(m+۱,۳,۲)$ بر هم عمود باشند. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\vec{a}\perp\vec{b}\rightarrow\vec{a}.\vec{b}=۰\rightarrow ۲(m+۱)+۳m-۲=۰\rightarrow m=۰$$

سوال ۹۴ تصویر قائم بردار $\vec{a}(۲,-۱,۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b}(۱,-۱,۰)$ بیابید. (شهریور ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\vec{a}.\vec{b}=۲\times۱+(-۱)(-۱)+۲\times۰=۳ \qquad |\vec{b}|=\sqrt{۱^۲+(-۱)^۲+۰^۲}=\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}.\vec{b}=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)=\left(\frac{۳}{۲},-\frac{۳}{۲},۰\right)$$

سوال ۹۵ اگر $\vec{a}(۱,-۳,۴)$ و $\vec{b}(۳,-۴,۲)$ و $\vec{c}(-۱,۱,۴)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

$$\vec{a}+\vec{b}=(۲,-۳,۶) \qquad \vec{a}'=\frac{\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^۲}.(\vec{b}+\vec{c})=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$$

سوال ۹۶ مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}(۱,m,-۱۱)$ و $\vec{b}(۲,۳,-۱)$ و $\vec{c}(۱,-۱,۳)$ در یک صفحه باشند. (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$\vec{b}\times\vec{c}=(۲,۳,-۱)\times(۱,-۱,۳)=(۸,-۷,-۵)$$

$$\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})=۰\rightarrow(۱,m,-۱۱).(۸,-۷,-۵)=۰\rightarrow ۸-۷m+۵۵=۰\rightarrow m=۹$$

سوال ۹۷ ثابت کنید: «دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$.» (خرداد ۹۸)

پاسخ:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{o}\right|\leftrightarrow\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\times\sin\theta=۰\leftrightarrow\sin\theta=۰\rightarrow\begin{cases}\theta=۰\\ \vee\\ \theta=\pi\end{cases}\rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

پس:

سوال ۹۸ الف) اگر $y=b$ معادله صفحه ای در فضای $R^۳$ باشد که از نقطه $A=(۲,-۳,۴)$ بگذرد. مقدار عددی b چقدر است؟

ب) معادلات $\begin{cases}x=۰\\ y=۰\end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟

پ) در فضای $R^۳$، نقطه A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه yoz و نقطه $B=(-۴,۶,-۳)$ مفروض هستند. مختصات وسط AB را بیابید. (خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ:

الف) ۳-

ب) محور zها

پ) نقطه $A=(۰,۲,۳)$ و مختصات وسط AB، $(-۲,-۴,۰)$ است.

سوال ۹۹ حجم متوازی السطوح را بدست آورید که توسط سه بردار $\vec{a}(۱,۰,-۱)$ و $\vec{b}(۰,۲,۲)$ و $\vec{c}(۲,-۳,۰)$ تولید می شود. (شهریور ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\vec{a}.\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\begin{vmatrix}۱&۰&-۱\\ ۰&۲&۲\\ ۲&-۳&۰\end{vmatrix}=۱۰$$

سوال ۱۰۰ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}(۱,۰,-۱)$ برابر با ۱۳۵° باشد، مقدار n را بیابید. (دی ۱۴۰۱)

پاسخ:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}\rightarrow\frac{-\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲-n}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۴+۱+n^۲}}\rightarrow\frac{n-۲}{\sqrt{n^۲+۵}}=۱$$

$$\rightarrow n^۲+۵=n^۲-۴n+۴\rightarrow n=\frac{-۱}{۴}$$