بچه‌ی نوتروفیلی من ، سلام 💜

به رسم همیشه که توی این مسیر کنارت بودیم ، این بار هم یک مجموعه سوال برای شب امتحانت آماده کردیم که با کار کردنشون تسلطت رو افزایش بدی و به امید خدا بری واسه نمره‌ی ۲۰ 😍
جان دلم نترسی از سختی امتحانات اگه به کتاب درسی کاملا مسلط باشی و این مجموعه سوال رو هم به عنوان مکمل حل کنی مطمئن باش نمره‌ت بهتر از چیزی که فکرش رو کنی میشه ✌️
یادت باشه امتحانات نهایی رو جدی رو بگیری چون با نمره ی خوب این امتحانات کار کنکورت رو خیلی آسون میکنی
یه حرف دلی هم دارم با بچه هایی که کمی دیرتر شروع کردن ...
مبادا خودت رو ببازی بچه‌ی من امید دارم بهت و میدونم اگه خوب بخونی قطعا میتونی نمره ی عالی بگیری پس پرقدرت بریم واسه ترکوندن اولین امتحان 💪
یادت نره این فایل رو برای اون دوستت که بهش احتیاج داره بفرستی و جزئی از این زنجیره ی عشق و مهربونی باشی 🩷

پ ن: مرسی که با وجود درگیری‌های ذهنی و عدم تمرکزی که ماجرای کارت ورود به جلسه براتون به همراه داشت ، همچنان قوی موندی و ادامه میدی 💜
به امید روزی که اینجا به عنوان همکار کنار خانواده‌ی بزرگ نوتروفیل باشی

دوست همیشگی تو ، نوتروفیل

روش مطالعه :

قبل از هر چیزی نیاز به یه درسنامه ی خلاصه که البته تمام نکات رو پوشش داده باشه ، داری .
اگر در مبحثی هم خیلی ضعیف بودی میتونی از کلیپ های آموزشی به جای درسنامه استفاده کنی .
بعد از این باید بری سراغ کتاب درسی و به تمام تمرین هاش مسلط بشی .
از حل این مجموعه سوال خفنی هم که گذاشتیم برات غافل نشو .
یادت باشه هندسه درسی حفظی نیست و برای تسلط بیشتر فقط باید سوال حل کنی و تمرین کنی تا ایرادهات رفع بشه .

سوالات مربوط به هر فصل از این شماره ها شروع میشه

فصل۱: ۱
فصل۲: ۶۲
فصل۳: ۱۱۹

بارم بندی هندسه ۳ رشته ریاضی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور و دی
۱	کل	۱۰	۵	۶
۲	تا صفحه ۴۶	۱۰	۴	۸
	صفحه ۴۶ به بعد		۴	
۳	کل		۷	۶
جمع		۲۰	۲۰	۲۰

هندسه ۳ رشته ریاضی

۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 2x-y & 5 \\ z & 4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = B$ باشند، حاصل $x^2 - 2y + z$ را به دست آورید.

۲ در تساوی $\begin{bmatrix} x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = 0$، مقدار x را بیابید.

۳ ماتریس های $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} x+1 & y+2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $A + B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مقادیر x و y را به دست آورید.

۴ با استفاده از ویژگی‌های ضرب ماتریس‌ها و ماتریس همانی I درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید:

$$(A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$$

۵ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف اگر $b_{ij} = \begin{cases} i+1 & ; i = j \\ j-2 & ; i < j \\ 1 & ; i > j \end{cases}$ و $B = [b_{ij}]_{3\times 3}$، ماتریس B را به‌صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب ماتریس $(B^2 + 2I)$ را محاسبه کنید (I ماتریس همانی مرتبه سه است).

۶ اگر $A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ m-2 & n \end{bmatrix}$ ماتریسی اسکالر باشد، مقادیر m و n را بیابید.

۷ اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

۸ اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A = [3i - 2j]_{3\times 3}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ باشند:

الف ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب ماتریس B^2 را محاسبه کنید.

۹ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & m+1 \\ 2n+4 & 5 \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A + I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است)

۱۰ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با .... است.

۱۱ اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ b & -1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ مقادیر a و b را طوری به دست آورید که $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

۱۲ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$، مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A \times B$ ماتریسی قطری باشد.

۱۳ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$، در این صورت حاصل $x + ۲y + ۳z$ را به دست آورید.

۱۴ دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & m-۲ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ n+۱ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ m & ۰ & n \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

۱۵ اگر $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس ۳×۳ با درایه‌های $a_{ij} = \begin{cases} i-j & ; i<j \\ ۲ & ; i=j \\ i+j & ; i>j \end{cases}$ باشد، درایه‌های $a_{۳۳}$، $a_{۳۱}$ و $a_{۱۲}$ را به دست آورید.

۱۶ اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقادیر m و n را طوری بیابید که رابطهٔ $A^۲ = mA + nI_۲$ برقرار باشد. ($I_۲$ ماتریس همانی است)

۱۷ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} x-۱ & ۸ \\ ۳ & z+۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} y+۱ & x-۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، مقدار $x + y + z$ را بیابید.

۱۸ اگر ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \\ ۰ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$ باشند، مقادیر a و b را چنان بیابید که داشته باشیم: $A^۲ - B = \bar{O}$ ($\bar{O}$ ماتریس صفر است)

۱۹ اگر $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A^۷$ را به دست آورید.

۲۰ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$ و $A = B$، در این صورت حاصل $(x + y + z)$ را بیابید.

۲۱ در معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix} ۳x & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$ مقدار x را بیابید.

۲۲ اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به‌صورت $a_{ij} = \begin{cases} i.j & ; i>j \\ i^۲ & ; i=j \\ ۲i-j & ; i<j \end{cases}$ تعریف شده باشد، ماتریس $۲A - ۳I$ را به دست آورید.

جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید.

۲۳ ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن باهم برابر باشند، ماتریس .... می‌نامیم.

۲۴ حاصل‌ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ....

۲۵ باتوجه‌به دستگاه $\begin{cases} ۲mx + ۳y = ۱ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف حدود m را طوری بیابید که دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲mx + ۳y = ۱ \\ ۲x - y = ۳ \end{cases}$ دارای جواب منحصربه‌فرد باشد.

ب جواب دستگاه مذکور را به ازای $m = ۲$ با استفاده از ماتریس وارون محاسبه کنید.

۲۶ اگر A ماتریسی 3×3 باشد و $|A|=-2$، حاصل $|2A|+|A^{-1}|^3$ را محاسبه کنید.

۲۷ دستگاه $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ 2y-x=1 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۲۸ در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید.

۲۹ اگر $\begin{bmatrix} -5 & |A| \\ 4|A| & 1 \end{bmatrix} = 3A$ باشد، مقدار $|A^{-1}|$ را محاسبه کنید.

۳۰ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه $\begin{cases} mx+9y=m+1 \\ 4x+my=-4 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۳۱ ماتریس $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} i^2-j & ;i>j \\ i+j & ;i\leq j \end{cases}$ داده شده است، ماتریس A^{-1} را به دست آورید.

۳۲ ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases} 1 & ;i=j \\ 0 & ;i\neq j \end{cases}$ معرفی شده است. مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطهٔ $k|kA|=625$ برقرار باشد.

۳۳ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & |A| \\ 1 & |A| & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید.

۳۴ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$، حاصل $|-\frac{1}{2}A^4|$ را به دست آورید.

۳۵ اگر $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$، نشان دهید:

$$(5A)^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$$

۳۶ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $||A|A|$ را بیابید.

۳۷ در دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$، اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$ آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد. (درست - نادرست)

۳۸ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ باشد، وارون ماتریس $A-2I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است)

۳۹ دستگاه $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 7x+4y=15 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۴۰ اگر A ماتریسی 3×3 و $|A|=4$ باشد، آنگاه حاصل $||A|A|$ را به دست آورید.

۴۱ اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} 2x-y=4 \\ -4x+3y=2 \end{cases}$ در نظر بگیریم، از تساوی $AX=B$ ماتریس X را به دست آورید.

۴۲ اگر $A = [2i - 3j]_{3\times 2}$ و $B_{2\times 3} = \begin{cases} -1 & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$ باشد، دترمینان ماتریس AB را به دست آورید.

۴۳ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ (m-1)x + y = 3 \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۴۴ ماتریس $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مفروض است. ماتریس A را به دست آورید.

۴۵ جواب دستگاه زیر را در صورت وجود، با استفاده از ماتریس وارون بیابید:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

۴۶ اگر $2A = \begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، دراین‌صورت حاصل $|A^{-1}|$ را بیابید.

۴۷ اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ و I_3 ماتریس همانی 3×3 باشد، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|A \times B| + |2I_3| =$$

۴۸ دستگاه زیر را با استفاده از A^{-1} حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

۴۹ مقادیر x و y را از معادلهٔ زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & y-2 \end{bmatrix}$$

۵۰ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $|A|$ را بیابید.

ب ماتریس وارون A را حساب کنید.

به سوالات زیر پاسخ دهید:

۵۱ به‌ازای چه مقداری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ mx + 6y = -4 \end{cases}$ فاقد جواب است؟

۵۲ دستگاه معادلات $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 2x + 6y = -4 \end{cases}$ را با استفاده از A^{-1} حل کنید.

۵۳ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & -۱\\ ۰ & ۱ & -۲\\ ۰ & ۳ & ۴\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & -۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|B^۲|+|A|$ را بیابید.

۵۴ معادلهٔ ماتریسی $\begin{bmatrix}x & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ -۱ & ۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ را حل کنید.

۵۵ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & m-۲\\ n+۱ & ۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۱\\ m & ۰ & n\\ ۳ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ مفروض‌اند. اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل $|B|+|A|$ را محاسبه کنید.

۵۶ جواب دستگاه زیر را در صورت وجود با استفاده از ماتریس وارون بیابید.

$$\begin{cases}۳x-۵y=-۱\\ ۲x+y=۸\end{cases}$$

۵۷ اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۴ & ۱\\ -۱ & ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & -۱\\ ۰ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس BA را به دست آورید.

۵۸ دستگاه $\begin{cases}۳x-۴y=۱\\ -x+۲y=۱\end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۵۹ مقدار m را طوری بیابید که ماتریس $A=\begin{bmatrix}m & ۴\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر نباشد.

۶۰ مقدار m را چنان بیابید که دستگاه $\begin{cases}mx+۳y=-۳\\ ۴x+(m+۴)y=۲\end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۶۱ دستگاه $\begin{cases}(m-۳)x+۳y=m\\ ۴x+(m+۱)\,y=۲\end{cases}$ به ازای چه مقادیر m دارای جواب منحصربه‌فرد است؟

۶۲ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند، نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

۶۳ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر و از d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید.)

۶۴ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشند. (بحث کنید)

۶۵ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

۶۶ نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

۶۷ نقاط A، B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. (بحث کنید)

۶۸ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای را بیابید که از A به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر باشد. بحث کنید.

۶۹ مکان هندسی مرکز توپی که روی یک سطح صاف در امتداد یک خط مستقیم می‌غلتد را با رسم شکل بیابید.

درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۷۰ مکان هندسی، مجموعهٔ نقاطی از صفحه (یا فضا) است، که همهٔ آن‌ها یک ویژگی مشترک داشته باشند و همچنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

۷۱ هرگاه صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، شکل حاصل یک دایره است.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۷۲ مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع d و d' به یک‌فاصله‌اند، نیمساز زاویهٔ بین آن دو خط است.

۷۳ صفحه‌ای با مولد سطح مخروط دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی، یک بیضی است.

۷۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O\,(-۱,-۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x + y = ۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۷۵ وضعیت خط $x + y = ۳$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲y - ۳ = ۰$ را تعیین کنید.

۷۶ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰\,,\,۱)$ بوده و با دایرهٔ $(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶$ مماس داخل باشد.

۷۷ معادلهٔ دایره‌ای به‌صورت $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۶y + ۶ = ۰$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید.

۷۸ وضعیت خط $۳x + ۴y = ۰$ را نسبت به دایره به معادله $(x-۲)^۲ + (y+۲)^۲ = ۹$ مشخص کنید.

۷۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و روی خط $۳x + ۴y + ۶ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۵}$ جدا کند، سپس محل تلاقی آن دایره با محور yها را بیابید.

۸۰ وضعیت دو دایره به معادلات $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y - ۶ = ۰$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه راه‌حل)

۸۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۱\,,\,۰)$ مرکز آن بوده و بر خط $x = -۳$ مماس باشد.

۸۲ اگر دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$ و $(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = m^۲$ مماس خارج باشد، مقدار m را بیابید.

۸۳ مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + c = ۰$ بر دایره $(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$ مماس بیرون باشد.

۸۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O'(۲,۱)$ بوده و بر خط $۳x + ۴y = -۵$ مماس باشد.

۸۵ معادلهٔ دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۰\,,\,۳)$ و بر خط $۳x - ۴y = ۳$ مماس باشد.

۸۶ وضعیت خط $x + y = ۱$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - ۲ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۸۷ دایره‌های $x^۲ + y^۲ - ۲x = ۴$ و $x^۲ + y^۲ = ۴$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟

۸۸ وضعیت دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰$ با دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.

۸۹ معادلهٔ گستردهٔ دایرهٔ $C(O,R)$ به شکل $x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x - ۴ = ۰$ است.

الف مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ C را محاسبه کنید.

ب آیا نقطهٔ $A(۰,۳)$ روی محیط دایرهٔ C قرار دارد؟ چرا؟

۹۰ در نقطهٔ $A(۲,۳)$ روی دایره به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x-۲y=۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادلهٔ این خط مماس را به دست آورید.

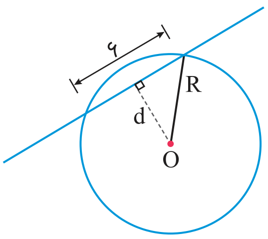
۹۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x+۴y=۱$ مماس بوده و مرکز آن $(۱,۲)$ باشد.

۹۲ در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r=\dfrac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$ است.

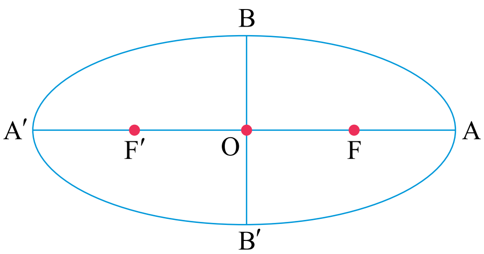
۹۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۲,-۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x-۴y+۱۰=۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.

۹۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۰,۱)$ مرکز آن بوده و روی خط به معادلهٔ $x+y=۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ جدا کند.

۹۵ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ دایره را بنویسید.

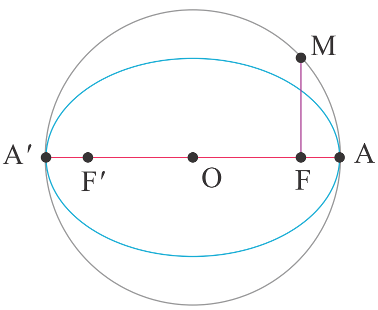


۹۶ اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



۹۷ قطر دایرهٔ C مانند شکل، قطر بزرگ بیضی است و از کانون F عمودی بر AA' رسم کرده‌ایم تا دایره را در نقطه‌ای مانند M قطع کند.

ثابت کنید MF با نصف قطر کوچک بیضی برابر است.



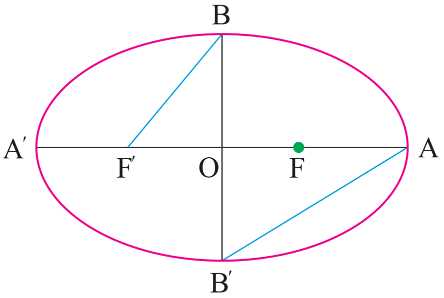
۹۸ در یک بیضی افقی به مرکز مبدا مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است:

الف خروج از مرکز بیضی را بیابید.

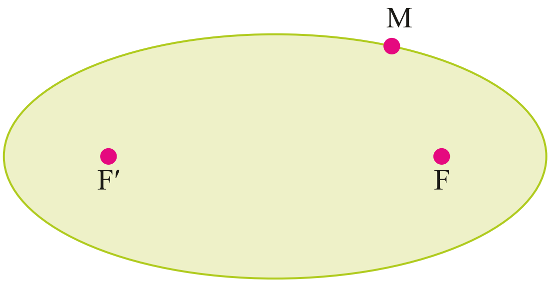
ب مختصات کانون‌ها (F' , F)، مختصات دو سر قطر بزرگ (A' , A) و دو سر قطر کوچک (B' , B) را به دست آورید.

پ بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.

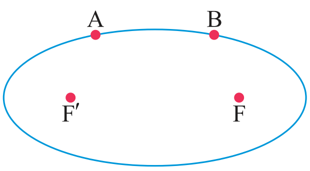
۹۹ در بیضی زیر، خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید.



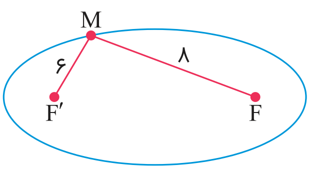
۱۰۰ در شکل زیر، نقطهٔ M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده است. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطهٔ M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطهٔ F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند. ثابت کنید $NF' = MF'$.



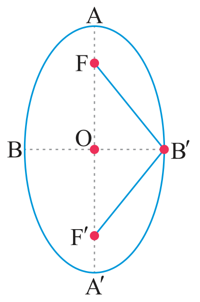
۱۰۱ در شکل زیر دو نقطه A و B روی بیضی با کانون های F و F' قرار دارند. اگر $AF' = BF$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه ای مانند M قطع کنند، نشان دهید مثلث FMF' متساوی الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.



۱۰۲ در شکل زیر نقطه M روی بیضی با کانون های F و F' قرار دارد، به‌طوری‌که $MF = ۸$ و $MF' = ۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید.



۱۰۳ در بیضی زیر کانون‌ها به مختصات $F(۱, ۵)$ و $F'(۱, ۱)$ و یک رأس قطر بزرگ آن $A(۱, ۶)$ می‌باشد:

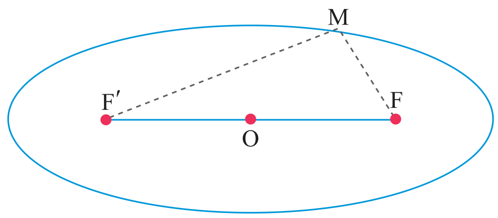


الف فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب معادله قطر کوچک بیضی را بنویسید.

پ مساحت مثلث $B'FF'$ را به دست آورید.

۱۰۴ نقطهٔ M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد که فاصلهٔ آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است:

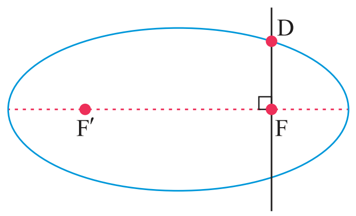


الف نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

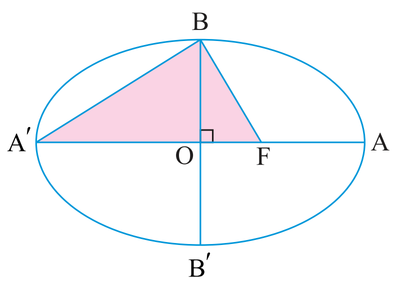
ب طول MF را به دست آورید (F' و F کانون‌های بیضی هستند و $MF < MF'$).

۱۰۵ بیضی با قطر بزرگ ۲a، قطر کوچک ۲b و کانون‌های F و F' مطابق شکل زیر مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطهٔ D قطع کند، ثابت کنید:

$$DF = \frac{b^2}{a}$$



۱۰۶ اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی زیر به ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:



الف مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)

ب مساحت مثلث هاشورخورده $(\overset{\Delta}{BFA'})$ چقدر است؟

۱۰۷ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴, -۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید.

ب مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید.

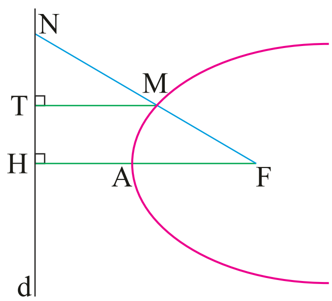
۱۰۸ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف مختصات رأس، کانون و معادلهٔ خط هادی سهمی $x^۲ - ۴y + ۸x = ۰$ را به دست آورید.

ب نمودار سهمی را با استفاده از نقاط کمکی رسم کنید.

۱۰۹ در شکل زیر، سهمی با رأس A، کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطهٔ N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{۲NT}{TH} = \frac{FN}{FA}$



۱۱۰ سهمی با رأس $A(۱, ۲)$ و کانون $F(۱, -۲)$ مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.

۱۱۱ اگر اندازه گودی (عمق) یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصله کانونی این دیش چه تغییری می کند؟ (با ارائه راه حل)

۱۱۲ مختصات نقاط برخورد سهمی $y^۲ + ۷x + ۵ = ۰$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را به دست آورید.

۱۱۳ به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف معادله سهمی را بنویسید که $A(۲, ۳)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x = ۳$ باشد.

ب مختصات کانون سهمی را بیابید.

پ مختصات نقطه برخورد سهمی با محور طول‌ها را حساب کنید.

۱۱۴ سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ واحد دایره‌ای رسم می‌کنیم، معادلهٔ دایره را بنویسید و سپس مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱۵ سهمی $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ مفروض است.

الف مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.

ب نمودار آن را رسم کنید.

۱۱۶ یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانهٔ دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است؛ فاصلهٔ کانونی این دیش را به دست آورید.

۱۱۷ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $A(۱, ۲)$ رأس و $F(۱, -۲)$ کانون آن باشد، سپس معادلهٔ خط هادی آن را بیابید.

۱۱۸ سهمی $y^۲ = ۴x - ۴$ مفروض است. به مرکز کانون سهمی و به شعاع ۳ دایره‌ای رسم می‌کنیم، مختصات نقاط برخورد دایره و سهمی را بیابید.

۱۱۹ اگر $\vec{a} = ۳\vec{i} + ۲\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = (۳, ۱, -۱)$ و $r = ۲$ باشد، بردار $r\vec{b} - \vec{a}$ را به دست آورید.

۱۲۰ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $x > -۲$ و $y^۲ + x \leq ۰$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

۱۲۱ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطهٔ $x^۲ \leq y \leq ۲$ را رسم کنید.

۱۲۲ نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه $B(۱, ۰, ۱)$ در فضا مفروض‌اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدا مختصات را حساب کنید.

به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱۲۳ نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ در فضای $\mathbb{R}^۳$ چه شکلی است؟ چه ارتباطی با نمودار $x = ۰$ دارد؟

۱۲۴ اگر $\vec{a} = (۲, -۱, ۳)$ و $\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j}$ باشد، اندازهٔ بردار $\vec{a} + ۲\vec{b}$ را به دست آورید.

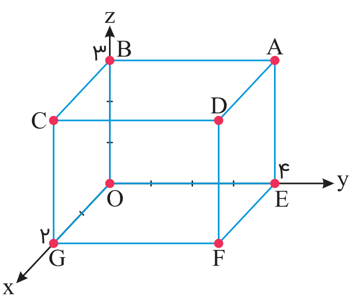
۱۲۵ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-۲ < y \leq -۱$ و $y < -x^۲ + ۱$ را در فضای دوبعدی رسم کنید.

۱۲۶ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $-۱ < x \leq ۲$ و $y = x^۲$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

۱۲۷ اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\overrightarrow{b} = r\overrightarrow{a}$ آنگاه $|\overrightarrow{b}| = |r||\overrightarrow{a}|$. (درست - نادرست)

۱۲۸ در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$، معادله محور .... است.

۱۲۹ باتوجه‌به شکل به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف نام وجه از شکل که معادلهٔ آن به‌صورت زیر مشخص شده را بنویسید.

$x = ۲ , ۰ \leq y \leq ۴ , ۰ \leq z \leq ۳$

ب معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید.

پ مختصات نقطهٔ D را بنویسید.

ت معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحهٔ xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.

۱۳۰ در فضای سه‌بعدی نقطهٔ A روی محور xها به طول ۲ و نقطهٔ B در صفحهٔ yoz با عرض -۳ و ارتفاع ۴ مفروض است. فاصلهٔ وسط پاره‌خط AB تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

۱۳۱ نقطهٔ A به طول ۲ روی محور xها و نقطهٔ B روی صفحهٔ xoz به طول ۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه بعدی مفروض‌اند.

الف مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.

ب طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

پ مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱۳۲ اگر $y = b$ معادلهٔ صفحه‌ای در فضای $\mathbb{R}^۳$ باشد که از نقطهٔ $A = (۲, -۳, ۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چقدر است؟

۱۳۳ معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $\mathbb{R}^۳$ است؟

۱۳۴ در فضای $\mathbb{R}^۳$، نقطهٔ A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحهٔ yoz و نقطهٔ $B = (-۴, ۶, -۳)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.

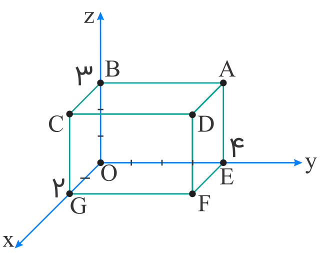
۱۳۵ دو بردار $\vec{a} = (۱, ۲, -۱)$ و $\vec{b} = (۰, ۲, -۱)$ را در نظر بگیرید.

الف بردار $\vec{a}$ در کدام ناحیه از فضای $\mathbb{R}^۳$ واقع است؟ (شماره ناحیه ذکر شود)

ب طول بردار $۲\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.

۱۳۶ نقاط $A = (۱, ۲, ۱)$ و $B = (۲, ۲, ۱)$ و $C = (۳, ۲, -۱)$ را در فضا در نظر می‌گیریم، کدام‌ها روی خط $\begin{cases} y = ۲ \\ z = ۱ \end{cases}$ قراردارند؟ چرا؟

۱۳۷ وجه‌های مکعب‌مستطیل مشخص‌شده در شکل زیر، قسمت‌هایی از صفحات به معادلات $x = ۰, x = ۲$، $y = ۰, y = ۴$ و $z = ۰, z = ۳$ هستند.



الف مختصات نقطهٔ A را مشخص کنید.

ب معادلات مربوط به یال AD و وجه $CDFG$ را بنویسید.

۱۳۸ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف معادلهٔ صفحه‌ای را بنویسید که از نقطهٔ $A = (۲, ۳, ۴)$ بگذرد و با صفحهٔ xoy موازی باشد.

ب معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور است؟

پ در فضای $\mathbb{R}^۳$، نقطهٔ A به طول ۲ روی محور طول‌ها و نقطهٔ $B = (-۴, ۶, -۳)$ مفروض‌اند. مختصات وسط AB را بیابید.

۱۳۹ مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}=(۱,۰,۱)$ و $\vec{b}=(۰,۱,۱)$ تولید می‌شود را به دست آورید.

۱۴۰ بردارهای $\vec{a}=(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید:

الف زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب بردار عمود بر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ پیدا کنید.

۱۴۱ اگر $\vec{c}=(-۱,۱,۴)$، $\vec{b}=(۳,-۴,۲)$ و $\vec{a}=(-۱,-۳,۰)$ باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}+\vec{c}$ را به دست آورید.

۱۴۲ برای دو بردار غیر صفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b}=۰$.

۱۴۳ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}+\vec{b}$ و $۲\vec{a}$ تولید می‌شود را بیابید.

۱۴۴ اگر $\vec{a}=(۱\,,\,-۳\,,\,۴)$ و $\vec{b}=۳\vec{i}-۴\vec{j}+۲\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{a}-\vec{b}$ بیابید.

۱۴۵ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}=(۳\,,\,-۱\,,\,۲)$ و $\vec{b}=(۱\,,\,۲\,,\,-۱)$ بیابید.

۱۴۶ اگر $|\vec{a}|=۱۰$، $|\vec{b}|=۲$ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشند و زاویهٔ بین دو بردار حاده باشد، مقدار $|\vec{a}\times\vec{b}|$ را محاسبه کنید.

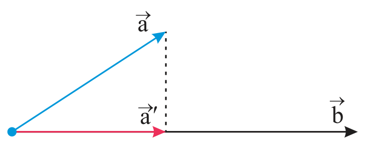
۱۴۷ اگر $\vec{a}=(۲,-۱,۱)$، $\vec{b}=(-۱,۲,۰)$ و $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}$ باشند، تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ بر امتداد بردار $۲\vec{c}-\vec{b}$ را به دست آورید.

۱۴۸ اگر $\vec{a}=(-۲,۰,۱)$ و $\vec{b}=\vec{i}-۲\vec{j}+۳k$ باشند، مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a}-\vec{j}$ و $\vec{b}$ تولید می‌شود را حساب کنید.

۱۴۹ اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-۱,۱)$، $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,m,-۱)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید.

۱۵۰ مقدار m را طوری بیابید که زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(m,۰,۲)$ و $\vec{b}=(۲,-۲,۰)$ برابر $\frac{\pi}{۳}$ باشد.

۱۵۱ نشان دهید تصویر قائم بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ برابر $\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$ است.



۱۵۲ بردارهای $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$، $\vec{b}=(۰\,,\,۱\,,\,۱)$ و $\vec{c}=\vec{i}+\vec{k}$ بر سه یال یک متوازی السطوح منطبق هستند. اگر قاعده این متوازی‌السطوح توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید شود، اندازه ارتفاع وارد بر این وجه را محاسبه کنید.

۱۵۳ بردار $\vec{a}=(۴\,,\,-۴\,,\,۲)$ مفروض است. بردار $\vec{b}$ غیرهم‌جهت با $\vec{a}$ و به طول ۱۲ را طوری بیابید که $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}$ باشد.

۱۵۴ زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲\,,\,-۱\,,\,۲)$ و $\vec{b}=(۱\,,\,-۱\,,\,۰)$ را به دست آورید.

۱۵۵ ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۱۵۶ اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ برابر با ۱۳۵ درجه باشد، مقدار n را بیابید.

۱۵۷ حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\vec{a}=(۱,۰,-۱)$ و $\vec{b}=(۰,۲,۲)$ و $\vec{c}=(۲,-۳,۰)$ تولید می‌شود.

۱۵۸ اگر $|\overrightarrow{a}| = ۳$ و $|\overrightarrow{b}| = ۵$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ تولید می‌شود چقدر است؟

۱۵۹ مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\overrightarrow{a} = (۲, m, -۱)$ و $\overrightarrow{b} = (m+۱, ۳, ۲)$ بر هم عمود باشند.

۱۶۰ برای دو بردار غیرصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ثابت کنید دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمودند اگر و فقط اگر $\vec{a}.\vec{b} = ۰$.

۱۶۱ اگر $A = (۲, -۱, ۳)$ و $B = (۳, ۱, ۴)$ و $C = (-۱, ۱, ۰)$ سه راس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۱۶۲ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\vec{a}| = ۶$ و $|\vec{b}| = ۴$ و زاویهٔ بین آن‌ها ۳۰ درجه است. مقدار عبارت $|۲\vec{a} \times \vec{b}|$ را محاسبه کنید.

۱۶۳ سه بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} + ۳\vec{j} - \vec{k}$ و $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$ و $\vec{c} = (۰, ۲, ۱)$ در نظر بگیرید:

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با θ باشد، $\cos\theta$ را بیابید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر $\vec{b} - \vec{c}$ را به دست آورید.

عبارت‌های زیر را کامل کنید.

۱۶۴ اگر سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ در یک صفحه باشد، آنگاه حجم متوازی‌السطوح بناشده توسط سه بردار برابر .... است.

۱۶۵ بردارهای $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ مفروض‌اند به‌طوری‌که $|\overrightarrow{a}| = ۳$، $|\overrightarrow{b}| = ۲۶$ و $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = ۷۲$. اگر زاویهٔ بین بردارها کمتر از قائمه باشد، مقدار $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$ را به دست آورید.

۱۶۶ بردارهای $\overrightarrow{a} = (۲, -۱, ۲)$ و $\overrightarrow{b} = (۱, -۱, ۰)$ را در نظر بگیرید. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ را به دست آورید.

ب) برداری عمود بر دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ پیدا کنید.

۱۶۷ مقدار m را طوری تعیین کنید که سه بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۳), \vec{b} = (۰, m, -۱), \vec{c} = (۱, -۲, ۳)$ در یک صفحه باشند.

۱۶۸ بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به طول‌های $|\vec{a}| = ۳$ و $|\vec{b}| = ۲۶$ و اندازهٔ ضرب خارجی $|\vec{a} \times \vec{b}| = ۷۲$ مفروض‌اند. اگر زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ کمتر از ۹۰° باشد، مقدار ضرب داخلی دو بردار را به دست آورید.

۱۶۹ تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۲, -۱, ۲)$ را بر امتداد بردار $\vec{b} = (۱, -۱, ۰)$ بیابید.

۱۷۰ سه بردار $\overrightarrow{a} = (۲, ۳, ۱)$ و $\overrightarrow{b} = (-۱, ۱, ۰)$ و $\overrightarrow{c} = (۲, ۱, -۲)$ مفروض‌اند:

الف) برداری عمود بر دو بردار $-۲\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\overrightarrow{a}$، $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

۱۷۱ ثابت کنید: دو بردار غیرصفر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ با هم موازی هستند، اگر و فقط اگر $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{o}$.

۱۷۲ اگر $\overrightarrow{a}$، $\overrightarrow{b}$ و $\overrightarrow{c}$ بردارهایی باشند به‌ترتیب با طول‌های ۱، ۲ و ۳ با این ویژگی که $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=\overrightarrow{o}$، مقدار عددی عبارت $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}$ را به دست آورید.

۱۷۳ مساحت متوازی‌الاضلاعی را به دست آورید که توسط دو بردار $\vec{a}(۳,۲,۱)$ و $\vec{b}=(۲,۰,۱)$ به وجود می‌آید.

۱۷۴ بردارهای $\vec{a}(۲,-۱,۲)$ و $\vec{b}=(۱,-۱,۰)$ را در نظر بگیرید. تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ بیابید.

۱۷۵ اگر طول بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب ۴ و ۶ و $\vec{a}.\vec{b}=۱۲$ باشد، مساحت مثلث بناشده توسط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

۱۷۶ بردارهای $\vec{a}=(-۲,۰,۲)$ و $\vec{b}=۲\vec{j}+۲\vec{k}$ را در نظر بگیرید.

الف) زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست آورید.

ب) تصویر قائم بردار $\vec{a}+\vec{b}$ را بر امتداد بردار $\vec{b}$ به دست آورید.

۱۷۷ اگر بردار $\vec{a}=(a_۱,a_۲,a_۳)$ باشد، ثابت کنید: $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

۱۷۸ اگر $A=(-۱,۲,۰)$، $B=(۱,۰,-۱)$ و $C=(۰,-۱,۱)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

۱۷۹ سه بردار $\vec{a}=(۲,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۱,۱,۰)$ و $\vec{c}=(۲,۱,-۲)$ مفروض‌اند:

الف) برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ را به دست آورید.

ب) حجم متوازی‌السطوحی که توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود را به دست آورید.

پاسخنامه

۱

$$z=-۳$$

$$\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۲x+y=۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ y=۱\end{cases}\Rightarrow x^{۲}-۲y+z=-۱$$

۲

$$\begin{bmatrix}x-۲ & -۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۱\end{bmatrix}=۰\Rightarrow x^{۲}-۲x-۳=۰\Rightarrow\begin{cases}x=-۱\\ x=۳\end{cases}$$

۳

$$x=۲\,,\;y=-۱$$

۴

$$(A-۳I)^{۲}=(A-۳I)(A-۳I)$$
$$=A^{۲}-۳AI-۳IA+۹I^{۲}\xrightarrow[I^{۲}=I]{AI=IA=A}A^{۲}-۶A+۹I$$

۵ الف

$$B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۳ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۴\end{bmatrix}$$

ب

$$(B^{۲}+۲I)=\begin{bmatrix}۵ & ۱ & ۶\\ ۶ & ۱۰ & ۸\\ ۷ & ۷ & ۱۸\end{bmatrix}+۲\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۷ & ۱ & ۶\\ ۶ & ۱۲ & ۸\\ ۷ & ۷ & ۲۰\end{bmatrix}$$

۶

$$m-۲=۰\Rightarrow m=۲\qquad n=m=۲$$

۷

$$(A-B)^{۲}=(A-B)(A-B)=A^{۲}-AB-BA+B^{۲}\overset{AB=BA}{=}A^{۲}-۲AB+B^{۲}$$

۸ الف

$$A=\begin{bmatrix}۱ & -۱ & -۳\\ ۴ & ۲ & ۰\\ ۷ & ۵ & ۳\end{bmatrix}$$

ب

$$B^{۲} = B \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$$

۹

$$\begin{cases} m + ۱ = ۰ \\ ۲n + ۴ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ n = -۲ \end{cases}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

۱۰

$$۲x - ۱ = ۵ \Rightarrow x = ۳$$

۱۱

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ + ۳a & -۸ + ۲a \\ b - ۳ & -۲b - ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲a - ۸ = ۰ \Rightarrow a = ۴ \\ b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

۱۲

$$A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ + ۳a & -۸ + ۲a \\ b - ۳ & -۲b - ۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۸ + ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۴ \\ b - ۳ = ۰ \Rightarrow b = ۳ \end{cases}$$

۱۳

$$A = B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۲x & ۵ \\ z & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۲x + y \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۳ \\ ۲x + y = ۵ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ y = ۲ \end{cases} \Rightarrow x + ۲y + ۳z = \frac{۳}{۲} + ۴ - ۶ = \frac{-۱}{۲} \\ z = -۲ \end{cases}$$

۱۴

$$\begin{cases} m - ۲ = ۰ \\ n + ۱ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \\ n = -۱ \end{cases}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

۱۵

$$a_{۳۳} = ۲ \ , \ a_{۳۱} = ۳ + ۱ = ۴ \ , \ a_{۱۲} = ۱ - ۲ = -۱$$

۱۶

$$\left.\begin{array}{l} A^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ & ۴ \\ ۲ & ۹ \end{bmatrix} \quad (۰/۵) \\ mA + nI = \underbrace{\begin{bmatrix} ۰ & ۴m \\ ۲m & m \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} + \underbrace{\begin{bmatrix} n & ۰ \\ ۰ & n \end{bmatrix}}_{(۰/۵)} = \underbrace{\begin{bmatrix} n & ۴m \\ ۲m & m+n \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{n = ۸}_{(۰/۲۵)} \,,\, \underbrace{m = ۱}_{(۰/۲۵)}$$

۱۷ دو ماتریس را مساوی گوییم، هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر برابر باشند:

$$\begin{cases} x - ۱ = y + ۱ \\ x - ۲ = ۸ \\ z + ۱ = ۴ \end{cases} \xrightarrow{(۰/۵)} \underbrace{x = ۱۰}_{(۰/۲۵)} \,,\, \underbrace{y = ۸}_{(۰/۲۵)} \,,\, \underbrace{z = ۳}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow x + y + z = ۲۱ \;\; (۰/۲۵)$$

۱۸

$$A^{۲} = B \Rightarrow \begin{bmatrix} ۵ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۲ & -۱ \\ ۲ & -۱ & ۴a+b \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b = ۵ \\ ۴a + b = ۵ \end{cases} \Rightarrow a = ۰, b = ۵$$

۱۹

$$A^{۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} = -۲I$$

$$A^{۷} = (A^{۲})^{۳}.A = (-۲I)^{۳}.A = -۸\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

۲۰

$$A = B \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۲} \\ ۲x + y = ۵ \\ z = -۲ \end{cases} \Rightarrow y = ۲ \Rightarrow x + y + z = \frac{۳}{۲}$$

۲۱

$$\begin{bmatrix} ۳x - ۶ & -۶x + ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -۳x + ۶ - ۶x + ۱۲ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow -۹x + ۱۸ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

۲۲

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۲ & ۴ & ۱ \\ ۳ & ۶ & ۹ \end{bmatrix} \;(۰/۵) \Rightarrow ۲A - ۳I = \underbrace{\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۸ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۸ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} - \underbrace{\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & -۲ \\ ۴ & ۵ & ۲ \\ ۶ & ۱۲ & ۱۵ \end{bmatrix} \;(۰/۲۵)$$

پاسخ سؤالات ۲۳ تا ۲۴

۲۳ ماتریس اسکالر (۰/۲۵)

۲۴ ندارد (۰/۲۵)

۲۵ الف

$$\frac{۲m}{۲} \neq \frac{۳}{-۱} \Rightarrow m \neq -۳$$

ب

$$A = \begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ ۲ & -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -۱۰ \neq ۰\ ,\quad A^{-۱} = \frac{۱}{-۱۰} \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{-۱۰} \begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ -۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۱ \end{cases}$$

۲۶

$$|۲A| + |A^{-۱}|^۳ = ۲^۳|A| + \frac{۱}{|A|^۳} = ۸(-۲) + \frac{۱}{-۸} = \frac{-۱۲۹}{۸}$$

۲۷

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۶-۴} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

۲۸

$$\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

$$= \frac{۱}{۱۵-۱۴} \begin{bmatrix} ۳ & -۲ \\ -۷ & ۵ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۷ & ۴ \\ ۱۷ & -۹ \end{bmatrix}$$

۲۹

$$|۳A| = ۴|A|^۲ + ۵ \Rightarrow ۴|A|^۲ - ۹|A| + ۵ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} |A| = ۱ \Rightarrow |A^{-۱}| = ۱ \\ |A| = \frac{۵}{۴} \Rightarrow |A^{-۱}| = \frac{۴}{۵} \end{cases}$$

۳۰

$$\frac{m}{۴} = \frac{۹}{m} = \frac{m+۱}{-۴} \Rightarrow m^۲ = ۳۶ \Rightarrow \begin{cases} m = ۶ \\ m = -۶ \end{cases}$$ هر دو جواب قابل قبول

۳۱

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = -۱$$

$$A^{-۱} = \frac{۱}{-۱} \begin{bmatrix} ۴ & -۳ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ & ۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

۳۲

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=1$$

$$k|kA|=k(k^3|A|)=k^4\times 1=625\Rightarrow k=\pm 5$$

۳۳

$$|A|=|A|(|A|-2)+1(2)\Rightarrow |A|^2-3|A|+2=0\Rightarrow\begin{cases}|A|=1\\|A|=2\end{cases}$$

۳۴

$$|A|=2\ ,\ |-\frac{1}{2}A^4|=(-\frac{1}{2})^3|A|^4=-2$$

۳۵

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1&1\\-1&3\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{1}{5}A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\\\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

$$5A=\begin{bmatrix}15&-5\\5&-5\end{bmatrix}\Rightarrow(5A)^{-1}=\frac{1}{-50}\begin{bmatrix}-5&5\\-5&15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&-\frac{1}{10}\\\frac{1}{10}&-\frac{3}{10}\end{bmatrix}$$

۳۶

$$|A|=2\Rightarrow ||A|A|=|A|^3|A|=|A|^4=16$$

۳۷ نادرست

۳۸

$$A-2I=\begin{bmatrix}4&1\\0&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\0&1\end{bmatrix}$$

$$|A-2I|=2\Rightarrow(A-2I)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\0&2\end{bmatrix}$$

۳۹

$$X=A^{-1}\times B\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}4&-1\\-7&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4\\15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\Rightarrow x=1,\ y=2$$

۴۰

$$|A|A||=|4A|=4^3|A|=4^4$$

۴۱

$$A=\begin{bmatrix}2&-1\\-4&3\end{bmatrix}\ ,\ X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\ ,\ B=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\Rightarrow X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}14\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\10\end{bmatrix}$$

۴۲

$$B=\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix} \quad , \quad A=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}-۱ & -۴\\ ۱ & -۲\\ ۳ & ۰\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۰ & -۱ & -۱\\ -۱ & ۰ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & ۱ & ۵\\ ۲ & -۱ & ۱\\ ۰ & -۳ & -۳\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow |AB| = ۴(۶)-۱(-۶)+۵(-۶)=۰$$

۴۳

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}\Rightarrow\frac{۲}{m-۱}=\frac{m}{۱}\neq\frac{۱}{۳}\Rightarrow m(m-۱)=۲\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ m=۲\end{cases}$$

۴۴

$$A^{-۱}=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}\Rightarrow |A^{-۱}|=۸$$

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۸}\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ -۲ & ۲\end{bmatrix}$$

۴۵

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۴\\ ۲ & ۱\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{۱}{۳+۸}\begin{bmatrix}۱ & ۴\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۷\\ ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱\\ -۱\end{bmatrix}$$

۴۶

$$|۲A|=(|A|^{۲}+۴) \quad \Rightarrow \quad (|A|-۲)^{۲}=۰ \quad \Rightarrow \quad |A|=۲$$

$$|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}=\frac{۱}{۲}$$

۴۷

$$|A|=(۴-۹-۴)-(-۴-۱۲+۳)=-۹+۱۳=۴, |B|=-۶$$

$$|A\times B|+|۲I_{۳}|=|A|\times|B|+۸|I|=-۲۴+۸=-۱۶$$

۴۸

$$A=\begin{bmatrix}۳ & -۵\\ ۲ & ۱\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}-۱\\ ۸\end{bmatrix}$$

$$|A|=۳+۱۰=۱۳\Rightarrow A^{-۱}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=A^{-۱}\times B=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}۱ & ۵\\ -۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱\\ ۸\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix}-۱+۴۰\\ ۲+۲۴\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳\\ ۲\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x=۳, y=۲$$

۴۹

$$\begin{bmatrix}۲x & ۴x-۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴ & y-۲\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}۲x=۴\Rightarrow x=۲\\ ۴x-۲=y-۲\Rightarrow y=۸\end{cases}$$

الف

$$|A| = ۵\,|A| - ۲۴ \Rightarrow |A| = ۶$$

ب ماتریس A وارون‌پذیر است و وارون آن برابر است با:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۵ & -۸ \\ -۳ & ۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۶} & -\frac{۴}{۳} \\ -\frac{۱}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ سؤالات ۵۱ تا ۵۲

۵۱

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ m & ۶ \end{vmatrix} = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} ۶ + ۲m = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} m = -۳ \ \ (۰/۲۵)$$

۵۲

$$\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۲ & ۶ \end{vmatrix} = ۱۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix} \ \ (۰/۲۵)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{۱}{۱۰}\begin{bmatrix} ۶ & ۲ \\ -۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۴ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۲۵)} \Rightarrow x = ۱ \ , \ \ y = -۱ \ \ (۰/۲۵)$$

۵۳

$$|A| = ۲\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix} = ۲ \times ۱۰ = ۲۰ \ \ (۰/۵) \ \ , \ \ |B| = -۶\,(۰/۵) \Rightarrow \left|B^۲\right| = ۳۶ \ \ (۰/۲۵)$$

$$\Rightarrow |A| + \left|B^۲\right| = ۲۰ + ۳۶ = ۵۶ \ \ (۰/۲۵)$$

۵۴

$$\begin{bmatrix} x & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} x-۳ & ۱۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)} = \underbrace{\begin{bmatrix} ۳x - ۲۱ \end{bmatrix}}_{(۰/۵)} = ۰ \Rightarrow x = ۷ \ \ (۰/۲۵)$$

۵۵

$$\begin{cases} m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۲ \\ n + ۱ = ۰ \Rightarrow n = -۱ \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = ۲(-۱) - ۱(۷) + ۱(-۲) = -۱۱ \ , \ \ |A| = ۲$$

$$|A| + |B| = ۲ + (-۱۱) = -۹$$

۵۶

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = ۱۳ \neq ۰ \ , \ A^{-۱} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۲ \end{cases}$$

۵۷

$$BA = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & ۱ & -۱ \\ -۱ & ۳ & ۲ \\ ۱ & ۱۷ & ۸ \end{bmatrix}$$

$$|BA| = ۳(-۱۰) - ۱(-۱۰) - ۱(-۲۰) = ۰$$

۵۸

$$A = \begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \ , \ |A| = ۲ \Rightarrow A^{-۱} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۴ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow x = ۳ \ , \ y = ۲$$

۵۹

$$|A| = ۰ \Rightarrow ۲m - ۴ = ۰ \Rightarrow m = ۲$$

۶۰

$$\frac{m}{۴} = \frac{۳}{m+۴} = \frac{-۳}{۲} \Rightarrow m(m+۴) - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = -۶ & \text{غ ق ق} \\ m = ۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۶۱

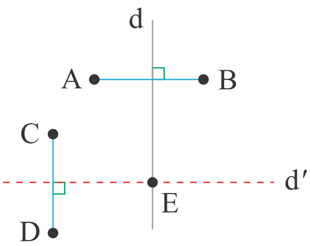
$$\begin{vmatrix} m-۳ & ۳ \\ ۴ & m+۱ \end{vmatrix} = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} (m-۳)(m+۱) - ۱۲ = ۰ \xrightarrow{(۰/۲۵)} m = ۵, m = -۳ \quad (۰/۲۵)$$

$$m \in \mathbb{R} - \{۵, -۳\} \quad (۰/۲۵)$$

۶۲

مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است، این خط را d می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C و D به یک فاصله باشد، عمودمنصف پاره‌خط CD است، این خط را d' می‌نامیم.

بنابراین نقطهٔ برخورد خطوط d و d' جواب مسئله است. (نقطهٔ E)



اگر خطوط d و d' متقاطع باشند مسئله یک جواب دارد.

اگر خطوط d و d' منطبق باشند مسئله بی‌شمار جواب دارد.

اگر خطوط d و d' موازی باشند مسئله جواب ندارد.

۶۳

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است.
مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را در نظر می‌گیریم.

اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت.

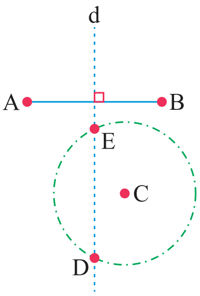
اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد.

اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت.

۶۴ مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط AB است.
مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط CD است.
محل برخورد دو عمودمنصف، جواب مسأله است.
حالت‌های ممکن: یک جواب، بدون جواب، بی‌شمار جواب

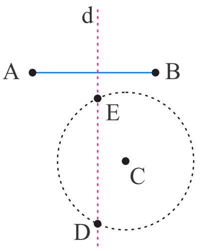
۶۵ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d' و d'' می‌باشند که موازی d هستند. محل برخورد دو خط d' و d'' با خط l جواب مسأله است.
الف- اگر خط l دو خط d' و d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.
ب- اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.
پ- اگر خط l هیچ یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

۶۶ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. و مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطهٔ برخورد خط عمودمنصف (d) و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E)

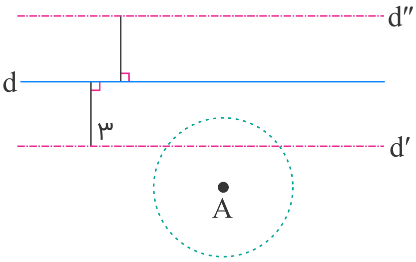


الف) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد.
ب) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.
پ) در صورتی که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.

۶۷ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB و مکان هندسی نقاطی که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطهٔ برخورد خط عمودمنصف (d) و دایره، جواب مسئله است. (نقاط D و E)
اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد، اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد و درصورتی‌که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.

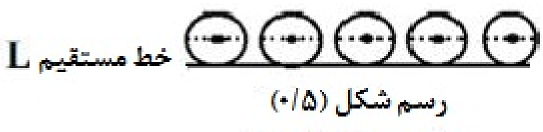


۶۸ مکان هندسی نقاطی که از A به فاصله ۲ سانتی‌متر باشد، یک دایره به مرکز A و شعاع ۲ سانتی‌متر است. این دایره را رسم می‌کنیم.
نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد دو خط d' و d'' در طرفین خط d و به موازات d است؛ این دو خط را رسم می‌کنیم.
محل برخورد دو خط d' و d'' با دایره مطابق شکل جواب مساله است.



اگر یکی از دو خط d' یا d'' دایره را قطع کند، مسأله ۲ جواب دارد.
اگر یکی از دو خط d' یا d'' بر دایره مماس باشد، مسأله ۱ جواب دارد.
اگر هیچ‌یک از دو خط d' یا d'' دایره را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۶۹



مکان هندسی مطلوب خطی است موازی خط L با فاصله برابر با شعاع توپ.

پاسخ سؤالات ۷۰ تا ۷۱

۷۰ درست (۰/۲۵)

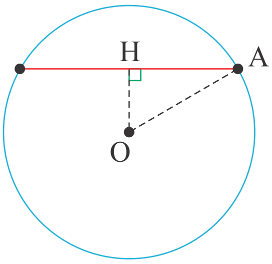
۷۱ درست (۰/۲۵)

پاسخ سؤالات ۷۲ تا ۷۳

۷۲ درست (۰/۵)، مکان هندسی نقاطی که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشند، نیمساز زاویهٔ بین آن دو خط است.

۷۳ نادرست (۰/۵)، صفحه‌ای با مولد سطح مخروط دواری، موازی است و از رأس آن عبور نمی‌کند، فصل مشترک این صفحه و سطح مخروطی، یک سهمی است.

۷۴



$$OH = \frac{|۲(-۱)+۱(-۱)-۲|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

$$AOH\ (H=۹۰) : OH^۲ + AH^۲ = OA^۲ \Rightarrow \left(\sqrt{۵}\right)^۲ + ۲^۲ = r^۲$$

$$r = ۳ \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۹$$

۷۵

روش اول:

$$x + y = ۳ \Rightarrow y = ۳ - x$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (۳-x)^۲ - ۲(۳-x) - ۳ = ۰$$

$$\Rightarrow ۲x^۲ - ۴x = ۰$$

دلتای معادلهٔ اخیر مثبت است، بنابراین دو ریشهٔ متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع‌اند.

روش دوم:

$$x^۲ + y^۲ - ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O(۰\,,\,۱) \\ r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۲} = ۲ \end{cases}$$

$$OH = \frac{|۰+۱-۳|}{\sqrt{۱+۱}} = \sqrt{۲} < ۲$$

پس خط و دایره متقاطع اند.

۷۶

$$(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶ \Rightarrow \begin{cases} O'(۲\,,\,۳) \\ r' = ۴ \end{cases}$$

$$d = OO' = \sqrt{(۰-۲)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۸}$$

$$|r - r'| = d \Rightarrow |r - ۴| = \sqrt{۸} \Rightarrow r = ۴ \pm ۲\sqrt{۲}$$

$$(x-۰)^۲ + (y-۱)^۲ = (۴ \pm ۲\sqrt{۲})^۲$$

۷۷

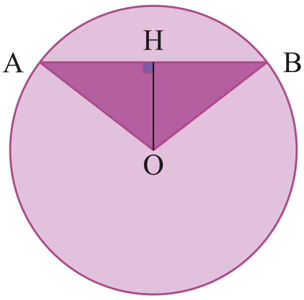
$$O(-\frac{a}{۲}\,,\,-\frac{b}{۲}) = (\frac{۲}{۲}\,,\,\frac{۶}{۲}) = (۱,\,۳)$$

۷۸

$$O(۲,-۲) \quad , \quad r = ۳ \quad , \quad d = \frac{|۳\times ۲ + ۴(-۲)|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۲}{۵}$$

چون شعاع دایره بزرگ‌تر از فاصله مرکز دایره تا خط می‌باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.

۷۹



$$OH = \frac{|۳(۰) + ۴(۱) + ۶|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = ۲$$

$$AB = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow AH = \sqrt{۵} \Rightarrow R = ۳$$

$$(x - ۰)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۹$$

$$x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۴ \Rightarrow (۰, ۴) \\ y = -۲ \Rightarrow (۰, -۲) \end{cases}$$

۸۰

$$(x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱ \Rightarrow O(۱, -۲)\,,\, R = ۱$$
$$x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y - ۶ = ۰ \Rightarrow O'(-۳, -۱)\,,\, R' = ۴$$
$$d = OO' = \sqrt{۱۷}$$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند: $۳ < \sqrt{۱۷} < ۵$

۸۱

روش اول:

$$OH = \frac{|۱ + ۳|}{\sqrt{۱^۲ + ۰^۲}} = ۴\;,\;\; OH = R\;,\;\; (x - ۱)^۲ + y^۲ = ۱۶$$

روش دوم: با استفاده از رسم شکل و پیدا کردن شعاع و نوشتن معادله دایره

۸۲

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰ : O(-۱,\, ۲)\,,\, r = ۲$$
$$(x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = m^۲ : O'(۲\,,\, -۱)\,,\, r' = m$$
$$OO' = ۳\sqrt{۲}$$
$$OO' = r + r' \Rightarrow m + ۲ = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow m = ۳\sqrt{۲} - ۲$$

۸۳

$$(x + ۱)^۲ + (y - ۱)^۲ = ۲ \Rightarrow O'(-۱,\, ۱)\;,\;\; r' = \sqrt{۲}$$
$$(x - ۱)^۲ + (y + ۱)^۲ = ۲ - c \Rightarrow O(۱,\, -۱)\;,\;\; r = \sqrt{۲ - c}$$
$$OO' = ۲\sqrt{۲}$$
$$OO' = r + r' \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲} + \sqrt{۲ - c} \Rightarrow c = ۰$$

۸۴ فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس بر دایره برابر است با:

$$r = \frac{|۳(۲) + ۴(۱) + ۵|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

معادلهٔ دایره برابر است با $(x-۲)^۲ + (y-۱)^۲ = ۹$.

۸۵

$$r = \frac{|۳ \times ۰ - ۴(۳) - ۳|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = ۳ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹$$

۸۶

$$(x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۴ \ , \ O(۱,۱) \ , \ r = ۲$$

$$d = \frac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$d < r$$

خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.

۸۷

$$O(۰,۰) \ , \ O'(۱,۰) \qquad r = ۲ \ , \ r' = \sqrt{۵}$$

$$OO' = \sqrt{۱^۲ + ۰} = ۱ \Rightarrow |r - r'| = \sqrt{۵} - ۲ < OO' < r + r' = \sqrt{۵} + ۲$$

دو دایره متقاطع هستند.

۸۸ مرکز و شعاع دایرهٔ ۱ $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰ \Rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ برابر است با $r' = ۱$ و $o' = (۳,۱)$

فاصلهٔ دو مرکز برابر $d = oo' = \sqrt{(۳)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$ و $d > r + r' = ۲$.

دو دایره بیرون یکدیگرند (متخارج‌اند).

۸۹

الف

$$O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (۲,-۱) \ , \ R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = ۳$$

ب خیر، زیرا:

$$(۰)^۲ + (۳)^۲ + ۲(۳) - ۴(۰) - ۴ \neq ۰$$

۹۰

$$x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵ \Rightarrow O = (۱,۱)$$

$$m_{OA} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲$$

شیب خط مماس برابر است با: $m' = -\frac{۱}{m} = \frac{-۱}{۲}$

$$y - ۳ = \frac{-۱}{۲}(x-۲) \Rightarrow y = \frac{-۱}{۲}x + ۴$$

۹۱

$$R=\frac{|۳\times ۱+۴\times ۲-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۲\ ,\quad (x-۱)^۲+(y-۲)^۲=۴$$

۹۲

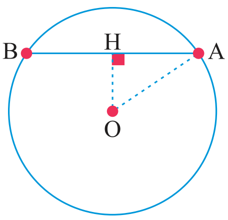
$$x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$$

$$\Rightarrow (x^۲+ax+\frac{a^۲}{۴})+(y^۲+by+\frac{b^۲}{۴})=-c+\frac{a^۲}{۴}+\frac{b^۲}{۴}$$

$$(x+\frac{a}{۲})^۲+(y+\frac{b}{۲})^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}\Rightarrow r^۲=\frac{a^۲+b^۲-۴c}{۴}$$

$$\Rightarrow r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$$

۹۳ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.

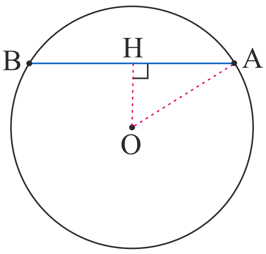


$$AH=\frac{۱}{۲}AB=۳$$

$$OH=\frac{|۳(۲)-۴(-۱)+۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}}=۴$$

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow r^۲=(۴)^۲+(۳)^۲=۲۵\ ,\quad (x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۲۵$$

۹۴ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.

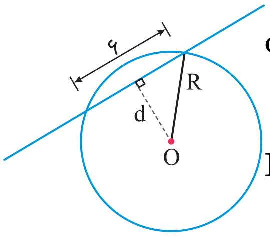


$$OH=\frac{|x+y-۲|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{|۰+۱-۲|}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$OA^۲=OH^۲+AH^۲\Rightarrow OA^۲=\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲+\left(\sqrt{۲}\right)^۲=\frac{۱۰}{۴}=R^۲$$

$$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=\frac{۱۰}{۴}$$

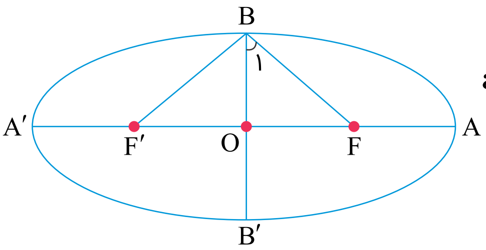
۹۵



$$d=\frac{|۳\times ۲-۴(-۳)+۲|}{\sqrt{۳^{۲}+(-۴)^{۲}}}=۴$$

$$R=\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}=۵ \quad\Rightarrow\quad (x-۲)^{۲}+(y+۳)^{۲}=۲۵$$

۹۶



$$a=۲b\Rightarrow c^{۲}=a^{۲}-b^{۲}=۴b^{۲}-b^{۲}=۳b^{۲}\Rightarrow c=\sqrt{۳}b$$

$$\tan B_{۱}=\frac{OF}{OB}=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{۳}b}{b}=\sqrt{۳}\Rightarrow B_{۱}=۶۰^{\circ}$$

$$\Rightarrow F\hat{B}F'=۲\times ۶۰=۱۲۰^{\circ}$$

۹۷

$$OM=OA=a$$

$$\overset{\Delta}{OMF}:\ OF^{۲}+MF^{۲}=OM^{۲}$$

$$\Rightarrow c^{۲}+MF^{۲}=a^{۲}\Rightarrow MF^{۲}=a^{۲}-c^{۲}=b^{۲}\Rightarrow MF=b$$

۹۸

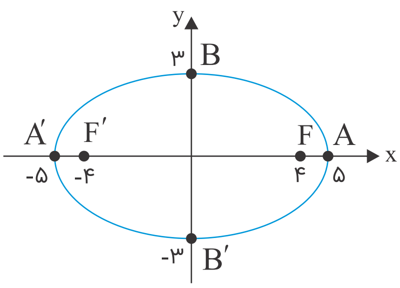
الف

$$\begin{cases}۲a=۱۰\Rightarrow a=۵\\ ۲b=۶\Rightarrow b=۳\end{cases}\Rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow c=۴\ ,\quad \frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

ب

$$A(۵,۰),\ A'(-۵,۰),\ F(۴,۰),\ F'(-۴,۰),\ B(۰,۳),\ B'(۰,-۳)$$

پ

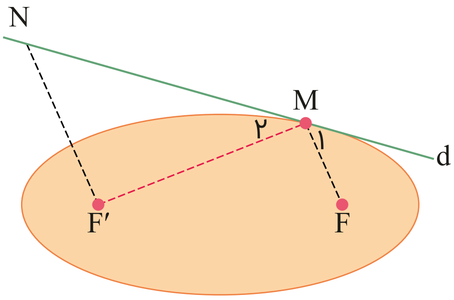


۹۹

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{OBF'}}}{S_{\overset{\triangle}{OAB'}}}=\frac{\frac{۱}{۲}OB\times OF'}{\frac{۱}{۲}OB'\times OA}=\frac{\frac{۱}{۲}bc}{\frac{۱}{۲}ba}=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

۱۰۰ مجموع $MF+MF'$ کمترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، داریم: $\hat{M}_۱=\hat{M}_۲$
ازطرفی: $MF||NF'$ و d مورب، درنتیجه $\hat{N}=\hat{M}_۱$ نتیجه می‌شود $\hat{N}=\hat{M}_۲$
مثلث MNF' متساوی‌الساقین است یعنی $MF'=NF'$.



۱۰۱ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، باتوجه‌به تعریف بیضی:

$$AF+AF'=۲a=BF+BF'\xrightarrow{AF'=BF}AF=BF'$$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت $(AF=BF',\ AF'=BF\ ,\ FF'=FF')$ برابری سه ضلع همنهشت هستند، درنتیجه دو زاویه $A\hat{F}F'=B\hat{F'}F$، مثلث MFF' متساوی الساقین است و $MF=MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره خط FF' (قطر کوچک بیضی) است.

۱۰۲ نقطه M روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

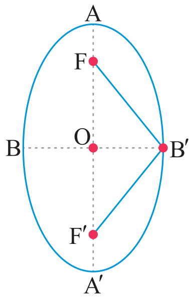
$$MF+MF'=۲a=۱۴\Rightarrow a=۷$$
$$\frac{c}{a}=\frac{۱}{۷}\xrightarrow{a=۷}c=۱$$
$$a^۲=b^۲+c^۲\Rightarrow b=۴\sqrt{۳}$$

۱۰۳

الف $FF'=۴\ ,\ O(۱,\ ۳)$

ب $y=۳$

پ



$$OB' = \sqrt{OA^۲ - OF^۲} = \sqrt{۵}$$
$$S = \frac{۱}{۲}OB' \times FF' = ۲\sqrt{۵}$$

۱۰۴ الف

$$\begin{cases} ۲a = ۱۰ \Rightarrow a = ۵ \\ ۲b = ۶ \Rightarrow b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۴$$

در مثلث MFF' میانهٔ وارد بر یک ضلع $MO = \frac{۱}{۲}FF'$ نصف ضلع روبه‌رو است. درنتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب

$$MF + MF' = ۲a = ۱۰ \Rightarrow MF' = ۱۰ - MF$$
$$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \Rightarrow MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲ \Rightarrow MF = ۵ - \sqrt{۷}$$

۱۰۵ نقطهٔ D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

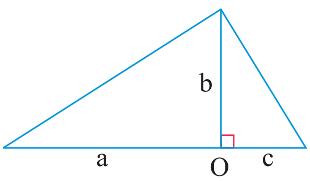
در مثلث قائم‌الزاویهٔ DFF' بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \Rightarrow DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$$
$$DF = \frac{a^۲ - c^۲}{a} \xrightarrow{a^۲ - c^۲ = b^۲} DF = \frac{b^۲}{a}$$

۱۰۶ الف

$$\begin{cases} a = ۵ \\ b = ۴ \end{cases} \Rightarrow c^۲ = ۲۵ - ۱۶ \Rightarrow c = ۳ \Rightarrow A'F = ۸$$

ب



$$S_{\triangle} = \frac{۱}{۲}(۵ + ۳) \times ۴ = ۱۶$$

۱۰۷

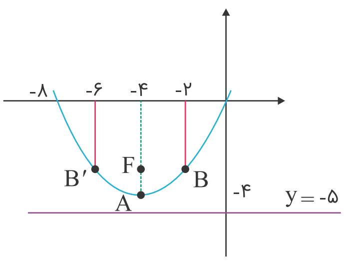
الف

$$a = \frac{۵}{۴}c \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}c^۲ = ۹ + c^۲ \Rightarrow c = ۴$$
$$FF' = ۲c = ۸$$

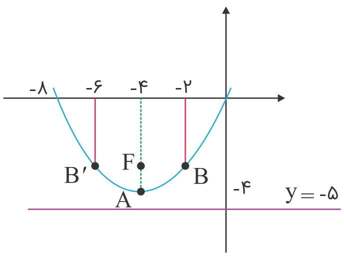
ب

$$a = ۵ \Rightarrow A(۱, -۱) \ , \ A(-۹, -۱)$$

۱۰۸ الف فرم استاندارد سهمی به‌صورت $(x+۴)^۲ = ۴(y+۴)$ است.
سهمی قائم و دهانهٔ آن رو به بالا باز می‌شود. رأس سهمی نقطهٔ $A(-۴, -۴)$ است و $a = ۱$ است. مختصات کانون آن نقطهٔ $F(-۴, -۴+۱) = (-۴, -۳)$ است. معادلهٔ خط هادی سهمی به‌صورت $y = -۴ - ۱ = -۵$ است.

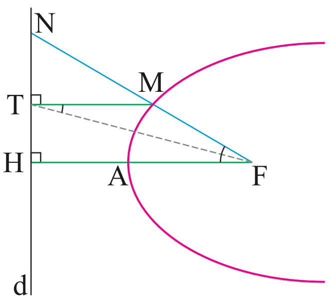


ب نقاط کمکی $B(-۲, -۳)$ و $B'(-۶, -۳)$



۱۰۹ بنا به تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی الساقین است، پس $M\hat{T}F = M\hat{F}T$. ازطرفی $MT \parallel FH$ و FT خط مورب می‌باشد، پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $M\hat{T}F = T\hat{F}H$. از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که TF نیمساز زاویهٔ $N\hat{F}H$ می‌باشد.
با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$



۱۱۰ باتوجه‌به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی قائم و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد.
فاصله کانونی سهمی برابر با $a = AF = ۴$ است.
معادله آن برابر است با: $(x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$
معادله خط هادی سهمی $y = ۶$ است.

۱۱۱ نصف می شود:

$$\frac{a'}{a} = \frac{\frac{b^۲}{۴(۲h)}}{\frac{b^۲}{۴h}} = \frac{۱}{۲}$$

۱۱۲

$$\begin{cases} y^۲ + ۷x + ۵ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow x^۲ + (-۷x - ۵) = ۲۵ \Rightarrow x^۲ - ۷x - ۳۰ = ۰$$

$$x = -۳ \ , \ x = ۱۰$$

$$\begin{cases} x = -۳ \Rightarrow y^۲ = ۱۶ \Rightarrow y = \pm ۴ \Rightarrow (-۳, ۴) \ , \ (-۳, -۴) \\ x = ۱۰ \Rightarrow y^۲ = -۷۵ \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۱۱۳ **الف** باتوجه‌به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد. در این سهمی $a = ۱$ و معادله آن برابر است با: $(y-۳)^۲ = -۴(x-۲)$

ب مختصات کانون سهمی:

$$F(-a+h, k) = (-۱+۲, ۳) = (۱, ۳)$$

پ مختصات محل برخورد با محور طول‌ها برابر است با:

$$y = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۴} \ , \ (-\frac{۱}{۴}, ۰)$$

۱۱۴

$$y^۲ = ۴(x-۱) \Rightarrow S(۱, ۰) \ , \ a = ۱ \ , \ F(۲, ۰)$$

$$(x-۲)^۲ + y^۲ = ۹ \ , \ \begin{cases} y^۲ = ۴x - ۴ \\ y^۲ = -x^۲ + ۴x + ۵ \end{cases} \Rightarrow x = \pm ۳$$

$$M\left(۳, ۲\sqrt{۲}\right), M'\left(۳, -۲\sqrt{۲}\right)$$

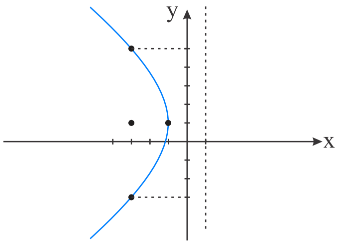
تذکر: $x = -۳$ در معادلهٔ سهمی صدق نمی‌کند، بنابراین قابل‌قبول نیست.

۱۱۵ **الف**

$$y^۲ - ۲y + ۱ = -۸x - ۹ + ۱ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۸(x+۱) \Rightarrow A(-۱, ۱)$$

دهانهٔ سهمی به چپ و $a = ۲$، خط هادی $x = ۱$ و کانون سهمی $F(-۳, ۱)$.

ب نقاط کمکی: $B=(-3,5)$ ،$B'=(-3,-3)$



۱۱۶ اگر قطر دهانهٔ دیش را با $2b$ و گودی را با h نمایش دهیم، فاصلهٔ کانونی برابر $a=\frac{4b^2}{16h}$ است.
$h=9$ و $2b=60$ با جایگذاری در رابطهٔ فوق داریم:

$$a=\frac{(2b)(2b)}{16h}=\frac{60\times 60}{16(9)}=25$$

(اگر رابطهٔ فوق به‌صورت $a=\frac{b^2}{4h}=\frac{(30)^2}{4(9)}=25$ نوشته شود درست است)

۱۱۷ باتوجه‌به جایگاه رأس و کانون این سهمی در دستگاه مختصات خواهیم داشت:
سهمی روبه‌پایین و $a=4$ است.
معادلهٔ سهمی: $(x-1)^2=-16(y-2)$
معادلهٔ خط هادی: $y=6$

۱۱۸

$$y^2=4(x-1)\Rightarrow S(1,0)\quad ,\quad F(2,0)$$

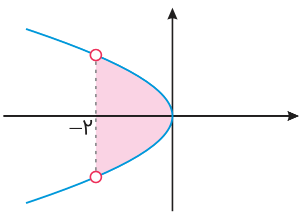
$$(x-2)^2+y^2=9\quad ,\quad \begin{cases}y^2=4x-4\\ y^2=-x^2+4x+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3 & \text{قق}\\ x=-3 & \text{غقق}\end{cases}$$

$$M\left(3,2\sqrt{2}\right)\ ,M'\left(3,-2\sqrt{2}\right)$$

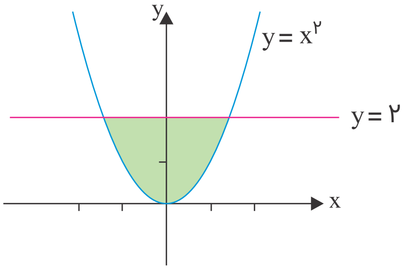
۱۱۹

$$\vec{a}=(3,2,-1)\Rightarrow r\vec{b}-\vec{a}=2\vec{b}-\vec{a}=(6,2,-2)-(3,2,-1)=(3,0,-1)$$

۱۲۰



۱۲۱



۱۲۲ مختصات نقطه $A(\circ\,,\ \circ\,,\ ۳)$، مختصات وسط AB برابر با $M(\frac{۱}{۲}\,,\ \circ\,,\ ۲)$ و فاصله تا مبدا مختصات $\frac{\sqrt{۱۷}}{۲}$ است.

پاسخ سؤالات ۱۲۳ تا ۱۲۴

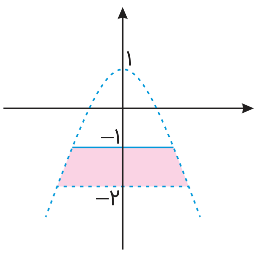
۱۲۳ $\begin{cases} x=\circ \\ z=\circ \end{cases}$ محور yها است. معادلهٔ $x=\circ$ معادلهٔ صفحهٔ yz که شامل محور yها است.

۱۲۴

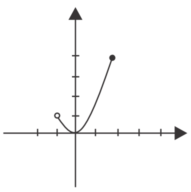
$$\vec{a}+۲\vec{b}=(۲,-۱,۳)+۲\,(۱,۲,\circ)=(۴,۳,۳)$$

$$\left|\vec{a}+۲\vec{b}\right|=\sqrt{۱۶+۹+۹}=\sqrt{۳۴}$$

۱۲۵



۱۲۶ رسم نمودار:



۱۲۷ درست

۱۲۸ عرض‌ها یا محور yها

۱۲۹ الف CDFG

ب

$$\begin{cases} ۰ \leq x \leq ۲ \\ y = ۴ \\ z = ۳ \end{cases}$$

پ $D(۲\,,\,۴\,,\,۳)$

ت $y = ۲$

۱۳۰ $A = (۲, ۰, ۰)$ و $B = (۰, -۳, ۴)$ است.

مختصات وسط پاره‌خط AB برابر است با:

$$M = (\frac{۲+۰}{۲}, \frac{۰+(-۳)}{۲}, \frac{۰+۴}{۲}) = (۱, \frac{-۳}{۲}, ۲)$$

$$OM = \sqrt{۱ + \frac{۹}{۴} + ۴} = \sqrt{\frac{۲۹}{۴}}$$

۱۳۱ الف

$$A = (۲, ۰, ۰) \quad , \quad B = (۱, ۰, ۳)$$

ب

$$AB = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۰, ۰)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۱۰}$$

پ

$$M = (\frac{۲+۱}{۲}, \frac{۰+۰}{۲}, \frac{۰+۳}{۲}) = (\frac{۳}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲})$$

پاسخ سؤالات ۱۳۲ تا ۱۳۴

۱۳۲ $b = -۳$

۱۳۳ محور zها

۱۳۴ نقطهٔ $A = (۰, ۲, ۳)$ و مختصات وسط AB برابر است با $(-۲, ۴, ۰)$.

۱۳۵ الف بردار $\vec{a}$ در ناحیه ۵ واقع است.

ب

$$۲\vec{a} - \vec{b} = (۲, ۲, -۱) \Rightarrow |۲\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{۴+۴+۱} = \sqrt{۹} = ۳$$

۱۳۶ نقاط A و B، زیرا در این دو نقطه $y = ۲$ و $z = ۱$ است.

۱۳۷ الف

$$A\,(۰, ۴, ۳)$$

ب

$$AD : \begin{cases} ۰ \le x \le ۲ \\ y = ۴ \\ z = ۳ \end{cases} \qquad CDFG : \begin{cases} x = ۲ \\ ۰ \le y \le ۴ \\ ۰ \le z \le ۳ \end{cases}$$

۱۳۸ الف $z = ۴$

ب محور yها

پ نقطهٔ $A = (۲, ۰, ۰)$ و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۱, ۳, \frac{-۳}{۲})$

۱۳۹

$$\vec{a} \times \vec{b} = (-۱, -۱, ۱) \quad (۰/۲۵)$$

$$S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{۱ + ۱ + ۱} = \sqrt{۳}$$

۱۴۰ الف

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|} = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{۴}$$

ب

$$\vec{a} \times \vec{b} = (۲, -۱, ۲) \times (۱, -۱, ۰) = (۲, ۲, -۱)$$

۱۴۱

$$\vec{b} + \vec{c} = (۲, -۳, ۶)$$

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c})}{\left|(\vec{b} + \vec{c})\right|^۲}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{(-۱, -۳, ۰)\,(۲, -۳, ۶)}{۴۹}(۲, -۳, ۶) = \frac{۱}{۷}(۲, -۳, ۶)$$

۱۴۲

$$\vec{a}.\vec{b} = ۰ \Leftrightarrow |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\theta = ۰ \xleftrightarrow[\left|\vec{b}\right| = ۰]{|\vec{a}| = ۰} \cos\theta = ۰ \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۱۴۳

$$S = \frac{۱}{۲}|۲\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})| = \frac{۱}{۲}|۲\vec{a} \times \vec{a} + ۲\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$S = \frac{۱}{۲}|۰ + ۲\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = ||\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta| = ۵ \times ۵ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۴۴

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (-۲, ۱, ۲)$$

$$\vec{a'} = \frac{\vec{a}.\vec{d}}{|\vec{d}|^۲}\vec{d} = \frac{(-۲ - ۳ + ۸)}{(-۲)^۲ + ۱^۲ + ۲^۲}(-۲, ۱, ۲) = (\frac{-۲}{۳}, \frac{۱}{۳}, \frac{۲}{۳})$$

۱۴۵

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-۳\vec{i}+۵\vec{j}+۷\vec{k}=(-۳\,,\,۵\,,\,۷)$$

۱۴۶

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow ۱۲=۱۰\times ۲\times\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{۳}{۵}$$

$$\sin\theta=\sqrt{۱-(\frac{۳}{۵})^{۲}}=\frac{۴}{۵} \quad (\text{حاده است } \theta)$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۲\times ۱۰\times\frac{۴}{۵}=۱۶$$

۱۴۷

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(۱,۱,۱)$$

$$\overrightarrow{v}=۲\overrightarrow{c}-\overrightarrow{b}=(۳,-۴,۰)\Rightarrow|\overrightarrow{v}|=۵ \quad , \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=-۱$$

$$\overrightarrow{u'}=\frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|^{۲}}\overrightarrow{v}\Rightarrow\overrightarrow{u'}=(-\frac{۳}{۲۵},\frac{۴}{۲۵},۰)$$

۱۴۸

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}-\overrightarrow{j}=(-۲,-۱,۱) \quad , \quad \overrightarrow{u}\times\overrightarrow{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -۲ & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۲ & ۳ \end{vmatrix}=-\overrightarrow{i}+۷\overrightarrow{j}+۵\overrightarrow{k}$$

$$\left|\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{۷۵}$$

$$S=\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$$

۱۴۹

$$V=۰\Rightarrow|\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b}\times\overrightarrow{c})|=۰\Rightarrow\begin{vmatrix} m & -۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۱ \\ ۱ & m & -۱ \end{vmatrix}=۰\Rightarrow m^{۲}-۲m+۱=۰\Rightarrow m=۱$$

۱۵۰

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta\Rightarrow ۲m=(\sqrt{m^{۲}+۴})(۲\sqrt{۲})(\frac{۱}{۲})\Rightarrow ۴m^{۲}=۲m^{۲}+۸$$

$$\Rightarrow m^{۲}=۴\Rightarrow\begin{cases} m=۲ & \text{ق ق} \\ m=-۲ & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۱۵۱ روش اول: بردار $\vec{a}'$ با بردار $\vec{b}$ موازی است، $\vec{a}' \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b}$.

$$(\vec{a}-\vec{a}')\perp\vec{b} \Rightarrow (\vec{a}-\vec{a}').\vec{b} = ۰ \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} - (k\vec{b}).\vec{b} = ۰ \Rightarrow k = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}$$

$$\Rightarrow \vec{a}' = k\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

روش دوم: در مثلث قائم الزاویه، زاویه بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را θ می نامیم، $\cos\theta = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{a}|} \Rightarrow |\vec{a}'| = |\vec{a}|\cos\theta$

$$\vec{a}' = k\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}'| = k|\vec{b}| \Rightarrow k = \frac{|\vec{a}'|}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|^۲} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}$$

$$\xrightarrow{|\vec{a}'|=k\vec{b}} \vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$$

۱۵۲ حجم متوازی‌السطوح برابر با حاصل‌ضرب ارتفاع در مساحت قاعده است.

حجم متوازی‌السطوح برابر $|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})| = |(۱,۱,۰).(۱,۱,-۱)| = ۲$ است.

مساحت قاعده این متوازی‌السطوح که توسط بردارهای $\vec{b}$ و $\vec{c}$ تولید می‌شود برابر با $|\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{۳}$ است.

درنتیجه: $h = \frac{|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|}{|\vec{b}\times\vec{c}|} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}$

۱۵۳

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} \parallel \vec{a} \Rightarrow \vec{b} = (۴k\,,\,-۴k\,,\,۲k)$$
$$|\vec{b}| = ۶|k| = ۱۲ \Rightarrow k = \pm۲ \Rightarrow k = -۲ \Rightarrow \vec{b} = (-۸\,,\,۸\,,\,-۴)$$

۱۵۴

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow ۳ = ۳\sqrt{۲}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ$$

۱۵۵

$$\overrightarrow{a} = r\,\overrightarrow{b}$$
$$\overrightarrow{a}' = \frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^۲}\overrightarrow{b} = \frac{(r\,\overrightarrow{b}).\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|^۲}\overrightarrow{b} = \frac{r|\overrightarrow{b}|^۲}{|\overrightarrow{b}|^۲}\overrightarrow{b} = r\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}$$

۱۵۶

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{a}\,.\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۲-n}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۴+۱+n^۲}} \Rightarrow \frac{n-۲}{\sqrt{n^۲+۵}} = ۱$$
$$n^۲+۵ = n^۲-۴n+۴ \Rightarrow n = -\frac{۱}{۴}$$

۱۵۷

$$(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = (۶, ۴, -۴)$$

$$v = |\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = |(۱, ۰, -۱).(۶, ۴, -۴)| = ۱۰$$

راه‌حل دوم برای محاسبهٔ v می‌تواند به‌صورت زیر باشد:

$$v = |\overrightarrow{a}.(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = \left\| \begin{matrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۳ & ۰ \end{matrix} \right\| = ۱۰$$

۱۵۸

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta \Rightarrow ۱۰ = ۳ \times ۵\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۲}{۳} \quad , \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

$$|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta = ۵\sqrt{۵} \Rightarrow S_{\Delta} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$$

با استفاده از اتحاد لاگرانژ هم مسأله را می‌توان حل کرد.

۱۵۹

$$\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Rightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = ۰ \Rightarrow ۲(m+۱) + ۳m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = ۰$$

۱۶۰

$$\vec{a}.\vec{b} = ۰ \Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = ۰ \overset{|\vec{a}|\neq ۰ \,,\, |\vec{b}|\neq ۰}{\longleftrightarrow} \cos\theta = ۰ \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{۲}$$

۱۶۱

$$\overrightarrow{AB} = (۱, ۲, ۱) \quad , \quad \overrightarrow{AC} = (-۳, ۲, -۳)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-۸, ۰, ۸) \quad , \quad S_{\overset{\Delta}{ABC}} = \frac{۱}{۲}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = ۴\sqrt{۲}$$

۱۶۲

$$|۲\vec{a} \times \vec{b}| = |۲\vec{a}||\vec{b}|\sin ۳۰^{\circ} = ۲(۶)(۴)(\frac{۱}{۲}) = ۲۴$$

۱۶۳ الف

$$\vec{a} = (۲, ۳, -۱) , \vec{b} = (۱, ۰, ۱)$$

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow ۱ = \sqrt{۱۴}\sqrt{۲}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{۲\sqrt{۷}}$$

ب

$$\vec{d} = \vec{b} - \vec{c} = (۱, -۲, ۰) \quad , \quad \vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{d}}{|\vec{d}|^{۲}}\vec{d} = \frac{-۴}{۵}(۱, -۲, ۰)$$

پاسخ سؤال ۱۶۴

۱۶۴ صفر

۱۶۵

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \Rightarrow ۷۲ = ۳(۲۶) \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۱۲}{۱۳}$$
$$\cos\theta = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = ۳(۲۶)\frac{۵}{۱۳} = ۳۰$$

۱۶۶ الف

$$\vec{a}.\vec{b} = ۲ + ۱ + ۰ = ۳ \qquad \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{۳}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ$$

ب بردار عمود بر دو بردار: $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (۲, -۱, ۲) \times (۱, -۱, ۰) = (۲, ۲, -۱)$$

۱۶۷

$$\vec{b}.(\vec{a} \times \vec{c}) = ۰ \Rightarrow (۰, m, -۱).(۳, -۳, -۳) = ۰$$
$$\Rightarrow -۳m + ۳ = ۰ \Rightarrow m = ۱$$

۱۶۸ روش اول:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{۷۲}{۳ \times ۲۶} = \frac{۱۲}{۱۳} \Rightarrow \cos\theta = \pm\frac{۵}{۱۳}$$
$$\xrightarrow{\theta<۹۰} \cos\theta = \frac{۵}{۱۳} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta = ۳۰$$

روش دوم:

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^۲ + (\vec{a}.\vec{b})^۲ = |\vec{a}|^۲|\vec{b}|^۲ \Rightarrow ۷۲^۲ + (\vec{a}.\vec{b})^۲ = ۳^۲ \times ۲۶^۲$$
$$(\vec{a}.\vec{b})^۲ = ۹۰۰ \Rightarrow (\vec{a}.\vec{b}) = \pm۳۰ \xrightarrow{\theta<۹۰} (\vec{a}.\vec{b}) = ۳۰$$

۱۶۹

$$\vec{a}.\vec{b} = ۲ \times ۱ + (-۱)(-۱) + ۲ \times ۰ = ۳ \quad , \quad |\vec{b}| = \sqrt{۱^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲} = \sqrt{۲}$$
$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b} = \frac{۳}{۲}(۱, -۱, ۰) = (\frac{۳}{۲}, -\frac{۳}{۲}, ۰)$$

۱۷۰ الف برداری عمود بر دو بردار $-۲\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$(-۲\vec{b}) \times \vec{c} = (۲, -۲, ۰) \times (۲, ۱, -۲) = (۴, ۴, ۶)$$

ب حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$|(\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = |(۲, ۳, ۱) \cdot (-۲, -۲, -۳)| = ۱۳$$

۱۷۱

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{o}\ \Leftrightarrow\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{o}|\ \Leftrightarrow\ |\vec{a}||\vec{b}|\times\sin\theta=\text{۰}$$

$$\xrightarrow{|\vec{a}|\neq\text{۰}\ ,\ |\vec{b}|\neq\text{۰}}\sin\theta=\text{۰}\ \Leftrightarrow\ \theta=\text{۰}\ \vee\ \theta=\pi\ \Leftrightarrow\ \vec{a}||\vec{b}$$

۱۷۲

$$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^{\text{۲}}=|\vec{o}|^{\text{۲}}\ \Rightarrow\ |\vec{a}|^{\text{۲}}+|\vec{b}|^{\text{۲}}+|\vec{c}|^{\text{۲}}+\text{۲}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=\text{۰}$$

$$\Rightarrow\text{۱}+\text{۴}+\text{۹}+\text{۲}(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=\text{۰}\ \Rightarrow\ (\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a})=-\text{۷}$$

۱۷۳

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\text{۳},\text{۲},\text{۱})\times(\text{۲},\text{۰},\text{۱})=(\text{۲},-\text{۱},-\text{۴})$$

$$S=|\vec{a}\times\vec{b}|=\sqrt{\text{۴}+\text{۱}+\text{۱۶}}=\sqrt{\text{۲۱}}$$

۱۷۴

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^{\text{۲}}}\vec{b}=\frac{\text{۲}+\text{۱}+\text{۰}}{\text{۱}+\text{۱}+\text{۰}}(\text{۱},-\text{۱},\text{۰})=\frac{\text{۳}}{\text{۲}}(\text{۱},-\text{۱},\text{۰})$$

۱۷۵ روش اول:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\text{۱۲}}{\text{۴}\times\text{۶}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{\text{۳}}$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\times\text{۴}\times\text{۶}\times\frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}}=\text{۶}\sqrt{\text{۳}}$$

روش دوم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^{\text{۲}}+(\vec{a}.\vec{b})^{\text{۲}}=|\vec{a}|^{\text{۲}}|\vec{b}|^{\text{۲}}$$

$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{\text{۲}}+(\text{۱۲})^{\text{۲}}=(\text{۴})^{\text{۲}}(\text{۶})^{\text{۲}}\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{\text{۲}}+\text{۱۴۴}=\text{۵۷۶}$$

$$\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|^{\text{۲}}=\text{۴۳۲}\Rightarrow|\vec{a}\times\vec{b}|=\text{۱۲}\sqrt{\text{۳}}$$

مساحت مثلث برابر است با:

$$S=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}|\vec{a}\times\vec{b}|=\text{۶}\sqrt{\text{۳}}$$

۱۷۶ الف

$$\vec{a}.\vec{b}=(-\text{۲},\text{۰},\text{۲}).(\text{۰},\text{۲},\text{۲})=\text{۴}\quad,\quad|\vec{a}|=\left|\vec{b}\right|=\text{۲}\sqrt{\text{۲}}$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|}=\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\Rightarrow\theta=\text{۶۰}^{\circ}$$

ب

$$\vec{a}+\vec{b}=(-۲,۰,۲)+(۰,۲,۲)=(-۲,۲,۴)$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)'=\frac{\left(\vec{a}+\vec{b}\right).\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^۲}\vec{b}=\frac{۱۲}{۸}(۰,۲,۲)=(۰,۳,۳)$$

۱۷۷

$$\vec{a}.\vec{a}=a_۱a_۱+a_۲a_۲+a_۳a_۳=a_۱^۲+a_۲^۲+a_۳^۲=|\vec{a}|^۲$$

۱۷۸

$$\overrightarrow{AB}=(۲,-۲,-۱)\,,\overrightarrow{AC}=(۱,-۳,۱)$$

$$S=\frac{۱}{۲}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{۱}{۲}|(-۵,-۳,-۴)|=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۵+۹+۱۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۵۰}$$

۱۷۹

الف برداری عمود بر دو بردار $\vec{a}+\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=(۱,۴,۱)\times(۲,۱,-۲)=(-۹,۴,-۷)$$

ب حجم متوازی‌السطوح تولیدشده توسط سه بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{c}$ برابر است با:

$$\left|(\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})\right|=(۲,۳,۱)\times(-۲,-۲,-۳)=-۱۳$$