بیستوفیل

هندسه دوازدهم

ریاضی


نوتروفیل خونه رتبه برترها
قبولی های کنکور ۱۴۰۴
تک رقمی نوتروفیل
رتبه ۸ ایمان نیک‌نام جهرمی
دو رقمی های نوتروفیل
رتبه ۱۴ امیرمحمدکیانی
رتبه ۱۶ آریا قهرمانی
رتبه ۲۰ سینا راضی
رتبه ۳۲ امیرمحمد رضائی
رتبه ۵۵ مهسا سیاوشی
رتبه ۵۹ ایمان انفرادی
رتبه ۶۱ بهار هلالی
رتبه ۷۵ محمدصالح عارفی
رتبه ۸۰ محمدمهدی شریفی
سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل
رتبه ۱۴۷ محدثه حیدری
رتبه ۱۶۰ اشکان کوثری
رتبه ۱۶۹ هانیه خواجه
رتبه ۲۲۲ امیرمحمد شکوهی
رتبه ۲۵۹ ابوالفضل ناصریان
رتبه ۲۷۱ فاطمه سادات موسوی
رتبه ۳۰۸ سید علی اکرمی
رتبه ۳۴۱ حمیدرضا بشیری
رتبه ۴۳۲ سید محمدصادق حسینی
رتبه ۴۷۳ زهرا بابائی
رتبه ۵۱۴ محمدپارسا عبداله آبادی
رتبه ۵۳۲ فاطمه شاهسوند
رتبه ۵۳۷ ریحانه حیدری
رتبه ۵۳۹ نجمه کیخا
رتبه ۵۴۶ حسین تفضلی نژاد
رتبه ۵۵۷ محمدصالح زارعی
رتبه ۵۷۰ زهرا ولی نژاد
رتبه ۶۰۶ سجاد محمودی زاده
رتبه ۶۶۱ فاطمه اصغری
رتبه ۶۶۷ سیاوش مصطفایی
رتبه ۶۷۲ محمدماهان عنبرستانی
رتبه ۶۹۱ بهار ضرغامی
رتبه ۷۱۴ محمد یزدیان
رتبه ۷۸۱ احسان قنبری
رتبه ۷۸۶ نیما غفاری
رتبه ۸۰۳ مائده رنجبر
رتبه ۸۰۴ آرمین رضایی
رتبه ۸۹۳ فاطمه مشاوری نجف آبادی
رتبه ۹۰۹ کیمیا فدائی
رتبه ۹۴۷ صفورا بقائی
رتبه ۱۰۵۲ پویان فریور افشار
رتبه ۱۰۵۸ الینا جلالی فر
رتبه ۱۱۲۲ علی طاهر زاده
رتبه ۱۱۲۷ زهرا بابائی
رتبه ۱۲۳۴ مطهره توحیدی
رتبه ۱۲۳۶ مبینا ایزدی
رتبه ۱۲۸۴ بهار امیری
رتبه ۱۲۸۴ فاطمه معین زاده
رتبه ۱۳۵۰ علی زینلی
رتبه ۱۳۷۲ پارسا رضایی
رتبه ۱۴۲۴ سید امیرحسین حسینی
رتبه ۱۴۸۳ سینا خاوری خراسانی
رتبه ۱۴۹۳ محمد مهدی خرم زاده
رتبه ۱۵۰۳ فاطمه رحیم زاده
رتبه ۱۵۳۴ فاطیما عبیری
رتبه ۱۶۲۸ امیرمحمد فکور حقیقی
رتبه ۱۶۳۹ ابوالفضل نیرومند
رتبه ۱۶۷۸ سجاد ینکی
رتبه ۱۶۹۶ ندا ملکشاهی
رتبه ۱۷۳۱ محمدرضا محسنی
رتبه ۱۷۵۴ هلیا حاجیلوئی
رتبه ۱۹۶۶ مهسا رضایی مقدم
رتبه ۲۰۱۵ علی شیرزاد
رتبه ۲۵۵۹ سارا حمزه
رتبه ۲۶۲۵ زهره مجمعی
رتبه ۲۷۱۱ محمد غلامی
رتبه ۲۷۵۱ فهیمه سیدآبادی
رتبه ۲۷۸۱ سعید شبانی
رتبه ۲۷۹۴ مریم بادلی
رتبه ۲۸۱۰ هدیه رحیمی
رتبه ۲۸۸۱ پارسا جمال امیدی
رتبه ۳۱۳۳ صبا شایع ثانی
رتبه ۳۲۴۴ هلیا سجادی
رتبه ۳۳۴۳ سینا ارزمانی

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل هندسه فصل ۱

دوازدهم

سال دوازدهم

ریاضی

فهرست

ماتریس‌ها و اعمال روی آن

۱ اگر $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij}=\begin{cases} i-j & ,i<j \\ ۲ & ,i=j \\ i+j & ,i>j \end{cases}$ باشد، درایه‌های $a_{۱۲}, a_{۳۱}, a_{۳۳}$ را به‌دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲ الف) اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲x-۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب) اگر $A=\begin{bmatrix} m+۱ & ۲ \\ ۵ & ۲n+۴ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبهٔ m و n ماتریس $A+I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

۳ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲x \\ ۱ & z \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۳ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ و $A=B$، در این صورت حاصل $x+۲y+۳z$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴ اگر $bij=\begin{cases} i+۱ & i=j \\ j-۲ & i<j \\ ۱ & i>j \end{cases}$, $B=[bij]_{۳\times۳}$ ، ماتریس B را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۵ اگر $A=\begin{bmatrix} ۵ & ۲x-y \\ ۴ & z \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲x+y & ۳ \\ ۴ & -۳ \end{bmatrix}$ و $A=B$ باشند، حاصل $x^۲-۲y+z$ را به دست آورید.

۶ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۹ & x-y \\ z-۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+y & ۳ \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix}$ مساوی هستند، مقدارهای x، y و z را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷ عبارت‌های زیر را کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف اگر ماتریس $\begin{bmatrix} m-۱ & r \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد، حاصل $m+r$ برابر با .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۸ اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & m \\ n & m-۲ \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۹ اگر در ماتریس A تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر باشد، ماتریس A را مربعی می‌نامیم. (درست – نادرست)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱۰ $A=\begin{bmatrix} ۲-m & m \\ n & ۰ \end{bmatrix}$ یک ماتریس اسکالر است. مقدار عددی n برابر .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۱۱ درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف مجموع درایه‌های ماتریس همانی از مرتبهٔ دو، برابر چهار است.

۱۲ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & ۵ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} y+۲ & x+۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید، اگر $A+B=\begin{bmatrix} ۴ & ۵ \\ ۳ & ۸ \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۳ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix} m & -۱ \\ m & -۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} -۳ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$ چنان هستند که $C=۳A+۲B$ ماتریس قطری است. مقدار m مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس C را حساب کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱۴ اگر $A=\begin{bmatrix} ۶ & ۲x \\ ۲ & x+y \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & y+۲ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A=۲B$، در این صورت x و y را حساب کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۱۵ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب، کامل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف با فرض $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ و $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ i+j^2 & i\neq j\end{cases}$، درایهٔ a_{13} برابر .... است.

۱۶ اگر ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x & y\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیر باشد، حاصل $\begin{bmatrix}x & 2 & -y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 2\\ -x\end{bmatrix}$ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۷ معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}=0$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۸ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف اگر برای ماتریس‌های متمایز A، B و C داشته باشیم، $AB=AC$، آنگاه لزوماً $B=C$ است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۱۹ اگر دو ماتریس مربعی A و B به‌صورت $A=[3i-2j]_{3\times 3}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ باشند،

الف) ماتریس A را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) ماتریس B^2 را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۰ در تساوی $\begin{bmatrix}x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ 1\end{bmatrix}$، مقدار x را بیابید.

۲۱ از تساوی ماتریسی $A\times B=A\times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط .... نتیجه می‌شود $B=C$.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۲ اگر $A=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{bmatrix}$، حاصل عبارت $AB+2I$ را به دست آورید.

۲۳ فرض کنید $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ b & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a & -6\\ -2 & a\end{bmatrix}$. ماتریس $A\times B$ را محاسبه کنید و مقدار a را طوری به دست آورید که ماتریس حاصل اسکالر باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۴ اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس A^7 را به دست آورید.

۲۵ ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}a+b & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 4a+b\end{bmatrix}$ مفروض‌اند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

$A^2-B=\overline{O}$ ($\overline{O}$ ماتریس صفر است.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۲۶ اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۷ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف اگر A و B دو ماتریس 3×3 دلخواه باشند، آنگاه عبارت $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ همواره برقرار است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۸ ماتریس (B^2+2I) را محاسبه کنید. (I ماتریس همانی مرتبه سه است.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۹ با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(A-3I)^2=A^2-6A+9I$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۰ اگر $A=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 10 & -4\end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{1403}=I$. (درست / نادرست)

۳۱ اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}-۱ & |i-j|>۱\\ ۰ & |i-j|=۱\\ ۱ & |i-j|<۱\end{cases}$ باشد، ماتریس $A^۲-۲I$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۲ با فرض $A=\begin{bmatrix}۰ & -۱\\ ۱ & ۰\end{bmatrix}$ ماتریس $A^{۴۹}$ را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۳ با فرض $A=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$، حاصل عبارت $A^۲+۲I$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

دترمینان و کاربردها

۳۴ الف) اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & ۸\\ ۳ & ۵\end{bmatrix}$ در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب) ماتریس وارون A را حساب کنید.

۳۵ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۳\\ -۱ & -۲ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ و $I_۳$ ماتریس همانی ۳×۳ باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$|A\times B|+|۲I_۳|$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۶ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آنگاه: $|AB|=|A||B|$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۷ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۱\\ ۰ & ۲\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۰\\ -۲ & ۳ & -۲\end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف آیا جمع دو ماتریس A و B تعریف می‌شود؟ چرا؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب حاصل $|A\times B|$ را به‌دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۸ اگر $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۶ & ۲\\ ۱ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$، حاصل $|-\frac{۱}{۲}A^۴|$ را به‌دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۹ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij}=\begin{cases}۱ & i=j\\ ۰ & i\neq j\end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $k|kA|=۶۲۵$ برقرار باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۰ اگر $A=\begin{bmatrix}|A| & ۰ & ۱\\ ۱ & |A| & ۱\\ ۰ & ۲ & ۱\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۱ جاهای خالی را پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس .... می‌نامند. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

ب اگر $A=\begin{bmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر .... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۲ اگر $۳A=\begin{bmatrix}|A| & -۵\\ ۱ & ۴|A|\end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A^{-۱}|$ را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۳ ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases}j-۱ & i>j\\ i^۲-j & i=j\\ ۱-i & i<j\end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱ & ۱ & ۲\\ -۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & ۲ & -۱\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. مرجع: امتحان نهایی-

۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف) حاصل $A \times B$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید. (با روش دلخواه)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۴) اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A| = -۲$، حاصل $|A^{-۱}|^{۳} + |۲A|$ را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۵) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & -۲ & ۰ \end{bmatrix}$ برابر .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۶) اگر $A = [a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $|A^{۳}| = -۸$ باشد، حاصل $\dfrac{|A^{-۱}|}{|۳A|}$ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۷) اگر A ماتریس ۲×۲ و اسکالر باشد و $a_{۲۲} = ۳$ در این صورت A و $|A|$ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۴۸) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & -۱ & ۲ \\ ۴ & ۰ & ۰ \\ ۱ & ۴ & -۳ \end{bmatrix}$ را برحسب ستون اول به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۴۹) حاصل هریک از عبارت‌های ستون A را از ستون B انتخاب کنید. (یکی از اعداد ستون B اضافه است.)

A	B
الف) مقدار عددی $\vert ۲A \vert$ در صورتی که $\vert A_{۲\times۲} \vert = ۱$	۲
ب) مقدار عددی درایهٔ $b_{۱۳}$ در ماتریس $B = [۲j + i]_{۳\times۳}$	۴
ج) مقدار عددی $\begin{vmatrix} ۰ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۰ \end{vmatrix}$	۵
	۷

۵۰) دترمینان ماتریس مقابل را با استفاده از دستور ساروس محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ & ۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۱ & -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۵۱) A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۳$ است. مقدار $|۲A|$، برابر کدام‌یک از گزینه‌های زیر است؟

۱) ۶ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

وارون یک ماتریس

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۵۲) جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) شرط لازم و کافی برای اینکه ماتریس مربعی A وارون‌پذیر باشد آن است که دترمینان ماتریس A .... باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۵۳) مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۴ & m \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۵۴) اگر ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A - ۲I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است.)

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۵۵ ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = A^{-۱}$ مفروض است، ماتریس A را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۵۶ اگر $A = \begin{bmatrix} -۱ & ۳ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$، نشان دهید:

$$(۵A)^{-۱} = \frac{۱}{۵}A^{-۱}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۵۷ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۷ \end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۵۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

الف هر ماتریس مربعی وارون‌پذیر است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۵۹ درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف برای هر دو ماتریس مربعی هم‌مرتبهٔ A و B، در حالت کلی رابطهٔ $(A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$ برقرار است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

ب وارون هر ماتریس مربعی در صورت وجود منحصر به فرد است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۶۰ دترمینان ماتریس مربعی A برابر ۲ می‌باشد. در این صورت مقدار $|A^{-۱}|$ برابر .... است.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۶۱ مقدار m را چنان تعیین کنید که ماتریس $A = \begin{bmatrix} m+۱ & ۲ \\ m & ۳ \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۶۲ دستگاه $\begin{cases} ۳x - y = -۶ \\ x + ۲y = ۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

حل و بحث دستگاه دو معادله و دو مجهول

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۶۳ دستگاه $\begin{cases} (m-۳)x + ۳y = m \\ ۴x + (m+۱)y = ۲ \end{cases}$ به ازای چه مقادیری از m دارای جواب منحصربه‌فرد می‌باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۶۴ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx + ۳y = -۳ \\ ۴x + (m+۴)y = ۲ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۶۵ دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ -x + ۲y = ۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۶۶ الف) مقادیر قابل‌قبول m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx + ۳y = ۱ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصربه‌فرد باشد.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

ب) جواب دستگاه مذکور را به‌ازای $m = ۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۹

۶۷ الف) به‌ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x - ۲y = ۳ \\ mx + ۶y = -۴ \end{cases}$ فاقد جواب است؟

ب) دستگاه معادلات $\begin{cases} x - ۲y = ۳ \\ ۲x + ۶y = -۴ \end{cases}$ را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۶۸ دستگاه مقابل را با استفاده از $A^{-۱}$ حل کنید.

$$\begin{cases} ۳x - ۵y = -۱ \\ ۲x + y = ۸ \end{cases}$$

مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۶۹ دستگاه $\begin{cases} ۲x + y = ۴ \\ ۷x + ۴y = ۱۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۷۰ الف) در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست – نادرست)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب) اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۷۱ اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ۲x-y=۴ \\ -۴x+۳y=۲ \end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX=B$ ماتریس X را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷۲ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x+my=۱ \\ (m-۱)x+y=۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۷۳ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+۹y=m+۱ \\ ۴x+my=-۴ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۷۴ دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ ۲y-x=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۷۵ دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x+۷y=-۴ \\ -۵x+۲y=-۷ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۷۶ به‌ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -۴x+(m-۳)y=۳ \\ ۲x-\frac{m-۳}{۲}y=۱ \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۷۷ دستگاه $\begin{cases} ۳x-۴y=۱ \\ -x+۲y=۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۷۸ $A=\begin{bmatrix} ۱ & m-۱ \\ m & ۲ \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B=\begin{bmatrix} ۲ \\ ۴ \end{bmatrix}$ ماتریس معلومات یک دستگاه خطی هستند. دستگاه معادلات را تشکیل دهید و مقدار m را طوری تعیین کنید که دستگاه بی‌شمار جواب داشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۷۹ دستگاه $\begin{cases} x-۲y=۴ \\ ۳x+y=۵ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۸۰ به‌ازای چه مقادیری از m، دستگاه $\begin{cases} (m+۱)x+۳y=۱ \\ ۲x+y=-۱ \end{cases}$ یک دسته جواب منحصربه‌فرد دارد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

پاسخنامه تشریحی

۱

$a_{۳۳} = ۲, a_{۳۱} = ۳ + ۱ = ۴, a_{۱۲} = ۱ - ۲ = -۱$

۲ الف) $۲x - ۱ = ۵ \rightarrow x = ۳$

ب) ماتریس قطری، ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند.

$$\begin{cases} m + ۱ = ۰ \\ ۲n + ۴ = ۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ n = -۲ \end{cases}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

۳

$$A = B \rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} ۲x = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \\ z = -۲ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ y = ۲ \end{cases} \rightarrow x + ۲y + ۳z = \frac{-۱}{۲}$$

۴

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۳ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{bmatrix}$$

۵

$z = -۳$

$$\begin{cases} ۲x - y = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \end{cases} \Rightarrow x = ۲, y = ۱ \quad \rightarrow \quad x^۲ - ۲y + z = -۱$$

۶

$$\begin{cases} x - y = ۳ \\ x + y = ۹ \\ z - ۱ = ۵ \end{cases} \Rightarrow \quad x = ۶ \quad , \quad y = ۳ \quad , \quad z = ۶$$

۷ .

الف ماتریس همانی یک ماتریس مربعی است که درایه‌های روی قطر اصلی آن برابر با ۱ و بقیه درایه‌ها همگی صفر هستند.

$$\begin{cases} r = ۱ \\ m - ۱ = ۰ \rightarrow m = ۱ \end{cases} \rightarrow m + r = ۱ + ۱ = ۲$$

۸

$m - ۲ = ۰ \rightarrow m = ۲ \quad n = m = ۲$

۹ درست

۱۰ ۲

۱۱

الف نادرست

۱۲

$x = ۲ \ , \ y = -۱$

۱۳

$$C = ۳A + ۲B = \begin{bmatrix} -۳ & ۳m \\ -۶ & ۳m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & -۶ \\ ۶ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳m - ۶ \\ ۰ & ۳m + ۲ \end{bmatrix}$$

$۳m - ۶ = ۰ \Rightarrow ۳m = ۶ \Rightarrow m = ۲ \Rightarrow C = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix} \Rightarrow$ مجموع درایه‌های قطر اصلی $= ۹$

۱۴

$$\begin{bmatrix} ۲x & ۶ \\ x+y & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲y+۴ & ۶ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲y+۴ \\ x+y=۰ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x-y=۲ \\ x+y=۰ \end{cases} \Rightarrow x=۱, y=-۱$$

۱۵

الف

۱۰

۱۶ ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند، پس:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۴x+۳y & ۳x+۴y \\ ۵ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴x+۶ & ۴y-۳ \\ ۳x+۸ & ۳y-۴ \end{bmatrix}$$

$$۳x+۸=۵ \rightarrow x=-۱ \quad , \quad ۳y-۴=۲ \rightarrow y=۲$$

$$\begin{bmatrix} x & ۲ & -y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ -x \end{bmatrix} \xrightarrow{x=-۱\ ,\ y=۲} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ & -۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix} = -۲+۴-۲=۰$$

۱۷

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = ۰ = \begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳x-۲۱ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow x=۷$$

۱۸

الف

نادرست

مثال نقض : $\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} = \overline{O} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$

۱۹ الف)

$$A = \begin{bmatrix} ۳(۱)-۲(۱) & ۳(۱)-۲(۲) & ۳(۱)-۲(۳) \\ ۳(۲)-۲(۱) & ۳(۲)-۲(۲) & ۳(۲)-۲(۳) \\ ۳(۳)-۲(۱) & ۳(۳)-۲(۲) & ۳(۳)-۲(۳) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$$

ب)

$$B^۲ = B\times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱\times۱+۲\times۰+۰\times(-۱) & ۱\times۲+۲\times۱+۰\times۲ & ۱\times۰+۲\times۳+۰\times۱ \\ ۰\times۱+۱\times۰+۳\times(-۱) & ۰\times۲+۱\times۱+۳\times۲ & ۰\times۰+۱\times۳+۳\times۱ \\ -۱\times۱+۲\times۰+۱\times(-۱) & -۱\times۲+۲\times۱+۱\times۲ & -۱\times۰+۲\times۳+۱\times۱ \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

۲۰

$$\begin{bmatrix} x-۲ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۱ \\ x=۳ \end{cases}$$

۲۱ وارون‌پذیری A یا $|A|\neq ۰$

۲۲ روش اول:

$$AB+۲I = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۱ & -۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۹ & -۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۹ & -۳ \end{bmatrix}$$

روش دوم:

$$AB = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ -۹ & -۵ \end{bmatrix}, ۲I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}, AB+۲I = \begin{bmatrix} ۵ & -۳ \\ -۹ & -۳ \end{bmatrix}$$

۲۳ راه‌حل اول:

$$A\times B = \begin{bmatrix} ۲a-۶b & -۱۲+۳a \\ ab-۴ & -۶+۲a \end{bmatrix} \qquad -۱۲+۳a=۰ \Rightarrow a=۴$$

راه‌حل دوم:

$$A\times B = \begin{bmatrix} ۲a-۶b & -۱۲+۳a \\ ab-۴ & -۶+۲a \end{bmatrix} \qquad ۲a-۶=-۶b+۲a \Rightarrow b=۱ \Rightarrow a=۴$$

۲۴

$$A^۲ = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = -۲I$$

$$A^{۷} = (A^{۲})^{۳} \cdot A = (-۲I)^{۳} \cdot A = -۸\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۵ طبق فرض $A^{۲} - B = \overline{O}$ داریم:

$$A^{۲} = B \rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=۵ \\ ۴a+b=۵ \end{cases} \rightarrow a=۰\,,\, b=۵$$

۲۶ دو ماتریس A و B را تعویض‌پذیر گوییم هرگاه $AB = BA$.

$$(A-B)^{۲} = (A-B)(A-B) = A^{۲} - AB - BA + B^{۲} \overset{AB=BA}{=} A^{۲} - ۲AB + B^{۲}$$

۲۷

الف نادرست

۲۸

$$(B^{۲} + ۲I) = \begin{bmatrix} ۵ & ۱ & ۶ \\ ۶ & ۱۰ & ۸ \\ ۷ & ۷ & ۱۸ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ & ۱ & ۶ \\ ۶ & ۱۲ & ۸ \\ ۷ & ۷ & ۲۰ \end{bmatrix}$$

۲۹

$$(A-۳I)^{۲} = (A-۳I)(A-۳I) = A^{۲} - ۳AI - ۳IA + ۹I^{۲} \underset{I^{۲}=I}{\overset{AI=IA=A}{=}} A^{۲} - ۶A + ۹I$$

۳۰ نادرست

۳۱

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{۲} = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲} - ۲I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۳۲

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{bmatrix} = -I$$

$$(A^{۲})^{۲۴} = (-I)^{۲۴} \longrightarrow A^{۴۸} = I^{۲۴} = I \longrightarrow A^{۴۹} = A^{۴۸} \times A = I \times A = A$$

۳۳

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۸ & ۹ \end{bmatrix}$$

$$A^{۲} + ۲I = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۸ & ۹ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۸ & ۱۱ \end{bmatrix}$$

۳۴ الف) از دو طرف ماتریس A دترمینان می‌گیریم؛ داریم:

$$A = \begin{bmatrix} |A| & ۸ \\ ۳ & ۵ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۵|A| - ۲۴ \rightarrow |A| = ۶$$

ب) ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۸ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

می‌دانیم اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی $A^{-۱}$ برابر است با:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

۳۵ بنابر دستور ساروس برای ماتریس A داریم:

$$A=\begin{bmatrix}2&3&2\\1&2&3\\-1&-2&1\end{bmatrix}\begin{matrix}2&3\\1&2\\-1&-2\end{matrix}$$

$$|A|=(۴-۹-۴)-(-۴-۱۲+۳)=-۹+۱۳=۴$$

$$B=\begin{bmatrix}۳&۰&۰\\۰&-۱&۰\\۰&۰&۲\end{bmatrix}\Rightarrow B=۳\times(-۱)\times۲=-۶$$

در نتیجه داریم:

$$|A\times B|+|۲I_۳|=|A|\times|B|+۸|I|=-۲۴+۸=-۱۶$$

۳۶

الف درست

۳۷

الف خیر ـ زیرا دو ماتریس هم‌مرتبه نیستند.

ب

$$A\times B=\begin{bmatrix}-۳&۴&-۲\\-۴&۶&-۴\\-۸&۱۱&-۶\end{bmatrix}|A\times B|=۰$$

۳۸

$$|A|=۲\ ,\ |-\frac{۱}{۲}A^۴|=(-\frac{۱}{۲})^۳|A|^۴=-۲$$

۳۹

$$A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۱$$

$$k|kA|=k(k^۳|A|)=k^۴\times۱=۶۲۵\Rightarrow k=\pm۵$$

۴۰

$$|A|=|A|(|A|-۲)+۱(۲)\Rightarrow|A|^۲-۳|A|+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\\|A|=۲\end{cases}$$

۴۱

الف اسکالر

ب

$$-۱$$

۴۲

$$|۳A|=۴|A|^۲+۵\Rightarrow۴|A|^۲-۹|A|+۵=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\Rightarrow|A^{-۱}|=۱\\|A|=\frac{۵}{۴}\Rightarrow|A^{-۱}|=\frac{۴}{۵}\end{cases}$$

۴۳

الف

$$A=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۲&-۱\\۰&۱&۶\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}-۱&۱&۲\\-۲&-۱&۱\\۱&۲&-۱\end{bmatrix}\Rightarrow A\times B=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\-۵&-۴&۳\\۴&۱۱&-۵\end{bmatrix}$$

ب

$$\begin{vmatrix}-۱&۱&۲\\-۲&-۱&۱\\۱&۲&-۱\end{vmatrix}\begin{matrix}-۱&۱\\-۲&-۱\\۱&۲\end{matrix}$$

$|B| = (-۱ + ۱ - ۸) - (-۲ - ۲ + ۲) = -۶$

۴۴

$$|۲A| + |A^{-۱}|^{۳} = ۲^{۳}|A| + \frac{۱}{|A|^{۳}} = ۸(-۲) + \frac{۱}{-۸} = \frac{-۱۲۹}{۸}$$

۴۵ ۱۴

۴۶

$$|A^{۳}| = |A|^{۳} = -۸ \Rightarrow |A| = -۲$$

$$\frac{|A^{-۱}|}{|۳A|} = \frac{\frac{۱}{|A|}}{۳^{۲}|A|} = \frac{۱}{۳۶}$$

۴۷

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۹$$

۴۸

روش اول:

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & ۰ & ۴ \\ -۳ & ۴ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-۱)^{۲} \times ۲ \times \begin{vmatrix} ۰ & ۴ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} + (-۱)^{۲} \times ۰ \times \begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۴ & ۱ \end{vmatrix} + (-۱)^{۴} \times (-۳) \times \begin{vmatrix} -۱ & -۲ \\ ۰ & ۴ \end{vmatrix} = (-۳۲) + ۰ + ۱۲ = (-۲۰)$$

روش دوم:

$$|A| = (-۱)^{۲} \times ۲ \times (۰ - ۱۶) + (-۱)^{۳} \times ۰ \times (-۱ + ۸) + (-۱)^{۴} \times (-۳) \times (-۴ - ۰)$$
$$= (-۳۲) + ۰ + ۱۲ = (-۲۰)$$

۴۹ الف) ۴ ب) ۷ ج) ۲

۵۰

$$\left[\begin{matrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۱ & ۲ & ۳ \\ -۱ & -۲ & ۱ \end{matrix}\right]\begin{matrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \\ -۱ & -۲ \end{matrix} \Rightarrow |A| = (۴ - ۹ - ۸) - (-۸ - ۱۲ + ۳) = -۱۳ + ۱۷ = ۴$$

۵۱ گزینهٔ ۳ یا ۲۴

۵۲

الف

مخالف صفر

۵۳ می‌دانیم برای آنکه A وارون‌پذیر نباشد باید $|A| = ۰$ باشد.

اگر $|A| = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ باشد؛ آنگاه $|A| = ad - bc$ است.

داریم:

$$|A| = ۰ \Rightarrow ۲m - ۴ = ۰ \rightarrow m = ۲$$

۵۴

$$A - ۲I = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} - ۲\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۱ \\ ۰ & ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، وارون ماتریس A از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$|A - ۲I| = ۲ \times ۱ - ۱ \times ۰ = ۲ \rightarrow (A - ۲I)^{-۱} = \left(\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}\right)^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

۵۵

$$A^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \rightarrow |A^{-۱}| = ۸ \ , A = (A^{-۱})^{-۱} = \frac{۱}{۸}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ -۲ & ۲ \end{bmatrix}$$

۵۶

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\rightarrow \frac{1}{5}A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

$$5A=\begin{bmatrix}15 & -5\\ 5 & -5\end{bmatrix}(5A)^{-1}=\frac{1}{-50}\begin{bmatrix}-5 & 5\\ -5 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & -\frac{1}{10}\\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

۵۷

$$\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 7 & 3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{15-14}\begin{bmatrix}3 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & 4\\ 17 & -9\end{bmatrix}$$

۵۸

الف نادرست

۵۹

الف نادرست

ب درست

۶۰ $\frac{1}{2}$

۶۱

$$|A|=0\Rightarrow 3(m+1)-2m=0\Rightarrow 3m+3-2m=0\Rightarrow m=-3$$

۶۲ روش اول:

$$A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=7$$

$$A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{-1}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & \frac{1}{7}\\ \frac{-1}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}$$

روش دوم:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\ 5\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-7\\ 21\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\ y=3\end{cases}$$

۶۳

$$\begin{vmatrix}m-3 & 3\\ 4 & m+1\end{vmatrix}\neq 0\rightarrow (m-3)(m+1)-12\neq 0\Rightarrow m^2-2m-15\neq 0$$
$$\Rightarrow (m-5)(m+3)\neq 0\rightarrow m\neq 5\ ,\ m\neq -3$$

$$m\in\mathbb{R}-\{5,-3\}$$

۶۴

شرط جواب نداشتن : $\frac{m}{4}=\frac{3}{m+4}\neq\frac{-3}{2}\rightarrow m(m+4)-12=0\rightarrow\begin{cases}m=-6\ (\text{غیر قابل‌قبول})\\ m=2\ (\text{قابل‌قبول})\end{cases}$

۶۵ نکته: اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ باشد، در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} از تساوی زیر به دست می‌آید:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\Rightarrow x=3, y=2A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -1 & 2\end{bmatrix}, |A|=2\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix},$$

۶۶ الف)

$$\frac{2m}{2}\neq\frac{3}{-1}\rightarrow m\neq -3$$

ب) می‌دانیم اگر $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ در این صورت وارون ماتریس A یعنی A^{-1} برابر است با:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$m = ۲ \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \rightarrow |A| = -۱۰ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{-۱۰} \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{-۱۰} \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ \end{cases}$$

۶۷ الف)

شرط فاقد جواب : $\frac{۱}{m} = \frac{-۲}{۶} \neq \frac{۳}{-۴} \Rightarrow m = -۳$ قابل‌قبول

ب)

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۰ \rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \rightarrow x = ۱ \text{ , } y = -۱$$

۶۸ نکته: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب و $B = \begin{bmatrix} e_۱ \\ e_۲ \end{bmatrix}$ ماتریس مقادیر معلوم دستگاه $\begin{cases} ax + by = e_۱ \\ cx + dy = e_۲ \end{cases}$ باشد، داریم:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-۱}B$$

از طرفی:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{|ad - bc|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \text{ , } |A| = ۳ + ۱۰ = ۱۳ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \text{ , } B = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱} \times B = \frac{۱}{۱۳} \begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳} \begin{bmatrix} -۱ + ۴۰ \\ ۲ + ۲۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۳, y = ۲$$

۶۹

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۷ & ۴ \end{bmatrix} \text{ , } B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix} \text{ , } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-۱} \times B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۸ - ۷} \begin{bmatrix} ۴ & -۱ \\ -۷ & ۲ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۱ \text{ ، } y = ۲$$

۷۰ الف) نادرست، زیرا در دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی، اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$، دو خط موازی‌اند و هیچ نقطهٔ مشترکی ندارند، پس دستگاه هیچ جوابی ندارد.

ب) با استفاده از دستور ساروس دترمینان ماتریس A را به دست می‌آوریم:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} ۰ & ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ & ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ & ۰ & -۱ & ۰ \end{array}\right. \rightarrow |A| = (۰ \times ۲ \times ۰ + ۰ \times (-۱) + ۱ \times ۰ \times ۰) - (۱ \times ۲ \times (-۱) + ۰ + ۰) = ۰ - (-۲) = ۲$$

می‌دانیم اگر k یک عدد حقیقی باشد و A ماتریسی $n \times n$ باشد، در این صورت $|kA| = k^n|A|$ بنابراین داریم:

$$||A|A| = |A|^۳|A| = |A|^۴ = ۱۶$$

۷۱

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix} \text{ , } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ , } B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \rightarrow X = A^{-۱}B = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$$

۷۲

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \rightarrow \frac{۲}{m - ۱} = \frac{m}{۱} \neq \frac{۱}{۳} \rightarrow m(m - ۱) = ۲ \rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۲ \end{cases}$$

۷۳

$$\frac{m}{۴} = \frac{۹}{m} \neq \frac{m + ۱}{-۴} \Rightarrow m^۲ = ۳۶ \Rightarrow \begin{cases} m = ۶ \\ m = -۶ \end{cases}$$ هر دو جواب قابل قبول

۷۴

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۶-۴}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۷۵ $X = A^{-۱}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۴۱}\begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۴ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$

۷۶ روش اول: به ازای هیچ مقدار m

$$\frac{-۴}{۲} \neq \frac{m-۳}{-\frac{(m-۳)}{۲}} \Rightarrow -۲ \neq -۲$$

روش دوم: به ازای هیچ mای دترمینان زیر مخالف صفر نمی‌شود.

$$\begin{vmatrix} -۴ & m-۳ \\ ۲ & -\frac{m-۳}{۲} \end{vmatrix} = -۴(-\frac{m-۳}{۲}) - ۲(m-۳) = ۰$$

۷۷

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۶-۴ = ۲, A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۶ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

نگارشی دیگر:

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۶-۴ = ۲, A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

۷۸ روش اول:

$$\begin{cases} (m-۱)x + y = ۲ \\ ۲x + my = ۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{m-۱}{۲} = \frac{۱}{m} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow \begin{cases} ۲m = ۴ \Rightarrow m = ۲ \\ ۴m - ۴ = ۴ \Rightarrow m = ۲ \end{cases}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} (m-۱)x + y = ۲ \\ ۲x + my = ۴ \end{cases} \Rightarrow \frac{m-۱}{۲} = \frac{۱}{m} = \frac{۲}{۴} \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰$$

$\Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \Rightarrow \frac{-۲}{۲} = \frac{۱}{-۱} \neq \frac{۲}{۴} \\ m = ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲} = \frac{۲}{۴} \end{cases} \Rightarrow$ قابل قبول است $m = ۲$

۷۹ راه‌حل اول:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۷$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \\ \frac{-۳}{۷} & \frac{۱}{۷} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۷} & \frac{۲}{۷} \\ \frac{-۳}{۷} & \frac{۱}{۷} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases}$$

راه‌حل دوم:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix} = \frac{۱}{۷}\begin{bmatrix} ۱۴ \\ -۷ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ y = -۱ \end{cases}$$

۸۰

روش اول:

$\begin{vmatrix} m+۱ & ۳ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} \neq ۰$ یا $m+۱-۶ \neq ۰ \Rightarrow m \neq ۵$

روش دوم:

$$\frac{m+۱}{۲} \neq \frac{۳}{۱} \Rightarrow m \neq ۵$$

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل هندسه فصل ۲ دوازدهم

سال دوازدهم

ریاضی

فهرست

مکان هندسی و کاربرد

انواع مقاطع

مکان هندسی و کاربرد

۱ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف اگر صفحهٔ P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحهٔ P و سطح مخروطی یک .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a}$ به عدد ۰ نزدیک شود، بیضی به .... تبدیل می‌شود. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف مکان هندسی مرکزهای همهٔ دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطهٔ ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنهٔ سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.

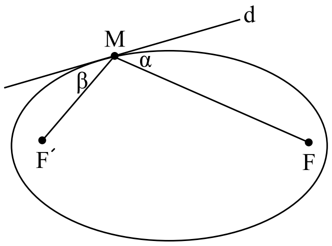
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف اگر صفحهٔ P به گونه‌ای باشد که هر دو تکهٔ بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور نباشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب در شکل روبه‌رو اگر خط d در نقطه M بر بیضی مماس باشد، زاویه $F\hat{M}F' = ۵۰^\circ$ باشد آنگاه اندازهٔ زاویه $\alpha = \beta = ۶۰^\circ$ است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱



۴ نقاط A و B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳

۵ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف مکان هندسی، مجموعه نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همهٔ آنها یک ویژگی .... داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد، عضو این مجموعه باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیشتر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در .... بیضی است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۶ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳

۷ هر گاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحهٔ P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحهٔ P و سطح ایجادشده بیضی است. (درست ــ نادرست)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۸ مکان هندسی نقاطی که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله‌اند، .... آن زاویه است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۹ جاهای خالی را پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد آن موازی نباشد و از رأس عبور نکند، آنگاه سطح مقطع حاصل، یک .... است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۱۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

الف مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحهٔ این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O,2r)$ است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۱۱ نقطهٔ A و d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر و از d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید.) مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۱۲ نقاط A و B و C در یک صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از نقاط A و B به یک فاصله بوده و از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر باشد (در مورد تعداد جواب‌های ممکن بحث کنید.) مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۱۳ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب، کامل کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

الف صفحه‌ای هر دو تکه بالایی و پایینی یک سطح مخروطی را قطع می‌کند و شامل محور آن نیست. در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک .... است. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۱۴ پاسخ صحیح را از میان کلمات داخل پرانتز انتخاب کنید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

الف اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی، از رأس آن عبور نکند. آنگاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک .... است. (هذلولی - سهمی) مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

انواع مقاطع

دایره

۱۵ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x+y=1$ و $x-y=3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x+3y=-5$ بر آن مماس باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۳۹۸

۱۶ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2+y^2-4x+6y+a=0$ معادلهٔ یک دایره باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,3)$ بوده و $M(1,1)$ یک نقطه از آن باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۱

۱۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(0,1)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=2$ وتری به طول $2\sqrt{2}$ جدا کند. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۰

۱۹ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(2,-1)$ مرکز آن بوده و از خط $3x-4y+10=0$ وتری به طول ۶ جدا کند. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(1,0)$ مرکز آن بوده و بر خط $x=-3$ مماس باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۱ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و روی خط $3x+4y+6=0$ وتری به طول $2\sqrt{5}$ جدا کند. سپس محل تلاقی آن دایره با محور yها را بیابید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۲

۲۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(0,1)$ بوده و با دایره $(x-2)^2+(y-3)^2=16$ مماس داخل باشد. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۳

۲۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقاط $A(1,3)$ و $B(3,-1)$ دو سر قطر آن باشند. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۴

۲۴ نقطه $A(-1,2)$ روی دایره $C(O,r)$ است. اگر دو خط $x-y=-1$ و $2x+y=4$ شامل قطرهایی از این دایره باشند، آنگاه معادله استاندارد دایره را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی - ۱۴۰۵

۲۵ در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

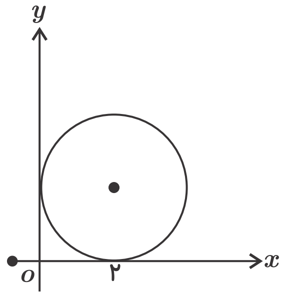
مرجع ۱: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۲۶ در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$ است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۷ در شکل مقابل، دایرهٔ $C(M,R)$ بر محورهای مختصات مماس است. مختصات مرکز و اندازهٔ شعاع دایره را بیابید و سپس معادلهٔ ضمنی دایره را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴



۲۸ پاسخ هریک از عبارت‌های ستون A را از ستون B انتخاب کنید. (یکی از اعداد ستون B اضافه است).

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

A	B
الف) مقدار m در دایرهٔ $x^۲+y^۲-my=۳$ در صورتی که مرکز دایرهٔ $(۰,۱)$ باشد.	۳
ب) مقدار فاصلهٔ کانونی یک بیضی با قطر کانونی ۶ که دارای خروج از مرکز $\frac{۱}{۲}$ است.	۲
	۱

۲۹ درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف رابطهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+۲x+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $c<۱$.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۳۰ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود که آن را یک سطح .... می‌نامیم.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۱ وضعیت خط $x+y=۲$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳۲ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x+y=۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x+۴y=-۵$ مماس باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۴ وضعیت خط $x+y=۱$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y-۲=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۵ وضعیت خط $x+y=۳$ و دایره $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۶ مقدار m را چنان تعیین کنید که دایره به معادله $x^۲+y^۲+۲x-۲y+m=۰$ با دایره به مرکز $O(۲,-۳)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۷ وضعیت خط به معادلهٔ $x+y=۴$ و دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲=۴$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۸ وضعیت دو دایرهٔ $(x-۱)^۲+y^۲=۱$ و $x^۲+(y-۱)^۲=۱$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۹ مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^۲+y^۲-۲x+۲y+c=۰$ بر دایره $(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲$ مماس بیرون باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۰ وضعیت دو دایره به معادلات $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱$ و $x^۲+y^۲+۶x+۲y-۶=۰$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائهٔ راه‌حل)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

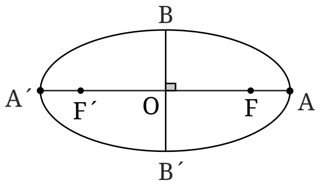
۴۱ وضعیت دایره به معادله $x^۲+y^۲-۶x+۱۲y+۲۰=۰$، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبداء مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

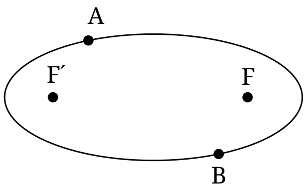
۴۲ وضعیت نسبی دو دایره $x^۲+y^۲=۹$ و $x^۲+y^۲-۲x+۲y+۱=۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

بیضی

۴۳ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟
مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳

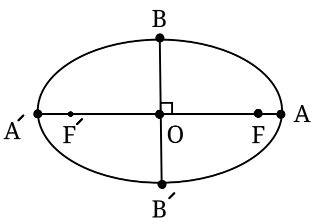


۴۴ دو نقطهٔ A و B مطابق شکل روی بیضی و نقاط F و F' کانون‌های بیضی‌اند. اگر $AF'=BF$ باشد ثابت کنید دو پاره خط AF و BF' موازی‌اند.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

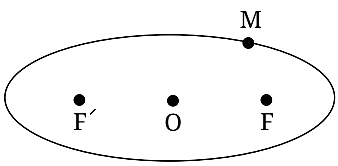


۴۵ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۶ و ۱۰ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است. در صورتی که بدانیم مثلث MFF' در رأس M قائم‌الزاویه است، طول MF را به دست آورید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

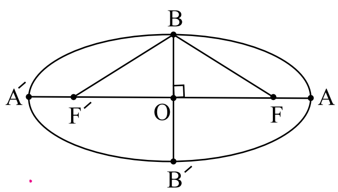
۴۶ در بیضی مقابل طول قطر بزرگ $\sqrt{۲}$ برابر طول قطر کوچک است. اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹



۴۷ در شکل مقابل نقطهٔ M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید: $NF'=MF'$
مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳



۴۸ در شکل مقابل اگر $OA=a, OB=b, OF=c$ باشد، ثابت کنید: $a^۲=b^۲+c^۲$
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰



۴۹ در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب مختصات کانون‌ها (F و F')، مختصات دو سر قطر بزرگ (A و A') و دو سر قطر کوچک (B و B') را به دست آورید.

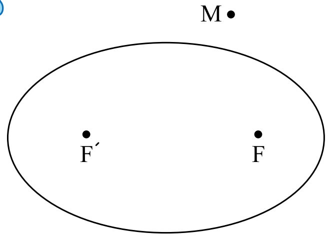
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

پ بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.

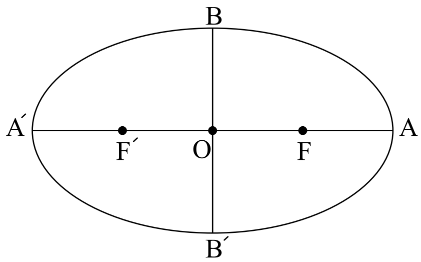
۵۰ اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانون‌های F و F' بزرگ‌تر از طول قطر بیضی است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱



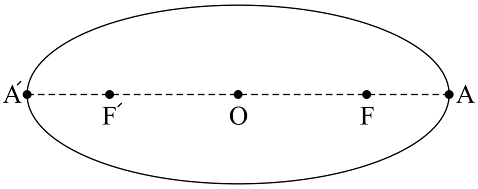
۵۱ اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱



۵۲ در بیضی روبه‌رو نقاط A و A' دو سر قطر بزرگ و نقاط F و F' کانون‌های بیضی هستند، ثابت کنید: $A'F' = AF$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰



۵۳ در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F(۴, ۰)$ و $F'(-۲, ۰)$ طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطهٔ $P(۱, m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.

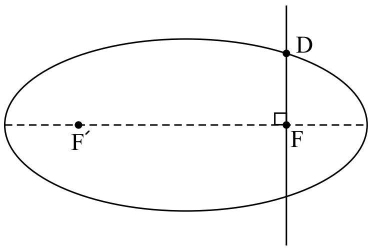
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۵۴ بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است.

اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطهٔ D قطع کند، ثابت کنید:

$$DF = \frac{b^۲}{a}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

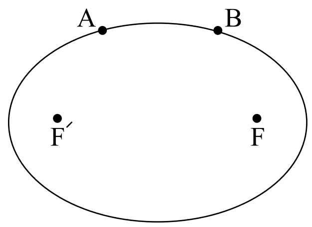


۵۵ بیضی مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و از یک نقطه ثابت غیر واقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست ـ نادرست)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

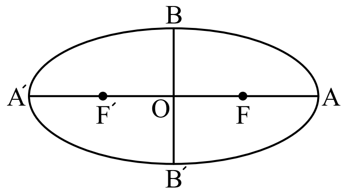
۵۶ در شکل روبه‌رو دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $AF' = BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید: مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



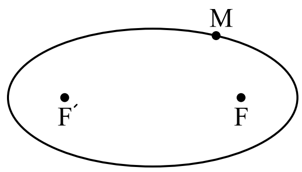
۵۷ در یک بیضی با کانون‌های F و F'، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازهٔ زاویه $F\hat{B}F'$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



۵۸ در شکل مقابل، نقطهٔ M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده است. خط d را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



۵۹ نقاط $B(-۱, ۲)$ و $B'(-۱, -۴)$ دو سر قطر کوچک بیضی با فاصلهٔ کانونی $۲\sqrt{۳}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۶۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۱, -۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادله $۴x - ۳y = ۲$ وتری به طول ۶ جدا کند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۶۱ خروج از مرکز یک بیضی با اندازه قطرهای ۴ و ۶ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۶۲ نقطهٔ دلخواه M در صفحهٔ بیضی مفروض است. اگر مجموع فاصله‌های نقطهٔ موردنظر از دو کانون بیضی، بیشتر از اندازهٔ قطر بزرگ بیضی باشد، آنگاه نقطهٔ M در درون بیضی قرار دارد. (درست – نادرست)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

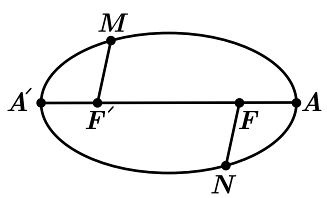
۶۳ در یک بیضی با طول قطرهای ۶ و ۸ سانتی‌متر، فاصلهٔ کانونی چند سانتی‌متر است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}$ ۲) $\sqrt{۷}$ ۳) $۲\sqrt{۷}$ ۴) $۴\sqrt{۷}$

۶۴ در شکل مقابل دو نقطهٔ M و N روی بیضی و کانون‌های F و F' مشخص شده‌اند. با فرض $MF' = NF$، نشان دهید MF موازی NF' است.

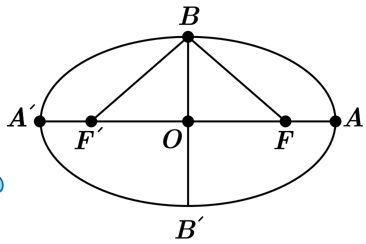
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴



مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۶۵ در بیضی مقابل با کانون‌های F و F'، طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است.

اندازهٔ زاویهٔ $\widehat{OFB}$ را به دست آورید.



مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۶۶ عبارت‌های زیر را کامل کنید.

الف اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به .... نزدیک‌تر می‌شود.

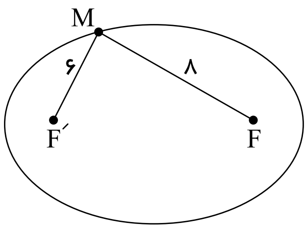
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب نقطه $A(۱,-۲)$ در .... دایره به معادله $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ قرار دارد.

۶۷ در شکل روبه‌رو نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارد، به‌طوری که $MF=۸$ و $MF'=۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید.

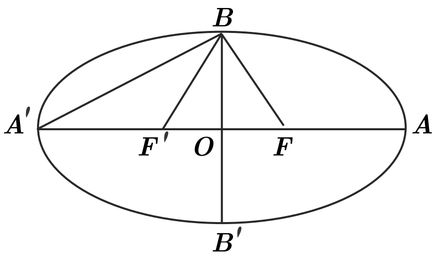
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

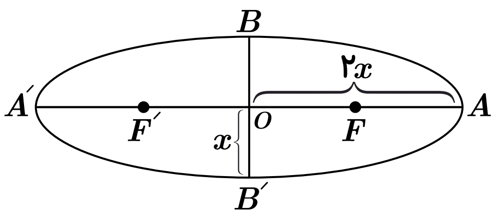
۶۸ یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است.

اگر $S_{\overset{\triangle}{BA'O}}=۴S_{\overset{\triangle}{FBF'}}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.



۶۹ خروج از مرکز بیضی مقابل را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵



۷۰ در بیضی فاصلهٔ یک کانون از نزدیک‌ترین رأس برابر ۲ و اندازهٔ قطر کوچک بیضی برابر ۸ است. مقدار خروج از مرکز بیضی را تعیین کنید.

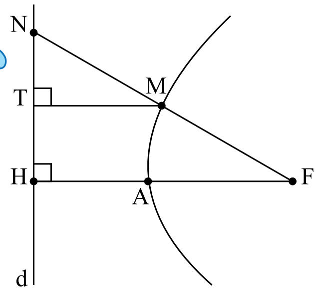
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

سهمی

۷۱ در شکل زیر سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را برای d عمود کرده‌ایم.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



۷۲ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $x^۲ \leq y \leq ۲$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷۳ سهمی $y^۲ = ۲x + ۴y$ را در نظر بگیرید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

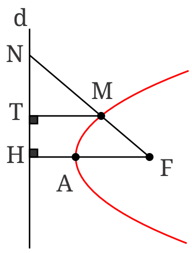
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷۴ در شکل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطهٔ N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم. ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$

مرجع ۱: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



۷۵ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(-۳, ۲)$ مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی آن $x = ۱$ باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۷۶ معادلهٔ سهمی با کانون $F(۱, ۲)$ و خط هادی $x = -۳$ را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۷۷ دایره‌هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله $(y - ۱)^۲ = -۸(x + ۱)$ واقع است و از کانون سهمی می‌گذرند، بر خط به معادله .... مماس هستند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۷۸ نقطهٔ دلخواه M روی سهمی مفروض است. ثابت کنید هر دایره به مرکز M که از کانون سهمی بگذرد، بر خط هادی سهمی مماس است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۷۹ در یک دیش مخابراتی به شکل سهمی با دهانهٔ دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است. فاصلهٔ کانونی این دیش را به دست آوردید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۸۰ الف) معادلهٔ متعارف و فاصلهٔ کانونی سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$ را بیابید.

ب) مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۸۱ سهمی به معادلهٔ $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را در نظر بگیرید:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب نمودار سهمی را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۸۲ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(۱,۲)$ رأس و $F(۱,-۲)$ کانون آن باشد، سپس معادلهٔ خط هادی آن را بیابید.
مرجع ۱: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۸۳ معادلهٔ سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y=-۲$ و کانون آن $F(۱,-۴)$ باشد.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۸۴ سهمی به معادلهٔ $y^۲=-۲x-۴y$ مفروض است.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف) معادلهٔ متعارف (استاندارد) سهمی را بنویسید.

ب) مختصات رأس و معادلهٔ خط هادی سهمی را به دست آورید.

۸۵ سهمی با رأس $A(۴,۶)$ و کانون $F(-۱,۶)$ را در نظر بگیرید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف معادلهٔ این سهمی را به دست آورید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ب معادلهٔ خط هادی این سهمی را بنویسید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

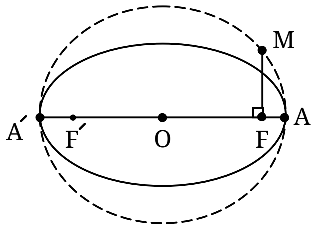
۸۶ مختصات کانون و معادلهٔ سهمی به رأس $A(-۲,۵)$ و خط هادی $x=۳$ را بنویسید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۸۷ معادلهٔ محور سهمی $(x-۲)^۲=۴(y+۲)$ کدام است؟
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱) $x=۲$ ۲) $y=۲$ ۳) $x=-۲$ ۴) $y=-۲$

سوال‌های ترکیبی مقاطع مخروطی

۸۸ قطر دایرهٔ C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند. ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.
مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳



۸۹ سهمی $y^۲=۴x-۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.
مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳

۹۰ مختصات نقاط برخورد سهمی $y^۲+۷x+۵=۰$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ را به‌دست آورید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

پاسخنامه تشریحی

۱
الف خط

ب دایره

۲
الف نادرست - مکان هندسی فوق، خط عمود بر خط d در نقطهٔ A است.

ب درست

۳
الف درست

ب نادرست

اگر خط d در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و از نقطهٔ M به دو کانون وصل کنیم، زاویه‌های ایجادشده α و β باهم برابر هستند. بنابراین:

$$\alpha+\beta+F\widehat{M}F' = ۱۸۰^\circ$$
$$۲\alpha+۵۰^\circ = ۱۸۰^\circ \rightarrow \alpha = ۶۵^\circ = \beta$$

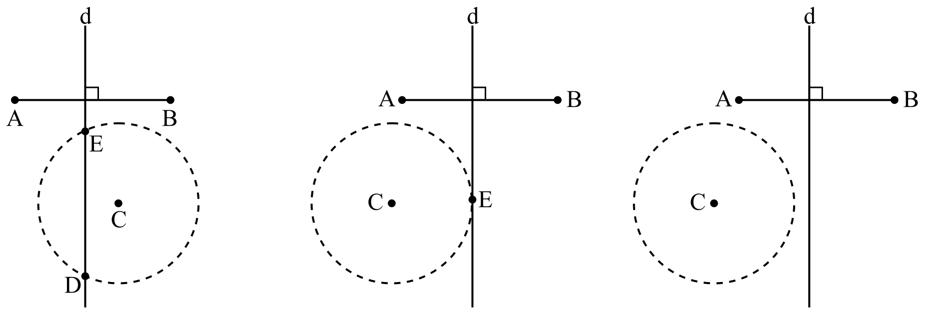
۴ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است.

مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است.

بنابراین نقطهٔ برخورد خط عمودمنصف و دایره جواب مسئله است.

اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند (نقاط D و E) مسئله دو جواب دارد. (همانند شکل (۱))

اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد (همانند شکل (۲)) و درصورتی‌که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد. (همانند شکل (۳))

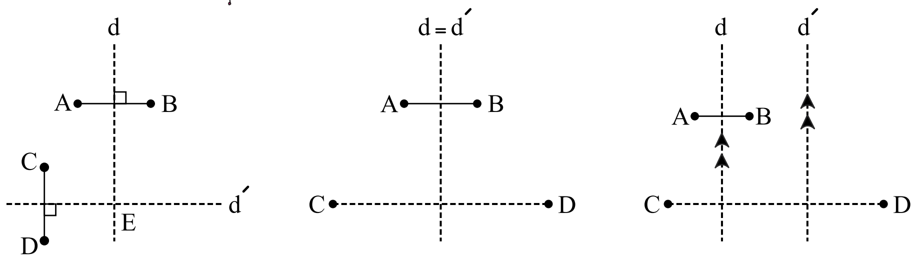


شکل (۱) شکل (۲) شکل (۳)

۵
الف مشترک

ب خارج

۶ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. این خط را d می‌نامیم؛ همچنین مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است. این خط را d' می‌نامیم.



حالت (۱)   حالت (۲)   حالت (۳)

بنابراین نقطهٔ برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطهٔ E)

اگر خطوط d و d' متقاطع باشند، مسئله یک جواب دارد. (حالت ۱)

اگر خطوط d و d' منطبق باشند، مسئله بی‌شمار جواب دارد. (حالت ۲)

اگر خطوط d و d' موازی باشند، مسئله جواب ندارد. (حالت ۳)

۷ نادرست

۸ نیمساز

۹

الف بیضی

۱۰

الف درست

۱۱ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به‌فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را در نظر می‌گیریم.

اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت.

اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد.

اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت.

۱۲ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C به فاصلهٔ $۲cm$ باشند، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ C و شعاع $۲cm$ است.

فصل‌مشترک دو مکان هندسی موردنظر جواب مسأله است.

الف) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع $۲cm$ را قطع کند، مسأله دو جواب دارد.

ب) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB بر دایره به مرکز C و شعاع $۲cm$ مماس باشد، مسأله یک جواب دارد.

پ) اگر عمودمنصف پاره‌خط AB دایره به مرکز C و شعاع $۲cm$ را قطع نکند، مسأله فاقد جواب است.

در صورت بحث در حالت‌های ممکن به روش رسم شکل، به تناسب نمره تعلق گیرد.

۱۳

الف هذلولی

۱۴

الف سهمی

۱۵

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases}$$

$$d: ۴x+۳y+۵=۰ \;,\; O(۲,-۱) \rightarrow r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر $r=۲$ است. معادلهٔ دایره برابر با $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ است.

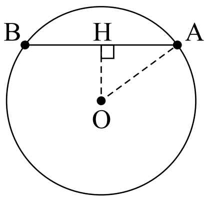
۱۶ رابطهٔ منحنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ معادلهٔ یک دایره است، اگر و تنها اگر $a^۲+b^۲>۴c$ باشد.

$$a^۲+b^۲>۴c \rightarrow ۱۶+۳۶>۴a \rightarrow a<۱۳$$

۱۷

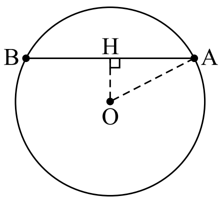
$$R = OM = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۵}$$
$$(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵$$

۱۸ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم، عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$OH = \frac{|x+y-۲|}{\sqrt{۱+۱}} = \frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \to OA^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = \frac{۱۰}{۴} = R^۲$$
$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = \frac{۱۰}{۴}$$

۱۹ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$AH = \frac{۱}{۲}AB = ۳$$
$$OH = \frac{|۳(۲) - ۴(-۱) + ۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۴$$
$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \to r^۲ = (۴)^۲ + (۳)^۲ = ۲۵ \quad , \quad (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$$

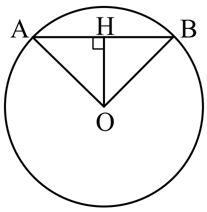
۲۰ روش اول:

$$OH = \frac{|۱+۳|}{\sqrt{۱^۲ + ۰^۲}} = ۴ \quad , \quad OH = R \quad , \quad (x-۱)^۲ + y^۲ = ۱۶$$

روش دوم: با استفاده از رسم شکل و پیدا کردن شعاع و نوشتن معادله دایره

۲۱

$$OH = \frac{|۳(۰) + ۴(۱) + ۶|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۲$$
$$AB = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow AH = \sqrt{۵} \Rightarrow R = ۳$$
$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$$
$$x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۴ \Rightarrow (۰,۴) \\ y = -۲ \Rightarrow (۰,-۲) \end{cases}$$



۲۲

$$(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶ \quad \to \quad O'(۲,۳), r' = ۴$$
$$d = OO' = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۸}$$
$$|r - r'| = d \quad \to \quad |r-۴| = \sqrt{۸} \quad \to \quad r = ۴ \pm ۲\sqrt{۲}$$
$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = (۴ \pm ۲\sqrt{۲})^۲$$

۲۳ روش اول:

$$\left.\begin{matrix} O = (۲,۱) \\ r = \sqrt{۵} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$$

روش دوم:

$$O = (۲,۱), AB = ۲r = \sqrt{(۱-۳)^۲ + (۳+۱)^۲} = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow r = \frac{AB}{۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵$$

۲۴

$$\begin{cases} O(۱,۲) \\ r = ۲ \end{cases} \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$$

۲۵

$$x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳ \to (x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۵ \to O=(۱,۱)$$

$m_{OA}=\frac{۳-۱}{۲-۱}=۲$ شیب خط مماس $m'=\frac{۱}{m}=\frac{-۱}{۲}$ برابر است:

$$y-۳=\frac{-۱}{۲}(x-۲)$$

۲۶

$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰ \to (x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴})+(y^۲+by+\frac{b^۲}{۴})=-c+\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}$$

$$(x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴} \to r^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴} \to r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$$

۲۷ روش اول:

چون دایره بر محورهای مختصات مماس است؛ پس: $R=۲$.

$M(۲,۲)$

$$(x-۲)^۲+(y-۲)^۲=۴ \longrightarrow x^۲+y^۲-۴x-۴y+۴=۰$$

روش دوم:

$$(۲,۲)=(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲}) \longrightarrow a=-۴ \quad , \quad b=-۴$$

$$R=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲} \longrightarrow ۲=\frac{\sqrt{۱۶+۱۶-۴c}}{۲} \longrightarrow c=۴$$

$$\longrightarrow x^۲+y^۲-۴x-۴y+۴=۰$$

۲۸ الف) ۲ ب) ۳

۲۹

الف

درست

۳۰ استوانه‌ای

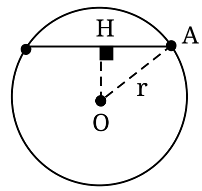
۳۱

دایره: $x^۲+y^۲=۲ \Rightarrow$ مرکز دایره: $O(۰,۰)$ و شعاع دایره: $r=\sqrt{۲}$

خط: $x+y-۲=۰ \; , \; O(۰,۰) \Rightarrow d=\frac{|۱(۰)+۱(۰)-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}$

$\Rightarrow d=r=\sqrt{۲} \Rightarrow$ **خط بر دایره مماس است.**

۳۲



$$OH=\frac{|۲(-۱)+۱(-۱)-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}}=\frac{۵}{\sqrt{۵}}=\sqrt{۵}$$

$A\overset{\Delta}{O}H$ (بنابر قضیهٔ فیثاغورس): $OH^۲+AH^۲=OA^۲ \to (\sqrt{۵})^۲+۲^۲=r^۲ \to r=۳$

$\Rightarrow$ معادلهٔ دایره: $(x+۱)^۲+(y+۱)^۲=۹$

۳۳

فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر با شعاع دایره است:

$$r=\frac{|۳(۲)+۴(۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

معادلهٔ دایره برابر است با:

$$(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۹$$

۳۴

ابتدا معادلهٔ دایره را به‌صورت معادلهٔ استاندارد می‌نویسیم.

$$(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴$$

مرکز و شعاع دایره برابر است با:

$O=(۱\,,۱)\ \ ,\ r=۲$

حال فاصله مرکز دایره از خط را به دست می‌آوریم:

$$d=\frac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow d<r$$

می‌بینیم که فاصلهٔ مرکز دایره از خط از شعاع کوچک‌تر است؛ پس خط و دایره در دو نقطهٔ متقاطع هستند.

۳۵ روش اول:

$x+y=۳\Rightarrow y=۳-x$

$x^۲+y^۲-۲y-۳=\circ \quad\rightarrow\quad x^۲+(۳-x)^۲-۲(۳-x)-۳=\circ$

$۲x^۲-۴x=\circ$

دلتای معادلهٔ اخیر مثبت است بنابراین دو ریشهٔ متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع‌اند.

روش دوم:

$x^۲+y^۲-۲y-۳=\circ\Rightarrow O(\circ,۱)\ ,\ r=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۲}=۲$

$OH=\frac{|\circ+۱-۳|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲}<۲$

۳۶

$O(۲,-۳),r=۳$

$O'(-۱,۱),r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸-۴m}=\sqrt{۲-m}$

$d=OO'=\sqrt{۹+۱۶}=۵,r+r'=d\Rightarrow ۳+\sqrt{۲-m}=۵\Rightarrow\sqrt{۲-m}=۲\Rightarrow ۲-m=۴\Rightarrow m=-۲$

نگارشی دیگر:

$O'(-۱,۱),r'=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸-۴m}$

$d=OO'=\sqrt{۹+۱۶}=۵,r+r'=d\Rightarrow ۳+\frac{۱}{۲}\sqrt{۸-۴m}=۵\Rightarrow\sqrt{۸-۴m}=۴\Rightarrow ۸-۴m=۱۶\Rightarrow m=-۲$

۳۷ روش اول:

$O(\circ,\circ)\qquad R=۲$

$OH=\frac{|x_\circ+y_\circ-۴|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{|\circ+\circ-۴|}{\sqrt{۲}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$ فاصلهٔ مرکز دایره از خط مورد نظر

چون $OH>R$، بنابراین خط دایره را قطع نمی‌کند.

روش دوم:

$x^۲+y^۲=۴\longrightarrow x^۲+(۴-x)^۲=۴\longrightarrow ۲x^۲-۸x+۱۲=\circ\longrightarrow\Delta=-۳۲<\circ$

معادله جواب ندارد. در نتیجه خط و دایره هیچ نقطهٔ برخوردی ندارند.

۳۸ مرکز و شعاع دایرهٔ $(x-۱)^۲+y^۲=۱$ برابر است با: $O=(۱,\circ),r=۱$

و مرکز و شعاع دایرهٔ $x^۲+(y-۱)^۲=۱$ برابر $O'=(\circ,۱),r'=۱$

فاصلهٔ دو مرکز برابر $OO'=\sqrt{۲}$ است و $r+r'=۲$ و $r-r'=\circ$ پس:

$|r-r'|<OO'<r+r'\Rightarrow$ دو دایره متقاطع‌اند.

۳۹

$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲\Rightarrow O'(-۱,۱)\ ,\ r'=\sqrt{۲}$

$(x-۱)^۲+(y+۱)^۲=۲-c\Rightarrow O(۱,-۱)\quad,\quad r=\sqrt{۲-c}$

$OO'=۲\sqrt{۲}$

$OO'=r+r'\xrightarrow{(\circ,۲۵)}۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۲-c}\Rightarrow c=\circ$

۴۰

$(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱\Rightarrow O(۱,-۲),R=۱$

$x^۲+y^۲+۶x+۲y-۶=\circ\Rightarrow O'(-۳,-۱),R'=۴\qquad,\qquad d=OO'=\sqrt{۱۷}$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند. $۳<\sqrt{۱۷}<۵$

۴۱

$O(۳,-۶)\ \ R=۵$

$O'(۰,۰), R'=۳$

$OO'=۳\sqrt{۵}, |R-R'|<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند.

۴۲

$\begin{cases} O(۰,۰) \\ r=۳ \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} O'(۱,-۱) \\ r'=۱ \end{cases} \quad , \quad d=OO'=\sqrt{۲} \rightarrow d=\sqrt{۲}<۲=r-r'$

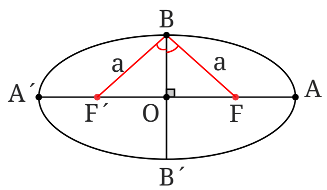
دو دایره متداخل هستند.

۴۳ راه‌حل اول:

طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک است. بنابراین:

$AA'=۲BB' \Rightarrow \cancel{۲}a=۲\times\cancel{۲}b \Rightarrow a=۲b \Rightarrow b=\frac{a}{۲} \quad (۱)$

$\left.\begin{matrix} BF+BF'=۲a \\ BF=BF' \end{matrix}\right\} \Rightarrow BF=BF'=a$



$\overset{\triangle}{BOF}: BO^۲+OF^۲=BF^۲ \Rightarrow b^۲+c^۲=a^۲ \xrightarrow{(۱)} (\frac{a}{۲})^۲+c^۲=a^۲$

$\Rightarrow c^۲=a^۲-\frac{a^۲}{۴}=\frac{۴a^۲-a^۲}{۴}=\frac{۳a^۲}{۴} \Rightarrow c=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{BOF}: \sin(O\hat{B}F)=\frac{OF}{BF}=\frac{c}{a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{a}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow O\hat{B}F=۶۰^\circ$

$F\hat{B}F'=O\hat{B}F+O\hat{B}F'=۶۰^\circ+۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$

راه‌حل دوم:

در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\triangle}{OBF}$:

$b=\frac{a}{۲} \Rightarrow OB=\frac{BF}{۲} \Rightarrow \cos(O\hat{B}F)=\frac{OB}{BF}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow O\widehat{B}F=۶۰^\circ$

پس در مثلث $\overset{\triangle}{BFF'}$ زاویهٔ B برابر $۲\times۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$ درجه است.

۴۴

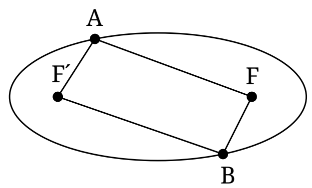
نقاط A و B را به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم.

نقطهٔ A روی بیضی قرار دارد بنا به تعریف بیضی $AF+AF'=۲a \quad (۱)$

نقطهٔ B روی بیضی قرار دارد $BF+BF'=۲a \quad (۲)$

از (۱) و (۲) و فرض $(AF'=BF)$ نتیجه می‌شود $AF=BF'$

بنابراین چهارضلعی $AFBF'$ یک متوازی‌الاضلاع است در متوازی‌الاضلاع، ضلع‌های روبرو موازی‌اند. $AF||BF'$



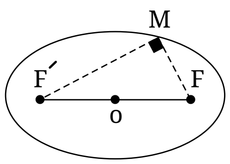
۴۵

طبق فرض داریم:

$۲a=۱۰ \rightarrow a=۵$ و $۲b=۶ \rightarrow b=۳$

می‌دانیم:

$c^۲=a^۲-b^۲=۲۵-۹=۱۶ \rightarrow c=۴$



از طرفی:

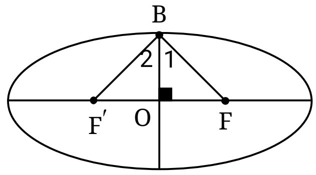
$MF+MF'=۲a=۱۰ \rightarrow MF'=۱۰-MF$

با توجه به شکل داریم:

قضیهٔ فیثاغورس: $(MF)^۲+(MF')^۲=(FF')^۲ \rightarrow (MF)^۲+(۱۰-MF)^۲=۸^۲$

$\rightarrow ۲MF^۲-۲۰MF+۳۶=۰ \rightarrow MF^۲-۱۰MF+۱۸=۰ \rightarrow MF=۵\pm\sqrt{۷}$

۴۶ با توجه به شکل زیر و فرض سؤال داریم:



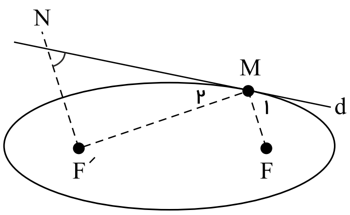
$$۲a = \sqrt{۲}(۲b) \to a = b\sqrt{۲} \to \cos \widehat{B}_۱ = \frac{OB}{BF} = \frac{b}{b\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \to \widehat{B}_۱ = ۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow F\hat{B}F' = ۲ \times ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

۴۷ مجموع $MF + MF'$ کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، داریم: $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$

از طرفی: $MF || NF'$ و d مورب، پس $\hat{N} = \hat{M}_۱$ و در نتیجه $\hat{N} = \hat{M}_۲$.

مثلث MNF' متساوی‌الساقین است، یعنی $MF' = NF'$.



۴۸

نقطهٔ B روی عمودمنصف پاره‌خط FF' قرار دارد در نتیجه:

$$BF = BF' \quad (۱)$$

مجموع فاصله‌های هر نقطه روی بیضی از دو کانون برابر است با قطر بزرگ بیضی:

$$BF + BF' = ۲a \xrightarrow{(۱)} BF = BF' = a$$

بنا به رابطهٔ فیثاغورس در مثلث BOF داریم:

$$OF^۲ + OB^۲ = BF^۲ \to c^۲ + b^۲ = a^۲$$

۴۹

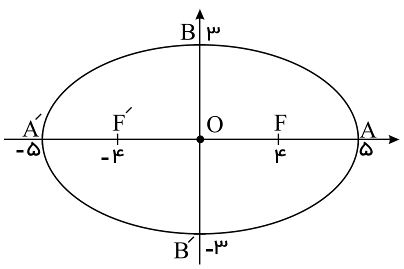
الف

$$\begin{cases} ۲a = ۱۰ \to a = ۵ \\ ۲b = ۶ \to b = ۳ \end{cases} \to a^۲ = b^۲ + c^۲ \to c = ۴ \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

ب باتوجه به اینکه مرکز بیضی مبدأ مختصات است، داریم:

$$\begin{cases} A(a\,,۰) \to A(۵\,,۰) \\ A'(-a\,,۰) \to A'(-۵\,,۰) \end{cases} \quad \begin{cases} F(c\,,۰) \to F(۴\,,۰) \\ F'(-c\,,۰) \to F'(-۴\,,۰) \end{cases} \quad \begin{cases} B(۰\,,b) \to B(۰\,,۳) \\ B'(۰\,,-b) \to B'(۰\,,-۳) \end{cases}$$

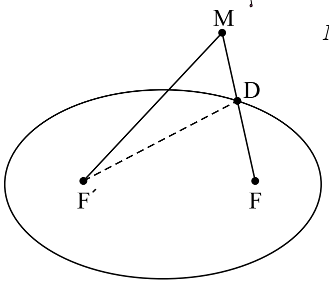
پ



۵۰ از نقطهٔ M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطهٔ D قطع کند، نقطهٔ D روی بیضی قرار دارد. بنا بر تعریف بیضی داریم:

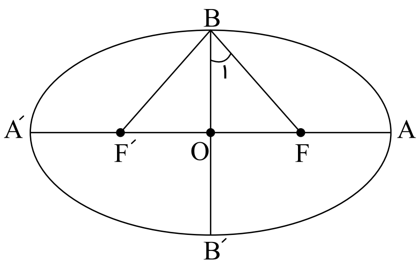
$$DF + DF' = ۲a$$

بنا بر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$MD+MF'>DF' \xrightarrow{+DF} DF+MD+MF'>DF'+DF \to MF+MF'>۲a$$

۵۱



$$a=۲b \to c^۲=a^۲-b^۲=۴b^۲-b^۲=۳b^۲ \to c=\sqrt{۳}b$$

$$\tan B_۱=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{۳}b}{b}=\sqrt{۳} \to B_۱=۶۰^\circ \to F\hat{B}F'=۲\times۶۰=۱۲۰$$

۵۲ نقطهٔ A و A' روی بیضی قرار دارند. بنا به تعریف بیضی داریم $A'F'+A'F=۲a$ و $AF'+AF=۲a$. نتیجه می‌گیریم:

$$A'F'+A'F=AF+AF' \to A'F'+(A'F'+FF')=AF+(AF+FF') \to AF=A'F'$$

۵۳

$$PF+PF'=۲a \to \sqrt{۹+m^۲}+\sqrt{۹+m^۲}=۱۰ \to m=\pm۴$$

۵۴ نقطهٔ D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF+DF'=۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیهٔ فیثاغورث داریم:

$$DF^۲+FF'^۲=DF'^۲ \to DF^۲+(۲c)^۲=(۲a-DF)^۲$$

$$DF=\frac{a^۲-c^۲}{a} \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} DF=\frac{b^۲}{a}$$

۵۵ نادرست

۵۶ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:

$$AF+AF'=۲a=BF+BF' \xrightarrow{AF'=BF} AF=BF'$$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت $(AF=BF'\ ,\ AF'=BF\ ,\ FF'=FF')$ برابر سه ضلع همنهشت هستند، نتیجه دو زاویه $A\hat{F}F'=B\hat{F}'F$، مثلث MFF' متساوی‌الساقین است و $MF=MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره‌خط AFF' (قطر کوچک بیضی) است.

۵۷

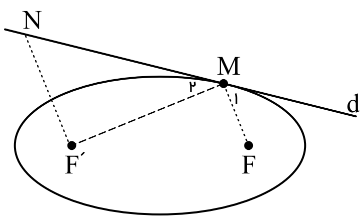
$$BB'=\frac{۱}{۲}AA' \Rightarrow ۲b=\frac{۱}{۲}(۲a) \Rightarrow a=۲b$$

\cosF$'\hat{B}O=\frac{BO}{BF'}=\frac{b}{a}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow F'\hat{B}O=۶۰^\circ \Rightarrow F'\hat{B}F=۱۲۰^\circ$

روش دوم: برای حل مسئله با استفاده از تانژانت زاویه $F'\hat{B}O$ پاسخ صحیح است.

۵۸ مجموع $MF+MF'$ کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$ از طرفی: $MF||NF'$ و d مورب، در نتیجه $\hat{N}=\hat{M}_۱$ نتیجه می‌شود $\hat{N}=\hat{M}_۲$ مثلث MNF' متساوی‌الساقین است.

یعنی $MF'=NF'$.



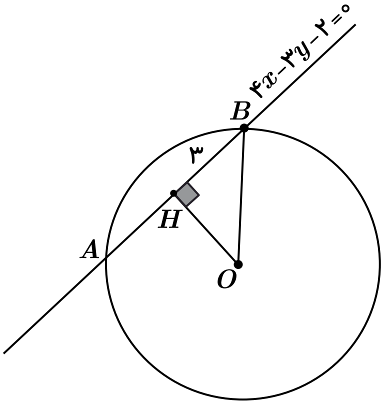
۵۹

$$BB'=۲b=۶ \to b=۳ \quad , \quad ۲c=۲\sqrt{۳} \to c=\sqrt{۳}$$

$$a^۲=b^۲+c^۲=۳^۲+(\sqrt{۳})^۲=۱۲ \to a=۲\sqrt{۳} \to AA'=۲a=۴\sqrt{۳}$$

۶۰

شعاع عمود بر وتر آن وتر را نصف می‌کند، لذا $HB = ۳$



$$OH = \frac{|۴+۳-۲|}{\sqrt{۱۶+۹}} = \frac{۵}{۵} = ۱ \Rightarrow r^۲ = OH^۲ + HB^۲ = ۱ + ۹ = ۱۰$$

معادلهٔ دایره:

$$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۱۰$$

۶۱ روش اول:

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases}, a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۹ = ۴ + c^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۵} \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} ۲a = ۶ \Rightarrow a = ۳ \\ ۲b = ۴ \Rightarrow b = ۲ \end{cases}, \Rightarrow e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^۲ - b^۲}}{a} = \sqrt{۱ - \frac{b^۲}{a^۲}} = \sqrt{۱ - \frac{۴}{۹}} = \sqrt{\frac{۵}{۹}} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

۶۲ نادرست

۶۳ گزینهٔ ۳ $(۲\sqrt{۷})$

۶۴ M روی بیضی است، پس داریم: $MF + MF' = ۲a$

N روی بیضی است، پس داریم: $NF + NF' = ۲a$

پس: $MF + MF' = NF + NF' \xrightarrow{MF'=NF} MF = NF'$

بنابراین چهارضلعی $MFNF'$ متوازی الاضلاع است لذا $MF || NF'$

۶۵ راه‌حل اول:

$$a = ۲b \Rightarrow a^۲ = c^۲ + b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b, \tan(\widehat{OFB}) = \frac{OB}{OF} = \frac{b}{\sqrt{۳}b} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow \widehat{OFB} = ۳۰^\circ$$

راه‌حل دوم:

$$a = ۲b, BF^۲ = OF^۲ + OB^۲ \Rightarrow a^۲ = c^۲ + b^۲ \Rightarrow ۴b^۲ = c^۲ + b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b$$

$$\tan(\widehat{FBO}) = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow \widehat{FBO} = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{OFB} = ۳۰^\circ$$

راه‌حل سوم:

$$a = ۲b \ , \ \cos(\widehat{FBO}) = \frac{BO}{BF} = \frac{b}{a} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \widehat{FBO} = ۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{OFB} = ۳۰^\circ$$

۶۶ .

الف دایره

ب روش اول: نقطهٔ A را درون معادلهٔ دایره جایگذاری می‌کنیم. اگر حاصل برابر صفر شود، نقطه روی دایره، کوچک‌تر از صفر شود، درون دایره و بزرگ‌تر از صفر شود، خارج از دایره قرار دارد.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰ \xrightarrow{A(۱,-۲)} (۱)^۲ + (-۲)^۲ - ۲(۱) + ۲(-۲) = -۱ < ۰$$

پس نقطهٔ A درون دایره است.

روش دوم: اگر $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰$ معادلهٔ منحنی در یک دایره باشد، مرکز و شعاع دایره به‌صورت زیر به دست می‌آید.

مرکز دایره $= O = (-\frac{a}{۲} , -\frac{b}{۲})$

شعاع دایره $= R = \frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$

بنابراین

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰ \to O=(۱,-۱)\ ,\ R=۲$$

حال فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ $A(۱ , -۲)$ را به دست می‌آوریم.

$OA=\sqrt{۰+۱}=۱<۲ \Rightarrow$ نقطهٔAدرون دایره قرار دارد

۶۷ نقطه M روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

$$MF+MF'=۲a=۱۴ \Rightarrow a=۷$$

$$\frac{c}{a}=\frac{۱}{۷} \xrightarrow{a=۷} c=۱$$

$$a^۲=b^۲+c^۲ \longrightarrow b=۴\sqrt{۳}$$

۶۸

$$\frac{S_{FBF'}}{S_{BA'O}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۲c\times b}{\frac{۱}{۲}\times a\times b}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۸}$$

۶۹

$$a^۲=b^۲+c^۲ \to ۴x^۲=x^۲+c^۲ \text{ یا } ۳x^۲=c^۲ \to c=\sqrt{۳}x \to \frac{c}{a} \text{ یا } \frac{\sqrt{۳}x}{۲x}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

۷۰ روش اول:

$$a-c=۲$$

$$a^۲-c^۲=b^۲ \longrightarrow a^۲-c^۲=۱۶ \longrightarrow (a-c)(a+c)=۱۶ \longrightarrow a+c=۸$$

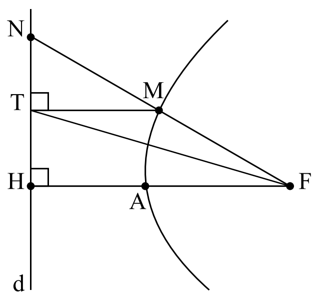
$$\begin{cases} a-c=۲ \\ a+c=۸ \end{cases} \longrightarrow a=۵\ ,\ c=۳ \longrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$$

روش دوم:

$$a-c=۲$$

$$\begin{cases} a-c=۲ \\ a^۲=b^۲+c^۲ \longrightarrow a^۲-c^۲=۱۶ \end{cases} \Longrightarrow a=۵\ ,\ c=۳ \longrightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{۳}{۵}$$

۷۱ روش اول:



بنا به تعریف سهمی $MF=MT$ مثلث MFT متساوی‌الساقین است. $M\hat{T}F=T\hat{F}M$ (۱)

از طرفی بنا به خطوط موازی $FH||MT$ و مورب FT نتیجه می‌شود $M\hat{T}F=T\hat{F}H$ (۲)

از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

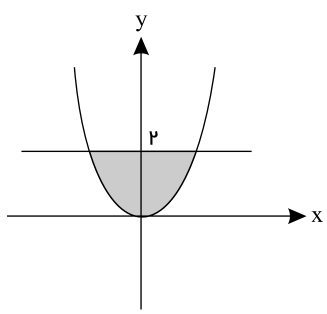
$$\frac{NF}{FH}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

روش دوم:

با توجه به قضیهٔ تالس در مثلث NHF: $FH||MT$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{NM}{MF}=\frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH}=\frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH}=\frac{NM}{MF} \end{array}\right\} \xrightarrow{FH=۲FA} \frac{NF}{۲FA}=\frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times ۲} \frac{NF}{FA}=\frac{۲NT}{TH}$$

۷۲



۷۳

الف

$$y^2 = 2x + 4y \rightarrow (y-2)^2 = 2(x+2)$$

نوع سهمی افقی رو به راست، رأس سهمی نقطه $(-2, 2)$، پارامتر سهمی $a = \frac{1}{2}$، مختصات کانون سهمی برابر با $(-\frac{3}{2} \, , \, 2)$ و معادله خط هادی برابر با $x = \frac{-5}{2}$ است.

ب مختصات نقاط برخورد با محور yها برابر است با $(0,0)$ و $(0,4)$ و محور xها $(0,0)$

۷۴ فاصلهٔ هر نقطه روی سهمی تا خط هادی برابر فاصلهٔ آن تا کانون است، بنابراین:

$$MT = MF \;\; , \;\; FA = AH$$

$$\left.\begin{array}{l} MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MT}{FH} = \frac{NT}{NH} \Rightarrow \frac{MT}{2FA} = \frac{NT}{NH} \\ MT \parallel FH \Rightarrow \frac{MF}{FN} = \frac{TH}{HN} \Rightarrow \frac{MT}{FN} = \frac{TH}{NH} \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{طرفین دو تساوی را بر هم}} \frac{\frac{\cancel{MT}}{2FA}}{\frac{\cancel{MT}}{FN}} = \frac{\frac{NT}{\cancel{NH}}}{\frac{TH}{\cancel{NH}}}$$

$$\Rightarrow \frac{FN}{2FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{FN}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

۷۵ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به‌سمت چپ است.

مختصات رأس سهمی $A(-1, 2)$ در این سهمی $a = AF = 2$

معادلهٔ آن برابر است با:

$$(y-2)^2 = -8(x+1)$$

۷۶

$$F(\alpha + a, \beta) = (1, 2) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + a = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha - a \\ x = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha - a = -3 \xrightarrow{\alpha + a = 1} \begin{cases} a = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$(y-2)^2 = 8(x+1)$$

۷۷ $x = 1$

۷۸ از آنجایی که M نقطه‌ای روی سهمی است، در نتیجه فاصلهٔ M از کانون و خط هادی برابر است.

پس هر دایره که مرکز آن نقطهٔ M بوده و از کانون بگذرد شعاعی برابر MF خواهد داشت؛ بنابراین فاصلهٔ M تا خط هادی برابر شعاع دایره است و دایره بر خط هادی مماس است.

۷۹ اگر قطر دهانهٔ دیش را با $2b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر $a = \frac{4b^2}{16h}$ است.

$h = 9$ و $2b = 60$ با جایگذاری در رابطهٔ فوق داریم: $a = \frac{(2b)(2b)}{16h} = \frac{60 \times 60}{16(9)} = 25$

۸۰ الف)

معادلهٔ متعارف سهمی:

$$y^2 - 2y - 8x + 9 = 0 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 8x - 9 + 1 \Rightarrow (y-1)^2 = 8(x-1)$$

فاصله کانونی سهمی:

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

ب)

رأس سهمی:

$$(h \, , k) = (1 \, , 1)$$

معادلهٔ خط هادی سهمی:

$$x = -a + h \Rightarrow x = -1$$

مختصات کانون:

$$(a + h \, , k) = (3 \, , 1)$$

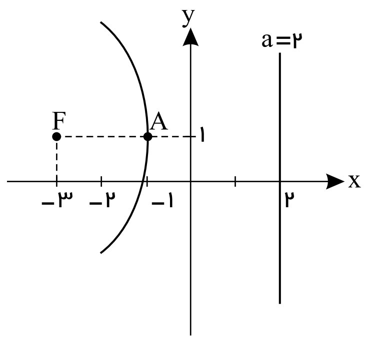
۸۱

الف

$$y^2 - 2y + 1 = -8x - 9 + 1 \rightarrow (y-1)^2 = -8(x+1) \rightarrow A = (-1 \, , \, 1) \, , \, a = 2$$

$$F(-3 \, , 1) \, , \, x = 1$$

ب



۸۲ با توجه به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:

سهمی رو به پایین و $a = ۴$

معادلهٔ سهمی برابر است با: $(x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$

معادلهٔ خط هادی: $y = ۶$

۸۳

$S = (۱, -۳) \quad , \quad a = ۱ \Rightarrow (x-۱)^۲ = -۴(y+۳)$

۸۴ الف)

$y^۲ = -۲x - ۴y \longrightarrow y^۲ + ۴y + ۴ = -۲x + ۴ \longrightarrow (y+۲)^۲ = -۲(x-۲)$

ب)

$$\begin{cases} A(۲, -۲) \\ ۴a = ۲ \longrightarrow a = \frac{۱}{۲} \end{cases} \qquad x = \frac{۵}{۲}$$

۸۵

الف

$a = ۵, (y-۶)^۲ = -۲۰(x-۴)$

ب

$x = ۹$

۸۶

$a = ۵ \qquad F(-۷, ۵) \qquad (y-۵)^۲ = -۲۰(x+۲)$

۸۷ گزینهٔ ۱ $(x = ۲)$

۸۸

$OM = OA = a$

$\overset{\Delta}{OMF} : OF^۲ + MF^۲ = OM^۲ \Rightarrow c^۲ + MF^۲ = a^۲ \Rightarrow MF^۲ = a^۲ - c^۲ = b^۲ \Rightarrow MF = b$

۸۹

$y^۲ = ۴(x-۱) \Rightarrow S(۱, ۰) \, , \, F(۲, ۰)$

$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۹ \, , \begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \text{ ق ق} \\ x = -۳ \text{ غ ق ق} \end{cases}$

$M(۳, ۲\sqrt{۲}) \, , \, M'(۳, -۲\sqrt{۲})$

۹۰

$\begin{cases} y^۲ + ۷x + ۵ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ = ۲۵ \end{cases} \rightarrow x^۲ + (-۷x - ۵) = ۲۵ \rightarrow x^۲ - ۷x - ۳۰ = ۰$

$x = -۳, x = ۱۰$

$\begin{cases} x = -۳ \rightarrow y^۲ = ۱۶ \rightarrow y = \pm ۴ \rightarrow (-۳, ۴) \, , \, (-۳, -۴) \\ x = ۱۰ \rightarrow y^۲ = -۷۵ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل هندسه فصل ۳ دوازدهم

سال دوازدهم

ریاضی

فهرست

معرفی R۳ و بردارها

ضرب داخلی

ضرب خارجی

معرفی R۳ و بردارها

نقطه در فضای R۳

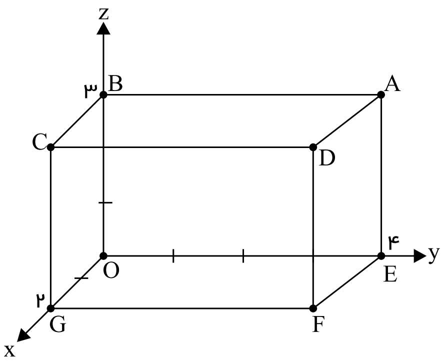
۱ درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف نقطهٔ $A(۲, -۳, ۰)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف در فضای $R^۳$، نقطهٔ $(-۳, ۲, -۵)$ در ناحیهٔ (کنج) .... دستگاه مختصات قرار دارد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳ با توجه به شکل، به سوالات زیر پاسخ دهید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱



الف نام وجه از شکل که معادلهٔ آن به‌صورت زیر مشخص شده را بنویسید.

$x = ۲, ۰ \leq y \leq ۴, ۰ \leq z \leq ۳$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

پ مختصات نقطهٔ D را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ت معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحهٔ XOZ باشد و مکعب مستطیل را نصف کند. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف نقطه با مختصات $(-۲, ۳, -۴)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه‌بعدی واقع است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف نقطهٔ $(-۲, ۳, -۱)$ در ناحیهٔ ششم مختصاتی قرار دارد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

محاسبه تصویر، قرینه و فاصله نقطه از محورها و صفحات مختصات

۶ در فضای سه‌بعدی نقطه A روی محور xها به طول ۲ و نقطه B در صفحه yoz با عرض -۳ و ارتفاع ۴ مفروض است، اصله وسط پاره‌خط AB تا مبدا مختصات را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷ معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور Zها در نقطه به مختصات $A = (۰, ۰, ۳)$ عمود باشد، به‌صورت .... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

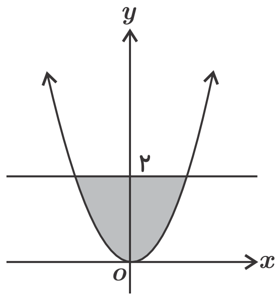
۸ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-۲ < y \leq -۱$, $y < -x^۲ + ۱$ را در فضای دوبعدی رسم کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۹ برای موارد (الف) و (ب) پاسخ صحیح را از گزینه‌های داده‌شده انتخاب کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف) رابطهٔ مربوط به قسمت رنگی کدام است؟

☐ $۲ \leq y \leq x^۲$ ☐ $x^۲ \leq y \leq ۲$



ب) شرط هم‌صفحه بودن برای هر سه بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ کدام است؟

☐ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = ۰$ ☐ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{o}$

۱۰ نقاط $A = (۱\ ,۲\ ,۱)$، $B = (-۱\ ,۰\ ,-۵)$ و $C = (-۱\ ,۳\ ,۱)$ سه رأس یک مثلث هستند. اگر نقطهٔ M وسط ضلع AB باشد، طول پاره‌خط CM (میانهٔ وارد بر ضلع AB) را حساب کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

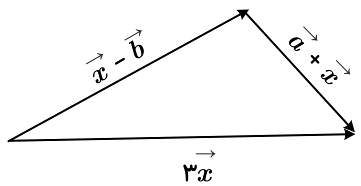
بردار در فضای R۲

۱۱ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $x > -۲$ و $y^۲ + x \leq ۰$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۲ در شکل زیر بردار $\vec{x}$ برحسب $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



بردار در فضای R۳

۱۳ اگر $\vec{a} = ۲\vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (۱, ۲, ۱)$ باشد، طول بردار $\vec{a} - ۲\vec{b}$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۱۴ الف) نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ در فضای $\mathbb{R}^۲$ چه شکلی است؟ . چه ارتباطی با نمودار $x = ۰$ دارد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب) اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۳)$ و $\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j}$ باشد اندازهٔ بردار $\vec{a} + ۲\vec{b}$ را به دست آورید.

۱۵ دو بردار $\vec{a} = (۱, ۲, -۱)$ و $\vec{b} = (۰, ۲, -۱)$ را در نظر بگیرید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^۳$ واقع است؟ (شمارهٔ ناحیه ذکر شود.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب طول بردار $۲\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۶ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف اگر $y = b$ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $R^۳$ باشد که از نقطهٔ $A = (۲, -۳, ۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چقدر است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

پ در فضای $R^۳$، نقطهٔ A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحهٔ yoz و نقطهٔ $B = (-۴, ۶, -۳)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۷ الف) در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ، معادلهٔ محور .... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\vec{b} = r\vec{a}$ آنگاه $|\vec{b}| = |r||\vec{a}|$. (درست - نادرست)

پ) شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $y = x^2 \quad , \quad -1 < x \leq 2$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.

ت) طول بردار $\vec{a} = (0 \, , -3 \, , 4)$ را به دست آورید.

۱۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف بردار $\vec{a} = 2\vec{j} - \vec{k}$ در فضا سه‌بعدی بر صفحهٔ مختصات سه‌بعدی .... منطبق است. (xoz, yoz, xoy) مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۹ نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه $B(1, 0, 1)$ در فضا مفروض‌اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۰ جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف معادلهٔ صفحهٔ گذرنده از نقطه $A(2, 3, -1)$ و عمود بر محور xها به صورت .... می‌باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ب اگر $A(-1, 0, 3)$ و $B(5, 2, -3)$ مختصات نقطه M وسط پاره‌خط AB به‌صورت .... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

پ برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$، حاصل $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ برابر .... می‌باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ت حاصل $2\vec{k} - (\vec{j} \times \vec{i})$ برابر .... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۱ اگر $\vec{a}$ یک بردار در فضای $\mathbb{R}^3$ باشد، کدام گزینه همواره درست است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{o}$ ۲) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$

۳) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{o}$ ۴) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$

۲۲ الف) اگر نقاط $A(3, -1, 2)$ و $B(1, -1, 2)$ در دستگاه $\mathbb{R}^3$ باشند، معادلهٔ خط AB را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب) معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^3$ را بنویسید که موازی صفحهٔ xy باشد.

۲۳ با فرض $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j}, \vec{b} = (3, -1, 1), r = 3, s = 2$، مختصات بردار $r\vec{a} - s\vec{b}$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۴ درستی یا نادرستی هریک از گزاره‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف برای هر دو بردار غیرصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ در فضای $\mathbb{R}^3$، تساوی $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = 0$ همواره برقرار است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ب $\overrightarrow{a}$، $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ سه بردار دلخواه در فضای سه‌بعدی هستند. اگر $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$، آنگاه $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ضرب داخلی

ویژگی‌های ضرب داخلی

۲۵ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف حاصل‌ضرب داخلی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که بر هم عمود هستند، برابر .... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۶ برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برهم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۲۷ معادلهٔ صفحه‌ای که موازی صفحهٔ yoz است و از نقطهٔ $A(2, -1, 3)$ می‌گذرد، برابر با .... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

زاویه بین دو بردار

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۲۸ سه بردار $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ و $\vec{b}=\vec{i}+\vec{k}$ و $\vec{c}=(0,2,1)$ در نظر بگیرید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، $cos\theta$ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b}-\vec{c}$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۲۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف اگر برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ داشته باشیم: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$، در این صورت زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

مرجع ۱: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۰ بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را در نظر بگیرید.

مرجع ۱: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

مرجع ۱: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

ب برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۳۱ زاویه بین بردارهای غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر θ است. در کدام‌یک از موارد زیر حاصل‌ضرب داخلی آنها بیشترین مقدار را دارد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱) $\theta=0$ ۲) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ۳) $\theta=\frac{\pi}{2}$ ۴) $\theta=\frac{\pi}{3}$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۲ مقدار m را طوری بیابید که زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(m,0,2)$ و $\vec{b}=(2,-2,0)$ برابر $\frac{\pi}{3}$ باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۳ بردارهای $\vec{a}=(2,-1,1)$ و $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}$ مفروض‌اند.

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) مختصات بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۴ پاسخ صحیح را از میان کلمات داخل پرانتز انتخاب کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ .... هستند؛ اگر و فقط اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. (برهم عمود - باهم موازی)

۳۵ با فرض اینکه $|\vec{b}|=|\vec{a}|=2$ و زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، برابر 60° باشد، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف) $\vec{a}\cdot\vec{b}$

ب) $|\vec{a}\times\vec{b}|$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۶ کسینوس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(1,0,1)$, $\vec{b}=(-1,1,0)$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۳۷ اگر $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$، آنگاه کدام‌یک از گزینه‌های زیر می‌تواند زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد؟

۱) 45° ۲) 90° ۳) 135° ۴) 180°

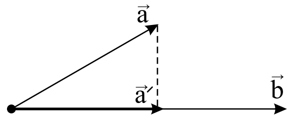
تصویر قائم یک بردار نسبت به بردار دیگر

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۸ بردارهای $\vec{a}=(2,-1,2)$ و $\vec{b}=(1,-1,0)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.

۳۹ اگر $\vec{a}=(1,-3,4)$، $\vec{b}=(3,-4,2)$ و $\vec{c}=(-1,1,4)$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به‌دست آورید.

مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳



مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۰ نشان دهید: تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\vec{a}' = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}$ است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۱ اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۱)$، $\vec{b} = (-۱, ۲, ۰)$ و $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j}$ باشند، تصویر قائم بردار $\vec{a} + \vec{b}$ بر امتداد بردار $\vec{b} - ۲\vec{c}$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۲ اگر $\vec{a} = (۱, -۳, ۴)$ و $\vec{b} = ۳\vec{i} - ۴\vec{j} + ۲\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{a} - \vec{b}$ بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۳ اگر $\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{۳}\vec{k}$ و $\vec{b} = (\sqrt{۳}, ۲, ۱)$ باشد. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و اندازهٔ بردار تصویر را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۴ فرض کنید $\vec{a} = (\frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۲})$ و $\vec{b} = (۱, ۰, ۱)$. تصویر قائم بردار $۲\vec{a} - \vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۴۵ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ بنویسید.

نامساوی کشی - شوارتز

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴۶ برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید؛ $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}||\vec{b}|$. (منظور از $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$) قدرمطلق مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ می‌باشد.)

ضرب خارجی

ویژگی‌های ضرب خارجی

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۴۷ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری که $|\vec{a}| = ۳$, $|\vec{b}| = ۲۶$, $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$ مقدار $\vec{a}\cdot\vec{b}$ را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۴۸ ثابت کنید: دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی هستند اگر و فقط اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۴۹ سه بردار $\vec{a} = (۲, ۳, ۱)$ و $\vec{b} = (-۱, ۱, ۰)$ و $\vec{c} = (۲, ۱, -۲)$ مفروض‌اند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} + \vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

ب حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۵۰ بردارهای $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ را در نظر بگیرید.

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۵۱ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف حاصل‌ضرب خارجی دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ که با هم موازی هستند، برابر بردار .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۵۲ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. سپس شکل صحیح عبارت نادرست را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف برای دو بردار واحد $\vec{i}, \vec{j}$ حاصل‌ضرب خارجی $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{0}$ است.

۵۳ اگر $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۵$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود، چقدر است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۵۴ حاصل عبارت $(\vec{i} \times \vec{j}) \cdot \vec{i}$ برابر صفر است. (درست ـ نادرست)

۵۵ اگر $|\vec{a}| = ۱۰$ و $|\vec{b}| = ۲$ و $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۱۲$ باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار $|\vec{a} \times \vec{b}|$ را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۵۶ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (۳, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, ۲, -۱)$ بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۵۷ برای هر دو بردار دلخواه $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید: مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|^{۲} + \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^{۲} = |\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}$$

۵۸ اگر $\vec{a} = (m, ۲, -۱), \vec{b} = (m-۱, ۱, -۱), |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{۲}$ در این صورت مقدار m را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

محاسبه مساحت اشکال هندسی

۵۹ اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به‌ترتیب ۴ و ۶ بوده و $\vec{a} \cdot \vec{b} = ۱۲$ باشد، مساحت مثلث بناشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست بیاورید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۶۰ اگر $A = (-۱, ۲, ۰)$ و $B = (۱, ۰, -۱)$ و $C = (۰, -۱, ۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۶۱ مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a} = (۳, ۲, ۱)$ و $\vec{b} = (۲, ۰, ۱)$ به وجود می‌آید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۶۲ اگر $A = (۲, -۱, ۳)$ و $B = (۳, ۱, ۴)$ و $C = (-۱, ۱, ۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۶۳ اگر $\overrightarrow{a} = (-۲, ۰, ۱)$ و $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - ۲\overrightarrow{j} + ۳\overrightarrow{k}$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\overrightarrow{a} - \overrightarrow{j}$ و $\overrightarrow{b}$ تولید می‌شود را حساب کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۶۴ اگر مساحت متوازی الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود $۶\sqrt{۳}$ باشد و $|\vec{a}| = ۴$، $|\vec{b}| = ۳$ حاصل $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۶۵ نقاط $A(۱, ۰, ۰)$ و $B(۰, -۲, ۰)$ و $C(۰, ۰, ۳)$ داده شده‌اند. ابتدا حاصل $\vec{AB} \times \vec{AC}$ را محاسبه کرده و سپس به کمک آن مساحت مثلث ABC را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۶۶ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به اندازه‌های ۳ و ۴ با یکدیگر زاویهٔ ۳۰° می‌سازند. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

مساحت مثلثی که توسط دو بردار $(-۲\vec{a})$ و $(-\vec{b})$ ساخته می‌شود را محاسبه کنید.

۶۷ مساحت متوازی‌الاضلاع پدید آمده توسط دو بردار $\overrightarrow{a} = (-۲, ۱, ۰)$ و $\overrightarrow{b} = (۱, -۳, ۲)$ را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۶۸ بردارهای $\overrightarrow{a} = (۰, -۱, ۱)$ و $\overrightarrow{b} = (۲, ۰, ۱)$ را در نظر بگیرید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف حاصل عبارت $\overrightarrow{b} - ۳\overrightarrow{a}$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ب مساحت متوازی‌الاضلاع تولیدشده توسط دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ویژگی‌های ضرب مختلط بردارها

۶۹ مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (۱, m, -۱۱)$، $\vec{b} = (۲, ۳, -۱)$ و $\vec{c} = (۱, -۱, ۳)$ در یک صفحه باشند.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۷۰ اگر $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بردارهای واحد در $\mathbb{R}^{۳}$ باشند، حاصل $\vec{i} \cdot (\vec{j} \times \vec{k})$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۷۱ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$، $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = ۰$ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۷۲ عبارت‌های زیر را کامل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف) اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر .... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷۳ مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a}=(۲,-۱,۳)$, $\vec{b}=(۰,m,-۱)$, $\vec{c}=(۱,-۲,۳)$ در یک صفحه باشند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

محاسبه حجم اشکال

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۷۴ سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند.

الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

۷۵ حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a}=(۱\ ,۰\ ,-۱)$ و $\vec{b}=(۰\ ,۲\ ,۲)$ و $\vec{c}=(۲\ ,-۳\ ,۰)$ تولید می‌شود.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷۶ بردارهای $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$، $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ و $\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}$ بر سه یال یک متوازی‌السطوح منطبق هستند. اگر قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود، اندازهٔ ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۷۷ اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-۱,۱)$، $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,m,-۱)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۷۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می‌شود، برابر .... است.

۷۹ دو بردار $\vec{a}=(-m,-۱,-۲)$ و $\vec{b}=(۰,-۳,m+۲)$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a}-\vec{b}$ و $\vec{a}+\vec{b}$ برهم عمود باشند، آنگاه حجم متوازی السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a}\times\vec{b}$ ساخته می‌شود را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۸۰ حجم متوازی‌السطوح ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{a}=(۰,-۱,۱)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{c}=(۰,-۱,-۱)$ را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

پاسخنامه تشریحی

۱

الف

درست – به‌طور کلی نقطهٔ $(x', y', 0)$ روی صفحهٔ xoy قرار دارد.

۲

الف

۶

۳

الف

$CDFG$

ب

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y = 4 \\ z = 3 \end{cases}$$

پ

$D(2,4,3)$

ت

$y = 2$

۴

الف

نادرست

۵

الف

درست

۶ $A = (2,0,0)$ و $b = (0,-3,4)$

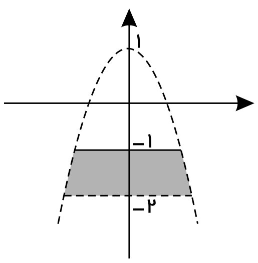
مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با $M = (\frac{2+0}{2}, \frac{0+(-3)}{2}, \frac{0+4}{2}) = (1, \frac{-3}{2}, 2)$

$OM = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + 4} = \sqrt{\frac{29}{4}}$

۷

$Z = 3$

۸ رسم نمودار (به‌طوری که خط و خط چین مشخص باشد.)



۹ الف)

$x^2 \leq y \leq 2$

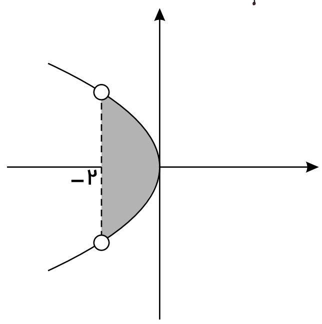
ب)

$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$

۱۰

$(\text{وسط } AB) M = (0, 1, -2) \xrightarrow{C=(-1,3,1)} (\text{طول میانه}) CM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

۱۱



۱۲

$\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$

۱۳

$\vec{a} - ۲\vec{b} = (۲, ۰, -۱) - (۲, ۴, ۲) = (۰, -۴, -۳)\ ,\ |\vec{a} - ۲\vec{b}| = \sqrt{۱۶ + ۹} = ۵$

۱۴ الف) $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ محور yها است. معادلهٔ $x = ۰$ معادلهٔ صفحهٔ yoz که شامل محور yها است.

ب)

$\vec{a} + ۲\vec{b} = (۲, -۱, ۳) + ۲(۱, ۲, ۰) = (۴, ۳, ۳)$

$|\vec{a} + ۲\vec{b}| = \sqrt{۱۶ + ۹ + ۹} = \sqrt{۳۴}$

۱۵

الف

بردار $\vec{a}$ در ناحیهٔ ۵ واقع است.

ب

$۲\vec{a} - \vec{b} = ۲(۱, ۲, -۱) - (۰, ۲, -۱) = (۲, ۲, -۱) \Rightarrow |۲\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۴ + ۴ + ۱} = \sqrt{۹} = ۳$

۱۶

الف

$b = -۳$

ب

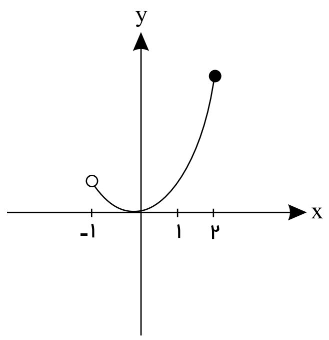
محور zها

پ

نقطهٔ $A = (۰, ۲, ۳)$ و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۲, ۴, ۰)$

۱۷ الف) عرض‌ها یا yها   ب) درست

پ)



ت) طول هر بردار مانند $\vec{a}(a_۱\ , a_۲\ , a_۳)$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}$

بنابراین داریم:

$|\vec{a}| = \sqrt{(۰)^۲ + (-۳)^۲ + (۴)^۲} = \sqrt{۲۵} = ۵$

۱۸

الف

yoz

۱۹ مختصات نقطه $A(۰,۰,۳)$، مختصات وسط AB برابر با $M(\frac{۱}{۲},۰,۲)$ و فاصله تا مبدأ مختصات $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ است.

۲۰

الف

$x=۲$

ب

$(۲,۱,۰)$

پ

صفر

ت

$-۳\vec{k}$ یا $(۰,۰,-۳)$

۲۱ گزینهٔ ۳؛ $(\vec{a}\times\vec{a}=\vec{۰})$

۲۲ الف)

$$\begin{cases} ۱\le x\le ۳\\ y=-۱\\ z=۲\end{cases}$$

ب) $z=k(k\neq ۰)$

۲۳ روش اول:

$$r\vec{a}-s\vec{b}=(۶,-۶,۰)-(۶,-۲,۲)=(۰,-۴,-۲)$$

روش دوم:

$$r\vec{a}-s\vec{b}==(۶\vec{i}-۶\vec{j})-(۶\vec{i}-۲\vec{j}+۲\vec{k})=-۴\vec{j}-۲\vec{k}$$

۲۴

الف

درست

ب

نادرست

۲۵

الف

صفر یا $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$

۲۶ فرض کنیم $\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$ باشد، داریم:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۰\rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta=۰\xrightarrow{|\vec{a}|\neq۰,|\vec{b}|\neq۰}cos\theta=۰\rightarrow\theta=\frac{\pi}{۲}$$

برعکس: اگر دو بردار برهم عمود باشند، یعنی زاویه بین دو بردار ۹۰° باشد، داریم:

$$\theta=\frac{\pi}{۲}\rightarrow\cos\theta=۰\rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta=۰\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=۰$$

۲۷ $x=۲$

۲۸ .

الف

$$\vec{a}=(۲,۳,-۱),\vec{b}=(۱,۰,۱)\rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=(۲\times۱)+(۳\times۰)+((-۱)\times۱)=۱$$
$$|\vec{a}|=\sqrt{(۲)^۲+(۳)^۲+(-۱)^۲}=\sqrt{۴+۹+۱}=\sqrt{۱۴}$$
$$|\vec{b}|=\sqrt{(۱)^۲+۰^۲+(۱)^۲}=\sqrt{۲}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|cos\theta\rightarrow۱=\sqrt{۱۴}\sqrt{۲}cos\theta\rightarrow cos\theta=\frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

ب

$$\vec{d}=\vec{b}-\vec{c}=(۱\,,۰\,,۱)-(۰\,,۲\,,۱)=(۱\,,-۲\,,۰)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{d}=(۲\,,۳\,,-۱)\cdot(۱\,,-۲\,,۰)=۲-۶+۰=-۴$$
$$|\vec{d}|=\sqrt{۱^۲+(-۲)^۲+۰^۲}=\sqrt{۵}$$
$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|^۲}\vec{d}=\frac{-۴}{۵}(۱,-۲,۰)$$

۲۹

الف

صفر

۳۰

الف

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=۲+۱+۰=۳\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\to\theta=۴۵$$

ب

بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}\times\vec{b}$

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۲,-۱,۲)\times(۱,-۱,۰)=(۲,۲,-۱)$$

۳۱ گزینهٔ «۱»: $\theta=۰$

۳۲

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta\Rightarrow ۲m=(\sqrt{m^۲+۴})(۲\sqrt{۲})(\frac{۱}{۲})\Rightarrow ۴m^۲=۲m^۲+۸$$
$$\Rightarrow m^۲=۴\Rightarrow\begin{cases} m=۲ & \text{ق ق}\\ m=-۲ & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۳۳ الف)

$$\vec{a}-\vec{b}=(۱,۰,۱)$$
$$\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta\longrightarrow ۱=\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}\times\cos\theta\longrightarrow\cos\theta=\frac{۱}{۲}\longrightarrow\theta=۶۰^\circ$$

ب)

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & -۱ & ۰\end{vmatrix}=۱\vec{i}+۱\vec{j}-\vec{k}=(۱,۱,-۱)$$

پاسخ نهایی به یکی از دو صورت $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ یا $(۱,۱,-۱)$ یا مضاربی (غیرصفر) از بردار حاصل مورد پذیرش است.

۳۴

الف

برهم عمود

۳۵

الف) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=۲\times۲\times\frac{۱}{۲}=۲$

ب) $|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=۲\times۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۲\sqrt{۳}$

۳۶

$$|\vec{a}|=\sqrt{۲}\ ,\ \ |\vec{b}|=\sqrt{۲}\ ,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=-۱\Rightarrow\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-۱}{(\sqrt{۲})(\sqrt{۲})}=\frac{-۱}{۲}$$

۳۷ گزینهٔ ۳ یا ۱۳۵°

۳۸ تصویر قائم بردار a بر b برابر است با:

$$\vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^۲}\vec{b}=\frac{۲+۱+۰}{۱+۱+۰}(۱,-۱,۰)=\frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰)$$

۳۹

$$\vec{b}+\vec{c}=(۲,-۳,۶)\ ,\ \vec{a'}=\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})}{|(\vec{b}+\vec{c})|^۲}(\vec{b}+\vec{c})=\frac{۳۵}{۴۹}(۲,-۳,۶)$$

۴۰ روش اول: بردار $\vec{a}'$ با بردار $\vec{b}$ موازی است، $\vec{a}' || \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b}$.

$$(\vec{a}-\vec{a}') \perp \vec{b} \Rightarrow (\vec{a}-\vec{a}')\cdot\vec{b} = ۰ \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} - (k\vec{b})\cdot\vec{b} = ۰ \Rightarrow k = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم‌الزاویه، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را θ می‌نامیم، $\cos\theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}|\cos\theta$

$$\vec{a}' = k\vec{a} \Rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|^{۲}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}} \xrightarrow{\vec{a}'=k\vec{b}} \vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b}$$

۴۱

$$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} = (۱,۱,۱)$$
$$\vec{v} = ۲\vec{c} - \vec{b} = (۳,-۴,۰) \Rightarrow |\vec{v}| = ۵\ ,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = -۱$$
$$\vec{u}' = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^{۲}}\vec{v} \Rightarrow \vec{u}' = (-\frac{۳}{۲۵}, \frac{۴}{۲۵}, ۰)$$

۴۲

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-۲,۱,۲)$$
$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\times\vec{d}}{|\vec{d}|^{۲}}\vec{d} = \frac{(-۲-۳+۸)}{(-۲)^{۲}+۱^{۲}+۲^{۲}}(-۲,۱,۲) = (\frac{-۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

۴۳

$$\vec{a} = (-۱,۰,-\sqrt{۳})$$
$$\vec{b}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^{۲}}a = \frac{-۲\sqrt{۳}}{۴}(-۱,۰,-\sqrt{۳}) = (\frac{\sqrt{۳}}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲})\quad , \quad |\vec{b}'| = \sqrt{۳}$$

۴۴

$$\vec{c} = ۲\vec{a} - \vec{b} = (۳,-۱,۱) - (۱,۰,۱) = (۲,-۱,۰)$$
$$\left.\begin{array}{l} \vec{c}\cdot\vec{b} = ۲+۰+۰ = ۲ \\ |\vec{b}| = \sqrt{۱+۰+۱} = \sqrt{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{c}' = \frac{\vec{c}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} = \frac{۲}{۲}(۱,۰,۱) = (۱,۰,۱)$$

۴۵

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^{۲}}\vec{b} = \frac{۳}{۲}(۱,-۱,۰) = (\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲}, ۰)$$

۴۶ روش اول: فرض می‌کنیم θ زاویه بین دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ باشد، در این صورت:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta| \overset{|\cos\theta|\le ۱}{\overbrace{\le}} |\vec{a}||\vec{b}|(۱) = |\vec{a}||\vec{b}|$$

روش دوم: فرض می‌کنیم $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ و $\vec{b} = (b_۱, b_۲, b_۳)$ در این صورت:

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}|^{۲} \le |\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}$$
$$\Leftrightarrow (a_۱b_۱ + a_۲b_۲ + a_۳b_۳)^{۲} \le (a_۱^{۲}+a_۲^{۲}+a_۳^{۲})(b_۱^{۲}+b_۲^{۲}+b_۳^{۲}) \Leftrightarrow a_۱^{۲}b_۱^{۲} + a_۲^{۲}b_۲^{۲} + a_۳^{۲}b_۳^{۲} + ۲a_۱b_۱a_۲b_۲ + ۲a_۱b_۱a_۳b_۳ + ۲a_۲b_۲a_۳b_۳$$
$$\Leftrightarrow ۰ \le a_۱^{۲}b_۲^{۲} - ۲a_۱b_۱a_۲b_۲ + a_۲^{۲}b_۱^{۲}$$
$$+a_۱^{۲}b_۳^{۲} - ۲a_۱b_۱a_۳b_۳ + a_۳^{۲}b_۱^{۲} + a_۲^{۲}b_۳^{۲} - ۲a_۲b_۲a_۳b_۳ + a_۳^{۲}b_۲^{۲}$$
$$\le a_۱^{۲}b_۱^{۲} + a_۱^{۲}b_۲^{۲} + a_۱^{۲}b_۳^{۲} + a_۲^{۲}b_۱^{۲} + a_۲^{۲}b_۲^{۲} + a_۲^{۲}b_۳^{۲} + a_۳^{۲}b_۱^{۲} + a_۳^{۲}b_۲^{۲} + a_۳^{۲}b_۳^{۲} \Leftrightarrow ۰ \le (a_۱b_۲ - a_۲b_۱)^{۲} + (a_۱b_۳ - a_۳b_۱)^{۲} + (a_۲b_۳ - a_۳b_۲)^{۲}$$

چون رابطهٔ اخیر همواره درست بوده و روابط بالا برگشت‌پذیرند پس حکم همواره برقرار است.

۴۷

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow ۷۲ = ۳\times۲۶\times\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱۲}{۱۳} \to \cos\theta = \pm\sqrt{۱-(\frac{۱۲}{۱۳})^{۲}} = \pm\frac{۵}{۱۳}\ \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۳\times۲۶\times(\pm\frac{۵}{۱۳}) = \pm۳۰$$

۴۸

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{o} \Leftrightarrow |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{o}| \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = ۰ \xleftrightarrow{|\vec{a}|\neq ۰\ ,\ |\vec{b}|\neq ۰} \sin\theta = ۰ \Leftrightarrow \theta = ۰ \vee \theta = \pi \Leftrightarrow \vec{a}||\vec{b}$$

۴۹

الف

بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲) = (-۹,۴,-۷)$$

ب حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec a$ و $\vec b$ و $\vec c$ برابر است با:

$$V=|a\cdot(\vec b\times\vec c)|=|(۲,۳,۱)\cdot(-۲,-۲,-۳)|=|-۱۳|=۱۳$$

۵۰ الف)

$$\cos\theta=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\frac{۳}{۳\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\to\theta=\frac{\pi}{۴}$$

ب) بردار عمود بر دو بردار a و b برابر است با:

$$\vec a\times\vec b=(۲,-۱,۲)\times(۱,-۱,۰)=(۲,۲,-۱)$$

۵۱

الف صفر

می‌دانیم دو بردار غیر صفر $\vec a$ و $\vec b$ با هم موازی‌اند اگر و فقط اگر $\vec a\times\vec b=۰$.

$$\vec a\times\vec b=۰\Leftrightarrow|\vec a\times\vec b|=۰\Leftrightarrow|a||b|\sin\theta=۰\Leftrightarrow\sin\theta=۰\Leftrightarrow\theta=۰ \text{ یا } \theta=\pi\Leftrightarrow\vec a||\vec b$$

۵۲ .

الف نادرست، زیرا:

$$\vec i\times\vec j=(۱,۰,۰)\times(۰,۱,۰)=(۰,۰,۱)=\vec k$$

۵۳

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta\to۱۰=۳\times۵\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\sin\theta=\sqrt{۱-\cos^۲\theta}}\sin\theta=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

مساحت مثلثی که توسط دو بردار و تولید شود برابر است با: $\frac{۱}{۲}|\vec a\times\vec b|$

$$|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta=۳\times۵\times\frac{\sqrt{۵}}{۳}\Rightarrow|\vec a\times\vec b|=۵\sqrt{۵}$$

$$S_\Delta=\frac{۱}{۲}|\vec a\times\vec b|=\frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

۵۴ درست

۵۵

$$\vec a\cdot\vec b=|\vec a||\vec b|\cos\theta\quad\to\quad۱۲=۱۰\times۲\times\cos\theta\quad\to\quad\cos\theta=\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\theta=\sqrt{۱(\frac{۳}{۵})^۲}=\frac{۴}{۵}$$

$$|\vec a\times\vec b|=|\vec a||\vec b|\sin\theta=۲\times۱۰\times\frac{۴}{۵}=۱۶$$

۵۶

$$\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}i&j&k\\۳&-۱&۲\\۱&۲&-۱\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}-۱&۲\\۲&-۱\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}۳&۲\\۱&-۱\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}۳&-۱\\۱&۲\end{vmatrix}$$

$$\vec a\times\vec b=-۳\vec i+۵\vec j+۷\vec k=(-۳,۵,۷)$$

۵۷

$$\left|\vec a\times\vec b\right|^۲+\left(\vec a\cdot\vec b\right)^۲=|\vec a|^۲|\vec b|^۲\sin^۲\theta+|\vec a|^۲|\vec b|^۲\cos^۲\theta=|\vec a|^۲|\vec b|^۲(\sin^۲\theta+\cos^۲\theta)=|\vec a|^۲|\vec b|^۲$$

۵۸

$$\vec a\times\vec b=-\vec i+\vec j+(۲-m)\vec k \text{ یا } (-۱,۱,۲-m)\Rightarrow\sqrt{۱+۱+(۲-m)^۲}=\sqrt{۲}\Rightarrow m=۲$$

۵۹

$$\cos\theta=\frac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a||\vec b|}=\frac{۱۲}{۴\times۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{۳}$$

روش اول:

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}|\vec a\times\vec b|=\frac{۱}{۲}|\vec a||\vec b|\sin\theta=\frac{۱}{۲}\times۴\times۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$|\vec a\times\vec b|^۲+(\vec a\cdot\vec b)^۲=|\vec a|^۲|\vec b|^۲\to|\vec a\times\vec b|^۲+(۱۲)^۲=(۴)^۲(۶)^۲\to|\vec a\times\vec b|=۱۲\sqrt{۳}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|=۶\sqrt{۳}$$

۶۰

$$\vec{AB}=(۲,-۲,-۱)\ ,\ \vec{AC}=(۱,-۳,۱)$$

$$ABC\text{مساحت}: S=\frac{۱}{۲}\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right|=\frac{۱}{۲}|(-۵,-۳,-۴)|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰}=\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$$

۶۱

$$\vec{a}\times\vec{b}=(۳,۲,۱)\times(۲,۰,۱)=(۲,-۱,-۴)$$

$$S=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\sqrt{۴+۱+۱۶}=\sqrt{۲۱}$$

۶۲

$$\vec{AB}=(۱,۲,۱),\vec{AC}=(-۳,۲,-۳)\Rightarrow\vec{AB}\times\vec{AC}=(-۸,۰,۸)\ \Rightarrow|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{۶۴+۰+۶۴}=۸\sqrt{۲}$$

$$S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=۴\sqrt{۲}$$

۶۳

$$\vec{u}=\vec{a}-\vec{j}=(-۲,-۱,۱)\ ,\ \vec{u}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۲ & -۱ & ۱\\ ۱ & -۲ & ۳\end{vmatrix}$$

$$=-\vec{i}+۷\vec{j}+۵\vec{k}\ ,\ |\vec{u}\times\vec{b}|=\sqrt{۷۵}\ ,\ S=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

۶۴ روش اول:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=۶\sqrt{۳}\quad,\quad \sin\theta=\frac{۶\sqrt{۳}}{۴\times۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\to\cos\theta=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$a\cdot(a-b)=|\vec{a}|^{۲}-\vec{a}\cdot\vec{b}=۴^{۲}-۴\times۳\times(\pm\frac{۱}{۲})=۱۶\mp۶$$

روش دوم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^{۲}=|\vec{a}|^{۲}|\vec{b}|^{۲}-(\vec{a}\cdot\vec{b})^{۲}\Rightarrow(۶\sqrt{۳})^{۲}=۴^{۲}\times۳^{۲}-(\vec{a}\cdot\vec{b})^{۲}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\pm۶$$

۶۵

$$\left.\begin{matrix}\vec{AB}=(-۱,-۲,۰)\\ \vec{AC}=(-۱,۰,۳)\end{matrix}\right\}\Rightarrow\vec{AB}\times\vec{AC}=(-۶,۳,-۲)\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{۱}{۲}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۳۶+۹+۴}=\frac{۷}{۲}$$

۶۶

$$S=\frac{۱}{۲}\left|(-۲\vec{a})\times\left(-\vec{b}\right)\right|\longrightarrow S=\frac{۱}{۲}\times۲\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$S=|\vec{a}||\vec{b}|\sin ۳۰^\circ=۳\times۴\times\frac{۱}{۲}=۶$$

۶۷

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -۲ & ۱ & ۰\\ ۱ & -۳ & ۲\end{vmatrix}=۲i+۴j+۵k=(۲\ ,۴\ ,۵)$$

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{۴+۱۶+۲۵}=\sqrt{۴۵}=(۳\sqrt{۵})$$

۶۸

الف

$$(۰,-۳,۳)-(۲,۰,۱)=(-۲,-۳,۲)$$

ب

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{i}+۲\vec{j}+۲\vec{k}\to S=|\vec{a}\times\vec{b}|=۳$$

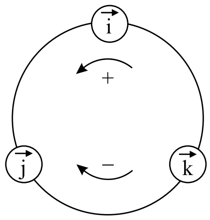
۶۹

$$\vec{b}\times\vec{c}=(۲,۳,-۱)\times(۱,-۱,۳)=(۸,-۷,-۵)$$

شرط در یک صفحه بودن: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=۰\to(۱,m,-۱۱)\cdot(۸,-۷,-۵)=۸-۷m+۵۵=۰\to m=۹$

۷۰

مطابق شکل زیر $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$ است.



$$\vec{i}\cdot(\underbrace{\vec{j}\times\vec{k}}_{\vec{i}})=\vec{i}\cdot(\vec{i})=|\vec{i}|^2=1$$

۷۱

الف درست

۷۲ .

الف صفر

$$K=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

۷۳

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})=0\to(0,m,-1)\cdot((3,-3,-3)=0$$

$$\to -3m+3=0\to m=1$$

۷۴ الف) برداری عمود بر دو بردار $-2\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$(-2\vec{b})\times\vec{c}=(2,-2,0)\times(2,1,-2)=(4,4,6)$$

ب) حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|(2,3,1)\cdot(-2,-2,-3)|=13$$

۷۵ حجم متوازی‌السطوح پدید آمده، توسط سه بردار $\vec{a}=(a_1\,,a_2\,,a_3)$، $\vec{b}=(b_1\,,b_2\,,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1\,,c_2\,,c_3)$ را می‌توان از دو رابطه زیر به دست آورد.

$$1)\ k=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$$

$$2)\ k=\left|\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right|$$

در این تمرین از هر دو روش حجم متوازی‌السطوح را به دست می‌آوریم.

روش اول:

$$(\vec{b}\times\vec{c})=(6\,,4\,,-4)$$

$$v=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|(1\,,0\,,1)\cdot(6\,,4\,,-4)|=10$$

روش دوم:

$$v=\left|\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 2\\ 2 & -3 & 0\end{vmatrix}\right|=10$$

۷۶ حجم متوازی‌السطوح برابر با حاصل‌ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است.

حجم متوازی‌السطوح برابر $2=|(1,1,0)\cdot(1,1,-1)|=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|$ است.

مساحت قاعده این متوازی‌السطوح که توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود برابر با: $|\vec{b}\times\vec{c}|=\sqrt{3}$ است. در نتیجه:

$$h=\frac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

۷۷

$$V=0\Rightarrow|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}m & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & m & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow m^2-2m+1=0\Rightarrow m=1$$

۷۸

الف یک

۷۹ بخش اول:

$$(\vec{a}-\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b}) \Rightarrow \begin{cases} (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=۰ \begin{cases} (-m,۲,-m-۴)\cdot(-m,-۴,m)=۰ \Rightarrow m=-۲ \\ |\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲=۰ \rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}| \rightarrow m=-۲ \end{cases} \\ \text{چهارضلعی بنا شده روی} \\ \text{بردارهای } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ لوزی است} \qquad \rightarrow |\vec{a}|=|\vec{b}| \rightarrow m=-۲ \end{cases}$$

بخش دوم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=(-۶,۰-۶) \Rightarrow \begin{cases} V=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})|=۷۲ \\ \begin{vmatrix} ۲ & -۱ & -۲ \\ ۰ & -۳ & ۰ \\ -۶ & ۰ & -۶ \end{vmatrix} = ۷۲ \Rightarrow V=۷۲ \\ h=|\vec{a}\times\vec{b}| \rightarrow V=Sh=|(\vec{a}\times\vec{b})|^۲=۷۲ \end{cases}$$

۸۰ روش اول:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix} ۰ & -۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & -۱ & -۱ \end{vmatrix}=-۲ \Rightarrow V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|-۲|=۲$$

روش دوم:

$$\vec{b}\times\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-۱,۱,-۱) \Rightarrow \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=۰-۱-۱=-۲ \Rightarrow V=|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})|=|-۲|=۲$$