بیستوفیل

ریاضی دوازدهم

تجربی

نوتروفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴

.تک رقمی نوتروفیل

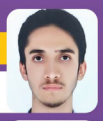
رتبه ۸
ایمان نیک‌نام جهرمی

.دو رقمی‌های نوتروفیل

رتبه ۱۴
امیرمحمد کیانی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۲۰
سینا راضی


رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۷۵
محمدصالح عارفی

رتبه ۸۰
محمدمهدی شریفی

.سه رقمی و چهار رقمی های نوتروفیل

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصریان

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی

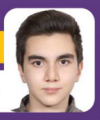
رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبداله آبادی

رتبه ۵۳۲
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا

رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد


رتبه ۵۵۷
محمدصالح زارعی

رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

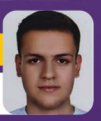
رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری


رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۸۰۳
مائده رنجبر

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

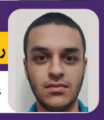
رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی

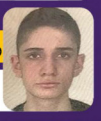
رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده


رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی


رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۵۳۴
فاطیما عبیری

رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۷۳۱
محمدرضا محسنی

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۶۲۵
زهره مجمعی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۱

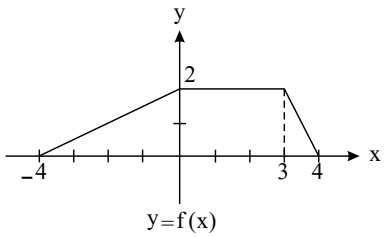
سال دوازدهم تجربی

تیم نوتروفیل

تبدیل نمودار توابع

۱ با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار $y=\frac{۱}{۲}f(۴x)$ را رسم کنید.

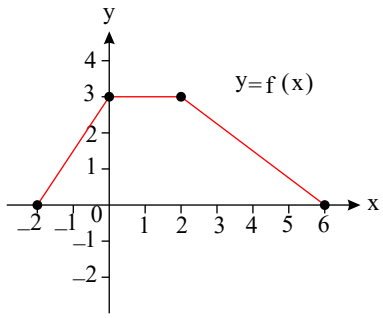
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸



۲ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است.

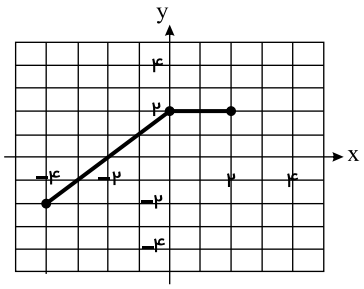
نمودار تابع $y=\frac{۱}{۳}f(۲x)$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹



۳ با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=f(-x)+۲$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

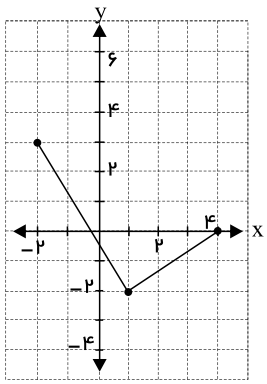


۴ نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو است:

الف) نمودار تابع $g(x)=۲f(x-۱)$ را رسم کنید.

ب) دامنهٔ تابع g را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱



۵ اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر $[-۱,۳]$ و برد آن $[۰,۲]$ باشد، دامنه و برد تابع $y=f(\frac{x}{۲})$ را بیابید.

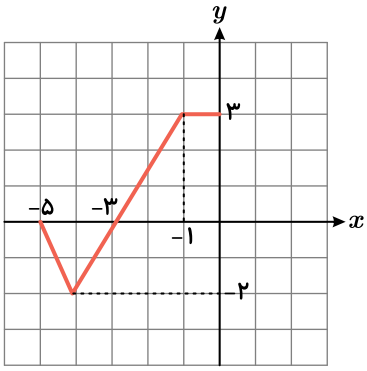
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۶ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x+۱$ را ابتدا دو واحد به‌سمت پایین، سپس یک واحد به‌سمت چپ و در مرحلهٔ آخر نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم. ضابطهٔ نمودار تابع را در هر مرحله بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

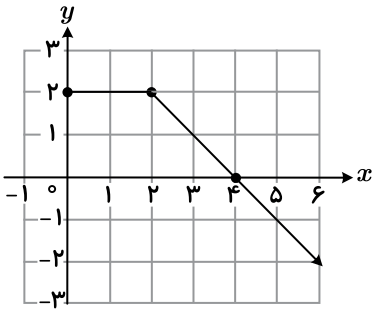
۷ نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. دامنه و برد تابع $g(x)=۲f(-x)$ را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



۸ در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



الف نمودار تابع g با ضابطه $g(x)=f(۲x)$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ب مقدار $gof(۰)$ را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

تابع

ترکیب توابع

۹ دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۴}$ و $g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}$ را در نظر بگیرید. دامنهٔ تابع gof را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۱۰ اگر $f(x)=x^۲-۵$ و $g(x)=\sqrt{x+۶}$ باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب با محدود کردن دامنهٔ تابع f تابعی وارون‌پذیر بسازید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۱ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد،

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب ضابطهٔ تابع، fog را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۲ اگر $f(x)=۷-۴x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x+۳}$ باشد:

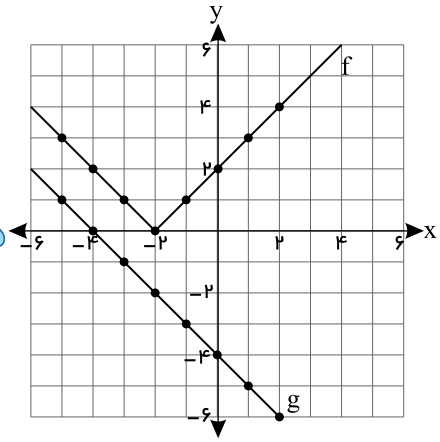
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف) دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(۱)$ را محاسبه کنید.

۱۳

با توجه به نمودار توابع f و g، مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱



الف $(gof)(-۱)$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب $(g^{-۱}of^{-۱})(۲)$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

پ نمودار تابع $f(x-۲)-۳$ را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۱۴ اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ باشند آنگاه D_{fog} را با استفاده از تعریف به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۵ تابع‌های $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ و $g(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نظر بگیرید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف دامنهٔ تابع $(fog)(x)$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب مقدار $(gof^{-۱})(۲)$ را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱۶ اگر $f(x)=\frac{۱}{۱-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-۳}$، آنگاه:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ب دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۱۷ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

تابع

توابع صعودی نزولی-چند جمله ای-وارون

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۸ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف دامنه توابع چندجمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^۳$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ وارون یکدیگرند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

پ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف تابع $y=\sqrt{۳}x^۳-\pi x+۱$ یک تابع چندجمله‌ای است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

ب تابع $y=\frac{۱}{x}$ در دامنه‌اش یکنواست.

۲۰ نمودار تابع $y = -x^3 + 2$ را رسم کنید و صعودی یا نزولی بودن آن را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۱ اگر $f(x) = \frac{1}{8}x - 3$ و $g(x) = x^3$ باشد، مقدار $g^{-1}of^{-1}(5)$ را به‌دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۲ نشان دهید توابع $f(x) = 3x - 4$ و $g(x) = \frac{x+4}{3}$ وارون یکدیگرند. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۳ اگر دامنهٔ تابع $f(x) = x^2 + 4x + 3$ برابر $[-2, +\infty]$ باشد، ضابطه و دامنهٔ تابع وارون را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۴ تابع $f(x) = \sqrt{x+4} - 1$ را در نظر بگیرید. دامنه و ضابطه تابع وارون آن را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۵ فرض کنید $f(x) = 1 + \sqrt{x-2}$ و $g(x) = x^3 - 1$ باشند. در این صورت $(gof)^{-1}7$ را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۶ اگر $f(x) = \sqrt{x-2}$ باشد، آنگاه: مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف) دامنهٔ تابع $f^{-1}of$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب) مقدار $f^{-1}(5)$ را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۷ ضابطهٔ تابع وارون $f(x) = \sqrt[3]{x-2} + 5$ را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۲۸ جاهای خالی را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف) تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازهٔ $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف) دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = kf(x)$ همان دامنهٔ تابع $y = f(x)$ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف) تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف) اگر تابعی یک‌به‌یک باشد، آنگاه اکیداً یکنوا است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۲ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف) دو تابع $f(x) = -\frac{2x+6}{7}$ و $g(x) = \frac{-7}{2}x - 3$ وارون یکدیگرند. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف) برد تابع با ضابطهٔ $y = kf(x)$ همان برد تابع $y = f(x)$ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳۴ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

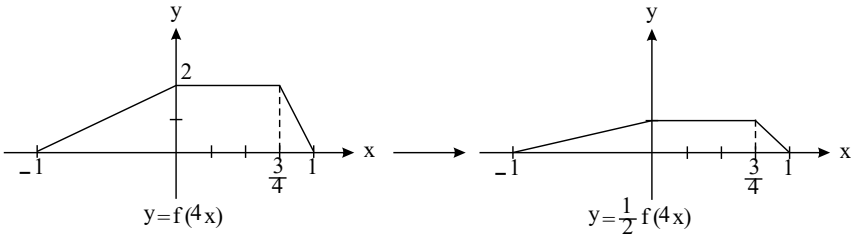
الف) نمودار تابع $y = 3f(x)$ با انبساط نمودار $y = f(x)$ در امتداد محور yها به دست می‌آید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۵ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف) تابع $y = \sin x$ یکنواست. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

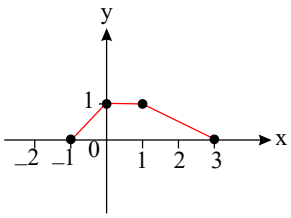
پاسخنامه تشریحی

۱ کافی است طول نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.

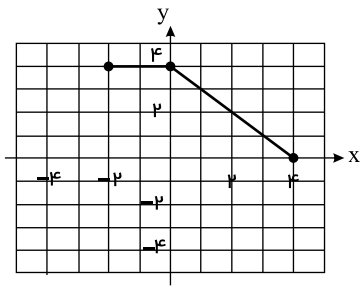


۲

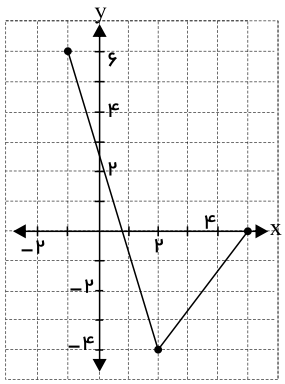
کافی است که طول‌ها را نصف کرده و سپس عرض‌ها را $\frac{۱}{۳}$ برابر کنیم.



۳



۴ الف)



ب) $[-۱, ۵]$

۵ برد تغییر نمی‌کند.

$$D_{f(\frac{x}{۲})} \Rightarrow -۱ < \frac{x}{۲} \leq ۳ \rightarrow D_{f(\frac{x}{۲})} = [-۲, ۶]$$

۶ مرحلهٔ اول:

$$f(x) - ۲ = (x - ۱)^۲ - ۲$$

مرحلهٔ دوم:

$$f(x + ۱) - ۲ = x^۲ - ۲$$

مرحلهٔ سوم:

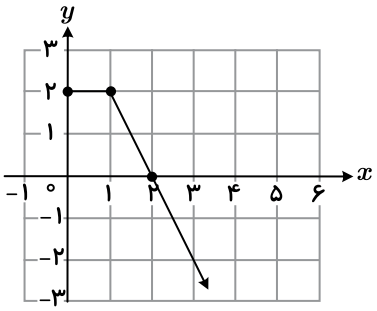
$-f(x+۱)+۲=-x^۲+۲$

۷

$D_g=[۰,۵], R_g=[-۴,۶]$

۸

الف



ب

$gof(۰)=g(۲)=۰$

۹

$f(x)=\sqrt{x-۴}\rightarrow D_f: x-۴\geq ۰\rightarrow x\geq ۴$

$g(x)=\frac{۱}{x^۲-۱}\rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

$D_{gof}=\{x\in D_f\ ,\ f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۴\ ,\ \sqrt{x-۴}\neq \pm ۱\}=\{x\geq ۴\ ,\ x\neq ۵\}=[۴,۵)\cup(۵,+\infty)$

۱۰

الف

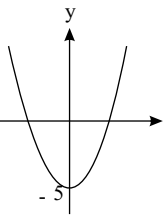
$f(x)=x^۲-۵\rightarrow D_f=\mathbb{R}$

$g(x)=\sqrt{x+۶}\rightarrow D_g: x\geq -۶$

$D_{fog}=\{x\in D_g\ ,\ g(x)\in D_f\}=\{x\geq -۶\ ,\ \sqrt{x+۶}\in\mathbb{R}\}=[-۶,+\infty)$

ب

در تابع $f(x)=x^۲-۵$ که به شکل



است با انتخاب $x\geq ۰$ یا $x\leq ۰$ تابع یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر می‌شود.

۱۱

الف

$f(x)=\sqrt{x-۱}\rightarrow D_f: x-۱\geq ۰\rightarrow x\geq ۱$

$g(x)=۲x^۲-۱\rightarrow D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}: \{x\in D_g, g(x)\in D_f\}=\{x\in\mathbb{R}, ۲x^۲-۱\geq ۱\}=\{x\in\mathbb{R}, ۲x^۲\geq ۲\}=\{x\in\mathbb{R}, x^۲\geq ۱\}=\{x\in\mathbb{R}, x\geq ۱ \text{یا} x\leq -۱\}=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$

ب

$fog(x)=f(g(x))=\sqrt{۲x^۲-۱-۱}=\sqrt{۲x^۲-۲}$

۱۲ الف)

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in [-۳, +\infty) | \sqrt{x+۳} \in R\} = [-۳, +\infty)$

ب)

$(gof)(۱) = g(۳) = \sqrt{۶}$

۱۳

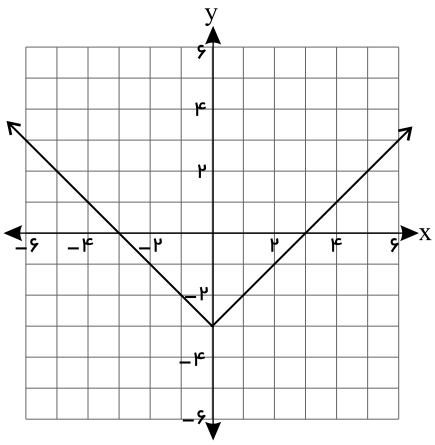
الف

$(gof)(-۱) = g(۱) = -۵$

ب

$(g^{-۱}of^{-۱})(۲) = g^{-۱}(۰) = -۴$

پ



۱۴

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \geq -۱\}\sqrt{x+۱} \in \mathbb{R} - \{۱\}\}$

$\sqrt{x+۱} \neq ۱ \Rightarrow x \neq ۰$

$D_{fog} = [-۱, ۰) \cup (۰, +\infty)$یا$[-۱, +\infty) - \{۰\}$

۱۵

الف

$D_g = [۲, +\infty)\ ,\quad D_f = \mathbb{R} - \{۲\}$

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in [۲, +\infty) | \sqrt{x-۲} \neq ۲\}$

$= \{x \in [۲, +\infty) | x \neq ۶\} = [۲, +\infty) - \{۶\}$

ب

$(gof^{-۱})(۲) = g(۵) = \sqrt{۳}$

۱۶

الف

$fog(x) = \frac{۱}{۱ - \sqrt{x-۳}}$

ب

$D_f = \mathbb{R} - \{۱\}\ ,\ D_g = [۳, +\infty)$

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\} = \{x \in [۳, +\infty) | g(x) \in \mathbb{R} - \{۱\}\} = \{x \geq ۳ | \sqrt{x-۳} \neq ۱\} = [۳, +\infty) - \{۴\}$

۱۷

الف

درست

۱۸

الف درست

ب درست.

پ نادرست.

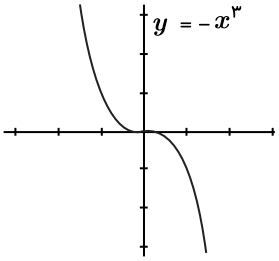
۱۹

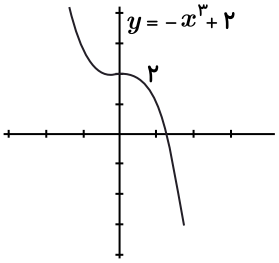
الف درست

ب نادرست

۲۰

تابع اکیداً نزولی است.





۲۱ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد، آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

$$g^{-1}of^{-1}(۵) = g^{-1}(f^{-1}(۵)) = g^{-1}(۶۴) = ۴$$

علت: $\begin{cases} f^{-1}(۵) = \alpha \to f(\alpha) = ۵ \to \frac{۱}{۸}\alpha - ۳ = ۵ \to \frac{۱}{۸}\alpha = ۸ \to \alpha = ۶۴ \\ g^{-1}(۶۴) = \beta \to g(\beta) = ۶۴ \to \beta^۳ = ۶۴ \to \beta = ۴ \end{cases}$

۲۲ می‌دانیم که $fof^{-1}(x) = x$ و $f^{-1}of(x) = x$ است.

$$fog(x) = f(g(x)) = ۳(\frac{x+۴}{۳}) - ۴ = x + ۴ - ۴ = x$$

$$gof(x) = g(f(x)) = \frac{۳x - ۴ + ۴}{۳} = \frac{۳x}{۳} = x$$

بنابراین دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ وارون یکدیگرند.

۲۳

$$f(x) = (x+۲)^۲ - ۱ \to y + ۱ = (x+۲)^۲ \xrightarrow{x \geq -۲}$$
$$\sqrt{y+۱} = x + ۲ \to f^{-1}(x) = \sqrt{x+۱} - ۲ \to D_{f^{-1}} = [-۱, +\infty)$$

۲۴

$$y = \sqrt{x+۴} - ۱ \Rightarrow y + ۱ = \sqrt{x+۴} \Rightarrow (y+۱)^۲ = x + ۴ \Rightarrow (y+۱)^۲ - ۴ = x$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+۱)^۲ - ۴$$
$$D_{f^{-1}} = R_f = [-۱, +\infty)$$

۲۵ روش اول:

$$(gof)^{-1}(۷) = (f^{-1}og^{-1})(۷) = f^{-1}(۲) = ۳$$

روش دوم:

$$(gof)(x) = ۷ \Rightarrow ((۱ + \sqrt{x-۲})^۳ - ۱) = ۷ \Rightarrow x = ۳$$

روش سوم:

$$(gof)(x) = (۱ + \sqrt{x-۲})^۳ - ۱ \Rightarrow (gof)^{-1}(x) = (\sqrt[۳]{x+۱} - ۱)^۲ + ۲ \Rightarrow (gof)^{-1}(۷) = ۳$$

روش چهارم:

$$(gof)^{-1}(x) = (f^{-1}og^{-1})(x) = (\sqrt[۳]{x+۱} - ۱)^۲ + ۲ \overset{x = ۷}{=\!=\!=} ۳$$

۲۶

الف روش اول:

$D_{f^{-1}of} = D_f = [۲, +\infty)$

روش دوم:

$D_{f^{-1}of} = \{x \in D_f | f(x) \in D_{f^{-1}}\} = \{x \in D_f | f(x) \in R_f\} = D_f = [۲, +\infty)$

تذکر: درصورتی‌که فقط به بازهٔ $[۲, +\infty)$ اشاره شود قابل‌قبول است.

ب روش اول:

$f^{-1}(x) = x^۲ + ۲ \Rightarrow f^{-1}(۵) = ۲۷$

روش دوم:

$f^{-1}(۵) = x \Rightarrow f(x) = ۵ \Rightarrow \sqrt{x-۲} = ۵ \Rightarrow x = ۲۷$

۲۷ روش اول:

$y = \sqrt[۳]{x-۲} + ۵ \longrightarrow y - ۵ = \sqrt[۳]{x-۲} \longrightarrow (y-۵)^۳ = x - ۲$
$\longrightarrow (y-۵)^۳ + ۲ = x \longrightarrow f^{-1}(x) = (x-۵)^۳ + ۲$

روش دوم:

$y = \sqrt[۳]{x-۲} + ۵ \longrightarrow x - ۵ = \sqrt[۳]{y-۲} \longrightarrow (x-۵)^۳ = y - ۲$
$\longrightarrow y = (x-۵)^۳ + ۲ \longrightarrow f^{-1}(x) = (x-۵)^۳ + ۲$

۲۸

الف ۲

۲۹

الف درست

۳۰

الف درست

۳۱

الف نادرست

۳۲

الف درست

$y = -\frac{۲x+۶}{۷} \to ۷y = -۲x - ۶ \to ۲x = -۷y - ۶ \to x = -\frac{۷}{۲}y - ۳ \to f^{-1}(x) = -\frac{۷}{۲}x - ۳$

۳۳

الف نادرست

علت: برد تابع $y = kf(x)$، k برابر برد تابع $y = f(x)$ است.

۳۴

الف درست

۳۵

الف نادرست

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۲

سال دوازدهم تجربی

تیم نوتروفیل

۱ جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف دورهٔ تناوب تابع تانژانت برابر با ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

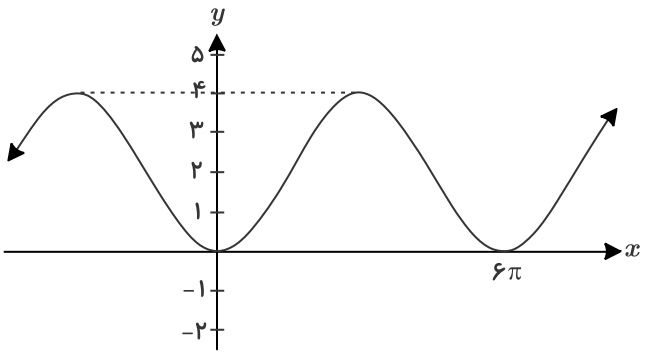
۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف برد تابع $f(x)=\tan x$ برابر بازهٔ $[-۱,۱]$ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف خط $y=\frac{۱}{۲}$، نمودار تابع $y=\sin x$ را در فاصله $[۰,۲\pi]$ در یک نقطه قطع می‌کند. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a\cos(bx)+۲$ یا $f(x)=a\sin(bx)+۲$ است. با دقت در شکل نمودار و محاسبهٔ مقادیر a و b، ضابطهٔ مربوط به این تابع را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴



۵ دورهٔ تناوب و مقدار ماکزیمم تابع $f(x)=۱-۳\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

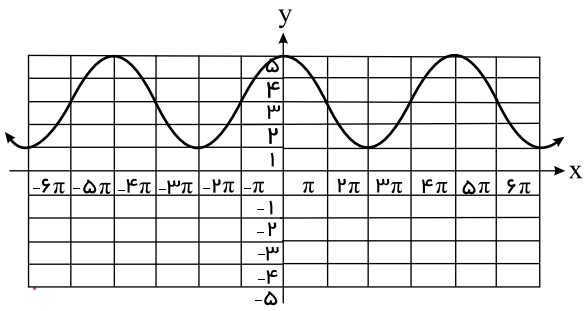
الف خط $x=\pi$ نمودار تابع $y=\tan x$ را قطع می‌کند. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۷ دورهٔ تناوب، مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=-۳\cos(\pi x)+۱$ را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۸ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع زیر را به‌دست آورید. (راه حل نوشته شود)

$y=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۹ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y=a\cos bx+c$ است. با توجه به نمودار، ضابطهٔ آن را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

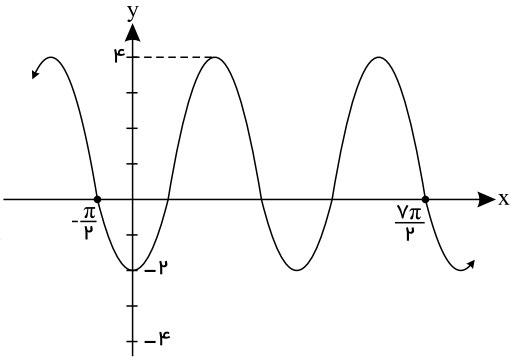


۱۰ برد تابع تانژانت $(y=\tan x)$ برابر ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۱ دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y=۳cos(\pi x)+۲$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

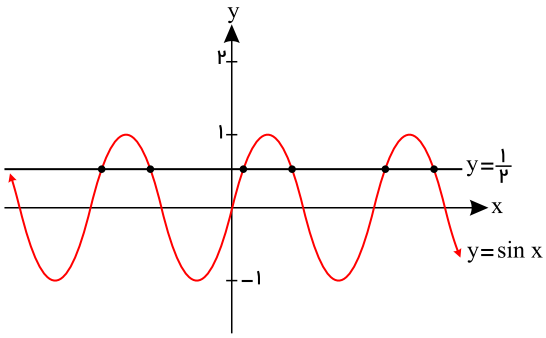
۱۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = a\cos bx + c$ به‌صورت مقابل رسم شده است. مقادیر a، b و c را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



۱۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \sin x$ و خط به معادلهٔ $y = \frac{۱}{۲}$ در دستگاه مختصات زیر، رسم شده است. طول نقاط برخورد آنها را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



۱۴ معادلهٔ یک تابع سینوسی $y = a\sin(bx) + c$ را بنویسید که مقدار ماکزیمم آن ۵ و مقدار مینیمم آن -۱ و دورهٔ تناوب آن ۸π است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۵ مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = a\cos\frac{x}{۲} + ۳$ برابر ۶ می‌باشد، $|a|$ و دوره تناوب را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۶ اگر بیشترین و کمترین مقدار تابع $y = a\sin(۸x) + c$ به ترتیب ۹ و ۳ باشد:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف مقادیر $|a|$ و c را بیابید.

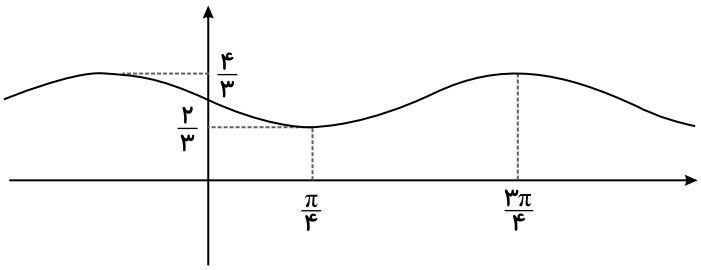
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ب دورهٔ تناوب تابع را به دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۷ نمودار تابع $y = a\sin(bx) + c$ به صورت زیر است، ضابطهٔ آن را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



۱۸ با توجه به محورهای کسینوس و تانژانت، اگر $\frac{\pi}{۴} < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ باشد، آنگاه مقادیر $\cos\alpha$ و $\tan\alpha$ را با هم مقایسه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۹ معادلهٔ مثلثاتی زیر را حل کنید.

$\cos ۲x - ۱۳\cos x - ۶ = ۰$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۰ مقدار c را چنان تعیین کنید که مینیمم تابع $y = -۴\cos(۲\pi x) + c$ برابر -۵ باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۲۱ دورهٔ تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = ۲ - ۳\sin\frac{\pi}{۴}x$ را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۲۲ مقدار مینیمم و دورهٔ تناوب تابع $f(x) = c - ۲\sin(bx)$ به‌ترتیب ۴ و $\frac{\pi}{۲}$ است، مقادیر $|b|$ و c را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

مثلثات

معادلات مثلثاتی

۲۳ معادلهٔ $\cos ۲x + \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۴ معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۵ معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۶ معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۲}}{۴}$ را حل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۷ معادلهٔ مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$ را حل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۸ حاصل عبارت $۴ \sin x \cos x \cos ۲x$ را به‌ازای $x = ۷.۵^\circ$ محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۹ معادلهٔ مثلثاتی $\sin ۲x = \sin x$ را حل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۰ معادله زیر را حل کنید.

$\cos ۲x - ۳ \sin x + ۴ = ۰$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۱ مثلثی با مساحت $۸\sqrt{۲}$ سانتی‌متر مربع مفروض است. اگر اندازهٔ دو ضلع این مثلث به‌ترتیب ۴ و ۸ سانتی‌متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۲ جواب(های) معادله مثلثاتی $\cos ۲x - \cos x = ۰$ را در بازه $(۰, \pi)$ مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف فقط دو زاویه وجود دارد که مقدار کسینوس آن $\frac{۲}{۵}$ باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۴ جواب‌های معادلهٔ مثلثاتی $۲ \sin ۴x = ۱$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[۰, \frac{\pi}{۲}]$ هستند؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۵ جواب‌های معادله $\cos(۲x) = \frac{۱}{۲}$ را در بازه $(۰, \pi)$ به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۶ معادلهٔ $۴ \sin^۲ x - ۴ \cos x - ۵ = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۳۷ معادلهٔ $\sin x = \frac{۱}{۲ \cos x}$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۳۸ معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۲x - ۳ \cos x - ۱ = ۰$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۹ اگر $\tan \alpha = \tan \beta = -\sqrt{۲}$، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۴۰ مقدار عددی A را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

$A = \cos^۲ ۲۲.۵^\circ - \sin^۲ ۲۲.۵^\circ$

پاسخنامه تشریحی

۱

الف

π

۲

الف

نادرست

۳

الف

نادرست

۴ روش اول محاسبهٔ مقدار a:

$$|a|+۲=۴ \Rightarrow |a|=۲ \xrightarrow{a<۰} a=-۲$$

روش دوم محاسبهٔ مقدار a:

$$|a|=\frac{۴-۰}{۲}=۲ \xrightarrow{a<۰} a=-۲$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۶\pi \Rightarrow b=\frac{۲\pi}{۶\pi}=\pm\frac{۱}{۳}$$

تشخیص اینکه تابع کسینوسی است:

$$f(x)=-۲\cos(\frac{x}{۳})+۲$$

هریک از موارد $|b|=\frac{۱}{۳}$ یا $b=\frac{۱}{۳}$ یا $b=-\frac{۱}{۳}$ درست است.

توجه: در صورتی‌که ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=-۲\cos(-\frac{x}{۳})+۲$ نوشته شود، قابل‌قبول است.

۵

$$T=\frac{۲\pi}{|\frac{\pi}{۲}|}=۴ \qquad max=|-۳|+۱=۴$$

۶

الف

درست

۷ می‌دانیم تابع $y=a\cos bx+c$ دارای مقدار ماکزیمم $|a|+c$ و مقدار مینیمم $-|a|+c$ و دورهٔ تناوب $\frac{۲\pi}{|b|}$ است.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

دورهٔ تناوب: $T=\frac{۲\pi}{\pi}=۲$

ماکزیمم: $\max=|-۳|+۱=۴$

مینیمم: $\min=-|-۳|+۱=-۲$

۸ در تابع $y=a\sin bx+c$ می‌دانیم که $T=\frac{۲\pi}{|b|}$ و $Max=|a|+c$ و $Min=-|a|+c$ است.

$$y=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲ \rightarrow \begin{cases} T=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi \\ Max=|-\pi|-۲=\pi-۲ \\ Min=-|-\pi|-۲=-\pi-۲ \end{cases}$$

۹

$$c=\frac{۵+۱}{۲}=۳$$
$$|a|=\frac{۵-۱}{۲}=۲\ ,a>۰, a=۲$$
$$\Rightarrow \text{دوره تناوب}: T=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۴\pi=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |b|=\frac{۲\pi}{۴\pi}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow y=۲\cos(\frac{x}{۲})+۳ \quad \text{یا} \quad y=۲\cos(-\frac{x}{۲})+۳$$

۱۰ $\mathbb{R}$

۱۱

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{|\pi|}=۲ \quad \max=|a|+c=۵ \quad , \quad \min=-|a|+c=-۱$$

۱۲

$$۲T=\frac{۷\pi}{۲}-(-\frac{\pi}{۲})=۴\pi \to T=۲\pi \to \frac{۲\pi}{|b|}=۲\pi \to b=\pm ۱$$

$$c=\frac{۴+(-۲)}{۲}=۱$$

$$|a|=\frac{۴-(-۲)}{۲}=۳ \to a=-۳$$

۱۳

$$\sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{۶} \to \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \quad (k\in Z)$$

۱۴

$$|a|=\frac{۵-(-۱)}{۲}=۳ \Rightarrow a=\pm ۳ \quad , \quad c=\frac{۵+(-۱)}{۲}=۲$$

$$|b|=\frac{۲\pi}{۸\pi}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۴} \quad , \quad y=\pm ۳\sin(\pm\frac{۱}{۴}x)+۲$$

۱۵

$$|a|+۳=۶ \Rightarrow |a|=۳$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow \frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$$

۱۶

الف

روش اول:

$$|a|=\frac{Max-Min}{۲}=\frac{۹-۳}{۲}=۳ \quad c=\frac{Max+Min}{۲}=\frac{۹+۳}{۲}=۶$$

روش دوم:

$$\begin{cases} |a|+c=۹ \\ -|a|+c=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=۶ \\ |a|=۳ \end{cases}$$

ب

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۲\pi}{۸}=\frac{\pi}{۴}$$

۱۷

$$\begin{cases} |a|+c=\frac{۴}{۳} \\ -|a|+c=\frac{۲}{۳} \end{cases} \text{یا} \begin{cases} c=\frac{\max+\min}{۲} \\ |a|=\frac{\max-\min}{۲} \end{cases} \Rightarrow c=۱, |a|=\frac{۱}{۳}$$

$$T=\frac{۲}{|b|} \Rightarrow |b|=۲$$

$$\Rightarrow y=-\frac{۱}{۳}\sin(۲x)+۱ \text{ یا } y=\frac{۱}{۳}\sin(-۲x)+۱$$

۱۸

$$\tan\alpha>\cos\alpha$$

۱۹

$$۲\cos^۲ x-۱-۱۳\cos x-۶=۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x-۱۳\cos x-۷=۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos x=\cos(\frac{۲\pi}{۳}) \Rightarrow \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳} \\ x=۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow (k\in\mathbb{Z}) \\ \cos x=+۷ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

۲۰

$$\min=-|a|+c=c-۴=-۵ \Rightarrow c=-۱$$

۲۱

$$T=۸ \qquad \max=۵ \qquad \min=-۱$$

۲۲

$\min = -|-۲| + c = ۴ \to c = ۶$

$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{\pi}{۲} \to |b| = ۴$

۲۳

می‌دانیم: $\cos ۲x = ۲\cos^۲ x - ۱$

$$۲\cos^۲ x - ۱ + \cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos x + ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \cos x = ۰ \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = -\frac{۱}{۲} \Rightarrow x = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

۲۴ می‌دانیم $\cos ۲a = ۲\cos^۲ a - ۱$ است.

$$\cos ۲x - \cos x + ۱ = ۰ \to ۲\cos^۲ x - ۱ - \cos x + ۱ = ۰ \to ۲\cos^۲ x - \cos x = ۰$$

$$\to \cos x(۲\cos x - ۱) = ۰ \to \begin{cases} \cos x = ۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = \frac{۱}{۲} = \cos\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{\cos x = \cos\alpha \to x = ۲k\pi \pm \alpha} x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۲۵

$$\cos ۳x - \cos x = ۰ \Rightarrow \cos ۳x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} ۳x = ۲k\pi + x \\ ۳x = ۲k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi \\ ۴x = ۲k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{k\pi}{۲} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۲۶

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۴} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۴} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۸} & , k \in \mathbb{Z} \\ x = k\pi + \frac{۳\pi}{۸} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۲۷

$$\sin x\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \to \sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin\frac{\pi}{۳} \xrightarrow{\sin x = \sin\alpha \to \begin{cases} x = ۲k\pi + \alpha \\ x = ۲k\pi + \pi - \alpha \end{cases}} \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \to x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \to x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۲۸

$$۲\sin ۲x\cos ۲x = \sin ۴x = \sin ۴(۷/۵) = \frac{۱}{۲}$$

۲۹

$$\sin ۲x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} ۲x = ۲k\pi + x \to x = ۲k\pi & , k \in \mathbb{Z} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - x \to x = \frac{۲k\pi}{۳} + \frac{\pi}{۳} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

۳۰

$$۱ - ۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۴ = ۰ \Rightarrow -۲\sin^۲ x - ۳\sin x + ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{۵}{۲} & \text{غ ق ق} \\ \sin x = ۱ \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} \end{cases}$$

۳۱

$$\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۸\sin\theta = ۸\sqrt{۲} \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \theta = ۴۵^\circ \ , \ \theta = ۱۳۵^\circ$$

دو مثلث می‌توان رسم کرد.

۳۲

$$\cos ۲x = \cos x \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm x \Rightarrow x = \frac{۲k\pi}{۳} \Rightarrow x = \frac{۲\pi}{۳}$$

۳۳

الف

نادرست

۳۴

$$\sin ۴x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{\pi}{۲۴}.$$

$$۴x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{۲} + \frac{۵\pi}{۲۴}$$

$$x = \frac{۵\pi}{۲۴}, \frac{\pi}{۲۴}$$

۳۵ روش اول:

$$\cos ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos ۲x = \cos(\frac{\pi}{۳}) \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} (x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶})$$

$$\xrightarrow{x\in(۰,\pi)} x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$$

روش دوم:

$$\cos ۲x = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۰,\pi)} ۲x = \frac{\pi}{۳}, \frac{۵\pi}{۳} \xrightarrow{(۰,\pi)} x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$$

روش سوم:

$$\cos ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱ - ۲\sin^۲ x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \sin x = \pm\frac{۱}{۲} \xrightarrow{(۰,\pi)} x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$$

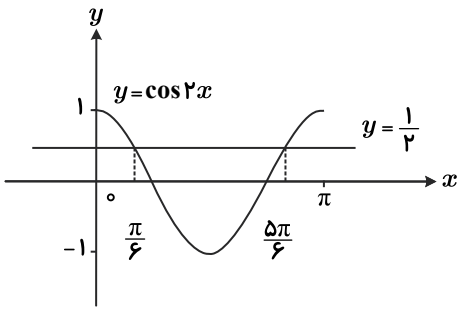
روش چهارم:

$$\cos ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲\cos^۲ x - ۱ = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cos^۲ x = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\xrightarrow{(۰,\pi)} x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$$

روش پنجم:

$$\cos ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \xrightarrow{(۰,\pi)} x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$$



۳۶

$$۴\sin^۲ x - ۴\cos x - ۵ = ۰ \Rightarrow ۴(۱ - \cos^۲ x) - ۴\cos x - ۵ = ۰$$

$$\Rightarrow ۴\cos^۲ x + ۴\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow (۲\cos x + ۱)^۲ = ۰ \Rightarrow \cos x = \frac{-۱}{۲} = \cos(\frac{۲\pi}{۳})$$

$$\Rightarrow x = ۲k\pi \pm (\frac{۲\pi}{۳}) \quad k \in \mathbb{Z}$$

۳۷

$$۲\sin x\cos x = ۱ \longrightarrow \sin ۲x = ۱ \longrightarrow ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}, k \in \mathbb{Z} \longrightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{۴}, k \in \mathbb{Z}$$

۳۸

$$۲\cos^۲ x - ۳\cos x - ۲ = ۰$$

$$\begin{cases} \cos x = ۲ \quad \text{غ ق ق} \\ \cos x = \frac{-۱}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{۲\pi}{۳} \\ x = ۲k\pi - \frac{۲\pi}{۳} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

۳۹

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-۲\sqrt{۲}}{۱ - (-\sqrt{۲})^۲} = ۲\sqrt{۲}$$

۴۰

$$A = \cos ۴۵^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل۳

سال دوازدهم تجربی

تیم نوتروفیل

حد

بخش پذیری

۱ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳+ax^۲+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش‌پذیر باشد. مرجع ۱: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف باقیمانده تقسیم عبارت $۲x^۲-۵x+۱$ بر $x-۳$ برابر ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)=۲x^۳-x^۲+۱$ بر $x-۱$ برابر ۲ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۴ هریک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=۲x^۳+۵x^۲-۳x-۱۰$ بر $x+۲$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۵ هریک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف باقیماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $۴x^۳-۵x+۲$ بر $x+۱$ برابر ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۶ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $۲x^۳+ax+b$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۱۵ باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۷ اگر چندجمله‌ای $f(x)=x^۲+ax-۳$ بر $(x+۱)$ بخش‌پذیر باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-۲)$ را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۸ چندجمله‌ای $x^۶-۱$ را برحسب عامل $(x+۱)$ تجزیه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۹ مقادیر a , b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $x^۳+ax^۲+bx+۱$ بر $x-۲$ و $x+۱$ بخش‌پذیر باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۰ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $P(x)=x^۳+ax^۲+bx-۲$ بر $(x-۲)$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌مانده تقسیم آن بر $(x+۱)$ برابر ۳ باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت‌های $p(x)=x^۳+ax+۱$ و $q(x)=۲x^۲-x+۱$ بر $(x+۲)$ یکسان است. مقدار a را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۲ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب را انتخاب کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف چندجمله‌ای $p(x)=۲x^۳+x^۲+۱$ بر دو جمله‌ای ..... بخش‌پذیر است. $((x+۱),(x-۱))$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

حد

حد بی‌نهایت

۱۳ حدود زیر را محاسبه کنید. (نماد [] علامت جزء صحیح است.) مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ب $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{۳-[x]}{x-۳}$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

پ $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۴ حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}\dfrac{۲-\sqrt{x}}{x^۲-۱۶}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{۱}{۱-\cos x}$

۱۵ حد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

$\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}$

۱۶ حد توابع زیر را به‌دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

ب

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۱۷ حدود زیر را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x^۲+x}{x^۲}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۸ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۲x-۳}{x-\sqrt{x+۶}}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۹ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

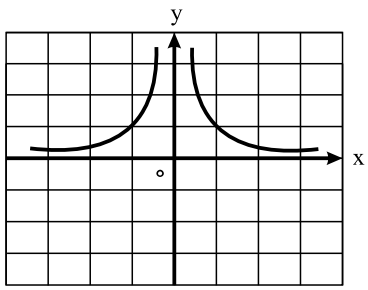
ب

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۰ با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x)=\frac{۱}{|x|}$ در نقطهٔ $x=۰$ برابر است با ..... .

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰



۲۱ حد زیر را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{x+۱}{|x-۲|}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۲ حدود زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف

$$\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

پ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{۲-x}{۵x+۴}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۲۳ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+۱}{\sin^۲ x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۲۴ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-\sqrt{x}}{x^۲+x-۲}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^+}\tan x$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۵ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف

$$\lim_{x\to۱}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

ب

$$\lim_{x\to۰^{-}}\frac{x-۲}{|\sin x|}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x^{۲}+۴x^{۵}}{x^{۳}-x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۶ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف

$$\lim_{x\to۲}\frac{۳}{|۲-x|}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

ب

$$\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{۳x+۱}-۲}{x-۱}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۷ حدود زیر را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{۲-\frac{۳}{x^{۲}}}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ب

$$\lim_{x\to(-\pi)^{+}}\frac{۱}{\sin x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

پ

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x^{۲}+۳x+۲}{\sqrt[۳]{x}+۱}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۸ حدود زیر را محاسبه کنید ([] نماد جزءصحیح است). مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف

$$\lim_{x\to ۸}\frac{x-۸}{\sqrt[۳]{x}-۲}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۵}+۴}{x^{۳}+x^{۵}}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

پ

$$\lim_{x\to ۴^{-}}\frac{[x]-۴}{۴-x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۹ حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزءصحیح است.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

الف

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^{+}}\frac{[x]}{\cos x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ب

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱-x^{۴}}{۲x^{۲}+۳x+۱}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

حد

حد در بی‌نهایت و رفع ابهام از ∞/∞

۳۰ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف حد تابع $f(x)=\frac{-۳x^{۷}+۵x^{۲}}{۲x^{۳}+۹}$ وقتی $x\to-\infty$ میل می‌کند برابر ..... می‌باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳۱ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف حد تابع $f(x)=\frac{۵x+۴}{x^{۳}+x-۸}$ وقتی که $x\to-\infty$ برابر ..... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳۲ حدهای زیر را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف

$$\lim_{x\to ۲^{-}}\frac{[x]}{x-۲}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

ب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱+x-۴x^{۲}}{۳x+۲x^{۲}}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۳ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف حد تابع $g(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ \frac{۵x^{۲}-۳x}{-x^{۲}+۱} & x\le ۰\end{cases}$ وقتی $x\to-\infty$ برابر ..... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳۴ حدهای زیر را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{۴}+x}{۳x^{۴}+x^{۲}}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۵ حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x^{۲}-x+۱}{-x^{۵}+۲x^{۲}-۳}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۶ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

الف حاصل حد تابع $f(x)=\frac{۲x^{۲}}{۳x^{۲}-۱}$ وقتی $x\to+\infty$ میل می‌کند برابر ..... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۷ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^{۳}-۵x+۱}{۶x^{۳}-۱۱x^{۲}-۳}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳۸ حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۳x+۱}{x-۵}-\frac{۲}{x}\right)$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۹ حد توابع زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳+\frac{۱}{x^{۲}}}{\frac{۴}{x}-۵}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۴۰ حدود زیر را محاسبه کنید.

الف

$$\lim_{x\to۴}\frac{۳-\sqrt{۵+x}}{x-۴}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

ب

$$\lim_{x\to۱^{+}}\frac{x+۱}{x^{۲}-۳x+۲}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳+x+x^{۲}}{x^{۳}-۲x^{۲}+۲}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

پاسخنامه تشریحی

۱ برای این منظور با قرار دادن $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ باید داشته باشیم: $f(2)=0, f(-1)=0$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$

$x-2=0\Rightarrow x=2\Rightarrow r=f(2)=0\Rightarrow 2^3+a\times 2^2+b\times 2+1=0$

$\Rightarrow 8+4a+2b+1=0\Rightarrow 4a+2b=-9 \quad (1)$

$x+1=0\Rightarrow x=-1\Rightarrow r=f(-1)=0\Rightarrow (-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=0$

$\Rightarrow -1+a-b+1=0\Rightarrow a-b=0\Rightarrow a=b$

$\xrightarrow{(1)} 4a+2a=-9\Rightarrow a=-\frac{3}{2}\Rightarrow a=b=-\frac{3}{2}$

۲ الف

۴

۳ الف

درست

۴ الف

صفر

۵ الف

۳

۶

$\begin{cases} x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow 2(-2)^3+a(-2)+b=0 \\ x-1=0\Rightarrow x=1\Rightarrow 2(1)^3+a(1)+b=15 \end{cases} \Rightarrow a=-1\ ,\ b=14$

۷ چون $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش‌پذیر است، پس باقی‌ماندهٔ تقسیم صفر است.

$f(-1)=0\Rightarrow 1-a-3=0\Rightarrow a=-2$

$f(2)=4-4-3=-3$

۸

زوج $n, (x^n-1)=(x+1)\cdot(x^{n-1}-x^{n-2}+x^{n-3}\cdots-1)$

$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$

۹ نکته: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ عبارت است از: $r(x)=f(-\frac{b}{a})$

$x-2=0\to x=2\to p(2)=0\Rightarrow 4a+2b=-9 \quad (1)$

$x+1=0\to x=-1\to p(-1)=0\to a-b=0 \quad (2)$

از حل رابطه (۱) و (۲) داریم:

$a=-\frac{3}{2}\ ,\ b=-\frac{3}{2}$

۱۰ می‌دانیم: باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر $ax+b$ برابر است با: $r(x)=f(-\frac{b}{a})$.

$x-2=0\to x=2\ ,\ P(2)=0\to 4a+2b=-6 \quad (1)$

$x+1=0\to x=-1\ ,\ P(-1)=3\to a-b=6 \quad (2)$

بنابراین از حل معادلهٔ (۱) و (۲) داریم:

$a=1 \quad و \quad b=-5$

۱۱

$x+2=0\Rightarrow x=-2\Rightarrow \begin{cases} p(-2)=-2a-7 \\ q(-2)=11 \end{cases} \Rightarrow a=-9$

۱۲

الف

$(x+۱)$

۱۳

الف

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}{(\sqrt{x}-۱)}=۲$$

ب

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{۳-[x]}{x-۳}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

پ

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-۶x^۳+۷x-۹}{۲x^۳-۴x^۲+x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۶x^۳}{۲x^۳}=-۳$$

۱۴ الف)

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{x^۲-۱۶}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{x\to ۴}\frac{۲-\sqrt{x}}{x^۲-۱۶}\times\frac{۲+\sqrt{x}}{۲+\sqrt{x}}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۴-x)}{(x^۲-۱۶)(۲+\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{-(x-۴)}{(x+۴)(x-۴)(۲+\sqrt{x})}=\frac{-۱}{(۸)(۴)}=-\frac{۱}{۳۲}$$

ب)

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

هرگاه در مسائل حدی، کسینوس یک شد حتما ۱^- است.

۱۵

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}\times\frac{\sqrt{x}+۱}{\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{(x-۱)(x+۱)\sqrt{x}+۱}=\frac{۱}{۴}$$

۱۶

الف

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{[۳^-]-۳}{۳^--۳}=\frac{۲-۳}{۰^-}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

ب

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}=\frac{۰}{۰}\longrightarrow\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{x+۱}-۲}\times\frac{\sqrt{x+۱}+۲}{\sqrt{x+۱}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{(x+۳)(x-۳)(\sqrt{x+۱}+۲)}{(x+۱-۴)}=\lim_{x\to ۳}(x+۳)(\sqrt{x+۱}+۲)=۶\times ۴=۲۴$$

۱۷

الف

با فاکتورگیری از صورت کسر و ساده کردن آن داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{x(x+۱)}{x^۲}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{(x+۱)}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

ب

با توجه به قاعدهٔ پرتوان داریم:

قاعدهٔ پرتوان: $ax^n+bx^{n-۱}+\cdots x\xrightarrow{\sim}\pm\infty\ ax^n$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱}\overset{\text{بنابر قاعده پر توان}}{=\!=\!=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{۴x^۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۲x}=۰$$

۱۸

الف

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۲x-۳}{x-\sqrt{x+۶}}\times\frac{x+\sqrt{x+۶}}{x+\sqrt{x+۶}}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x^۲-۲x-۳)(x+\sqrt{x+۶})}{x^۲-x-۶}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۳)(x+۱)(x+\sqrt{x+۶})}{(x-۳)(x+۲)}=\frac{(۴)(۶)}{(۵)}=\frac{۲۴}{۵}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{۲-۳}{۳^--۳}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۱۹

الف

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}=\frac{۰}{۰}\to\lim_{x\to ۵}\frac{۲-\sqrt{x-۱}}{x-۵}\times\frac{۲+\sqrt{x-۱}}{۲+\sqrt{x-۱}}=\lim_{x\to ۵}\frac{۴-(x-۱)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\lim_{x\to ۵}\frac{-(x-۵)}{(x-۵)(۲+\sqrt{x-۱})}=\frac{-۱}{۴}$$

ب

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{[x]-۳}{x-۳}=\frac{۲-۳}{۳^--۳}=\frac{-۱}{۰^-}=+\infty$$

۲۰ با توجه به نمودار هر چه x به صفر نزدیک‌تر می‌شود (چه از راست و چه از چپ)، مقادیر $f(x)$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند.

$+\infty$

۲۱

الف

با توجه به اینکه $\lim_{x\to ۲^-}x-۲=۰$ و $|x-۲|$ همواره عددی نامنفی است داریم:

$$\frac{۳}{۰^+}=+\infty$$

۲۲

الف

$$\lim_{x\to ۹}\frac{\sqrt{x}-۳}{x-۹}\times\frac{\sqrt{x}+۳}{\sqrt{x}+۳}=\lim_{x\to ۹}\frac{x-۹}{(x-۹)(\sqrt{x}+۳)}=\frac{۱}{۶}$$

ب

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{۱}{\cos x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{۵x}=-\frac{۱}{۵}$$

۲۳

الف

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x+۱}{\sin^۲ x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۲۴

الف

$$\lim_{x\to ۱}\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{x})}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{(x-۱)(x+۲)(x+\sqrt{x})}=\frac{۱}{۶}$$

ب

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۷(-۴+\frac{۵}{x^۵})}{x^۳(۲+\frac{۹}{x^۳})}=\lim_{x\to-\infty}(-۲)x^۴=-\infty$$

۲۵

الف

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=3$$

ب

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x-2}{|\sin x|}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2+4x^5}{x^3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^5}{x^3}=+\infty$$

۲۶

الف

$$\frac{3}{0^+}=+\infty$$

ب

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{3x+1}+2}{\sqrt{3x+1}+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x+1-4}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{3(x-1)}{(x-1)(\sqrt{3x+1}+2)}=\frac{3}{4}$$

۲۷

الف

$$-\frac{1}{2}$$

ب

$$\frac{1}{(0)^-}=-\infty$$

پ

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+3x+2)}{\sqrt[3]{x}+1}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(x+1)}}=3$$

۲۸

الف

روش اول:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{x-8}=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=12$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to 8}\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)=12$$

ب

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5+4}{x^3+x^5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^5}{x^5}=2$$

پ

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{[x]-4}{4-x}=\lim_{x\to 4^-}\frac{-1}{4-x}=-\infty$$

۲۹

الف

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{[x]}{\cos x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

ب

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱-x^۴}{۲x^۲+۳x+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۴}{۲x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۲}{۲}=-\infty$$

۳۰

الف

علت: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x^۷+۵x^۲}{۲x^۳+۹}\to\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x^۷}{۲x^۳}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{۳}{۲}x^۴=-\frac{۳}{۲}(+\infty)=-\infty$

۳۱

الف

صفر

علت: $\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x+۴}{x^۳+x-۸}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x}{x^۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵}{x^۲}=\frac{۵}{+\infty}=۰$

۳۲

الف

$$\lim_{x\to۲^-}\frac{[x]}{x-۲}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

ب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱+x-۴x^۲}{۳x+۲x^۲}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۴x^۲}{۲x^۲}=-۲$$

۳۳

الف

-۵

علت : $\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۲-۳x}{-x^۲+۱}\overset{\text{توان بیشتر}}{=\!=}\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^۲}{-x^۲}=-۵$

۳۴

الف

روش اول:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۴}{۳x^۴}=\frac{۱}{۳}$$

روش دوم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^۴(۱+\frac{۱}{x^۲})}{۳x^۴(۱+\frac{۱}{۳x^۲})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۴}{۳x^۴}=\frac{۱}{۳}$$

۳۵

الف

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x^۲}{-x^۵}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳}{-x^۳}=۰$$

۳۶

الف

$\frac{۲}{۳}$

۳۷

الف

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳-۵x+۱}{۶x^۳-۱۱x^۲-۳}\xrightarrow{\text{توان بیشتر}}\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۳}{۶x^۳}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۳۸

الف با استفاده از قاعدهٔ پرتوان برای کسر اول و همچنین $\lim_{x\to+\infty}\frac{۲}{x}=۰$ داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{۳x}{x}-۰)=۳-۰=۳$$

۳۹

الف

$$\frac{۳+۰}{۰-۵}=-\frac{۳}{۵}$$

۴۰

الف

$$\lim_{x\to۴}\frac{۳-\sqrt{x+۵}}{x-۴}\times\frac{۳+\sqrt{x+۵}}{۳+\sqrt{x+۵}}=\lim_{x\to۴}\frac{۹-x-۵}{(x-۴)(۳+\sqrt{x+۵})}=\lim_{x\to۴}\frac{-(x-۴)}{(x-۴)(۳+\sqrt{x+۵})}=\frac{-۱}{۶}$$

ب $-\infty$

پ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^{۲}}{x^{۳}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل۴

سال دوازدهم تجربی

تیم نوتروفیل

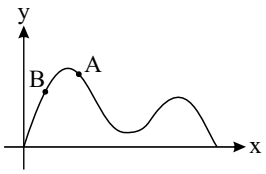
تعریف مشتق و تعبیر هندسی مشتق

۱ درست یا نادرست بودن عبارات زیر را تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف در شکل روبه‌رو، شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸



۲ در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$، در این صورت $(۳f+۲g)'(۱)$ برابر با ..... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

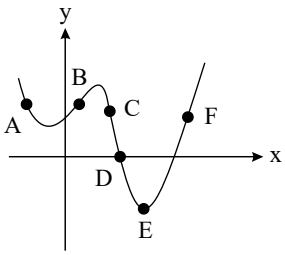
۳ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست. خط $x=۰$ را ..... منحنی می‌نامیم.

۴ با توجه به نمودار داده‌شده، گزینهٔ مناسب را انتخاب کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸



الف در کدام نقطه مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف) B ب) E

ب شیب خط مماس در نقطهٔ F چه علامتی دارد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف) مثبت ب) منفی

پ شیب خط مماس بر نمودار، در نقطهٔ D نسبت به نقطهٔ B چگونه است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

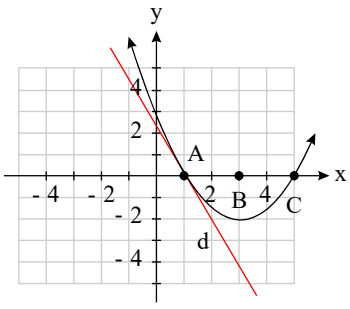
الف) بیشتر ب) کمتر

۵ در نمودار مقابل خط d در نقطه $x=۱$ بر نمودار f مماس شده است:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف) مشتق تابع f را در نقطه $x=۱$ محاسبه کنید.

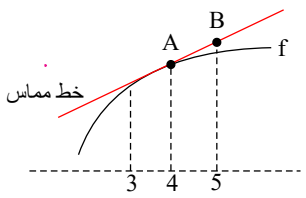
ب) شیب نمودار را در نقاط C, B مقایسه کنید.



۶ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم: $f'(۴)=\frac{۳}{۲}$ و $f(۴)=۲۵$

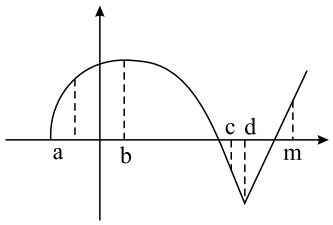
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

باتوجه به شکل، مختصات نقاط A و B را بیابید.



۷ با توجه به نمودار f به سؤالات زیر پاسخ دهید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰



الف طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

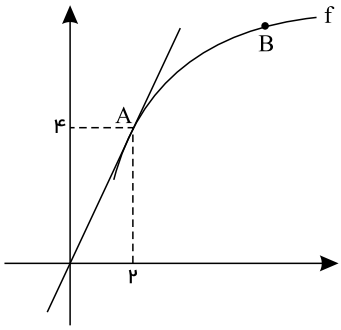
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب طول نقطه‌ای را که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۸ نمودار تابع f را به‌صورت زیر رسم شده است. اگر خط d در نقطهٔ A بر نمودار تابع f مماس باشد:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



الف حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را بیابید.

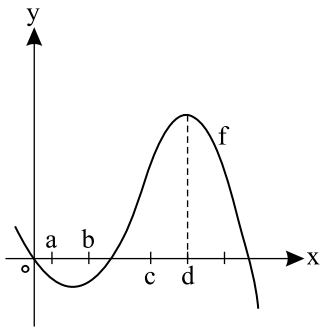
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

ب شیب خط‌های مماس در نقاط A و B را مقایسه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۹ با در نظر گرفتن نمودار تابع f در شکل زیر، نقاط به طول‌های a، b، c و d را با مشتق‌های داده در جدول نظیر کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰



x	$f'(x)$
	۰
	۰٫۵
	۲
	−۰٫۵

مشتق

محاسبهٔ مشتق با استفاده از فرمول

۱۰ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف

$$y=\frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}+۲x-۵}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۱۱ مشتق تابع $y=\dfrac{۱}{x}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}$ را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۱۲ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف) $f(x)=\dfrac{۲x+۳}{x^{۳}-۲x^{۲}}$

ب) $g(x)=\sin^{۳}(۲x+۱)$

۱۳ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{\sqrt{x}}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب

$$g(x)=(\frac{۱}{x})(x^{۲}+۵x)^{۷}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۴ مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف

$$f(x)=(\sqrt{۳x+۲})(x^{۳}+۱)$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب

$$g(x)=(x^{۲}+۳x+۱)^{۷}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

پ

$$h(x)=\frac{x^{۲}-۵x+۷}{-۲x+۹}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۵ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف

$$f(x)=(\sqrt{۳x}+۱)(۲x^{۳}-۱)$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

ب

$$h(x)=\frac{x^{۲}-۳x}{۵x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۶ مشتق تابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳ $f(x)=(x-۶)^{۳}+\frac{۵x+۳}{\sqrt{۲x-۱}}$

۱۷ مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف

$$f(x)=(۲x^{۶}+\sqrt{۲x})^{۷}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب

$$g(x)=\frac{۲x^{۳}-۱}{-x^{۲}+۲x}$$

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱۸ مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵ الف) $f(x)=\left(\frac{۲x-۱}{x}\right)^{۱۴۰۴}$ ب) $g(x)=\sqrt[۳]{۵x+۳}$

مشتق

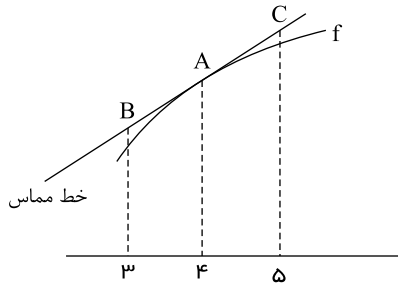
خط مماس بر منحنی

۱۹ معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$ را در نقطهٔ $A(۲, f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

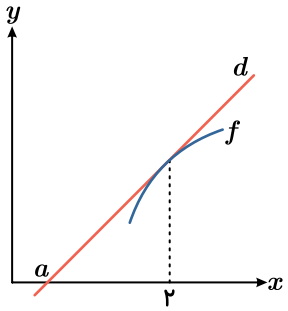
۲۰ اگر $f(x) = x^۲ - ۳x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(۱)$ را حساب کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۱ برای تابع f در شکل روبه‌رو داریم $f'(۴) = ۱٫۵$ و $f(۴) = ۲۴$
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

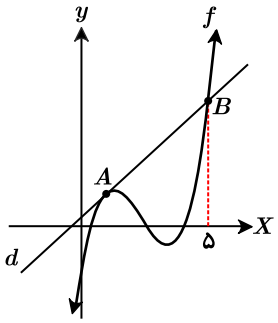
با توجه به شکل، مختصات نقاط B و C را بیابید.



۲۲ خط d در نقطه با طول $x = ۲$ بر نمودار تابع $f(X) = -x^۲ + ۶x - ۵$ مماس است. با توجه به شکل مقدار a (نقطه برخورد خط d با محور x ها) را بیابید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



۲۳ در شکل زیر خط d در نقطهٔ $A(۱, ۳)$ بر نمودار تابع f مماس است. اگر $f'(۱) = ۲$ باشد، آنگاه عرض نقطهٔ B را بیابید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵



مشتق

بررسی مشتق پذیری

۲۴ قضیه: ثابت کنید اگر تابع f در $x = a$ مشتق‌پذیر باشد آنگاه تابع f در $x = a$ پیوسته است.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۵ مشتق‌پذیری تابع مقابل را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۳ & x \geq ۱ \\ ۳x + ۱ & x < ۱ \end{cases}$$

۲۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

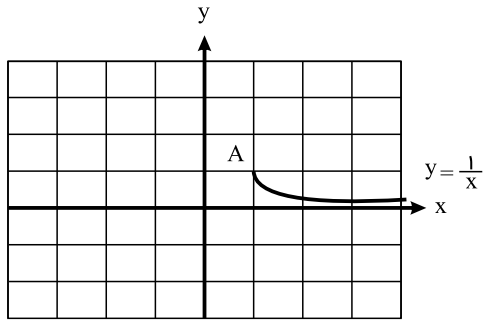
الف اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد، آنگاه f در a مشتق‌پذیر است.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۷ به کمک تعریف مشتق، مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^۲ - ۴|$ را در نقطه $x = -۲$ بررسی کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۸ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x \leq ۰ \\ x & x > ۰ \end{cases}$ را در $x = ۰$ بررسی کنید.
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۹ با محاسبهٔ مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم‌شدهٔ مقابل؛ مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $A(1,1)$ بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰



۳۰ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف تابع $f(x)=|x-1|$ در تمام نقاط حقیقی پیوسته است پس در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۱ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} 2x^2 & x<2 \\ 6x-4 & x=2 \\ 2\sqrt{x-1}+6 & x>2 \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=2$ بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۳۲ شیب نیم‌مماس چپ $f(x)=|x^2-4|$ در نقطهٔ $x=2$ را با استفاده از تعریف مشتق به دست آورده سپس معادلهٔ نیم‌مماس چپ را بنویسید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۳ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} 3x^2+[x] & x>1 \\ 6x-2 & x\le 1 \end{cases}$ را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ای به طول ۱ بررسی کنید. ([ ] علامت جزء صحیح است)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

۳۴ مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x-2|$ را در $x=2$ بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

مشتق
آهنگ تغییر

۳۵ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=2t^2-t$ ، برحسب متر داده شده است. در چه زمانی سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازهٔ زمانی $[0,4]$ با هم برابرهستند؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳۶ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2-t+10$ برحسب متر در بازهٔ زمانی $[0,5]$ داده شده است. در کدام لحظه در این بازه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط با هم برابرهستند؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۳۷ جسمی را از سطح زمین به طور عمودی پرتاب می‌کنیم. جهت حرکت را به طرف بالا مثبت در نظر می‌گیریم.

ارتفاع از سطح زمین در هر لحظه از معادلهٔ $h(t)=-5t^2+40t$ به‌دست می‌آید:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف) سرعت متوسط جسم را در بازهٔ $[5,8]$ به‌دست آورید.

ب) مشخص کنید در چه لحظه‌ای سرعت جسم $35m/s$ است.

۳۸ تابع $f(x)=7\sqrt{x}+50$ قد متوسط کودکان را برحسب سانتی‌متر تا حدود شصت‌ماهگی نشان می‌دهد، که در آن x مدت زمان پس از تولد (برحسب ماه) است. آهنگ متوسط رشد در بازه زمانی $[0,25]$ چقدر است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۹ معادله حرکت متحرکی به‌صورت $f(t)=t^2+2t+3$ برحسب متر در بازه زمانی $[0,2]$ (t برحسب ثانیه) داده شده است. در کدام لحظه، سرعت لحظه‌ای با سرعت متوسط در بازه زمانی $[0,2]$ با هم برابرند؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۴۰ گنجایش ظرفی ۲۰ لیتر مایع است. در لحظهٔ $t=0$ سوراخی در ظرف ایجاد می‌شود. اگر حجم مایع باقیمانده در ظرف پس از t ثانیه از رابطهٔ $V=20(1-\frac{t}{50})^2$ به دست آید در چه زمانی آهنگ تغییر لحظه‌ای حجم برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ $[0,50]$ می‌شود؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

پاسخنامه تشریحی

۱

الف

نادرست - در هر بازه‌ای که منحنی صعودی باشد، شیب خطوط مماس بر آن مثبت است و اگر منحنی نزولی باشد، شیب خطوط مماس بر آن منفی است.

۲

الف

با توجه به تعریف مشتق داریم:

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱) \xrightarrow{f'(۱)=۳,g'(۱)=۵} ۹+۱۰=۱۹$$

۳

الف

مماس قائم

۴

الف

ب (E)

ب

الف (مثبت)

پ

ب (کمتر)

۵

الف) $A\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\۲\end{matrix}\right.$ $\rightarrow f'(۱)=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{۰-۲}{۱-۰}=-۲$

ب) $m_C > m_B$

۶

مختصات نقطهٔ A به صورت $\left|\begin{matrix}۴\\۲۵\end{matrix}\right.$ است.

$$m_{AB}=\frac{۳}{۲}\rightarrow\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{۳}{۲}\rightarrow\frac{۲۵-y_B}{۴-۵}=\frac{۳}{۲}\rightarrow ۲۵-y_B=\frac{-۳}{۲}\rightarrow y_B=۲۶/۵\rightarrow B\left|\begin{matrix}۵\\۲۶/۵\end{matrix}\right.$$

۷

الف

$x=b$

ب

$x=c$

۸

الف

$$\lim_{x\to۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=f'(۲)=۲$$

ب

$m_A > m_B$

۹

x	a	b	c	d
$f'(x)$	$-۰/۵$	$۰/۵$	۲	۰

۱۰

الف

$$y'=\frac{۲x(x^۳+۲x-۵)-(x^۲+۱)(۳x^۲+۲)}{(x^۳+۲x-۵)^۲}$$

۱۱

از مشتق حاصل‌ضرب استفاده می‌کنیم. $(y=uv\rightarrow y'=u'v+v'u)$

$$y=\frac{۱}{x}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}\rightarrow y'=-\frac{۱}{x^{۲}}(۲\sqrt{x}-۱)^{۴}+۴(۲\sqrt{x}-۱)^{۳}(۲(\frac{۱}{۲\sqrt{x}}))\frac{۱}{x}$$

۱۲

الف) $y'=\frac{۲(x^{۳}-۲x^{۲})-(۳x^{۲}-۴x)(۲x+۳)}{(x^{۳}-۲x^{۲})^{۲}}$

ب) $y'=۳\times ۲\sin^{۲}(۲x+۱)\cos(۲x+۱)$

۱۳

الف

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{\sqrt{x}}\rightarrow f'(x)=\frac{۳\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x+۱)}{x}$$

ب

$$g(x)=(\frac{۱}{x})(x^{۲}+۵x)^{۷}\rightarrow g'(x)=\frac{-۱}{x^{۲}}(x^{۲}+۵x)^{۷}+۷(x^{۲}+۵x)^{۶}(۲x+۵)(\frac{۱}{x})$$

۱۴

الف

$$f'(x)=(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^{۳}+۱)+(۳x^{۲})(\sqrt{۳x+۲})$$

ب

$$g'(x)=۷(۲x+۳)(x^{۲}+۳x+۱)^{۶}$$

پ

$$h'(x)=\frac{(۲x-۵)(-۲x+۹)-(-۲)(x^{۲}-۵x+۷)}{(-۲x+۹)^{۲}}$$

۱۵

الف

$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{۳x}}(۲x^{۳}-۱)+(\sqrt{۳x}+۱)(۶x^{۲})$$

ب

$$h'(x)=\frac{(۲x-۳)(۵x)-(۵)(x^{۲}-۳x)}{(۵x)^{۲}}$$

۱۶

$$f'(x)=۳(x-۶)^{۲}+\frac{۵(\sqrt{۲x-۱})-\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۱}}(۵x+۳)}{\sqrt{(۲x-۱)}^{۲}}$$

۱۷

الف

$$f'(x)=۷(۲x^{۶}+\sqrt{۲x})^{۶}(۱۲x^{۵}+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}})$$

ب

$$g'(x)=\frac{۶x^{۲}(-x^{۲}+۲x)-(-۲x+۲)(۲x^{۳}-۱)}{(-x^{۲}+۲x)^{۲}}$$

۱۸

الف) $f'(x)=۱۴۰۴\left(\frac{۲x-۱}{x}\right)^{۱۴۰۳}\left(\frac{۲(x)-۱(۲x-۱)}{x^{۲}}\right)$

ب) $g'(x)=\frac{۵}{۳(\sqrt[۳]{۵x+۳})^{۲}}$

۱۹

$f'(x)=-۲x+۱۰\ ,f'(۲)=۶\ ,\ \ f(۲)=۱۶$

در نتیجه $A(۲,۱۶)$ است و شیب برابر ۱۶ است؛ پس معادلهٔ خط برابر است با:

$y-y_A=f'(۲)(x-x_A)\Rightarrow y-۱۶=۶(x-۲)\Rightarrow y=۶x+۴$

۲۰

$f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=-۱$

۲۱

$\frac{f(۴)-f(۳)}{۴-۳}=۱٫۵\Rightarrow ۲۴-f(۳)=۱٫۵\Rightarrow f(۳)=۲۲٫۵\Rightarrow B(۳,۲۲٫۵)$

$\frac{f(۵)-f(۴)}{۵-۴}=۱٫۵\Rightarrow f(۵)-۲۴=۱٫۵\Rightarrow f(۵)=۲۵٫۵\Rightarrow ,\ C(۵,۲۵٫۵)$

۲۲

$f'(x)=-۲x+۶\to f'(۲)=۲$

$d:(۲,۳),(a,۰):۲=\frac{۰-۳}{a-۲}\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$

۲۳ روش اول:

$f'(۱)=۲=m=\frac{y_B-۳}{۵-۱}=\frac{y_B-۳}{۴}\longrightarrow y_B=۱۱$

روش دوم:

$m=f'(۱)=۲\longrightarrow y=۲x+۱\longrightarrow y_B=۱۱$

۲۴ کافی است نشان دهیم $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

$\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim\limits_{x\to a}(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}(x-a)\times\lim\limits_{x\to a}(\frac{f(x)-f(a)}{x-a})$

$=۰\times f'(a)=۰\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}(f(x)-f(a))=۰$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

۲۵ تابع در $x=۱$ پیوسته است، زیرا: $f_+(۱)=f_-(۱)=f(۱)=۴$

$\left.\begin{array}{l}f'_+(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^{۲}+۳-۴}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=۲\\ f'_-(۱)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۳x+۱-۴}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۳x-۳}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۳(x-۱)}{x-۱}=۳\end{array}\right\}\to f'_-(۱)\neq f'_+(۱)$

بنابراین تابع f در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست.

۲۶

الف

نادرست

۲۷ تابع داده شده در $x=-۲$ پیوسته است. $(\lim\limits_{x\to(-۲)^+}f(x)=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}f(x)=f(-۲)=۰)$

$\lim\limits_{x\to x_۰^+}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\frac{|x^{۲}-۴|-\overset{۰}{\overbrace{f(-۲)}}}{x-(-۲)}=\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\frac{\overset{-}{\overbrace{|x^{۲}-۴|}}}{x+۲}=\lim\limits_{x\to(-۲)^+}\frac{-(x+۲)(x-۲)}{(x+۲)}=۴$

$\lim\limits_{x\to x_۰^-}\frac{f(x)-f(x_۰)}{x-x_۰}=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{|x^{۲}-۴|-\overset{۰}{\overbrace{f(-۲)}}}{x-(-۲)}=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{\overset{+}{\overbrace{|x^{۲}-۴|}}}{x+۲}=\lim\limits_{x\to(-۲)^-}\frac{(x+۲)(x-۲)}{(x+۲)}=-۴$

چون مشتق‌های راست و چپ برابر نیستند، تابع در $x=-۲$ مشتق‌ناپذیر است.

۲۸ تابع پیوسته است، زیرا:

$\lim\limits_{x\to ۰^+}f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}f(x)=f(۰)=۰$

حال مشتق‌پذیری در نقطهٔ $x=۰$ را بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\dfrac{x^۲-۰}{x-۰}=۰ \\ f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\dfrac{x-۰}{x-۰}=۱ \end{array}\right\}\Rightarrow f'_-(۰)=f'_+(۰)\Rightarrow$$ پس تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

۲۹

$$y=\begin{cases} ۱ & x\le ۱ \\ \dfrac{۱}{x} & x>۱ \end{cases}\Rightarrow y'=\begin{cases} ۰ & x<۱ \\ \dfrac{-۱}{x^۲} & x>۱ \end{cases}\quad ,\quad y'_-(۱)\neq y'_+(۱)$$

تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۳۰

الف

نادرست

۳۱ روش اول: در ۲ $x=$ پیوسته است.

$$f'(x)=\begin{cases} ۴x & x<۲ \\ ۲\left(\frac{۱}{۲\sqrt{x-۱}}\right) & x>۲ \end{cases}\Rightarrow f'_+(۲)=۱, f'_-(۲)=۸$$

پس در ۲ $x=$ مشتق‌پذیر نیست.

روش دوم:

$$\begin{cases} f'_+(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{(۲\sqrt{x-۱}+۶)-۸}{x-۲}=۱ \\ f'_-(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\dfrac{(۲x^۲)-۸}{x-۲}=۸ \end{cases}$$

در ۲ $x=$ پیوسته است.

پس در ۲ $x=$ مشتق‌پذیر نیست.

۳۲

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=-۴$$

$$y=-۴x+۸$$

۳۳ روش اول:

$$f'_+(۱)=\lim_{x\to ۱^+}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۳x^۲+۱-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^+}\frac{۳(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)}=۶$$

$$f'_-(۱)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۶x-۲-۴}{x-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{۶(x-۱)}{(x-۱)}=۶$$

بنابراین تابع در ۱ $x=$ مشتق‌پذیر است.

روش دوم:

$$f'_+(۱)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{۳(۱+h)^۲+[۱+h]-۴}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h(۳h+۶)}{h}=۶$$

$$f'_-(۱)=\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۶(۱+h)-۲-۴}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۶h}{h}=۶$$

بنابراین تابع در ۱ $x=$ مشتق‌پذیر است.

۳۴ مشتق‌پذیر نیست. زیرا:

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x-۲|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=۱\quad ,\quad f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$$

۳۵

$$\left.\begin{array}{l} \text{سرعت متوسط}=\dfrac{f(۴)-f(۰)}{۴-۰}=\dfrac{۲۸-۰}{۴}=۷ \\ \text{سرعت لحظه‌ای}=f'(t)=۴t-۱ \end{array}\right\}\to ۴t-۱=۷\to t=۲$$

۳۶

$$f(۵)=۳۰\ ,\ f(۰)=۱۰\Rightarrow \text{سرعت متوسط:}\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=۴$$

$$\text{سرعت لحظه‌ای:}f'(t)=۲t-۱=۴\Rightarrow t=\frac{۵}{۲}$$

۳۷ الف)

$$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(۸)-h(۵)}{۸-۵}=\frac{۰-(۷۵)}{۸-۵}=-۲۵$$

ب)

$h'(t) = -۱۰t + ۴۰ = ۳۵ \Rightarrow t = ۰/۵$

۳۸

آهنگ متوسط رشد $= \frac{f(۲۵) - f(۰)}{۲۵ - ۰} = \frac{۸۵ - ۵۰}{۲۵} = \frac{۷}{۵}$

۳۹

$f'(t) = ۲t + ۲$

آهنگ متوسط $= \frac{f(۲) - f(۰)}{۲ - ۰} = \frac{۱۱ - ۳}{۲} = ۴$ $\qquad ۲t + ۲ = ۴ \rightarrow t = ۱$

۴۰

آهنگ لحظه‌ای : $۲۰(۲)(۱ - \frac{t}{۵۰})(-\frac{۱}{۵۰})$ یا $-\frac{۴}{۵}(۱ - \frac{t}{۵۰})$

آهنگ متوسط $= \frac{۰ - ۲۰}{۵۰ - ۰} = \frac{-۲}{۵}$

از برابری آهنگ متوسط و لحظه‌ای نتیجه می‌گیریم $t = ۲۵$

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل۵

سال دوازدهم تجربی

تیم نوتروفیل

کاربرد مشتق

اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع از روی نمودار

۱ تابع $f(x)=\begin{cases}x^{۲} & x\geq ۰\\ ۲x+۱ & x<۰\end{cases}$ داده شده است:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

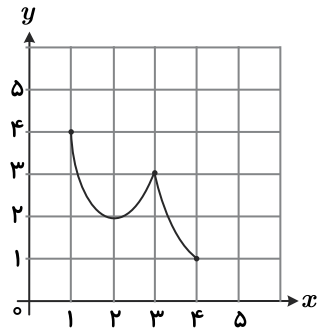
مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب نمودار تابع f' را رسم کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲ در نمودار تابع مقابل، طول نقاط ماکزیمم نسبی، مینیمم نسبی، ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



۳ با رسم جدول تغییرات تابع، طول نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی تابع زیر را در صورت وجود بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

$$f(x)=\frac{۲}{۳}x^{۳}-\frac{۱}{۲}x^{۲}-۱۵x+۴$$

کاربرد مشتق

اکسترمم‌های مطلق

۴ مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۲x+۴}$ را در بازهٔ $[۰,۲]$ تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۵ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۷$ را در بازهٔ $[-۱,۳]$، درصورت وجود به‌دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۶ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}+۱$ را در بازهٔ $[-۱,۱]$ تعیین کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۷ اگر $f(x)=x^{۳}+۴x$، مقدار اکسترمم‌های مطلق تابع را در بازهٔ $[-۲,۱]$ بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

کاربرد مشتق

بهینه سازی

۸ ورق فلزی مربع شکل به‌طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبهٔ جعبه را به اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۹ نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۰ اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطهٔ $۵x-y=۱۰$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب این دو عدد مینیمم شود.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۱۱ نشان دهید در بین مستطیل‌هایی با محیط ۱۶ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۱۲ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۱۰ باشد و حاصل ضربشان کمترین مقدار ممکن گردد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۳ پنجره‌ای به شکل یک مستطیل و نیم‌دایره‌ای بر روی آن داریم به‌طوری که قطر نیم‌دایره برابر با پهنای مستطیل است. اگر محیط این پنجره ۶ متر باشد، ابعاد آن را طوری بیابید که بیشترین نوردهی را داشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۴ دو عدد حقیقی بیابید که تفاضل آنها ۸ باشد و حاصل‌ضرب‌شان کمترین مقدار ممکن گردد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۵ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای شکل و درباز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کاررفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi\simeq ۳$)

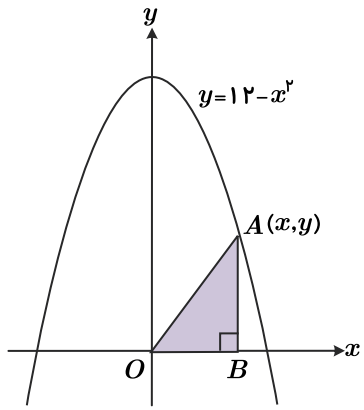
مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۶ اگر در مستطیلی با طول x و عرض y رابطهٔ $3x + 5y = 30$ برقرار باشد، آنگاه ابعاد مستطیل را طوری بیابید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن شود. (رسم جدول تغییرات الزامی است)

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

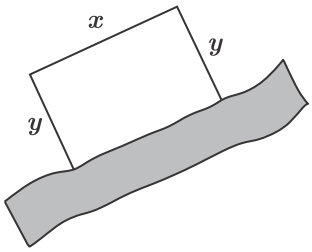
۱۷ مطابق شکل زیر، نقطه A در ناحیه اول دستگاه مختصات روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطه A را چنان بیابید که مساحت مثلث قائم الزاویه OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳



۱۸ می‌خواهیم مطابق شکل زیر، سه ضلع یک محوطه به شکل مستطیل را در کنار رودخانه نرده‌کشی کنیم. اگر تنها هزینهٔ ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، به کمک جدول تغییرات، بیشترین مساحت ممکن برای این مستطیل را محاسبه کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴



کاربرد مشتق

بررسی یکنوایی تابع به کمک مشتق

۱۹ نمودار تابع $f(x) = x^2 + 2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه‌ای اکیداً نزولی است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۰ در جاهای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر ..... است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۲۱ بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ که تابع $f(x) = -2x^3 + 6x + 11$ در آن صعودی اکید باشد را با استفاده از جدول تغییرات بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

کاربرد مشتق

اکسترمم‌های نسبی

۲۲ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = -x^4 + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطهٔ $(1, 2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۳ الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ را رسم و نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی آن را مشخص کنید.

ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازهٔ $[-1, 3]$ مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف هر نقطه اکسترمم نسبی تابع، یک نقطه بحرانی آن است.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۵ مقادیر اکسترمم‌های نسبی و مطلق $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$ را در بازهٔ $[-2, 3]$ به‌دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۶ اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکسیمم نسبی برابر ۷ باشد، مقادیر a و b را به‌دست آورید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۷ تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ را در نظر بگیرید:

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[0,3]$ در صورت وجود به‌دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۸ اگر تابع $f(x)=ax^2+bx$ در $x=1$ دارای اکسترمم نسبی برابر -3 باشد، مقادیر a و b را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۹ اگر نقطه $(1,2)$ نقطه اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b , d را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۰ نقاط بحرانی تابع زیر را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$f(x)=-2x^3+3x^2+12x-9$ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۱ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب پر کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف نقطه به طول c از دامنهٔ تابع f که در آن $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد را یک نقطهٔ ..... می‌نامیم. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۳۲ تابع $f(x)=x^3-12x+4$ را در نظر بگیرید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف بزرگ‌ترین بازه از x که تابع f در آن نزولی اکید است را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

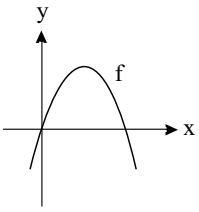
۳۳ اگر نقطهٔ $(2,3)$ نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ باشد، آنگاه مقادیر a و b را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

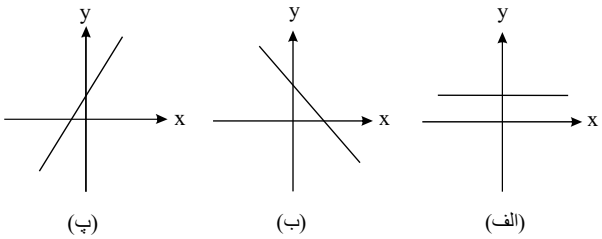
۳۴ غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t)=\frac{3t}{t^3+27}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟ (رسم جدول تغییرات الزامی است.) مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

کابرد مشتق

رابطه‌ی بین نمودار f و f'

۳۵ نمودار تابع f در شکل روبه‌رو آمده است. با بیان دلیل، مشخص کنید کدام‌یک از نمودارهای زیر، نمودار مشتق تابع f است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸





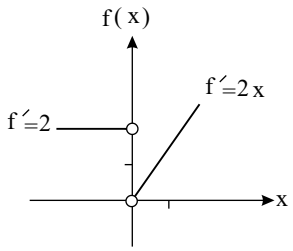
پاسخنامه تشریحی

۱

الف

$$f'(x)=\begin{cases}۲x & x>۰\\ ۲ & x<۰\end{cases}$$

ب



۲

۲ = طول مینیمم نسبی ۳ = طول ماکزیمم نسبی

۴ = طول مینیمم مطلق ۱ = طول ماکزیمم مطلق

۳

$$f'(x)=۲x^{۲}-x-۱۵=۰\rightarrow\begin{cases}x=۳\\ x=-\frac{۵}{۲}\end{cases}$$

x		$-\frac{۵}{۲}$		۳	
f'	+	۰	−	۰	+
f	↗	max	↘	min	↗

۴ ابتدا نقاط بحرانی را محاسبه نموده و در تابع قرار می‌دهیم و سپس با مقادیر تابع در ابتدا و انتهای بازه مقایسه می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۲x-۲}{۲\sqrt{x^{۲}-۲x+۴}}\xrightarrow{f'=۰}x=۱$$

مقدار ماکزیمم مطلق: $f(۰)=f(۲)=۲$

مقدار مینیمم مطلق: $f(۱)=\sqrt{۳}$

۵

$$f(x)=x^{۳}-۳x+۷\rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۳=۰\rightarrow\begin{cases}x=۱\\ x=-۱\end{cases}\rightarrow\begin{cases}f(-۱)=-۱+۳+۷=۹\\ f(۳)=۲۷-۹+۷=۲۵\rightarrow \text{مطلق} max\\ f(۱)=۱-۳+۷=۵\rightarrow \text{مطلق} min\end{cases}$$

۶

$$f'(x)=۳x^{۲}-۶x=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x=۲\notin[-۱,۱]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(۱)=-۱\\ f(۰)=۱ & (max)\\ f(-۱)=-۳ & (min)\end{cases}$$

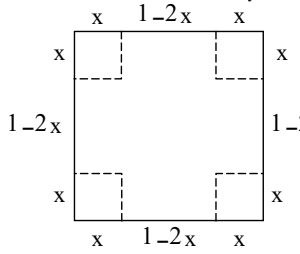
۷

$f'(x)=۳x^{۲}+۴=۰$ جواب ندارد

$f(-۲)=-۱۶$ مقدار مینیمم مطلق $=-۱۶$

$f(۱)=۵$ مقدار ماکزیمم مطلق $=۵$

۸

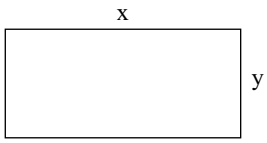


$\rightarrow V_{\text{جعبه}} =$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

$$V = (۱ - ۲x)^۲ \cdot x = (۱ + ۴x^۲ - ۴x)x = ۴x^۳ - ۴x^۲ + x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} ۱۲x^۲ - ۸x + ۱ = ۰ \xrightarrow{\Delta = b^۲ - ۴ac = ۶۴ - ۴۸ = ۱۶} \begin{cases} x = \frac{۸+۴}{۲۴} = \frac{۱}{۲} \text{ غ ق ق} \\ x = \frac{۸-۴}{۲۴} = \frac{۱}{۶} \end{cases}$$

۹



$S = xy$: **دو متغیر**

محیط $= ۱۴ \rightarrow ۲x + ۲y = ۱۴ \rightarrow x + y = ۷ \rightarrow y = ۷ - x$

پس : $S = x(۷ - x) = -x^۲ + ۷x$: **یک متغیر** $\xrightarrow{\text{مشتق}=۰} -۲x + ۷ = ۰ \rightarrow x = \frac{۷}{۲} \xrightarrow{y=۷-x} y = ۷ - \frac{۷}{۲} = \frac{۷}{۲}$

۱۰

$$p = xy = ۵x^۲ - ۱۰x \rightarrow p'(x) = ۰ \rightarrow ۱۰x - ۱۰ = ۰ \rightarrow \begin{matrix} x = ۱ \\ y = -۵ \end{matrix}$$

۱۱

$$y = ۸ - x \Rightarrow S(x) = -x^۲ + ۸x \Rightarrow S'(x) = -۲x + ۸ = ۰$$
$$x = ۴ \quad , \quad y = ۴$$

۱۲

$$x - y = ۱۰$$
$$p = xy = x(x - ۱۰) = x^۲ - ۱۰x$$
$$p'(x) = ۲x - ۱۰ = ۰ \rightarrow x = ۵ \quad , \quad y = -۵$$

۱۳

$$۲h + ۲r + \pi r = ۶ \Rightarrow h = \frac{۶ - ۲r - \pi r}{۲}$$
$$S(r) = ۶r - ۲r^۲ - \frac{۱}{۲}\pi r^۲ \Rightarrow S'(r) = ۶ - ۴r - \pi r$$
$$۶ - ۴r - \pi r = ۰ \Rightarrow r = \frac{۶}{۴ + \pi}$$

r		$\frac{۶}{۴+\pi}$	
S´	−	۰	+
S	↗		↘

$$h = \frac{۶ - (۲ + \pi)\frac{۶}{۴ + \pi}}{۲} = \frac{۶}{۴ + \pi}$$

۱۴

$$x - y = ۸ \Rightarrow x = ۸ + y$$
$$s = xy = (۸ + y)y = y^۲ + ۸y$$
$$s' = ۲y + ۸ = ۰ \begin{cases} y = -۴ \\ x = ۴ \end{cases}$$

۱۵

$h=\frac{۳۰۰}{r^۲}\quad S=\frac{۱۸۰۰}{r}+۳r^۲\quad S'=\frac{-۱۸۰۰}{r^۲}+۶r=۰$

$r=\sqrt[۳]{۳۰۰}\Rightarrow h=\sqrt[۳]{۳۰۰}$

۱۶ روش اول:

$۳x+۵y=۳۰\longrightarrow y=-\frac{۳}{۵}x^۲+۶x$

$S=x\cdot y\to S(x)=x(-\frac{۳}{۵}x+۶)=-\frac{۳}{۵}x^۲+۶x\to S'(x)=-\frac{۶}{۵}x+۶=۰\to x=۵$

x	۰		۵		۱۰
s'		+	۰	−	
s	۰	↗	۱۵ ماکزیمم مطلق	↘	۰

روش دوم:

$۳x+۵y=۳۰\longrightarrow x=-\frac{۵}{۳}y+۱۰$

$S=x.y$

$\longrightarrow S(y)=\left(-\frac{۵}{۳}y+۱۰\right)y=-\frac{۵}{۳}y^۲+۱۰y\longrightarrow S'(y)=-\frac{۱۰}{۳}y+۱۰=۰\to y=۳$

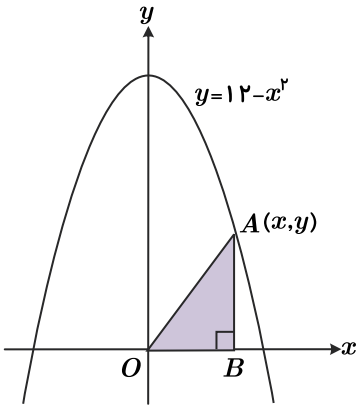
y	۰		۳		۶
s'		+	۰	−	
s	۰	↗	۱۵ ماکزیمم مطلق	↘	۰

۱۷

$S_{\hat{OAB}}=\frac{۱}{۲}xy=\frac{۱}{۲}x(۱۲-x^۲)=۶x-\frac{۱}{۲}x^۳\Rightarrow S'(x)=۶-\frac{۳}{۲}x^۲$

$۶-\frac{۳}{۲}x^۲=۰\xrightarrow{x>۰}x=۲\Rightarrow y=۱۲-۴=۸$

x	۰		۲		$\sqrt{۱۲}$
$s'(x)$		+	۰	−	
$s(x)$		↗	۸	↘	



۱۸

$x+۲y=۱۰۰\Rightarrow x=۱۰۰-۲y$

$S=x\cdot y=(۱۰۰-۲y)y=۱۰۰y-۲y^۲$

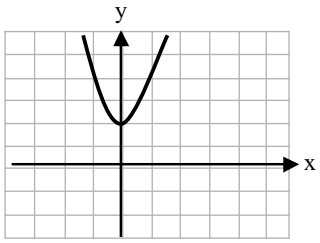
$S'(y)=۱۰۰-۴y=۰\Rightarrow y=۲۵$

$S_{max}=۵۰\times ۲۵=۱۲۵۰$

y	۰	۲۵	۵۰
S'	+	۰	−
S	۰ ↗		↘ ۰

اگر S برحسب X پیدا شده باشد، تناسب درست است.

۱۹ نمودار $f(x)=x^{۲}+۲$ را رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار داریم:



اکیداً صعودی: $(۰,+\infty)$, اکیداً نزولی: $(-\infty,۰)$

۲۰

الف

$f(x)=x^{۳}-۳x \Rightarrow f'(x)=۳x^{۲}-۳ \Rightarrow f'(x)\le ۰ \Rightarrow ۳x^{۲}-۳\le ۰ \Rightarrow ۳x^{۲}\le ۳ \Rightarrow x^{۲}\le ۱ \Rightarrow -۱\le x\le ۱$

$(-۱,۱)$ یا $[-۱,۱]$

۲۱

$f'(x)=-۶x^{۲}+۶=۰ \Rightarrow x=\pm ۱$

x		−۱		۱	
f′	−	۰	+	۰	−
f	↘		↗		↘

پس تابع در بازه $[-۱,۱]$ صعودی اکید است.

۲۲

$f'(x)=-۴x^{۳}+a \xrightarrow{f'(۱)=۰} -۴+a=۰ \Rightarrow a=۴$

$f(۱)=۲ \Rightarrow -۱+۴+b=۲ \Rightarrow b=-۱$

۲۳

الف) $f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۱۲x \to f'(x)=۶x^{۲}+۶x-۱۲=۰ \xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} x=۱ \\ x=\frac{c}{a}=-۲ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۲		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	↗	۲۰ Max	↘	-۷ Min	↗	$+\infty$

ب) $f'(x)=۶x^{۲}+۶x-۱۲=۰ \to \begin{cases} x=۱ \text{ ق ق} \to \left|\begin{matrix}۱\\-۷\end{matrix}\right. & \text{نقطهٔ بحرانی} \\ x=-۲ \text{ غ ق ق(در بازه نیست)} \end{cases}$

پس : $\begin{cases} f(-۱)=-۲+۳+۱۲=۱۳ \\ f(۳)=۵۴+۲۷-۳۶=۴۵ \to \text{مطلق} Max \to \left|\begin{matrix}۳\\۴۵\end{matrix}\right. \\ f(۱)=۲+۳-۱۲=-۷ \to \text{مطلق} Min \to \left|\begin{matrix}۱\\-۷\end{matrix}\right. \end{cases}$

۲۴

الف

درست

۲۵

$f'(x) = x^۲ + ۲x \xrightarrow{f'=۰} x = ۰ \ , \ x = -۲$

$\Rightarrow f(-۲) = \frac{۴}{۳}$, $f(۰) = ۰$ مینیمم مطلق , $f(۳) = ۱۸$ ماکزیمم مطلق

با توجه به جدول تعیین علامت زیر داریم:

x	-۲		۰		۳
f'	۰	$-$	۰	$+$	
f	$\frac{۴}{۳}$	$\searrow$	۰	$\nearrow$	۱۸

$\rightarrow f(۰) = ۰$ مینیمم نسبی

۲۶ نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و مشتق‌پذیر دارای دو خاصیت هستند:

۱) در تابع صدق می‌کنند.

۲) طولشان مشتق را صفر می‌کند.

$\left| \begin{matrix} ۱ \\ ۷ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{صدق}} ۷ = a + b$

$\left| \begin{matrix} ۱ \\ ۷ \end{matrix} \right. \xrightarrow{\text{طولش مشتق را صفر می‌کند.}} f'(x) = ۲ax + b \rightarrow ۰ = ۲a + b$

پس: $\begin{cases} a + b = ۷ \\ ۲a + b = ۰ \end{cases} \rightarrow a = -۷ \ , \ b = ۱۴$

۲۷

الف

$f(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$

$\rightarrow f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \xrightarrow{a+b=c} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{-۱۲}{-۶} = ۲ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
y		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۶	$\nearrow$	۱۱	$\searrow$	$-\infty$
			Min		Max		

ب

$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \text{ (غ ق ق (در بازه قرار ندارد.} \\ x = ۲ \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} f(۰) = -۹ \rightarrow \text{مطلق} Min \\ f(۳) = ۰ \\ f(۲) = ۱۱ \Rightarrow \text{مطلق} Max \end{cases}$

۲۸ اکسترمم‌های پیوسته و مشتق‌پذیر در تابع صدق کرده و طولشان، مشتق را صفر می‌کنند.

$\left. \begin{matrix} amp; f(۱) = -۳ \rightarrow -۳ = a + b \\ f'(۱) = ۰ \rightarrow f'(x) = ۲ax + b \rightarrow ۰ = ۲a + b \end{matrix} \right\} \rightarrow a = ۳ \text{ و } b = -۶$

۲۹

$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۴b + d = -۷$

$f'(۲) = ۰ \Rightarrow b = -۳ \quad , \quad d = ۵$

۳۰

$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
f´		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
f		$\searrow$	-۱۶ min	$\nearrow$	۱۱ max	$\searrow$	

۳۱

الف

بحرانی

۳۲

الف

$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \qquad [-۲, ۲]$

x		-۲		۲	
f'	+	۰	−	۰	+
f	↗		↘		↗

توجه: جواب به‌صورت هریک از بازه‌های $[-۲, ۲]$ یا $(-۲, ۲]$ یا $[-۲, ۲)$ یا $(-۲, ۲)$ هم نوشته شود، قابل قبول است.

ب طول ماکزیمم نسبی: $x = -۲$

۳۳

$f'(x) = ۳x^۲ + ۲ax + b \ , \ f'(۳) = ۰ \longrightarrow ۶a + b = -۲۷$

$f(۳) = ۲ \longrightarrow ۹a + ۳b = -۲۷$ یا $۳a + b = -۹$

$$\longrightarrow \begin{cases} ۶a + b = -۲۷ \\ ۳a + b = -۹ \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = -۶ \\ b = ۹ \end{cases}$$

۳۴

$$C'(t) = \frac{۳(t^۳ + ۲۷) - ۳t^۲(۳t)}{(t^۳ + ۲۷)^۲} = ۰ \Rightarrow (t^۳ + ۲۷) - ۳t^۳ = ۰ \Rightarrow t^۳ = \frac{۲۷}{۲} \Rightarrow t = \frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$$

t	۰		$\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}}$		$+\infty$
C'		+	۰	−	
C	۰	↗		↘	۰

۳۵ نمودار (ب). سهمی نمودار داده شده ماکزیمم دارد. پس ضریب $x^۲$ منفی است. لذا در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود درنتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل۶

سال دوازدهم تجربی

تیم نوتروفیل

هندسه

تفکر تجسمی

۱ هریک از جمله‌های زیر را با عبارت یا عدد مناسب کامل کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف اگر صفحه‌ای سطح مخروطی را هم در قسمت بالایی و هم در قسمت پایینی قطع کند و از رأس نگذرد شکل حاصل را ..... می‌نامیم. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف شکل حاصل از دوران یک دایره حول یکی از قطرهای آن برابر ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض ..... است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۴ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف هرچه مقدار خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به دایره نزدیک‌تر خواهد شد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۵ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

الف شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول یکی از اضلاع قائمه به‌صورت مخروط می‌باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۶ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول آن، مخروط نام دارد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۷ در جاهای خالی عبارات مناسب قرار دهید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف شکلی که از برخورد یک صفحه با یک جسم هندسی حاصل می‌شود، ..... آن نامیده می‌شود. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

هندسه

بیضی

۸ اگر در یک بیضی داشته باشیم $a = ۵$ و $b = ۳$ در این صورت اندازهٔ فاصلهٔ کانونی این بیضی را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۹ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف فاصلهٔ کانونی و ممختصات مرکز بیضی را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۰ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

الف فاصله کانونی و مختصات مرکز بیضی و معادله قطر بزرگ بیضی را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

ب اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک و خروج از مرکز بیضی را پیدا کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۱۱ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱, ۳)$ و $(۱, -۵)$ است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف) فاصلهٔ کانونی و مختصات مرکز بیضی را بنویسید.

ب) اگر $a = ۶$ باشد، اندازهٔ قطر کوچک را پیدا کنید. (a اندازهٔ نصف قطر بزرگ بیضی است.)

۱۲ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴, -۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

الف فاصله کانونی را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

ب مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ این بیضی را پیدا کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۱۳ در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۴, ۵)$ باشد:

الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.

۱۴ اگر خروج از مرکز یک بیضی $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ و طول قطر کوچک آن ۱۰ باشد آنگاه فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

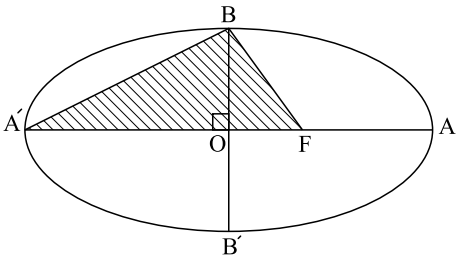
۱۵ کانون‌های یک بیضی نقاط $(۱,۳)$ و $(۱,-۵)$ است. اگر اندازهٔ نصف قطر بزرگ آن برابر ۵ باشد، اندازهٔ قطر کوچک بیضی را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱۶ در یک بیضی قطر بزرگ ۸ و قطر کوچک آن ۶ واحد است. خروج از مرکز این بیضی چقدر است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۱۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف هرچه خروج از مرکز بیضی کوچک‌تر و به صفر نزدیک‌تر باشد، شکل بیضی به شکل دایره نزدیک‌تر است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

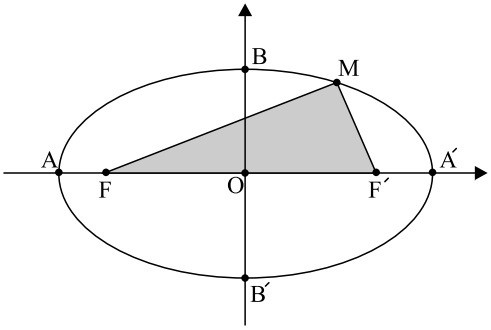
۱۸ اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به‌ترتیب ۱۰ و ۸ باشد: مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱



الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)

ب) مساحت مثلث هاشور خورده $(\overset{\Delta}{BFA'})$ چقدر است؟

۱۹ اگر در بیضی مقابل مختصات کانون $F'(۴,۰)$ و مختصات رأس $B(۰,۳)$ باشد: مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲



الف) قطر برگ بیضی را بیابید.

ب) محیط مثلث $(\overset{\Delta}{MFF'})$ را بیابید.

۲۰ مختصات دو سر قطر بزرگ یک بیضی نقاط $(-۲,۱)$ و $(۶,۱)$ است. اگر خروج از مرکز این بیضی $\frac{۱}{۲}$ باشد، فاصلهٔ کانونی آن را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۲۱ در یک بیضی فاصلهٔ کانونی با طول قطر کوچک آن برابر است. خروج از مرکز بیضی را بیابید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

هندسه

دایره

۲۲ معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به‌صورت $x^۲+y^۲-۶x+۲y+۶=۰$ می‌باشد. مرکز و شعاع دایره را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۳ اگر معادلهٔ دایره به شکل $(x+۱)^۲+y^۲=۴$ باشد: مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

الف) مختصات مرکز دایره و اندازهٔ شعاع دایره را بنویسید.

ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها را پیدا کنید.

۲۴ معادلهٔ دایره‌ای به صورت $x^۲+y^۲-۲x-۶y+۶=۰$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۲۵ اگر مرکز دایره $x^۲+y^۲+ax-۴y-۴=۰$، نقطه $O(۱,۲)$ باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

الف) مقدار a را بیابید.

ب) شعاع دایره را محاسبه کنید.

۲۶ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $(-۲,۱)$ بوده و بر خط $۴x-۳y=۲۵$ مماس باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۲۷ وضعیت خط $x+y=۳$ را نسبت به دایره $x^۲+y^۲-۲x-۳=۰$ مشخص کنید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۲۸ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که بر خط $۳x+۴y=۱$ مماس بوده و مرکز آن $(۱,۲)$ باشد. مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۲۹ مرکز دایره‌ای، نقطهٔ $O(۲,-۳)$ است. این دایره روی خط $۳x-۴y+۲=۰$ وتری به طول ۶ جدا می‌کند. معادلهٔ دایره را بنویسید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $(۰,۳)$ و بر خط $۳x - ۴y = ۳$ مماس باشد.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۳۱ وضعیت خط $x + y = ۳$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۳ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۳۲ وضعیت خط $۳x + ۴y = ۰$ را نسبت به دایره به معادله $(x - ۲)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۹$ مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۳ وضعیت دو دایره به معادلات $(x + ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳۴ اگر دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$ و $(x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = m^۲$ مماس خارج باشند، مقدار m را بیابید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۳۵ وضعیت دو دایره به معادلهٔ $(x + ۱)^۲ + (y - ۲)^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰$ را نسبت به هم بررسی کنید.

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

پاسخنامه تشریحی

۱

الف

هذلولی

۲

الف

کرهٔ توخالی

۳

الف

شکل حاصل از دوران یک مستطیل حول طول یا عرض استوانه است.

۴

الف

درست

۵

الف

درست

۶

الف

نادرست

۷

الف

سطح مقطع

۸

$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۲۵ - ۹ = ۱۶ \to c = ۴ \to ۲c = ۸$

۹

الف

$F\left|\begin{matrix}۱\\ ۳\end{matrix}\right.\ ,\ F'\left|\begin{matrix}۱\\ -۵\end{matrix}\right. \to FF' = ۲c \to ۲c = ۸۰ \to c = ۴$

FF' وسط $W\left|\begin{matrix}\frac{۱+۱}{۲}\\ \frac{۳-۵}{۲}\end{matrix}\right. \to W\left|\begin{matrix}۱\\ -۱\end{matrix}\right.$

ب

$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to ۱۶ = ۳۶ - b^۲ \to b^۲ = ۲۰ \to b = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵} \to ۲b = ۴\sqrt{۵}$

$e = \frac{c}{a} \to e = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

۱۰

الف

$F\left|\begin{matrix}۱\\ ۳\end{matrix}\right.$ و $F'\left|\begin{matrix}۱\\ -۵\end{matrix}\right. \to x_F = x_{F'}$ بیضی قائم

FF' وسط $W\left|\begin{matrix}\frac{۱+۱}{۲} = ۱\\ \frac{۳-۵}{۲} = -۱\end{matrix}\right.$ و معادلهٔ قطر بزرگ $x = ۱$

$FF' = ۲c \to ۲c = ۸$

ب

$c^۲ = a^۲ - b^۲ \to ۱۶ = ۳۶ - b^۲ \to b^۲ = ۲۰ \to b = ۲\sqrt{۵} \to ۲b = ۴\sqrt{۵}$

خروج از مرکز: $e = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

۱۱ الف)

$$O \left| \begin{array}{l} \frac{۱+۱}{۲} = ۱ \\ \frac{۳-۵}{۵} = -۱ \end{array} \right. \quad \text{مرکز} \quad FF' = |۳-(-۵)| = ۸ = ۲c \to c = ۴$$

ب)

$$b^۲ = a^۲ - c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \to b = \sqrt{۲۰} \Rightarrow ۲b = BB' = ۲\sqrt{۲۰}$$

۱۲

الف

$$a = \frac{۵}{۴}c \Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}c^۲ = ۹ + c^۲ \quad FF' = ۲c = ۸$$

ب

$$a = ۵ \Rightarrow A(۱,-۱), A(-۹,-۱)$$

۱۳ الف)

$$c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۹ - ۴ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵} \Rightarrow FF' = ۲\sqrt{۵}$$

ب)

$$A(۴+۳,۵) \quad , \quad A'(۴-۳,۵)$$

۱۴

روش اول:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to c = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a \qquad BB' = ۲b = ۱۰ \to b = ۵$$
$$a^۲ = ۲۵ + \frac{۳}{۴}a^۲ \to a = ۱۰ \xrightarrow{c = ۵\sqrt{۳}} FF' = ۲c = ۱۰\sqrt{۳}$$

یا

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to a = \frac{۲}{\sqrt{۳}}c \qquad BB' = ۲b = ۱۰ \to b = ۵$$
$$\frac{۴}{۳}c^۲ = ۲۵ + c^۲ \to c = ۵\sqrt{۳} \to FF' = ۲c = ۱۰\sqrt{۳}$$

روش دوم:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to \begin{cases} a = ۲k \\ c = \sqrt{۳}k \end{cases} \qquad BB' = ۲b = ۱۰ \to b = ۵$$
$$۴k^۲ = ۲۵ + ۳k^۲ \to k = ۵ \Rightarrow c = ۵\sqrt{۳} \to FF' = ۲c = ۱۰\sqrt{۳}$$

۱۵

$$\begin{cases} ۲c = ۳ - (-۵) = ۸ \Rightarrow c = ۴ \\ a = ۵ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow ۲۵ = b^۲ + ۱۶ \Rightarrow b = ۳ \Rightarrow ۲b = ۶$$

۱۶

$$\begin{cases} ۲a = ۸ \to a = ۴ \\ ۲b = ۶ \to b = ۳ \end{cases} \longrightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۱۶ - ۹ = ۷ \longrightarrow c = \sqrt{۷}$$

پس : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{۷}}{۴}$

۱۷

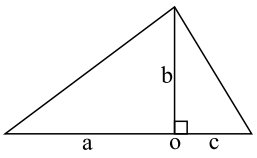
الف

درست

۱۸ الف)

$$\begin{array}{l} a = ۵ \\ b = ۴ \end{array} \to c^۲ = ۲۵ - ۱۶ \to c = ۳ \to A'F = ۸$$

ب)



$$S_{\Delta}=\frac{۱}{۲}(۵+۳)\times ۴=۱۶$$

۱۹ الف)

$$\begin{cases}b=۳\\c=۴\end{cases}\rightarrow a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\rightarrow ۲a=۱۰$$

ب)

$$\text{محیط}=۲a+۲c=۱۸$$

۲۰

$$۲a=۸\rightarrow a=۴\ ,\ \frac{c}{a}=\frac{۱}{۲}\rightarrow c=۲\rightarrow FF'=۲c=۴$$

۲۱ اگر FF' را فاصلهٔ کانونی و BB' را قطر کوچک بیضی در نظر بگیریم، داریم:

$$FF'=BB'\Rightarrow ۲c=۲b\Rightarrow c=b$$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}\Rightarrow a^{۲}=c^{۲}+c^{۲}\Rightarrow a^{۲}=۲c^{۲}\Rightarrow e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۲

$$\begin{matrix}f'_x=۰\rightarrow ۲x-۶=۰\rightarrow x=۳\\f'_y=۰\rightarrow ۲y+۲=۰\rightarrow y=-۱\end{matrix}\longrightarrow C\left|\begin{matrix}۳\\-۱\end{matrix}\right.$$

$$R^{۲}=\frac{a^{۲}+b^{۲}-۴c}{۴}=\frac{۳۶+۴-۲۴}{۴}=\frac{۱۶}{۴}=۴\rightarrow R=۲$$

۲۳

الف)

$$(x+۱)^{۲}+(y-۰)^{۲}=۴\rightarrow C\left|\begin{matrix}-۱\\۰\end{matrix}\right.\ ,\ R=۲$$

ب)

$$y=۰\rightarrow (x+۱)^{۲}=۴\rightarrow\begin{cases}x+۱=۲\rightarrow x=۱\rightarrow\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.\\x+۱=-۲\rightarrow x=-۳\rightarrow\left|\begin{matrix}-۳\\۰\end{matrix}\right.\end{cases}$$

۲۴

$$\rightarrow O(-\frac{a}{۲},-\frac{b}{۲})=(\frac{۲}{۲},\frac{۶}{۲})=(۱,۳)$$

۲۵

الف) $-\frac{a}{۲}=۱\Rightarrow a=-۲$

ب) $r=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^{۲}+b^{۲}-۴c}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶+۱۶}\Rightarrow r=۳$

۲۶

$$r=\frac{|۴+۶-۲۵|}{\sqrt{۱۶+۹}}=۳$$

$$(x-۱)^{۲}+(y+۲)^{۲}=۹$$

۲۷

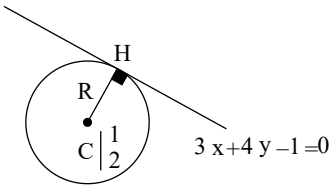
$$x^{۲}+y^{۲}-۲x-۳=۰\rightarrow\begin{cases}C\left|\begin{matrix}-\frac{a}{۲}\\-\frac{b}{۲}\end{matrix}\right.\rightarrow C\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.\\R^{۲}=\frac{a^{۲}+b^{۲}-۴c}{۴}=\frac{۴+۰+۱۲}{۴}=۴\rightarrow R=۲\end{cases}$$

$$x+y-۳=۰\text{ خط از }C\left|\begin{matrix}۱\\۰\end{matrix}\right.\ \text{ فاصلهٔ }=d=\frac{|۱(۱)+۱(۰)-۳|}{\sqrt{۱+۱}}=\frac{۲}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}$$

چون $d<R$ است بنابراین خط در دو نقطه دایره را قطع کرده است.

۲۸

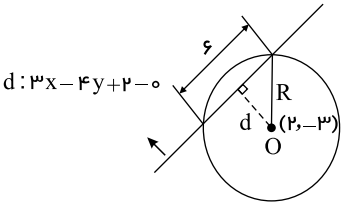
$$R = CH = \frac{|\,۳(۱)+۴(۲)-۱\,|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۱۰}{۵} = ۲ \rightarrow \begin{cases} C \left| \begin{matrix} ۱ : \alpha \\ ۲ : \beta \end{matrix} \right. \\ R = ۲ \end{cases} \rightarrow (x-\alpha)^۲ + (y-\beta)^۲ = R^۲ \rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۴$$



۲۹ شکل زیر را در نظر بگیرید:

$$d = \frac{|۳ \times ۲ - ۴(-۳) + ۲|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = ۴$$

$$R = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵ \Rightarrow (x-x_۰)^۲ + (y-y_۰)^۲ = R^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ + (y+۳)^۲ = ۲۵$$



۳۰

$$r = \frac{|۳ \times ۰ - ۴ \times ۳ - ۳|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = ۳ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹$$

۳۱

$$\begin{cases} R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۰+۱۲} = ۲ \ , \ O(۱,۰) \\ OH = \frac{|۱ \times ۱ + ۰ \times ۱ - ۳|}{\sqrt{۱^۲ + ۱^۲}} = \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow OH < R$$

خط و دایره متقاطع‌اند.

۳۲

$$O(۲,-۲) \ , \ r = ۳ \ , \ d = \frac{|۳ \times ۲ + ۴(-۲)|}{\sqrt{۹+۱۶}} = \frac{۲}{۵}$$

چون شعاع دایره بزرگ‌تر از فاصلهٔ مرکز دایره تا خط می‌باشد، پس خط و دایره متقاطع هستند.

۳۳

$$(x+۱)^۲ + (y-۲)^۲ = ۱ \rightarrow C \left| \begin{matrix} -۱ \\ ۲ \end{matrix} \right. \ , \ R = ۱$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۴y + ۱ = ۰ \rightarrow C' \left| \begin{matrix} ۱ \\ -۲ \end{matrix} \right. \ , \ R'^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} = \frac{۴+۱۶-۴}{۴} = ۴ \rightarrow R' = ۱$$

از طرفی: $CC' = \sqrt{(-۱-۱)^۲ + (۲+۲)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

چون $CC' > R + R'$ است دو دایره متخارج هستند.

۳۴

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰ : O(-۱,۲) \ , \ r = ۲$$
$$(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = m^۲ : O'(۲,-۱) \ , \ r' = m$$
$$OO' = ۳\sqrt{۲}$$
$$OO' = r + r' \Rightarrow m + ۲ = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow m = ۳\sqrt{۲} - ۲$$

۳۵

$$\left.\begin{matrix} O(-۱,۲) \ , \ r = ۱ \\ O'(۱,-۲) \ , \ r' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۶-۴} = \frac{۱}{۲} \times ۴ = ۲ \\ OO' = \sqrt{(۱-(-۱))^۲ + (-۲-۲)^۲} = \sqrt{۴+۱۶} = ۲\sqrt{۵} \end{matrix}\right\} \rightarrow OO' > r + r'$$

دو دایره متخارج هستند.

مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۷

سال دوازدهم تجربی

تیم نوتروفیل

۱ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال این‌که دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود چقدر است؟ مرجع ۱: تمرین های کتاب- ۱۴۰۳

۲ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهرهٔ آبی و ۵ مهرهٔ قرمز است و ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده در ظرف دوم قرار می دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۳ سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ آبی است. ظرف دوم شامل ۷ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ آبی است. ظرف سوم شامل ۶ مهرهٔ سبز و ۴ مهرهٔ قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب و یک مهره از آن بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی این مهره آبی است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۸

۴ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۰ درصد مرد و ۶۰ درصد زن باشند و احتمال شیوع یک بیماری خاص در این دو گروه به‌ترتیب ۳ درصد و ۵ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۵ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰٫۰۸ و نوزاد دختر ۰٫۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۳۹۹

۶ سه ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۴ مهرهٔ آبی و ظرف سوم شامل ۶ مهرهٔ قرمز است. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی آبی باشد چقدر است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۷ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰٫۰۸ و نوزاد دختر ۰٫۰۳ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشد، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد بود؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۸ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۹ چهار ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۰ مهره قرار دارد که ۶ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۱۲ مهره قرار دارد که ۴ تای آنها قرمز هستند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم، احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۱۰ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ سبز و ۳ مهرهٔ آبی ظرف دوم شامل ۴ مهرهٔ سبز و ۶ مهرهٔ آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره سبز است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۱ ۴ ظرف یکسان داریم. در ظرف اول ۱۴ مهره قرار دارد که شامل ۴ مهرهٔ قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند و ظرف سوم ۸ مهره دارد که شامل ۶ مهرهٔ قرمز است. در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال آن که مهره انتخابی قرمز باشد، چقدر است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۱

۱۲ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۶ مهره سبز و ۴ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۵ مهره سبز و ۷ مهره آبی است. از ظرف اول مهره‌ای انتخاب کرده و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره به تصادف از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره سبز است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۰

۱۳ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

الف اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول و B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C =$ ..... باشند، آنگاه A، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۲

۱۴ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۵ سه ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۵ مهرهٔ قرار دارد که ۳ تای آنها قرمز است. در ظرف دوم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد و در ظرف سوم ۱۲ مهره داریم که ۶ تای آنها قرمز است. با چشم بسته یک ظرف را انتخاب کرده و یک مهره از آن خارج می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است. مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۶ یک سکه را پرتاب می‌کنیم، اگر «پشت» بیاید ۳ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم و اگر «رو» بیاید ۲ سکهٔ دیگر را با هم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً دو سکه «رو» ظاهر شود چقدر است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۳

۱۷ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۵ مهرهٔ قرمز و ۶ مهرهٔ زرد و ظرف دوم شامل ۴ مهرهٔ قرمز و ۷ مهرهٔ زرد است. از ظرف اول به‌تصادف یک مهره انتخاب می‌کنیم و در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. به چه احتمالی این مهره زرد است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱۸ دو جعبهٔ یکسان داریم. درون یکی از آنها ۱۰ لامپ قرار دارد که ۴ تا از آنها معیوب است و درون جعبهٔ دیگر ۲۰ لامپ قرار دارد که ۵ تا از آنها معیوب‌اند. به تصادف جعبه‌ای انتخاب کرده و یک لامپ از آن به تصادف بیرون می‌آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ انتخابی سالم باشد؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

۱۹ مدرسهٔ A چهار برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۲۰ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدل بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به‌تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم: مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

الف با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

ب با چه احتمالی فرد انتخابی معدل بالای ۱۸ دارد؟ مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۴

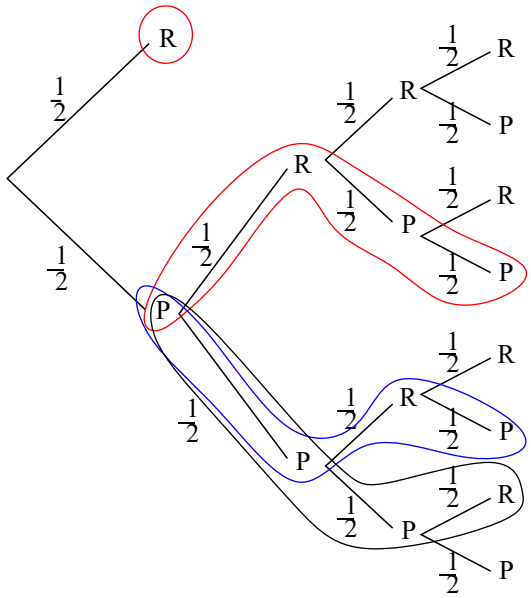
۲۰ در یک جعبه ۳ میکروسکوپ از نوع A و ۲ تا از نوع B وجود دارد. احتمال اینکه عمر آنها از ۱۰ سال بیشتر باشد برای نوع A، $\frac{۱}{۲}$ و برای نوع B، $\frac{۱}{۴}$ است. به تصادف یک میکروسکوپ از جعبه بیرون می‌آوریم. با چه احتمالی عمر این میکروسکوپ بیش از ۱۰ سال است؟

مرجع: امتحان نهایی- ۱۴۰۵

پاسخنامه تشریحی

۱

«رو» را با R و «پشت» را با P نشان می‌دهیم:



$R\,,\ PRPP\,,\ PPRP\,,\ PPPR$

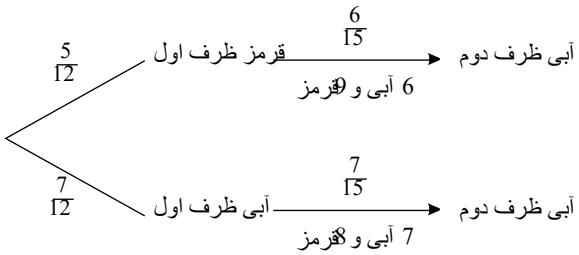
حالت مطلوب:

$$\rightarrow \text{احتمال مطلوب} = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{11}{16}$$

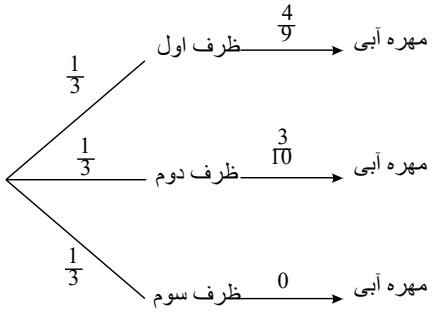
۲

از ظرف اول ممکن است مهرهٔ آبی یا مهرهٔ قرمز خارج کنیم یک بار مهرهٔ قرمز را در ظرف دوم می‌گذاریم و احتمال آبی بودن را حساب می‌کنیم و یک بار مهرهٔ آبی را در ظرف دوم قرار می‌دهیم و احتمال آبی بودن را حساب می‌کنیم.



$$\text{احتمال مطلوب} = (\frac{5}{12}\times\frac{6}{15}) + (\frac{7}{12}\times\frac{7}{15}) = \frac{79}{180}$$

۳



احتمال مطلوب $= (\frac{۱}{۳} \times \frac{۴}{۹}) + (\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۱۰}) + (\frac{۱}{۳} \times ۰) = \frac{۴}{۲۷} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۶۷}{۲۷۰}$

۴

$\frac{40}{100}$ مرد $\xrightarrow{\frac{3}{100}}$ شیوع بیماری خاص

$\frac{60}{100}$ زن $\xrightarrow{\frac{5}{100}}$ شیوع بیماری خاص

احتمال مطلوب $= (\frac{۴۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰}) + (\frac{۶۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰}) = \frac{۴۲۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۴۲$

$\frac{1}{2}$ پسر $\xrightarrow{\frac{8}{100}}$ انتقال بیماری خاص

$\frac{1}{2}$ دختر $\xrightarrow{\frac{3}{100}}$ انتقال بیماری خاص

۵

احتمال مطلوب $= (\frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۰۰}) + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۱۰۰}) = \frac{۱۱}{۲۰۰}$

۶

$\frac{1}{3}$ ظرف اول $\xrightarrow{\frac{8}{3}}$ آبی

$\frac{1}{3}$ ظرف دوم $\xrightarrow{1}$ آبی

$\frac{1}{3}$ ظرف سوم $\xrightarrow{0}$ آبی

احتمال مطلوب $= (\frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۸}) + (\frac{۱}{۳} \times ۱) + (\frac{۱}{۳} \times ۰) = \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱۱}{۲۴}$

۷

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲)$$
$$P(A) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۸}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۱۰۰} = \frac{۱۱}{۲۰۰}$$

۸

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲)$$
$$P(A) = \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۳} + \frac{۴}{۱۰} \times \frac{۵}{۱۳} = \frac{۵۶}{۱۳۰}$$

۹

$$P(R) = P(A_۱)P(R|A_۱) + P(A_۲)P(R|A_۲) + P(A_۳)P(R|A_۳) + P(A_۴)P(R|A_۴)$$
$$P(R) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۱۰} + \frac{۱}{۴} \times ۱ + \frac{۱}{۴} \times \frac{۴}{۱۲} + \frac{۱}{۴} \times ۰ = \frac{۲۹}{۶۰}$$

۱۰

$$P(A) = P(B_۱)P(B_۱|A) + P(B_۲)P(B_۲|A)$$
$$P(A) = \frac{۵}{۸} \times \frac{۵}{۱۱} + \frac{۳}{۸} \times \frac{۴}{۱۱} = \frac{۳۷}{۸۸}$$

۱۱

$$P(A) = P(B_۱)P(A|B_۱) + P(B_۲)P(A|B_۲) + P(B_۳)P(A|B_۳) + P(B_۴)P(A|B_۴)$$
$$P(A) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۴}{۱۴} + \frac{۱}{۴} \times ۱ + \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۸} + \frac{۱}{۴} \times ۰ = \frac{۵۷}{۱۱۲}$$

۱۲

$$P(A) = P(G)P(A|G) + P(B)P(A|B)$$

$$P(A)=\frac{۶}{۱۰}\times\frac{۶}{۱۳}+\frac{۴}{۱۰}\times\frac{۵}{۱۳}=\frac{۵۶}{۱۳۰}$$

۱۳

الف

$\{۱\}$

۱۴

$$p=(۰٫۴۵\times۰٫۰۴)+(۰٫۵۵\times۰٫۰۶)=۰٫۰۵۱$$

۱۵

$$P=(\frac{۱}{۳}\times\frac{۳}{۱۵})+(\frac{۱}{۳}\times۰)+(\frac{۱}{۳}\times\frac{۶}{۱۲})=\frac{۷}{۳۰}$$

۱۶

$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۴}=\frac{۷}{۱۶}$$

توجه کنید که فضای نمونه‌ای هم‌شانس نیست.

۱۷ **پیشامد زرد بودن مهرهٔ خارج‌شده از ظرف دوم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:**

W: **پیشامد انتخاب مهرهٔ زرد از ظرف اول**

R: **پیشامد انتخاب مهرهٔ قرمز از ظرف اول**

A: **پیشامد انتخاب مهرهٔ زرد از ظرف دوم**

روش اول:

$$P(A)=P(W)P(A|W)+P(R)P(A|R)=\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۸۳}{۱۳۲}$$

روش دوم:

$$P(A)=P(W)P(A|W)+P(R)P(A|R)=\frac{۶}{۱۱}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۵}{۱۱}\times\frac{۷}{۱۲}=\frac{۸۳}{۱۳۲}$$

$$\rightarrow\begin{cases}\frac{۶}{۱۱}\rightarrow\frac{۸}{۱۲}\\ \frac{۵}{۱۱}\rightarrow\frac{۷}{۱۲}\end{cases}$$

۱۸ **اگر پیشامد سالم بودن را A و جعبهٔ اول را $B_۱$ و جعبهٔ دوم را $B_۲$ در نظر بگیریم، آنگاه داریم:**

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)$$
$$P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۶}{۱۰}+\frac{۱}{۲}\times\frac{۱۵}{۲۰}=\frac{۶}{۲۰}+\frac{۱۵}{۴۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

۱۹

الف

$$P(A)=\frac{۴}{۵}\qquad P(B)=\frac{۱}{۵}$$

ب

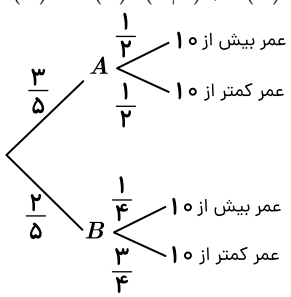
$$\frac{۴}{۵}\times\frac{۳۵}{۱۰۰}+\frac{۱}{۵}\times\frac{۲۰}{۱۰۰}=\frac{۸}{۲۵}$$

۲۰ **روش اول:**

$$P(E)=\frac{۳}{۵}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{۵}\times\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{۱۰}=۰٫۴$$

(منظور از پیشامد E، انتخاب یک میکروسکوپ با طول عمر بیش از ۱۰ سال است.)

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)$$



روش دوم:

$$P(E') = \frac{۳}{۵} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۲}{۵} \times \frac{۳}{۴} = \frac{۶}{۱۰} = ۰/۶ \longrightarrow P(E) = ۱ - ۰/۶ = ۰/۴$$