



بیستوفیل

ریاضی یازدهم
تجربی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲ امیر محمد رضائی	رتبه ۲۰ سینا راضی	رتبه ۱۶ آریا قهرمانی	رتبه ۱۴ امیر محمد کیانی
رتبه ۸۰ محمد مهدی شریفی	رتبه ۷۵ محمد صالح عارفی	رتبه ۶۱ بهار هلالی	رتبه ۵۹ ایمان انفرادی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲ امیر محمد شکوهی	رتبه ۱۶۹ هانیه خواجه	رتبه ۱۶۰ اشکان کوثری	رتبه ۱۴۷ محدثه حیدری	رتبه ۲۵۹ ابوالفضل ناصریان
رتبه ۴۳۲ سید محمد صادق حسینی	رتبه ۳۴۱ حمید رضا بشیری	رتبه ۳۰۸ سید علی اکرمی	رتبه ۲۷۱ فاطمه سادات موسوی	رتبه ۴۷۳ زهره بابائی
رتبه ۵۳۹ نجمه کبختا	رتبه ۵۳۷ ریحانه حیدری	رتبه ۵۲۳ فاطمه شاهسونند	رتبه ۵۱۴ محمد پارسا عبدالله آبادی	رتبه ۵۴۶ حسین تقضلی نژاد
رتبه ۶۶۱ فاطمه اصغری	رتبه ۶۰۶ سجاد محمودی زاده	رتبه ۵۷۰ زهره ولی نژاد	رتبه ۵۵۷ محمد صالح زارعی	رتبه ۶۶۷ سیاوش مصطفایی
رتبه ۷۸۱ احسان قنبری	رتبه ۷۱۴ محمد یزدیان	رتبه ۶۹۱ بهار ضرامی	رتبه ۶۷۲ محمد ماهان عنبرستانی	رتبه ۷۸۶ نیما غفاری
رتبه ۹۰۹ کیمیا فدائی	رتبه ۸۹۳ فاطمه مشاوری نجف آبادی	رتبه ۸۰۴ آرمین رضایی	رتبه ۸۰۳ ماتده رنجبر	رتبه ۹۴۷ صفورا بقائی
رتبه ۱۱۲۷ زهره بابائی	رتبه ۱۱۲۲ علی طاهر زاده	رتبه ۱۰۵۸ الینا جلالی فر	رتبه ۱۰۵۲ پویان فریور افشار	رتبه ۱۲۳۴ مطهره توحیدی
رتبه ۱۳۵۰ علی زینلی	رتبه ۱۲۸۴ فاطمه معین زاده	رتبه ۱۲۸۴ بهار امیری	رتبه ۱۲۳۶ مبینا ایزدی	رتبه ۱۳۷۲ پارسا رضایی
رتبه ۱۵۰۳ فاطمه رحیم زاده	رتبه ۱۴۹۳ محمد مهدی خرم زاده	رتبه ۱۴۸۳ سینا خاوری خراسانی	رتبه ۱۴۲۴ سید امیر حسین حسینی	رتبه ۱۵۳۴ فاطمه عبیری
رتبه ۱۶۹۶ ندا ملک شاهی	رتبه ۱۶۷۸ سجاد ینکی	رتبه ۱۶۳۹ ابوالفضل نیرومند	رتبه ۱۶۲۸ امیر محمد فکور حقیقی	رتبه ۱۷۳۱ محمد رضا محسنی
رتبه ۲۵۵۹ سارا حمزه	رتبه ۲۰۱۵ علی شیرزاد	رتبه ۱۹۶۶ مهسا رضایی مقدم	رتبه ۱۷۵۴ هلیا حاجیلوئی	رتبه ۲۶۲۵ زهره جمعی
رتبه ۲۷۹۴ مریم بادلی	رتبه ۲۷۸۱ سعید شبانی	رتبه ۲۷۵۱ فهمیه سید آبادی	رتبه ۲۷۱۱ محمد غلامی	رتبه ۲۸۱۰ هدیه رحیمی
رتبه ۳۳۴۳ سینا ارزمانی	رتبه ۳۲۴۴ هلیا سجادی	رتبه ۳۱۳۳ صبا شایع ثانی	رتبه ۲۸۸۱ پارسا جمال امیدی	



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۱ یازدهم

سال یازدهم
تجربی

فهرست

درس اول : هندسه تحلیلی

- ۱..... مفاهیم مربوط به نقطه
- ۱..... بررسی اوضاع نسبی دو خط
- ۱..... فاصله ها

درس دوم : معادله ی درجه ی دوم و تابع درجه ی دوم

- ۱..... معادله ی درجه ی دوم
- ۲..... تابع درجه ی دوم

درس سوم : معادلات گویا و معادلات رادیکالی

- ۲..... معادلات گویا
- ۳..... معادلات رادیکالی (گنگ) (اصم)



درس اول : هندسه تحلیلی

مفاهیم مربوط به نقطه

- ۱ نقاط $A(2, -2)$ و $B(4, 4)$ دو انتهای یک قطر دایره‌ای هستند. مختصات مرکز و اندازه شعاع دایره را بیابید.
- ۲ سه نقطه $A(-1, -2)$ ، $B(2, 0)$ و $C(1, -5)$ سه رأس یک مثلث هستند. این مثلث چه نوع مثلثی است؟
- ۳ نقاط $A(-1, 3)$ و $B(3, -1)$ دو سر یک قطر از مربعی هستند، مساحت مربع کدام است؟
- ۴ اگر $A(2, 4)$ و $B(4, -2)$ دو سر قطر یک دایره باشند، مختصات مرکز دایره را بیابید.
- ۵ اگر $A(3, 5)$ و $B(-2, 1)$ و $C(1, -1)$ رأس‌های مثلث ABC باشند. معادله‌ی میانه‌ی BM را بنویسید.
- ۶ دو نقطه $A(14, 3)$ و $B(10, -13)$ را در نظر بگیرید.
الف- فاصله مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB بدست آورید.
ب- معادله عمود منصف پاره خط AB را بنویسید.

بررسی اوضاع نسبی دو خط

- ۷ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- الف دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2x + 3$ بر هم عمود هستند.

فاصله‌ها

- ۸ خط $4x - 3y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $(3, -1)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید.
- ۹ یکی از اضلاع مربع، بر خط $y = 2x - 1$ واقع است، اگر نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت مربع را به دست آورید.
- ۱۰ اگر خط $4x + 3y = -1$ بر دایره به مرکز $(1, 2)$ مماس باشد اندازه شعاع دایره را بیابید.
- ۱۱ فاصله نقطه $A(-2, 2)$ از خط $3x + 4y - 6 = 0$ کدام است؟
الف) $-\frac{4}{5}$ ب) $\frac{4}{5}$ ج) $\frac{8}{5}$ د) $\frac{6}{5}$
- ۱۲ نقطه $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $L: y - x = 5$ می باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.



درس دوم : معادله ی درجه ی دوم و

تابع درجه ی دوم

معادله ی درجه ی دوم

- ۱۳ درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.
- الف معادله $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است.
- ۱۴ مجموع یک عدد صحیح با معکوسش برابر با -2 می باشد، با تشکیل معادله و حل آن، مقدار این عدد را بیابید.
- ۱۵ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
- الف معادله $x^2 + 6x + 7 = 0$ دو ریشه مثبت دارد.
- ۱۶ مقدار ماکزیمم تابع $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ برابر با چند است؟
الف) ۲ ب) ۳ ج) -2 د) -3





۱۷ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف مقدار مینیمم تابع $f(x) = 3x^2 + 6x + 5$ برابر با است.

۱۸ معادله‌ی درجه دوم زیر را با روش Δ حل کنید.

$$9x^2 - 6x + 1 = 0$$

۱۹ ریشه‌های حقیقی معادله‌ی زیر را بدست آورید.

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

۲۰ معادله‌ی درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش $2 + \sqrt{4-a}$ ، $2 - \sqrt{4-a}$ باشند.

۲۱ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن برابر مربع معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 4x - 6 = 0$ باشد.

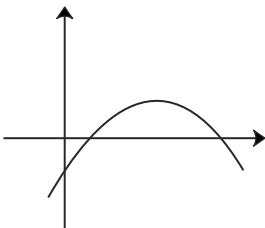
۲۲ معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2 + \sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2 - \sqrt{3}}{5}$ باشند.

تابع درجه دوم

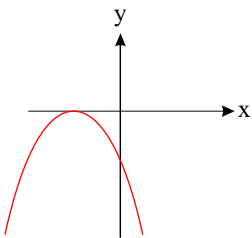
۲۳ تابع $f(x) = ax^2 + bx$ مفروض است. a و b را طوری بیابید که منحنی نمایش تابع از نقطه‌ی $A(2, -1)$ بگذرد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کند.

۲۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف در سهمی با ضابطه $y = ax^2 + bx + c$ که نمودار آن به صورت مقابل است علامت $b \times c$ می‌باشد.



۲۵ در شکل زیر روی علامت a و b و c و تعداد ریشه‌ها و علامت ریشه‌ها بحث کنید.



درس سوم : معادلات گویا و معادلات

رادیکالی

معادلات گویا

۲۶ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2}{x + 1} = \frac{2 - x}{x^2 - x}$$

۲۷ فاصله بین دو شهر A و B ، ۱۸۰ کیلومتر است. اتومبیلی از شهر A با سرعت ثابت به سمت شهر B در حال حرکت است. نیم ساعت بعد، اتومبیل دیگری که سرعت آن ۴ کیلومتر در ساعت بیشتر از اتومبیل اول است از شهر A به سمت شهر B حرکت می‌کند. اگر زمان رسیدن هر دو اتومبیل یکسان باشد، سرعت هر یک از اتومبیل‌ها را به دست آورید.



معادلات رادیکالی (گنگ) (اصم)

۲۸ ✱ معادله $\sqrt{x+2} + 4 = x$ را حل کنید.

۲۹ ✱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف ✱ مجموعه جواب معادله $\sqrt{x+3} + 1 = 0$ برابر تهی است.

۳۰ ✱ مجموعه جواب معادله $\sqrt{4x-1} = 2x$ را به دست آورید.

۳۱ ✱ معادله $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(د) صفر

(ج) ۳

(ب) ۲

(الف) ۱

۳۲ ✱ معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$\sqrt{2-x} = x$$

۳۳ ✱ معادله $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ را حل کنید.

۳۴ ✱ معادله زیر را حل کنید.

$$\sqrt{x+8} + \sqrt{5-x} = 5$$

۳۵ ✱ معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$2 + \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x$$



پاسخنامه تشریحی

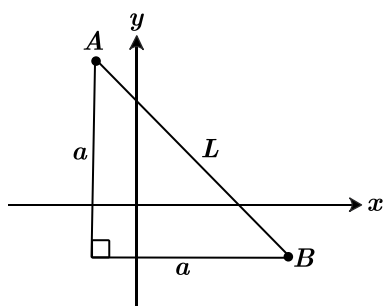
$$O = (3, 1) \quad R = OA = \sqrt{(3-2)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{9+4} \rightarrow AB = \sqrt{13}$$

$$AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{4+9} \rightarrow AC = \sqrt{13}$$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (0+5)^2} = \sqrt{1+25} \rightarrow BC = \sqrt{26}$$

مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین $\rightarrow$ مثلث قائم الزاویه $\rightarrow$ مثلث قائم الزاویه متساوی الساقین
 $AB^2 + AC^2 = BC^2$



$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow L = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{16+16}$$

طول قطر مربع $4\sqrt{2}$

$$L^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 32 = 2a^2 \Rightarrow S = a^2 = 16$$

(صفحة ۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$L = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \Rightarrow L = \sqrt{(3+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2} \text{ (نمره ۲۵) طول قطر مربع } 4\sqrt{2}$$

$$L^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow 32 = 2a^2 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow S = a^2 = 16 \text{ (نمره ۲۵)}$$

(به راه حل های دیگر در محاسبه مساحت که به جواب ۱۶ برسد، نمره کامل تعلق می گیرد.)

$$\begin{cases} x_o = \frac{2+4}{2} = 3 \\ y_o = \frac{4+(-2)}{2} = 1 \end{cases}$$

مرکز دایره O

میانم BM از راس B به وسط ضلع AC رسم می شود:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \rightarrow M(2, 2), \quad B(-2, 1)$$

$$m_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} = \frac{2-1}{2-(-2)} = \frac{1}{4} \rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \rightarrow y - 2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 2 \rightarrow \boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{14+10}{2} \rightarrow x_M = 12 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+(-13)}{2} \rightarrow y_M = -5 \end{cases} \rightarrow M(12, -5)$$

الف)

$$OM = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144+25} \rightarrow \boxed{OM = 13}$$

$$\text{ب) } m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{3 - (-13)}{14 - 10} = \frac{16}{4} \rightarrow m_{AB} = 4$$

$$\text{معادلة عمود منصف } AB = m' \rightarrow m' = \frac{-1}{m_{AB}} \rightarrow m' = -\frac{1}{4}$$

$$y - y_M = m'(x - x_M) \rightarrow y - (-5) = -\frac{1}{4}(x - 12)$$

$$\rightarrow y + 5 = -\frac{1}{4}x + 3 \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x - 2}$$

$$r = \frac{|12 + 3|}{\sqrt{16 + 9}} = 3 \quad S = 9\pi$$

$$S = a^2 = 5 \text{ مساحت مربع } a = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-2(3) + (0) + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$$

$$r = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4(1) + 3(2) + 10|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 4$$

$$AH = \frac{|-3 + 0 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \rightarrow S = \frac{64}{2} = 32$$

$$x + \frac{1}{x} = -2 \xrightarrow{\times x} x^2 + 2x + 1 = 0 \rightarrow x = -1, x \neq 0$$

$$a = 9, b = -6, c = 1$$

$$\rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(9)(1) = 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2(9)} = \frac{-6 \pm 0}{18} \rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

$$x^2 + x = u \rightarrow u^2 - 18u + 72 = 0 \rightarrow (u - 12)(u - 6) = 0 \begin{cases} u - 12 = 0 \rightarrow u = 12 \\ u - 6 = 0 \rightarrow u = 6 \end{cases}$$

$$u = 12 \rightarrow x^2 + x = 12 \rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \rightarrow (x - 3)(x + 4) = 0 \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = 3} \\ x + 4 = 0 \rightarrow \boxed{x = -4} \end{cases}$$

$$u = 6 \rightarrow x^2 + x = 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow \boxed{x = -3} \\ x - 2 = 0 \rightarrow \boxed{x = 2} \end{cases}$$

$$\alpha = 2 - \sqrt{4 - a}, \beta = 2 + \sqrt{4 - a} \rightarrow S = \alpha + \beta = 2 - \sqrt{4 - a} + 2 + \sqrt{4 - a} \rightarrow \boxed{S = 4}$$

۷
الف درست

۸

۹

۱۰

گزینه «ب» ۱۱

۱۲

۱۳

الف نادرست

۱۴

۱۵

الف نادرست

گزینه «ب» ۱۶

۱۷

الف ۲

۱۸

۱۹

۲۰



$$P = \alpha\beta = (2 - \sqrt{4-a})(2 + \sqrt{4-a}) = 4 - (4-a) \rightarrow \boxed{P=a}$$

$$\rightarrow x^2 - Sx + P = 0 \rightarrow \boxed{x^2 - 4x + a = 0}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0 \begin{matrix} \nearrow \alpha \\ \searrow \beta \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} S = \alpha + \beta = -\frac{-4}{2} \rightarrow S = 2 \\ P = \alpha\beta = \frac{-6}{2} \rightarrow P = -3 \end{matrix}$$

$$X = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2} \rightarrow S' = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha\beta)^2} = \frac{S^2 - 2P}{P^2} = \frac{2^2 - 2(-3)}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{S' = \frac{10}{9}}$$

$$P' = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{(\alpha\beta)^2} = \frac{1}{P^2} = \frac{1}{(-3)^2} \rightarrow \boxed{P' = \frac{1}{9}}$$

$$\rightarrow x^2 - S'x + P' = 0 \rightarrow x^2 - \frac{10}{9}x + \frac{1}{9} = 0 \rightarrow \boxed{9x^2 - 10x + 1 = 0}$$

۲۲ راه حل اول:

$$S = \frac{2 - \sqrt{3}}{5} + \frac{2 + \sqrt{3}}{5} = \frac{4}{5} \quad P = \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{5}\right)\left(\frac{2 + \sqrt{3}}{5}\right) = \frac{1}{25}$$

$$x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

توجه: هر مضرب غیرصفر از معادله بالا صحیح است.

راه حل دوم:

$$\left(x - \frac{2 - \sqrt{3}}{5}\right)\left(x - \frac{2 + \sqrt{3}}{5}\right) = x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{1}{25} = 0$$

توجه: هر مضرب غیرصفر از معادله بالا صحیح است.

۲۳

$$\begin{cases} (2, -1) \\ (3, 0) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + 2b = -1 \\ 9a + 3b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12a - 6b = 3 \\ 18a + 6b = 0 \end{cases} + \\ 6a = 3 \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{b = -\frac{3}{2}}$$

۲۴

الف منفی

۲۵

دو ریشه‌ی مساوی $\Delta = 0 \rightarrow$

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow c < 0 \quad x' = x'' < 0$$

$$-\frac{b}{a} < 0 \rightarrow b < 0$$

۲۶

$$\rightarrow \frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \rightarrow \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow x(x-1)(x+1) \times \left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)} + \frac{2}{(x+1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} \right]$$

$$\rightarrow 2x(x) + 2x(x-1) = (2-x)(x+1)$$

$$\rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x = 2x + 2 - x^2 - x \rightarrow 4x^2 - 2x = -x^2 + x + 2$$

$$\rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0 \rightarrow \Delta = (-3)^2 - 4(5)(-2) = 9 + 40 = 49$$

غیرقابل قبول $x = 1$

$$\rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{2(5)} \rightarrow x = \frac{3 \pm 7}{10} \rightarrow \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x = \frac{10}{10} \\ x = -\frac{4}{10} \end{matrix}$$

۲۷ فرض کنیم سرعت اتومبیل اول v و مدت زمان حرکت آن t_1 باشد، در این صورت:

$$t_1 = \frac{180}{v}$$

سرعت اتومبیل دوم $v + 4$ می باشد، اگر t_2 مدت زمان حرکت آن باشد، آنگاه:

$$t_2 = \frac{180}{v+4}, \quad t_2 = t_1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{180}{v+4} = \frac{180}{v} - \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2v(v+4)} 360v = 360(v+4) - v(v+4)$$

$$\Rightarrow 360v = 360v + 1440 - v^2 - 4v$$

$$\Rightarrow v^2 + 4v - 1440 = 0 \Rightarrow v = 36 \Rightarrow v + 4 = 40$$

۲۸

$$\sqrt{x+2} = x-4 \Rightarrow x+2 = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

غی قی

۲۹

الف درست

۳۰ دامنه عبارت رادیکالی برابر با: $x \geq \frac{1}{4}$

۳۱ گزینه د،

۳۲

$$2x = \sqrt{4x-1} \rightarrow 4x^2 = 4x-1 \rightarrow (2x-1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$2-x = x^2 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -2 \text{ غی قی} \\ x = 1 \text{ قی} \end{cases}$$

۳۳

$$(2x-1)^2 = (-\sqrt{2-x})^2 \rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 2-x \rightarrow 4x^2 - 3x - 1 = 0 \rightarrow x_1 = 1 \text{ غیر قابل قبول}, x_2 = -\frac{1}{4}$$

۳۴

(صفحه ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\sqrt{x+8} + \sqrt{5-x} = 5 \Rightarrow \sqrt{5-x} = 5 - \sqrt{x+8} \Rightarrow 5-x = 25 + x + 8 - 10\sqrt{x+8}$$

$$\Rightarrow 14 + x = 5\sqrt{x+8} \quad (25 \text{ نمره})$$

$$196 + 28x + x^2 = 25x + 200 \quad (25 \text{ نمره}) \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \quad (25 \text{ نمره}) \\ x = -4 \quad (25 \text{ نمره}) \end{cases}$$

۳۵

$$\rightarrow \sqrt{2x^2 - 5x + 2} = x - 2 \rightarrow (\sqrt{2x^2 - 5x + 2})^2 = (x - 2)^2$$

$$\rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = x^2 - 4x + 4 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \\ x+1=0 \rightarrow x=-1 \text{ غیر قابل قبول} \end{cases}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۲
یازدهم

سال یازدهم
تجربی

فهرست

- ۱..... ترسیم ها و مکان هندسی
- ۱..... خواص نسبت تناسب
- ۲..... قضیه تالس
- ۳..... تشابه اشکال هندسی



ترسیم ها و مکان هندسی



۱ در مثلث ABC ، نیمساز دو زاویه B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند دایره‌ای رسم کنید که بر سه ضلع مثلث مماس باشد طریقه رسم دایره را توضیح دهید.

۲ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ، اگر طول ارتفاع $AH = 4$ و مساحت آن برابر ۱۲ باشد، طریقه رسم مثلث را شرح داده و آن را رسم کنید.

۳ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

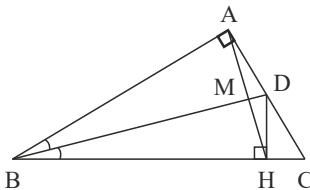
الف مرکز دایره‌ای که سه رأس مثلث روی آن قرار دارند، نقطه برخورد است.

۴ نقاطی از یک صفحه را پیدا کنید که از دو نقطه A و B در آن صفحه به یک فاصله بوده و از خط مفروض d در همان صفحه به فاصله معلوم a باشد. (در مورد تعداد جواب‌ها بحث شود).

۵ دو خط متقاطع d و d' را در نظر بگیرید. نقاطی را بیابید که از نقطه O (محل تقاطع) به فاصله $5cm$ بوده و از دو خط به یک فاصله باشند.

۶ مربعی رسم کنید که پاره‌خط AB یکی از قطرهای آن باشد.

۷ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) نیمساز زاویه B ، ضلع AC را در نقطه D قطع می‌کند، از نقطه D بر وتر BC عمود می‌کنیم و پای عمود را نقطه H می‌نامیم.



الف - ثابت کنید $\hat{ABD} = \hat{HBD}$

ب - ثابت کنید $\hat{DAM} = \hat{DHM}$

۸ زاویه xy را به چهار زاویه مساوی تقسیم کنید.

۹ مربعی رسم کنید که طول قطر آن معلوم باشد.



خواص نسبت تناسب



۱۰ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف اگر تساوی $\frac{a}{5+a} = \frac{b}{4+b}$ برقرار باشد آن‌گاه نسبت $\frac{a}{b}$ برابر است.

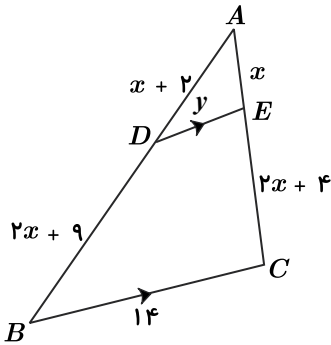
۱۱ اگر $\frac{24-a}{18-b} = \frac{a}{b}$ باشد، حاصل $\frac{a+b}{a-b}$ را بیابید. ($a, b \neq 0$)





قضیه تالس

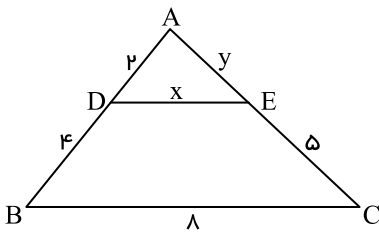
۱۲ در شکل مقابل $BC \parallel DE$ می‌باشد. مقادیر x و y را محاسبه کنید.



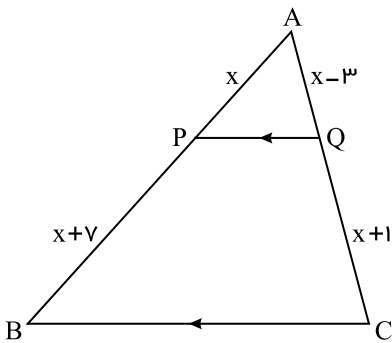
۱۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف در استدلال استقرایی از کل به جز می‌رسیم.

۱۴ در مثلث ABC پاره خط DE با ضلع BC موازی است، مقادیر مجهول x و y را محاسبه کنید.



۱۵ در شکل مقابل $PQ \parallel BC$ است.



الف مقدار x را بیابید.

ب مساحت مثلث بزرگ‌تر چند برابر مساحت مثلث کوچک‌تر است؟

۱۶ در هر مثلث هر پاره خطی که وسط دو ضلع را به هم وصل می‌کند، ضلع سوم است.

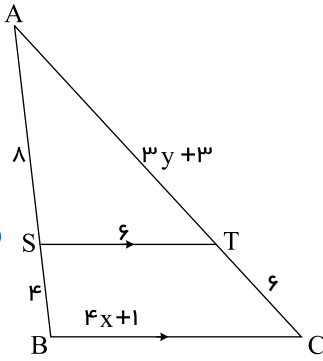
الف) موازی ب) مساوی ج) موازی و مساوی نصف د) موازی و مساوی

۱۷ حکم کلی زیر را با مثال نقض رد کنید.

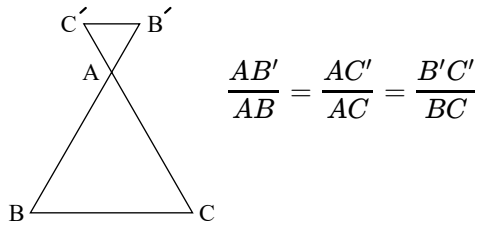
به ازای هر عدد طبیعی n ، مقدار عبارت $n^2 + n + 41$ عددی اول است.



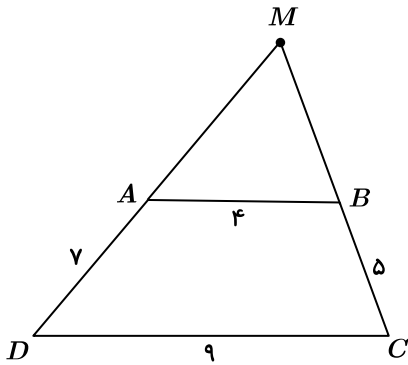
۱۸ در شکل مقابل $ST \parallel BC$ است. مقادیر x و y را بدست آورید.



۱۹ با توجه به شکل، اگر $B'C' \parallel BC$ باشد، آن گاه ثابت کنید:

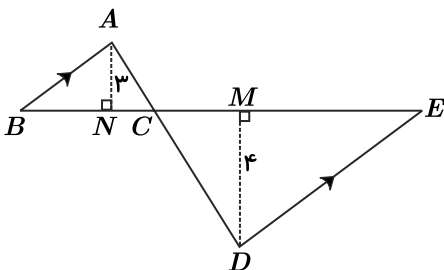


۲۰ در شکل زیر $AB \parallel DC$ است، نسبت محیط مثلث MAB را به محیط دوزنقه $ABCD$ پیدا کنید.



تشابه اشکال هندسی

۲۱ در شکل مقابل $AB \parallel ED$ است.



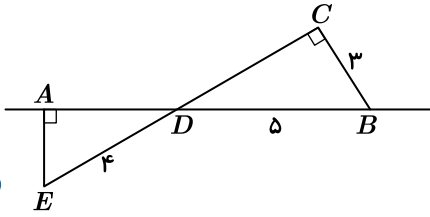
الف نشان دهید دو مثلث $\triangle ABC$ و $\triangle CDE$ متشابه هستند.

ب اگر $DM = 4$ ، $AN = 3$ ، $BE = 7$ باشد آنگاه طول ضلع BC را محاسبه کنید.



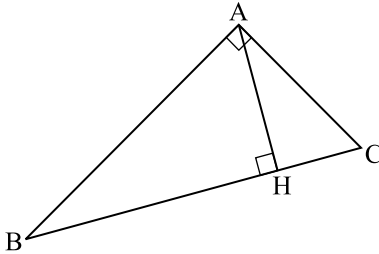


۲۲ در شکل روبه‌رو، ابتدا نشان دهید دو مثلث ADE و CDB متشابه‌اند، سپس به کمک آن طول پاره‌خط AD را بیابید.



۲۳ در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو، اندازه پاره‌خط‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

$$AC = 6, \quad HC = 4, \quad BC = ? \quad AB = ?$$



۲۴ اگر نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر $\frac{4}{25}$ باشد، نسبت نیمسازهای آنها برابر است.

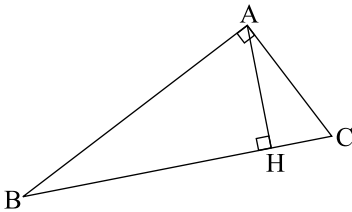
(د) $\frac{4}{50}$

(ج) $\frac{4}{5}$

(ب) $\frac{2}{5}$

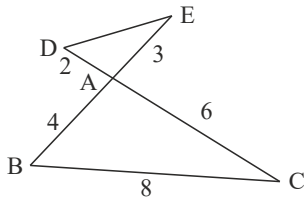
(الف) $\frac{16}{625}$

۲۵ در مثلث قائم‌الزاویه ABC به رأس قائمه A ، اگر ارتفاع وارد بر BC باشد و $AH = 4\text{cm}$ و $BH = 2\text{cm}$ ، آنگاه اندازه HC و BA را به دست آورید.



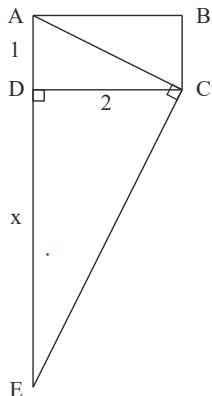
۲۶ در مثلث قائم‌الزاویه روبه‌رو، اندازه پاره‌خط‌های خواسته‌شده را به دست آورید.

$$BH = 9, \quad AH = 6 \quad BC = ? \quad AC = ?$$



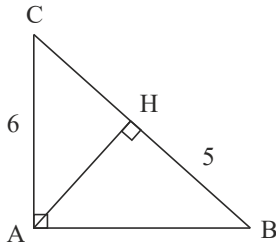
۲۷ در شکل روبه‌رو طول پاره‌خط DE را بدست آورید.

۲۸ در یک مستطیل به ابعاد ۱ و ۲ واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می‌کنیم تا امتداد ضلع کوچک مستطیل را در نقطه‌ی E قطع کند. مقدار x را بدست آورید.

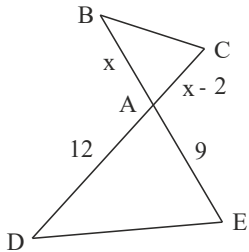




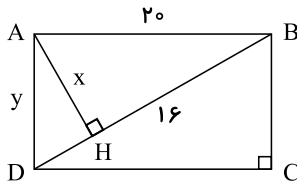
۲۹ در مثلث قائم الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) اگر $AC = 6$ و $BH = 5$ باشد، اندازه‌ی AH و AB را بدست آورید.



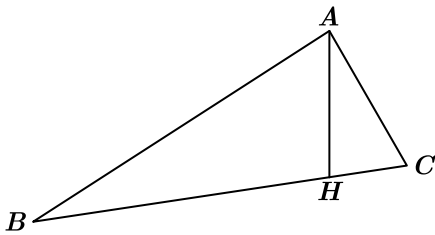
۳۰ در شکل زیر دو مثلث متشابه‌اند. نسبت مساحت‌های آن‌ها را بدست آورید.



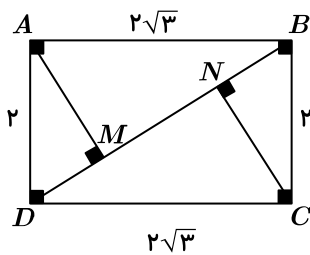
۳۱ در مستطیل مقابل مقادیر x و y را بدست آورید.



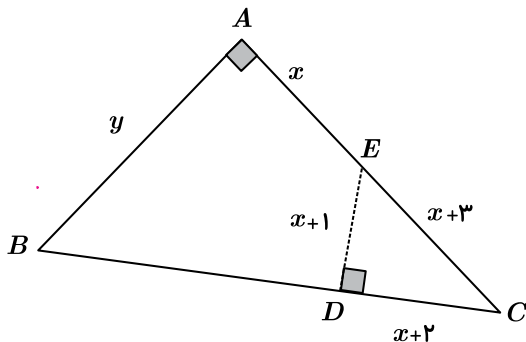
۳۲ مثلث ABC یک مثلث قائم الزاویه است ($A = 90^\circ$) که AH ارتفاع وارد بر وتر آن است. اگر $AB = 12$ و $AH = 6$ باشند، آنگاه اندازه AC , BC , BH را بیابید.



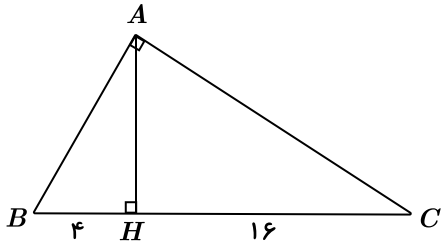
۳۳ در شکل روبه‌رو، طول پاره خط MN را حساب کنید.



۳۴ در شکل زیر، مقدارهای x , y را پیدا کنید.



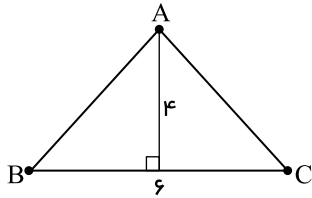
۳۵ ✨ با توجه به شکل طول ارتفاع AH را به دست آورید.





پاسخنامه تشریحی

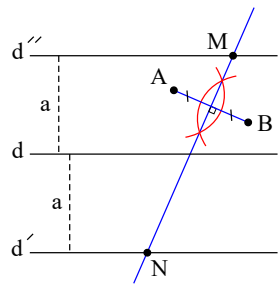
۱ در مثلث ABC ، نیمساز دو زاویه B و C را رسم می‌کنیم تا همدیگر را در نقطه O قطع کنند هر نقطه روی نیمساز زاویه به یک فاصله است از نقطه O به سه ضلع مثلث عمود می‌کنیم $OH = OH'$, $OH = OH''$ این مقدار مساوی را شعاع دایره می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم می‌کنیم.



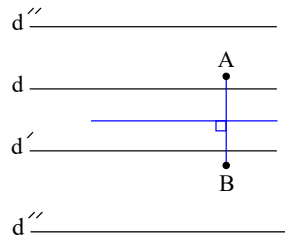
$$S_{ABC} = \frac{AH \times BC}{2} \rightarrow 12 = \frac{4 \times BC}{2} \rightarrow BC = 6$$

ضلع BC را به اندازه ۶ رسم می‌کنیم از نقطه H وسط BC عمودی به اندازه ۴ جدا می‌کنیم و A می‌نامیم، رأس A را به B و C وصل می‌کنیم.

عمود منصف‌های اضلاع مثلث



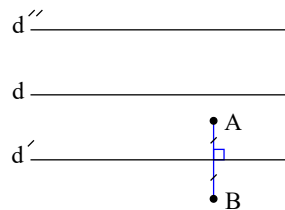
ابتدا موازی خط d و به فاصله a در دو طرف آن دو خط موازی d' و d'' را رسم می‌کنیم. سپس عمود منصف پاره خط AB را رسم می‌کنیم، برخورد عمود منصف با دو خط d' و d'' جواب مسأله است. (نقاط A و B از نقاط M و N به یک فاصله‌اند و این نقاط از d به فاصله a هستند).



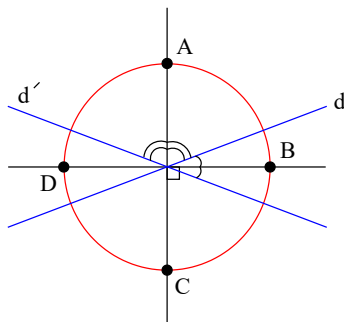
بحث درباره جواب‌ها:

حالت اول: دو نقطه M و N در شکل بالا جواب سؤال هستند.

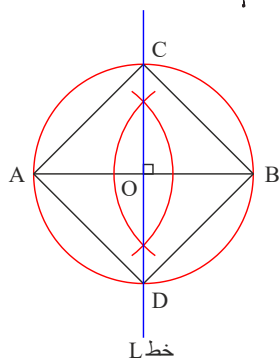
حالت دوم: اگر عمود منصف AB ، با سه خط d ، d' و d'' موازی باشد، سؤال فاقد جواب است. (راستای A و B بر d عمود باشد).



حالت سوم: اگر عمود منصف A و B بر یکی از سه خط d یا d' یا d'' منطبق باشد، سؤال بی‌شمار جواب دارد.



۵ ابتدا نیمساز هر دو زاویه‌ای که دو خط باهم می‌سازند را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع $5cm$ یک دایره رسم می‌کنیم محل برخورد دایره با دو نیمساز جواب مسأله است. ۴ نقطه A ، B ، C و D از دو خط به یک فاصله‌اند و از O به فاصله $5cm$ هستند.



در مربع قطرهای عمودمنصف یکدیگرند. ابتدا عمودمنصف پاره خط AB را رسم می کنیم. محل برخورد پاره خط AB و عمودمنصف AB (خط L) را نقطه‌ی O می نامیم. نقطه‌ی O وسط پاره خط AB است. اکنون به مرکز O و شعاع OA ، دایره‌ای رسم می کنیم تا خط L (عمودمنصف AB) را در دو نقطه‌ی C و D قطع کند. چهارضلعی $ABCD$ مربع و جواب مسئله است.

۷
الف

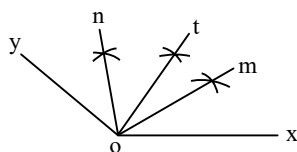
$$\left. \begin{array}{l} BD = BD \text{ مشترک} \\ \hat{A} = \hat{H} = 90^\circ \\ BD = BD \text{ نیمساز} \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{ABD} = \hat{HBD}$$

ب

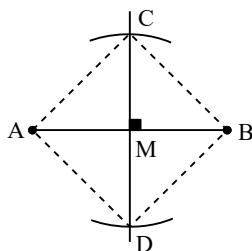
$$\hat{ABD} = \hat{HBD} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{ADM} = \hat{HDM} \\ AD = DH \\ AB = BH \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{ADM} = \hat{HDM} \\ AD = DH \\ MD = MD \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{AMD} = \hat{HMD} \Rightarrow D\hat{A}M = D\hat{H}M$$

۸ به روش رسم نیمساز، ابتدا نیمساز زاویه $x\hat{O}y$ را رسم کرده و آن را ot می نامیم. سپس جداگانه نیمساز زاویه $x\hat{O}t$ را رسم کرده و آن را om و بعد نیمساز $y\hat{O}t$ را رسم کرده و آن را on می نامیم. به این ترتیب زاویه $x\hat{O}y$ به چهار زاویه مساوی تقسیم می شود.



۹ فرض کنیم قطر موردنظر AB باشد، پس ابتدا AB را کشیده و در ادامه عمودمنصف آن را رسم می کنیم. نقطه برخورد عمودمنصف با پاره خط AB را M می نامیم. به مرکز M و به شعاع AM دایره‌ای رسم کرده تا عمودمنصف را در نقاط C و D قطع کند. در پایان از C و D به A و B وصل کرده و مربع به دست می آید. توجه کنید ۴ضلعی $ABCD$ مربع است، زیرا قطرهای باهم برابر بوده و یکدیگر را نصف می کنند.



۱۰
الف

۱۵
۴

۱۱ روش اول: با توجه به خواص تناسب، داریم:

$$\frac{\text{طرفین}}{\text{وسطین}} \rightarrow (24 - a)(b) = (18 - b)(a) \rightarrow 24b - ab = 18a - ba \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{24}{18}$$

$$\rightarrow \text{ترکیب نسبت در صورت و تقصیل نسبت در مخرج} : \frac{a+b}{a-b} = \frac{24+18}{24-18} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{42}{6}$$

$$\rightarrow \frac{a+b}{a-b} = 7$$

روش دوم:

$$\frac{a}{b} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3}b$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{4}{3}b+b}{\frac{4}{3}b-b} = \frac{\frac{7}{3}b}{\frac{1}{3}b} = 7$$

(صفحة ۳۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

روش اول:

طرفین وسطین $\rightarrow 24b - ab = 18a - ab$ (نمره ۲۵)

$$\rightarrow \frac{a}{b} = \frac{24}{18} \quad (\text{نمره ۲۵}) \rightarrow \text{ترکیب نسبت در صورت و تقضیل نسبت در مخرج} : \frac{a+b}{a-b} = \frac{24+18}{24-18} = 7$$

(نمره ۲۵)

روش دوم:

$$\frac{a}{b} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \Rightarrow a = \frac{4}{3}b \quad (\text{نمره ۵})$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{\frac{4}{3}b+b}{\frac{4}{3}b-b} = \frac{\frac{7}{3}b}{\frac{1}{3}b} = 7 \quad (\text{نمره ۵})$$

۱۲

$$\frac{x+2}{2x+9} = \frac{x}{2x+4} \Rightarrow x = 8$$

$$\frac{x}{3x+4} = \frac{y}{14} \Rightarrow \frac{8}{28} = \frac{y}{14} \Rightarrow y = 4$$

۱۳

الف نادرست

۱۴

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{y}{5} \rightarrow y = 2,5$$

$$DE \parallel BC \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow \frac{2}{6} = \frac{x}{8} \rightarrow y = \frac{8}{3}$$

۱۵

الف

$$PQ \parallel BC \rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC}$$

$$\frac{x}{x+7} = \frac{x-3}{x+1} \rightarrow x^2 + x = x^2 + 4x - 21 \rightarrow x = 7$$

ب

$$\frac{S_{ABC}}{S_{APQ}} = \left(\frac{AB}{AP}\right)^2 = \left(\frac{21}{7}\right)^2 = 9 \rightarrow S_{ABC} = 9S_{APQ}$$

۱۶ گزینه د،

۱۷ کفایت $n = 41$ یا مضرب ۴۱ انتخاب شود.

۱۸

$$ST \parallel BC \Rightarrow \frac{AS}{SB} = \frac{AT}{TC} \Rightarrow \frac{8}{4} = \frac{3y+3}{6}$$

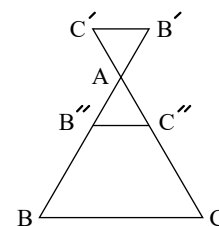
$$\Rightarrow 3y+3 = 12 \Rightarrow 3y = 9 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

$$ST \parallel BC \Rightarrow \frac{AS}{AB} = \frac{AT}{AC} = \frac{ST}{BC} \Rightarrow \frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{6}{4x+1} \Rightarrow 4x+1 = 9 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

۱۹ پاره خط $B''C''$ را طوری رسم می‌کنیم که داشته باشیم:



$$\begin{cases} AB'' = AB' \\ AC'' = AC' \end{cases}$$



از این دو مثلث $AB'C'$ و $AB''C''$ به حالت دو ضلع و زاویه بین هم‌نهشت‌اند، بنابراین:

$$\begin{cases} \hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \text{طبق خطوط موازی و مورب} \\ \hat{B} = \hat{B}'' \Rightarrow \text{طبق تساوی مثلث} \end{cases} \Rightarrow \hat{B} = \hat{B}''$$

حال در $\triangle ABC$ تعمیم قضیه تالس را می‌نویسیم:

$$B''C'' \parallel BC \Rightarrow \frac{AB''}{AB} = \frac{AC''}{AC} = \frac{B''C''}{BC}$$

و چون دو مثلث $AB'C'$ و $AB''C''$ هم‌نهشت‌اند، کافی است ضلع متناظر هر ضلع را در تساوی فوق جایگذاری کنیم و حکم ثابت می‌شود:

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

۲۰

در مثلث MDC ، پاره‌خط AB موازی با ضلع DC است، پس طبق تعمیم قضیه تالس داریم:

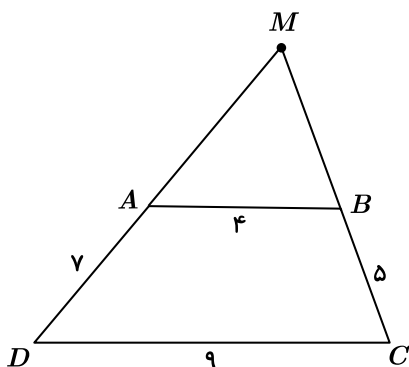
$$\frac{AM}{MD} = \frac{AB}{DC} \rightarrow \frac{AM}{AM+7} = \frac{4}{9}$$

$$\rightarrow 4AM + 28 = 9AM \rightarrow 5AM = 28$$

$$\rightarrow AM = \frac{28}{5} = 5,6$$

$$\xrightarrow{\text{به‌طور مشابه}} \frac{MB}{MC} = \frac{4}{9} \rightarrow 4MB + 20 = 9MB \rightarrow 5MB = 20 \rightarrow MB = 4$$

$$\rightarrow \frac{P_{AMB}}{P_{ABCD}} = \frac{5,6 + 4 + 4}{9 + 7 + 4 + 5} = \frac{13,6}{25}$$



(صفحه ۳۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\left. \begin{matrix} \triangle MDC \\ AB \parallel DC \end{matrix} \right\} \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{AM}{AM+7} = \frac{4}{9} \quad (\text{نمره } ۲۵) \rightarrow AM = 5,6 \quad (\text{نمره } ۲۵)$$

$$\xrightarrow{\text{به‌طور مشابه}} \frac{BM}{BM+5} = \frac{4}{9} \quad (\text{نمره } ۲۵) \rightarrow MB = 4 \quad (\text{نمره } ۲۵) \Rightarrow \frac{P_{AMB}}{P_{ABCD}} = \frac{13,6}{25} \quad (\text{نمره } ۲۵)$$

۲۱

الف

$$\left. \begin{matrix} C_1 = C_2 \\ B = E \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CDE$$

راه حل اول:

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{4} \xrightarrow{BC=x} \frac{x}{7-x} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 3$$

$$\frac{BC}{CE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{BC}{\underbrace{BC+CE}_7} = \frac{3}{7} \Rightarrow BC = 3$$

راه حل دوم:

$$DC^2 = DB^2 - BC^2 = 16 \rightarrow DC = 4$$

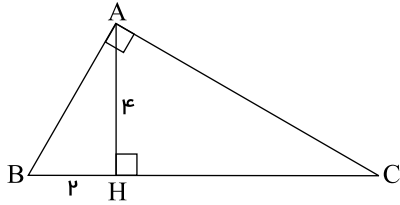
$$\left. \begin{matrix} D_1 = D_2 \\ A = C \end{matrix} \right\} \triangle ADE \sim \triangle CDB \rightarrow \frac{AD}{CD} = \frac{DE}{DB} \rightarrow \frac{AD}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$AD = \frac{16}{5}$$

۲۲

$$AC^2 = HC \times BC \rightarrow 36 = 4 \times BC \rightarrow BC = 9$$

$$AB^2 = BH \times BC \rightarrow AB^2 = 5 \times 9 \rightarrow AB = 3\sqrt{5}$$



$$AH^2 = BH \cdot HC \rightarrow 4^2 = 5 \times HC \rightarrow HC = 8$$

$$AB^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \rightarrow AB = \sqrt{41} = 2\sqrt{10}$$

$$AH^2 = BH \times HC \rightarrow 36 = 9 \times HC \rightarrow HC = 4 \rightarrow BC = 13$$

$$AC^2 = HC \times BC \rightarrow AC^2 = 4 \times 13 \rightarrow AC = 2\sqrt{13}$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle D\hat{A}E = \angle B\hat{A}E \\ \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC \rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\rightarrow \frac{2}{4} = \frac{DE}{8} \rightarrow \boxed{DE = 4}$$

$$\triangle ACE = \text{قائم الزاوية}$$

$$\rightarrow AD \cdot DE = DC^2 \rightarrow 1 \times x = 2^2 \rightarrow \boxed{x = 4}$$

$$AC^2 = CH \cdot BC \rightarrow AC^2 = CH(CH + BH)$$

$$\rightarrow 6^2 = CH(CH + 5) \rightarrow 36 = CH^2 + 5CH$$

$$\rightarrow CH^2 + 5CH - 36 = 0 \rightarrow (CH - 4)(CH + 9) = 0 \rightarrow \begin{cases} CH = 4 \\ CH = -9 \text{ غ ق } \end{cases} \rightarrow \boxed{CH = 4}$$

$$\rightarrow AH^2 = CH \cdot BH \rightarrow AH^2 = 4 \times 5 \rightarrow AH^2 = 20 \rightarrow \boxed{AH = 2\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow AB^2 = BH \cdot BC \rightarrow AB^2 = 5 \times 9 \rightarrow AB^2 = 45 \rightarrow \boxed{AB = 3\sqrt{5}}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle ADE \rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \rightarrow \frac{x}{12} = \frac{x-2}{9}$$

$$\rightarrow 9x = 12x - 24 \rightarrow 24 = 3x \rightarrow \boxed{x = 8}$$

$$\rightarrow \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = k^2 = \left(\frac{AB}{AD}\right)^2 = \left(\frac{8}{12}\right)^2 \rightarrow \boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADE}} = \frac{4}{9}}$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow 20^2 = x^2 + 16^2 \Rightarrow x = \sqrt{(20^2 - 16^2)(20^2 + 16^2)} \Rightarrow \boxed{x = 12}$$

$$ADH \sim ABH \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{12}{16} = \frac{y}{20} \Rightarrow \boxed{y = 15}$$



$$BH^2 = AB^2 - AH^2 = 108 \Rightarrow BH = 6\sqrt{3}$$

$$AB^2 = BH \times BC \Rightarrow BC = \frac{12^2}{6\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

$$CH = BC - BH = 2\sqrt{3}$$

$$AC^2 = CH \times BC = 2\sqrt{3} \times 8\sqrt{3} = 48 \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$$

۳۳ در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABD$ طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 \rightarrow BD^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2 \rightarrow BD^2 = 4 + 12 = 16 \rightarrow BD = 4 \text{ مستطیل}$$

از طرفی در مثلث قائم الزاویه $\triangle ABD$ طبق روابط طولی می توان نوشت:

$$AD^2 = DM \times BD \rightarrow 4 = DM \times 4 \rightarrow DM = 1$$

به طور مشابه در مثلث قائم الزاویه $\triangle DBC$ داریم:

$$BC^2 = BN \times BD \rightarrow 4 = BN \times 4 \rightarrow BN = 1$$

در آخر داریم:

$$MN = BD - (DM + BN)$$

$$MN = 4 - (1 + 1) \rightarrow MN = 2$$

(صفحه ۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\triangle ABD : AB^2 + AD^2 = BD^2 \text{ (فیثاغورس (نمره ۲۵))}$$

$$\rightarrow 4 + 12 = BD^2 \Rightarrow BD^2 = 16 \rightarrow BD = 4 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\triangle ABD : AD^2 = DM \times BD \text{ (نمره ۲۵)} \rightarrow 4 = DM \times 4 \rightarrow DM = 1 \text{ (نمره ۲۵) به طور مشابه } BN = 1 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\rightarrow MN = BD - (DM + BN) \rightarrow MN = 4 - 2 = 2 \text{ (نمره ۵)}$$

۳۴ ابتدا در مثلث قائم الزاویه $\triangle DEC$ به کمک رابطه فیثاغورس مقدار x را پیدا می کنیم:

$$(x + 3)^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$$

$$\rightarrow x^2 = 4 \xrightarrow{x > 0} x = 2$$

حال دو مثلث $\triangle DEC$, $\triangle ABC$ در حالت برابری دو زاویه متشابه اند، زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ \\ \hat{C} = \hat{C} \text{ در هر دو مشترک} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC} \rightarrow \frac{3}{y} = \frac{4}{5} \rightarrow y = \frac{15}{4}$$

(صفحه ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\left. \begin{array}{l} \triangle DEC \\ \hat{D} = 90^\circ \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{فیثاغورس (نمره ۲۵)}} (x + 3)^2 = (x + 1)^2 + (x + 2)^2 \rightarrow x = 2 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C} \text{ مشترک} \\ \hat{D} = \hat{A} = 90^\circ \end{array} \right\} \text{ (نمره ۲۵)} \rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEC \text{ (نمره ۲۵)} \rightarrow \frac{DE}{AB} = \frac{DC}{AC} \text{ (نمره ۲۵)} \rightarrow \frac{3}{y} = \frac{4}{5} \rightarrow y = \frac{15}{4} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۳۵

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 4 \times 16 = 64 \Rightarrow AH = 8$$

(صفحه ۴۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$AH^2 = BH \times CH \Rightarrow AH^2 = 4 \times 16 = 64 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow AH = 8 \text{ (نمره ۲۵)}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۳
یازدهم

سال یازدهم
تجربی

فهرست

درس اول : آشنایی با برخی از انواع تابع

- ۱..... توابع گویا - رادیکالی - چند ضابطه ای و دامنه ی تعریف آن ها
- ۱..... تساوی دو تابع
- ۱..... توابع پله ای و تابع جزء صحیح

درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک به یک

- ۱..... تابع یک به یک
- ۲..... تابع وارون

درس سوم : اعمال جبری روی توابع

- ۳..... اعمال جبری روی توابع
- ۳..... رسم توابع به کمک انتقال



درس اول : آشنایی با برخی از انواع

توابع گویا - رادیکالی - چند ضابطه ای و دامنه‌ی تابع تعریف آن ها

۱ دامنه‌ی توابع زیر را بدست آورید.

الف) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{10-2x}$

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$

پ) $h(x) = \frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{2x-6}}$

ت) $k(x) = \sqrt{\frac{2x-16}{2-x}}$

ث) $y = \sqrt{4-x} - \sqrt{1-2x}$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}}$

۲ دامنه‌ی تابع $f(x) = \frac{4x-1}{x^2+ax+b}$ ، مجموعه $\mathbb{R} - \{-2, 5\}$ می‌باشد. a و b را به دست آورید.

۳ حدود m را چنان مشخص کنید که دامنه‌ی تابع با ضابطه $f(x) = \frac{x+3}{x^2+mx+m}$ برابر $\mathbb{R}$ شود.

۴ نمودار تابع $f(x) = 3 + \sqrt{x-1}$ را رسم کنید.

تساوی دو تابع

۵ درستی و نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) دو تابع $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \sqrt{x^2-x}$ با هم برابرند.

۶ آیا دو تابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ و $g(x) = x-2$ با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

۷ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) برای هر عدد حقیقی k داریم: $[x+k] = [x] + k$. $[x]$ نشان‌دهنده‌ی جزء صحیح x است.

ب) دو تابع $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = x$ با هم برابرند.

۸ آیا دو تابع $f(x) = \frac{3(x^2-1)}{x-1}$ و $g(x) = 3x+3$ با هم برابرند؟

توابع پله ای و تابع جزء صحیح

۹ نمودار تابع $y = 1 - 2[x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید. $[x]$ نماد جزء صحیح است.

۱۰ برد تابع $f(x) = [x]$ کدام است؟

الف) اعداد حقیقی ب) اعداد گویا ج) اعداد طبیعی د) اعداد صحیح

۱۱ اگر $x = -\frac{1}{3}$ باشد، حاصل عبارت $||[7x] - [5x]||$ را بدست آورید.



درس دوم : وارون یک تابع و تابع یک

به یک

تابع یک به یک

۱۲ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.





الف

هر تابع درجه دوم یک به یک هست.

۱۳

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف

هر تابع خطی غیر ثابت، یک به یک است.

۱۴

کدام یک از توابع زیر در کل دامنه خود یک به یک است؟

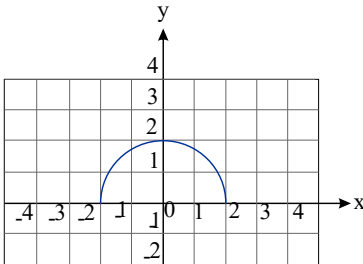
$$\text{الف) } f(x) = x^2 \quad \text{ب) } f(x) = [x] \quad \text{ج) } f(x) = |x| \quad \text{د) } f(x) = 2^x$$

۱۵

اگر تابع $f = \{(3, 5), (4, -6), (a+1, 5), (2a, 3b)\}$ یک به یک باشد، a و b را بدست آورید.

۱۶

با حذف بخشی از نمودار نیم دایره داده شده، نمودار یک تابع یک به یک را مشخص کنید.



تابع وارون

۱۷

اگر وارون تابع $f(x) = ax + 4$ از نقطه $(5, \frac{5}{3})$ بگذرد آنگاه ضابطه وارون f را به دست آورید.

۱۸

در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف

ضابطه وارون تابع $f(x) = 2x - 1$ به صورت است.

۱۹

اگر $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ و $g(x) = x - 2$ حاصل $g(x) + f(-3)$ را به دست آورید.

۲۰

جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است، قرینه نمودار آن را نسبت به رسم کنیم.

۲۱

اگر $f(x) = 3x + 5$ باشد، مقدار $f^{-1}(8)$ را تعیین کنید.

۲۲

ضابطه وارون تابع $f(x) = 3x - 2$ کدام است؟

$$\text{الف: } f^{-1}(x) = -3x + 2 \quad \text{ب: } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$$

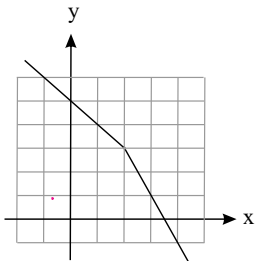
$$\text{ج: } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad \text{د: } f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

۲۳

اگر نمودار تابع f به صورت روبرو باشد، حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

$$\text{الف) } f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) =$$

$$\text{ب) } 2f^{-1}(4) + 3f^{-1}(3) =$$



۲۴

در تابع $f(x) = -x + \sqrt{-2x}$ اگر $f^{-1}(4) = a$ باشد، مقدار a را بدست آورید.

۲۵

وارون تابع با ضابطه $f(x) = 2x + 3$ را بدست آورید.



درس سوم : اعمال جبری روی توابع

اعمال جبری روی توابع

۲۶ اگر $f(x) = x + 1$ و $g(x) = \frac{5x + 4}{x - 3}$ باشند آنگاه دامنه و ضابطه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

۲۷ دو تابع $f(x) = \frac{x}{x - 2}$ و $g(x) = 2x - 1$ مفروض اند

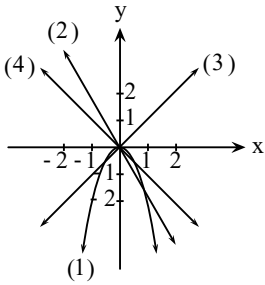
الف دامنه تابع $f(x) + g(x)$ را بیابید.

ب حاصل $g(3) \times 2f(4)$ را به دست آورید.

۲۸ اگر $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$ و $g(x) = x^2 - 4$ باشد، ضابطه و دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را تعیین کنید.

۲۹ اگر $f = \{(1, -4), (2, 7), (3, 5), (4, 9)\}$ و $g = \{(-1, 3), (0, 2), (2, 4), (3, 1)\}$ باشند، آنگاه توابع $f + g$ و $f - g$ دامنه‌ی هر یک را مشخص کنید.

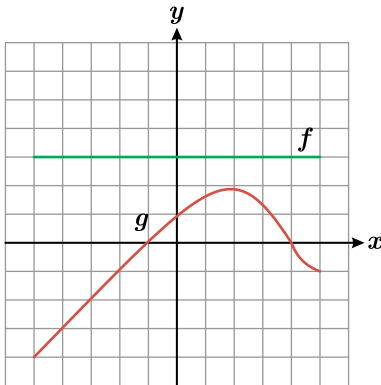
۳۰ در شکل مقابل، نمودار چهار تابع رسم شده است.



الف کدام یک از تفریق دو تابع دیگر به دست آمده است؟

ب کدام یک از ضرب دو تابع دیگر به دست آمده است؟

۳۱ با توجه به نمودارهای توابع f و g :



الف دامنه تابع $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

ب مقدار $(f - 2g)(0)$ را بیابید.

رسم توابع به کمک انتقال

۳۲ نمودار تابع $f(x) = -2 + \sqrt{x - 1}$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه تابع را بیابید.

۳۳ نمودار تابع $f(x) = 1 + \sqrt{1 + x}$ را به کمک انتقال رسم کنید و دامنه آن را بیابید.

۳۴ نمودار تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه آن را به صورت بازه بنویسید.



۳۵ نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x-3}$ را با استفاده از انتقال نمودار $y = \sqrt{x}$ رسم کنید. دامنه و برد آن را مشخص کنید.





پاسخنامه تشریحی

۱

الف) $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{10-2x}$

$x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \rightarrow x \geq 2$

$10-2x \geq 0 \rightarrow 10 \geq 2x \rightarrow 5 \geq x$ اشتراك جوابها $2 \leq x \leq 5 \Rightarrow D_f = [2, 5]$

ب) $g(x) = \frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-1}}$

$9-x \geq 0 \rightarrow 9 \geq x$

$x-1 > 0 \rightarrow x > 1$ اشتراك جوابها $1 < x \leq 9 \rightarrow D_g = (1, 9]$

پ) $h(x) = \frac{\sqrt{3x-6}}{\sqrt{2x-6}}$

$3x-6 \geq 0 \rightarrow 3x \geq 6 \rightarrow x \geq 2$

$2x-6 > 0 \rightarrow 2x > 6 \rightarrow x > 3$ اشتراك جوابها $x > 3 \rightarrow D_h = (3, +\infty)$

ت) $k(x) = \sqrt{\frac{2x-16}{2-x}}$

$\frac{2x-16}{2-x} \geq 0 \rightarrow \frac{2x-16}{2-x} = 0 \rightarrow x = 8$
 $\frac{2x-16}{2-x} = 0 \rightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	8	$+\infty$
$2x-16$	-	-	0	+
$2-x$	+	0	-	-
P	-	+	-	+

$2 < x \leq 8 \rightarrow D_k = (2, 8]$

ث) $y = \sqrt{4 - \sqrt{1-2x}}$

$\begin{cases} 1-2x \geq 0 \rightarrow 1 \geq 2x \rightarrow x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - \sqrt{1-2x} \geq 0 \rightarrow 4 \geq \sqrt{1-2x} \xrightarrow{\text{توان 2}} 16 \geq 1-2x \rightarrow 2x \geq -15 \rightarrow x \geq -\frac{15}{2} \end{cases}$

اشترك جوابها $-\frac{15}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \rightarrow D_y = \left[-\frac{15}{2}, \frac{1}{2}\right]$

ج) $f(x) = \sqrt{\frac{1-|x|}{1+|x|}} \rightarrow \frac{1-|x|}{1+|x|} \geq 0 \xrightarrow{1+|x| > 0} 1-|x| \geq 0 \rightarrow 1 \geq |x|$

$\rightarrow -1 \leq x \leq 1 \rightarrow D_f = [-1, 1]$

۲ طبق فرض، $x = -2$ و $x = 5$ ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 + ax + b = 0$ می‌باشند. داریم:

مجموع ریشه‌ها $-a = -2 + 5 = 3 \Rightarrow a = -3$

حاصل ضرب ریشه‌ها $b = -10$

۳ برای آنکه دامنه تابع f شامل همه اعداد حقیقی شود، باید معادله $x^2 + mx + m = 0$ فاقد ریشه حقیقی باشد، داریم:

$x^2 + mx + m = 0$, $\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 4m < 0$

برای حل نامعادله $m^2 - 4m < 0$ عبارت $P = m^2 - 4m$ را تعیین علامت می‌کنیم:

$P = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$

m	0	4
m^2-4m	+	-

$P < 0 \Rightarrow 0 < m < 4$

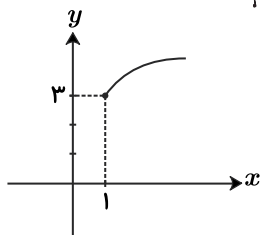
۴ ابتدا دامنه تابع را به دست می‌آوریم:

$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

$f(1) = 3 + \sqrt{1-1} = 3$



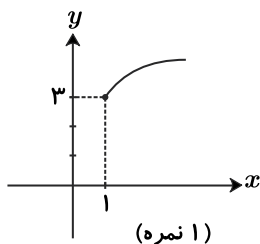
بنابراین نمودار تابع به صورت زیر است:



(صفحه ۵۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

در صورتی که فقط نقطه شروع رسم (۱, ۳) را درست رسم کرده باشد (۵/۵) نمره تعلق گیرد.



(۱ نمره)

۵

الف

نادرست

۶ خیر زیرا دامنه تابعها برابر نیست، $D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$ $D_g = \mathbb{R}$

۷

الف

نادرست

ب

نادرست

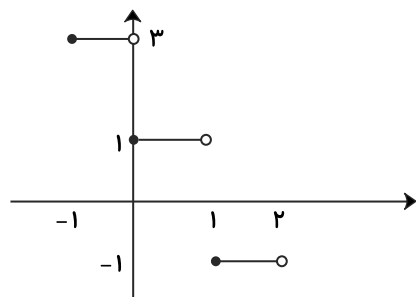
۸

$$f(x) = \frac{3(x^2 - 1)}{x - 1} = 3x + 3 \rightarrow x - 1 \neq 0 \rightarrow x \neq 1 \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$g(x) = 3x + 3 \rightarrow D_g = \mathbb{R}$$

دو تابع f و g برابر نیستند $\Rightarrow D_f \neq D_g$

۹



۱۰ گزینه د،

۱۱

$$\begin{aligned} ||[7x] - |[5x]|| &= \left| \left[7 \times \left(-\frac{1}{7} \right) \right] - \left[5 \times \left(-\frac{1}{7} \right) \right] \right| = \left| \left[-\frac{7}{7} \right] - \left[-\frac{5}{7} \right] \right| = |[-3, 5] - [-2, 5]| \\ &= |-4 - (-3)| = |-4 - 3| = |-7| = 7 \end{aligned}$$

۱۲

الف

نادرست

۱۳

الف درست

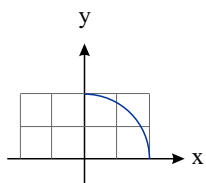
۱۴ د

۱۵

$$(3, 5) = (a + 1, 5) \rightarrow a + 1 = 3 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$\rightarrow f = \{(3, 5), (4, -6), (4, 3b)\} \xrightarrow{f \text{ یک به یک}} (4, -6) = (4, 3b) \rightarrow 3b = -6 \rightarrow \boxed{b = -2}$$

۱۶



۱۷

$$\left(5, \frac{5}{3}\right) \in f^{-1} \Rightarrow 5 = \frac{5}{3}a + 4 \Rightarrow a = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{3}{5}x + 4 \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{5}x \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{5}{3}(x - 4)$$

۱۸

الف

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

۱۹

$$g^{-1}(x) = x + 2 \rightarrow g^{-1}(3) = 5, f(-3) = -5$$

$$g^{-1}(3) + f(-3) = 0$$

۲۰

الف

نیمساز ربع اول و سوم (یا خط $y = x$)

۲۱

$$3x + 5 = 8 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 8) \in f \rightarrow f^{-1}(8) = 1$$

۲۲ ج

۲۳

الف)

$$(3, 1) \in f \rightarrow (1, 3) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(1) = 3$$

$$(4, -1) \in f \rightarrow (-1, 4) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(-1) = 4$$

$$\rightarrow f^{-1}(1) + f^{-1}(-1) = 3 + 4 = 7$$

ب)

$$(1, 4) \in f \rightarrow (4, 1) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(4) = 1, (2, 3) \in f \rightarrow (3, 2) \in f^{-1} \rightarrow f^{-1}(3) = 2$$

$$\rightarrow 2f^{-1}(4) + 3f^{-1}(3) = 2(1) + 3(2) = 2 + 6 = 8$$

۲۴

$$f^{-1}(4) = a \rightarrow (4, a) \in f^{-1} \rightarrow (a, 4) \in f \rightarrow -a + \sqrt{-2a} = 4$$

$$\rightarrow \sqrt{-2a} = 4 + a \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2a = 16 + 8a + a^2 \rightarrow a^2 + 10a + 16 = 0$$

$$\rightarrow (a + 8)(a + 2) = 0 \rightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \rightarrow \boxed{a = -2} \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-2(-2)} = 4 - 2 \quad \checkmark \\ a + 8 = 0 \rightarrow a = -8 \xrightarrow{\text{چک کردن}} \sqrt{-2(-8)} = 4 - 8 \quad \times \end{cases}$$

۲۵

$$y = 2x + 3 \rightarrow y - 3 = 2x \rightarrow x = \frac{y-3}{2} \rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y}{2} - \frac{3}{2} \rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}$$

۲۶



$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R} - \{3\} \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R} - \{3, -\frac{4}{5}\}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{\frac{5x+4}{x-3}} = \frac{(x+1)(x-3)}{5x+4}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{3\} \quad D_g = \mathbb{R} \quad D_f = \mathbb{R} - \{3\}$$

$$g(3) \times 2f(4) = 5 \times 2(2) = 20$$

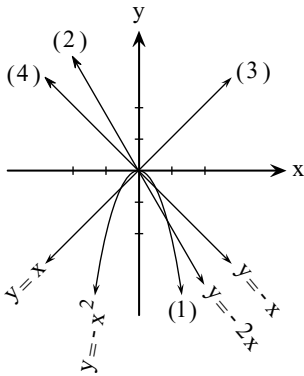
$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+2}{x-1} = \frac{x+2}{(x-1)(x^2-4)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = (\mathbb{R} - \{1\}) \cap \mathbb{R} - \{2, -2\} = \mathbb{R} - \{1, 2, -2\}$$

$$D_f = \{1, 2, 3, 4\}, D_g = \{-1, 0, 2, 3\} \rightarrow D_f \cap D_g = \{2, 3\}$$

$$\rightarrow f+g = \{(2, 7+4), (3, 5+1)\} \rightarrow f+g = \{(2, 11), (3, 6)\}, D_{f+g} = \{2, 3\}$$

$$\rightarrow f-g = \{(2, 7-4), (3, 5-1)\} \rightarrow f-g = \{(2, 3), (3, 4)\}, D_{f-g} = \{2, 3\}$$



$$y(4) - y(2) = -x - x = -2x = y(2)$$

$$y(4) - y(2) = -x - (2x) = x = y(2)$$

$$y(2) \cdot y(4) = x(-x) = -x^2 = y(1)$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\} = [-5, 5] - \{-1, 4\}$$

$$(f - 2g)_{(0)} = f(0) - 2g(0) = 3 - 2(1) = 1$$

۲۷

الف

ب

۲۸

۲۹

۳۰

الف

ب

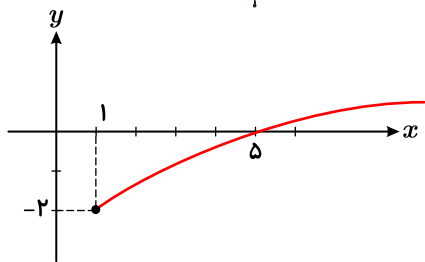
۳۱

الف

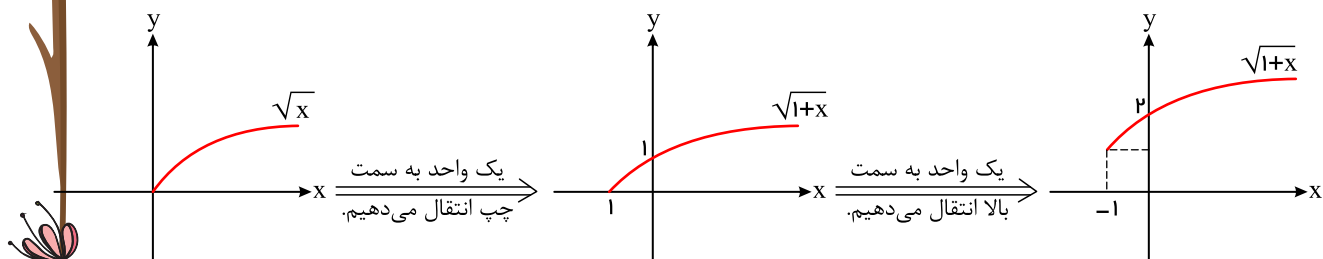
ب

۳۲

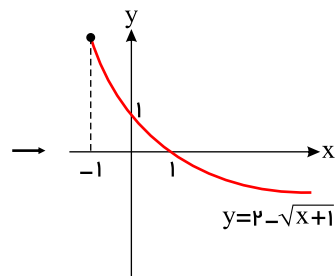
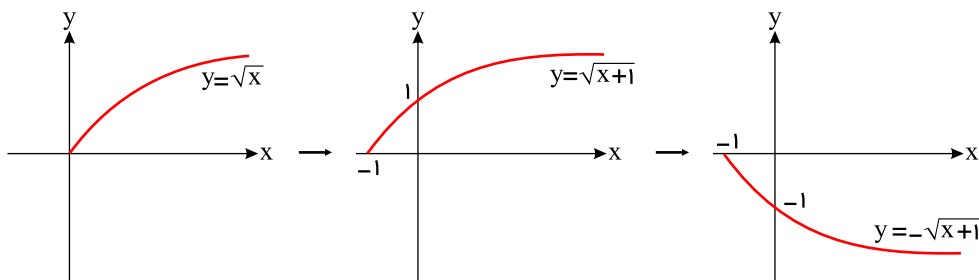
دامنه تابع $[1, +\infty)$



۳۳
دامنه تابع
 $[-1, +\infty)$



۳۴



$$D_f = [-1, +\infty)$$

$$D_f = [3, +\infty) \quad R_f = (-\infty, 1]$$

۳۵



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۴
یازدهم

سال یازدهم
تجربی

فهرست

درس اول : واحد های اندازه گیری زاویه

۱ واحد های اندازه گیری زاویه و محاسبه ی طول کمان

درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت های مثلثاتی

۱ فرمول های مقدماتی مثلثات

۲ محاسبه ی نسبت های مثلثاتی زوایای ترکیبی

درس سوم : توابع مثلثاتی

۳ رسم توابع مثلثاتی و دوره ی تناوب



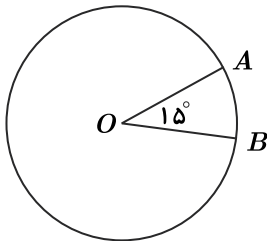
درس اول : واحد های اندازه گیری

واحد های اندازه گیری زاویه و محاسبه ی طول کمان

۱ جاهای خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.

الف انتهای کمان زاویه ۶ رادیان در ربع دایره مثلثاتی قرار دارد.

۲ دوندهای مطابق شکل، روی مسیر دایره ای از نقطه A به نقطه B می رسد. اگر شعاع دایره برابر ۹ متر باشد آنگاه طول کمان AB چند متر است؟ ($\widehat{AOB} = 15^\circ$)



۳ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف مکمل زاویه 25° - برابر می باشد.

۴ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف طول کمان روبه رو به زاویه 210° در دایره ای به شعاع ۶ برابر با است.

۵ اگر دو زاویه از مثلثی $\frac{\pi}{5}$ رادیان و $\frac{2\pi}{5}$ رادیان باشد، نوع مثلث را مشخص کنید.

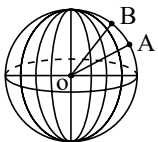
۶ اگر در دایره ای به شعاع ۳ متر، کمانی به طول 7.85 متر روبرو به زاویه مرکزی α باشد، اندازه ی زاویه ی α چند درجه و چند رادیان است؟

۷ مجموع دو زاویه 135° و تفاضل آنها $\frac{\pi}{13}$ رادیان است. هر دو زاویه را برحسب درجه و رادیان بدست آورید.

۸ اگر طول کمان دایره ای به زاویه مرکزی $\frac{5\pi}{12}$ رادیان برابر $\frac{25\pi}{6}$ باشد، قطر دایره را بدست آورید.

۹ در فاصله ساعت ۱۰ تا ۳:۰۰ : ۱۰ عقربه های ساعت شمار، دقیقه شمار و ثانیه شمار چه زاوایی برحسب رادیان طی می کنند؟

۱۰ با توجه به شکل زیر، دو شهر A و B دارای طول جغرافیایی یکسان هستند. اگر عرض جغرافیایی شهر A برابر 39° و عرض جغرافیایی شهر B برابر 44° باشد، فاصله دو شهر را به دست آورید. ($\pi = 3$ شعاع زمین و $6400 km$)



درس دوم : روابط تکمیلی بین نسبت

های مثلثاتی

فرمول های مقدماتی مثلثات

۱۱ اگر $\tan \theta = 4$ باشد، مقدار $\frac{3 \sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$ را بدست آورید.





۱۲ اگر $\tan x = -\frac{1}{3}$ و $\cos x < 0$ باشد، مقدار $\sin x$ را به دست آورید.

۱۳ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف) $(\sin 60^\circ - \sin 45^\circ)(\cos 30^\circ + \cos 45^\circ)$

ب) $\frac{\cot^2 \frac{\pi}{3} - \cot^2 \frac{\pi}{6}}{\sin^2 \frac{5\pi}{12} + \cos^2 \frac{5\pi}{12}}$

پ) $\frac{\cot \frac{\pi}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{6}}$

ت) $(\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{6})(3\cos^2 \frac{\pi}{4} + 2\cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6})$

ث) $\frac{\sin^2(\frac{\pi}{3}) + \tan^2(\frac{\pi}{3})}{\sin^2(\frac{\pi}{4}) + \tan^2(\frac{\pi}{4})} - 3\sin^2 \frac{7\pi}{15} - 3\cos^2 \frac{7\pi}{15}$

محاسبه ی نسبت های مثلثاتی زوایای ترکیبی

۱۴ حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$A = \tan\left(\frac{8\pi}{3}\right) \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \sin(660^\circ) \cot(-300^\circ)$$

۱۵ حاصل عبارت $\sin 210^\circ + \tan 120^\circ + \cos \frac{3\pi}{4}$ را به دست آورید.

۱۶ حاصل عبارت $\sin 390^\circ + \tan 135^\circ + \cos \frac{23\pi}{4}$ را به دست آورید.

۱۷ حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید).

$$\cos(-390^\circ) + \tan(600^\circ) - \sin(330^\circ) =$$

۱۸ حاصل عبارت مقابل را بیابید:

$$A = \sin 120^\circ - \cos 150^\circ$$

۱۹ حاصل عبارت زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبه را بنویسید).

$$\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) =$$

۲۰ مقدار عبارت $\sin\left(\frac{-179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{-179\pi}{6}\right)$ را بدست آورید.

۲۱ اگر $\tan \theta = 2$ باشد، مقدار $\frac{\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)}$ را بدست آورید.

۲۲ اگر $\cos x = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ و انتهای کمان x در ناحیه ی سوم دایره ی مثلثاتی باشد، مقدار $\tan(\frac{3\pi}{2} - x)$ را بدست آورید.

۲۳ اگر $\tan 15^\circ = \frac{1}{28}$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ}$ را بدست آورید.



۲۴ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

الف)
$$\frac{3 \sin 15^\circ - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos 30^\circ}{\cot(-135^\circ) - \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6}}$$

ب)
$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{6} \times \tan \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{3}}{\cos^2(\frac{\pi}{4}) + \cot^2(\frac{\pi}{3})}$$

پ)
$$2 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 7 \sin(\pi - \alpha) - 3 \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

ت)
$$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) + \cot(\pi - \alpha) + 3 \cos(\pi + \alpha) + \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

ث)
$$\sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times \tan \frac{5\pi}{3}$$

ج)
$$\frac{\tan 12^\circ \cos 21^\circ - \sin 225^\circ \cos 315^\circ}{\cot 135^\circ \sin 33^\circ - \cos 24^\circ \tan 225^\circ}$$

چ)
$$3 \tan \frac{29\pi}{6} - \sin \frac{39\pi}{4} + \cos \frac{27\pi}{4} - \cot \frac{34\pi}{3}$$

ح)
$$5 \sin^2(\frac{\pi}{4}) + 2 \tan^2(\frac{\pi}{3}) + 3 \cos(\frac{\pi}{3}) - \cot^2(\frac{\pi}{6})$$

۲۵ ساده شده عبارت
$$\frac{\sin \frac{11\pi}{18} - \cos \frac{10\pi}{9}}{\sin 34^\circ - \cos 25^\circ - \sin 20^\circ + \cos 43^\circ}$$
 را به دست آورید.

۲۶ اگر $\frac{\sin(\frac{11\pi}{4} + \alpha) + 2 \cos(5\pi - \alpha)}{2 \cos(\frac{\pi}{4} + \alpha) - 3 \sin(17\pi + \alpha)} = \frac{1}{10}$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ را بدست آورید.



درس سوم : توابع مثلثاتی

رسم توابع مثلثاتی و دوره ی تناوب

۲۷ درستی و نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) نمودار تابع $f(x) = \cos(\frac{19\pi}{4} + x)$ بر نمودار تابع $g(x) = \sin x$ منطبق است.

۲۸

نمودار تابع $y = 1 - \sin x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۲۹ نمودار تابع $y = \cos x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

۳۰ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) حداکثر مقدار تابع کسینوس برابر است.

۳۱ نمودار تابع $y = \sin x + 1$ را در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم کنید.

۳۲ الف) نمودار تابع $y = 2 \sin x - 1$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید.

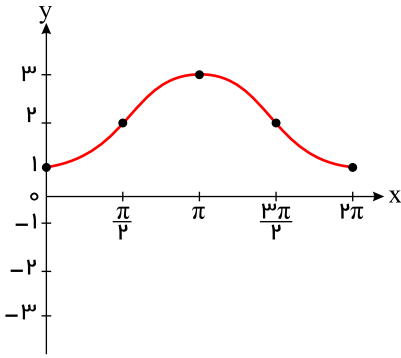
ب) برد تابع را به صورت بازه بنویسید.

۳۳ نمودار تابع $y = -\sin x + 1$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ رسم کنید و مقدار ماکسیمم و مینیمم نمودار را تعیین کنید.



۳۴ نمودار رسم شده، مربوط به کدام ضابطه دیگر را در بازه $[0, 2\pi]$ بنویسید.

الف: $y = 2 \cos x + 1$ ب: $y = 2 - \cos x$



۳۵ بُرد هر یک از توابع زیر را در دامنه‌ی داده شده بدست آورید.

الف) $y = 3 \sin x - 1$ $[0, 2\pi]$

ب) $f(x) = 2 - 4 \cos x$ $[0, 2\pi]$

پ) $h(x) = 3 \sin^2 x - 2$ $[0, 2\pi]$

ت) $y = 1 - 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ $[0, 2\pi]$



پاسخنامه تشریحی

الف ۱
چهارم

۲

۳
الف

۴
الف

۵

۶

۷

۸

۹

۱۰

۱۱

۱۲

$$15^\circ = \frac{\pi}{12} \quad L = 9 \times \frac{\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

$$205^\circ$$

$$7\pi$$

$$\hat{A} = \frac{2\pi}{5}, \hat{B} = \frac{\pi}{5} \rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{5} + \hat{C} = \pi$$

$$\rightarrow \frac{3\pi}{5} + \hat{C} = \pi \rightarrow \hat{C} = \frac{2\pi}{5}, \hat{A} = \hat{C} = \frac{2\pi}{5} \rightarrow \text{مثلث متساوی الساقین}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} = \frac{7.85}{3} = \frac{2.5 \times 3.14}{3} \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{6} \text{ رادیان یا } \alpha = 150^\circ$$

$$D = \frac{\pi}{12} \times 180^\circ \rightarrow D = \frac{180^\circ}{12} \rightarrow D = 15^\circ$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 135^\circ \\ \alpha - \beta = 15^\circ \end{cases} \rightarrow 2\alpha = 150^\circ \rightarrow \alpha = 75^\circ \rightarrow \alpha = \frac{5\pi}{4} \text{ رادیان}$$

$$\beta = 60^\circ \rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \text{ رادیان}$$

$$\alpha = \frac{l}{r} \rightarrow r = \frac{l}{\alpha} = \frac{\frac{25\pi}{6}}{\frac{5\pi}{12}} \rightarrow r = \frac{25 \times 12}{5 \times 6} \rightarrow \begin{matrix} r = 10 \\ d = 20 \end{matrix} \begin{matrix} \text{شعاع دایره} \\ \text{قطر دایره} \end{matrix}$$

۹ عقربه ساعت شمار با گذشت یک ساعت ۳۰ درجه ($\frac{\pi}{6}$ رادیان) می پیماید. پس با گذشت نیم ساعت ($\frac{\pi}{12}$) رادیان طی می کند. عقربه دقیقه شمار هر ۵ دقیقه ۳۰ درجه می پیماید. پس با گذشت نیم ساعت (۳۰ دقیقه)، $\pi = 6 \times \frac{\pi}{6}$ رادیان طی می کند. عقربه ثانیه شمار نیز هر دقیقه ۳۶۰ درجه (۲π رادیان) طی می کند. پس با گذشت ۳۰ دقیقه، $2\pi \times 30 = 60\pi$ رادیان طی می کند.

$$5^\circ = 44^\circ - 39^\circ = \text{اختلاف زاویه دو شهر}$$

$$\text{فاصله دو شهر} = \frac{\text{اختلاف زاویه دو شهر}}{360^\circ} \times 2\pi r = \left(\frac{5^\circ}{360^\circ}\right) \times 2 \times 3 \times 6400 = 533.3 \text{ km}$$

$$\frac{3\sin\theta - \cos\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \frac{\frac{3\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta}} = \frac{3\tan\theta - 1}{\tan\theta + 1} = \frac{3(4) - 1}{4 + 1} = \frac{11}{5}$$

$$\tan x = -\frac{1}{2}, \cos x < 0 \rightarrow 90^\circ < x < 180^\circ \text{ یا ناحیه دوم}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} \rightarrow \boxed{\cot x = -2}$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow 5 = \frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5}$$



$$\rightarrow \sin x = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}}$$

$$\text{الف)} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب)} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1} = \frac{3}{4} - \frac{2}{4} = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پ)} = \frac{1 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$\text{ت)} \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2} \times \frac{4}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{ث)} \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - 3\left(\sin^2 \frac{\pi}{15} + \cos^2 \frac{\pi}{15}\right) = \frac{\frac{3}{4} + \frac{2}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{4}} - 3(1) = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} - 3 = 1 - 3 = -2$$

$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}, \quad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(660^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cot(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$A = \frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - 1}{2}$$

$$\sin(180^\circ + 30^\circ) + \tan(180^\circ - 60^\circ) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} + (-\sqrt{3}) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-1 - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin 390^\circ + \tan 135^\circ + \cos \frac{3\pi}{4} &= \sin(360^\circ + 30^\circ) + \tan(180^\circ - 45^\circ) + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sin 30^\circ - \tan 45^\circ + \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2 \times 180^\circ + 30^\circ) + \tan(3 \times 180^\circ + 60^\circ) - \sin(2 \times 180^\circ - 30^\circ) &= \cos(30^\circ) + \tan(60^\circ) + \sin(30^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

$$A = \sin(90^\circ + 30^\circ) - \cos(180^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ - (-\cos 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\sin\left(8\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = 0$$

$$\begin{aligned} \sin\left(-\frac{179\pi}{6}\right) + \cos\left(-\frac{179\pi}{6}\right) &= -\sin\left(\frac{179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{179\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(30\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -(-\sin \frac{\pi}{6}) + \cos \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) - \cos(\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta) - \sin(3\pi + \theta)} &= \frac{\sin \theta - (-\cos \theta)}{\sin \theta - (-\sin \theta)} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{2 \sin \theta} \\ &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos \theta}}{\frac{2 \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{\tan \theta + 1}{2 \tan \theta} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2 \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{2}}{1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{15}}{10}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{10}} \rightarrow 1 + \tan^2 x = 10 \rightarrow \tan^2 x = 9$$

ناحية سوم

$$\boxed{\tan x = 3}, \quad \boxed{\cot x = \frac{1}{3}}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot x = \frac{1}{3}$$

$$\cos 285^\circ = \cos(270^\circ + 15^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 255^\circ = \sin(270^\circ - 15^\circ) = -\cos 15^\circ$$

$$\sin 525^\circ = \sin(360^\circ + 165^\circ) = \sin 15^\circ, \quad \sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\cos 285^\circ - \sin 255^\circ}{\sin 525^\circ - \sin 105^\circ} &= \frac{\sin 15^\circ - (-\cos 15^\circ)}{\sin 15^\circ - \cos 15^\circ} = \frac{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} + \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}}{\frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} - \frac{\cos 15^\circ}{\cos 15^\circ}} = \frac{\tan 15^\circ + 1}{\tan 15^\circ - 1} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3 \end{aligned}$$

$$\text{الف) } = \frac{3 \sin(180^\circ - 30^\circ) - \sqrt{3} \cos(\pi + \frac{\pi}{6}) + \cos(360^\circ - 60^\circ)}{-\cot(135^\circ) - \sqrt{3} \tan(\pi - \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{3 \sin 30^\circ - \sqrt{3}(-\cos \frac{\pi}{6}) + \cos(-60^\circ)}{-\cot(180^\circ - 45^\circ) - \sqrt{3}(-\tan \frac{\pi}{6})} = \frac{3 \sin 30^\circ + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \cos 60^\circ}{\cot 45^\circ + \sqrt{3} \tan \frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{3(\frac{1}{2}) + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}) + \frac{1}{2}}{1 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3})} = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{3}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\text{ب) } = \frac{3 \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) \times \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) - \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) \times \tan(2\pi - \frac{\pi}{6})}{\cos^2(2\pi - \frac{\pi}{6}) + \cot^2(\pi + \frac{\pi}{6})}$$

$$= \frac{3(-\sin \frac{\pi}{6}) \times \tan(\frac{\pi}{6}) - (-\cos \frac{\pi}{6})(-\tan \frac{\pi}{6})}{\cos^2 \frac{\pi}{6} + \cot^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{3(-\frac{1}{2})(1) - (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{3})}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}} = \frac{-2}{\frac{13}{12}} = -\frac{24}{13}$$

$$\text{پ) } 2(-\sin \alpha) + 3 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = -2 \sin \alpha + 3 \sin \alpha - 3 \sin \alpha = 2 \sin \alpha$$

$$\text{ت) } = -\cos \alpha - \cot \alpha + 3(-\cos \alpha) + \cot \alpha = -4 \cos \alpha$$

$$\text{ث) } = \sqrt{3} \cot(3\pi + \frac{\pi}{3}) + 2 \sin(3\pi + \frac{2\pi}{3}) + 2 \cos(3\pi - \frac{\pi}{3}) \times \tan(3\pi + \frac{2\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2 \sin(\pi - \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times \tan(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3} \cot \frac{\pi}{3} + 2(\sin \frac{\pi}{3}) + 2 \cos \frac{\pi}{3} \times (-\tan \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{3}) + 2(\frac{1}{2}) + 2(\frac{1}{2})(-\sqrt{3}) = 1 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 1$$

$$\text{ج) } \frac{\tan(180^\circ - 60^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) - \sin(180^\circ + 45^\circ) \cos(360^\circ - 45^\circ)}{\cot(180^\circ - 45^\circ) \sin(360^\circ - 30^\circ) - \cos(180^\circ + 60^\circ) \tan(180^\circ + 45^\circ)}$$

$$= \frac{-\tan 60^\circ (-\cos 30^\circ) - (-\sin 45^\circ) \cos 45^\circ}{-\cot 45^\circ (-\sin 30^\circ) - (-\cos 60^\circ) \tan 45^\circ} = \frac{(-\sqrt{3})(-\frac{\sqrt{3}}{2}) - (-\frac{\sqrt{2}}{2})(\frac{\sqrt{2}}{2})}{(-1)(-\frac{1}{2}) - (-\frac{1}{2})(1)}$$

$$= \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{ح) } = 3 \tan(3\pi + \frac{5\pi}{6}) - \sin(3\pi - \frac{\pi}{6}) + \cos(3\pi + \frac{2\pi}{3}) - \cot(3\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= 3 \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) - \sin(-\frac{\pi}{6}) + \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) - \cot(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= 3(-\tan \frac{\pi}{6}) + \sin \frac{\pi}{6} + (-\cos \frac{\pi}{6}) - \cot \frac{\pi}{6}$$

$$= 3(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{ز) } = 5 \sin^2(3\pi - \frac{\pi}{6}) + 2 \tan^2(\pi + \frac{\pi}{3}) + 3 \cos(3\pi + \frac{2\pi}{3}) - \cot^2(\pi + \frac{\pi}{6})$$

$$= 5(-\sin \frac{\pi}{6})^2 + 2(\tan \frac{\pi}{3})^2 + 3 \cos(\pi - \frac{\pi}{6}) - (\cot \frac{\pi}{6})^2$$

$$= 5(-\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + 2(\sqrt{3})^2 + 3(-\frac{1}{2}) - (\sqrt{3})^2$$

$$= 5(\frac{1}{2}) + 2(3) - \frac{3}{2} - 3 = \frac{5}{2} + 6 - \frac{3}{2} - 3 = 4$$



۲۵ اگر زاویه θ با مضارب زوج π (یعنی $2k\pi$) یا فرد π (یعنی $(2k+1)\pi$) جمع یا کم شود، نسبت‌های مثلثاتی این زوایا تغییر نمی‌کند؛ فقط ممکن است تغییر علامت داشته باشیم، که آن را با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان در آن قرار دارد محاسبه می‌کنیم.

$$\sin(k\pi + \theta) = (-1)^k \sin \theta \quad \text{و} \quad \cos(k\pi + \theta) = (-1)^k \cos \theta$$

اگر زاویه θ با مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ یعنی $\frac{\pi}{2}$ (یعنی $(2k+1)\frac{\pi}{2}$) جمع یا کم شود، نسبت‌های مثلثاتی این زوایا تغییر نسبت می‌دهند؛ به طوری که $\tan \leftrightarrow \cot$ و $\sin \leftrightarrow \cos$ و ممکن است تغییر علامت نیز داشته باشیم که آن را با توجه به ناحیه‌ای که انتهای کمان در آن قرار دارد محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{11\pi}{18} - \cos \frac{10\pi}{9}}{\sin 340^\circ - \cos 250^\circ - \sin 200^\circ + \cos 430^\circ} &= \frac{\sin 110^\circ - \cos 200^\circ}{\sin 340^\circ - \cos 250^\circ - \sin 200^\circ + \cos 430^\circ} \\ &= \frac{\sin(90^\circ + 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\sin(360^\circ - 20^\circ) - \cos(270^\circ - 20^\circ) - \sin(180^\circ + 20^\circ) + \cos(450^\circ - 20^\circ)} \\ &= \frac{\cos 20^\circ + \cos 20^\circ}{-\sin 20^\circ + \sin 20^\circ + \sin 20^\circ + \sin 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \cot 20^\circ \end{aligned}$$

(صفحه ۸۵ تا ۸۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \frac{11\pi}{18} - \cos \frac{10\pi}{9}}{\sin 340^\circ - \cos 250^\circ - \sin 200^\circ + \cos 430^\circ} &= \frac{\sin 110^\circ - \cos 200^\circ}{\sin 340^\circ - \cos 250^\circ - \sin 200^\circ + \cos 430^\circ} \quad (\text{نمره ۲۵}) \\ &= \frac{\sin(90^\circ + 20^\circ) - \cos(180^\circ + 20^\circ)}{\sin(360^\circ - 20^\circ) - \cos(270^\circ - 20^\circ) - \sin(180^\circ + 20^\circ) + \cos(450^\circ - 20^\circ)} \\ &= \frac{\cos 20^\circ + \cos 20^\circ}{\underbrace{-\sin 20^\circ + \sin 20^\circ}_{(\text{نمره ۲۵})} + \underbrace{\sin 20^\circ + \sin 20^\circ}_{(\text{نمره ۲۵})}} \\ &= \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \cot 20^\circ \quad (\text{نمره ۲۵}) \end{aligned}$$

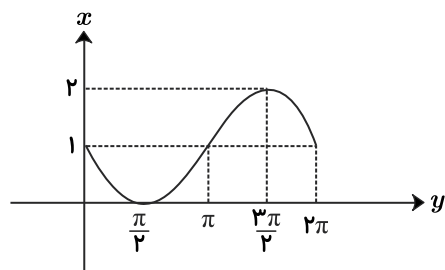
۲۶

$$\begin{aligned} \frac{\sin(4\pi + \frac{\pi}{6} + \alpha) + 2 \cos(4\pi + \pi - \alpha)}{2 \cos(4\pi + \frac{\pi}{6} + \alpha) - 3 \sin(4\pi + \pi + \alpha)} &= \frac{1}{10} \\ \Rightarrow \frac{-\cos \alpha + 2(-\cos \alpha)}{2 \sin \alpha - 3(-\sin \alpha)} &= \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{-3 \cos \alpha}{5 \sin \alpha} = \frac{1}{10} \Rightarrow 5 \sin \alpha = -3 \cos \alpha \\ \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{-3}{5} \Rightarrow \boxed{\tan \alpha = -\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

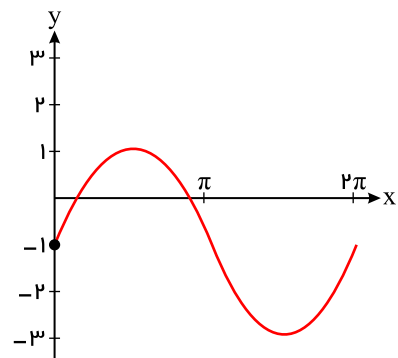
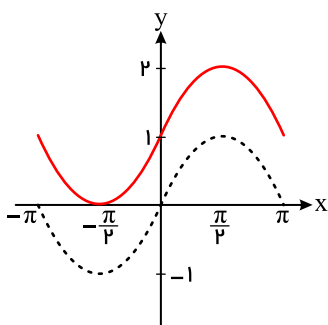
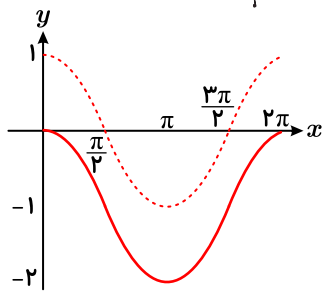
۲۷

الف درست

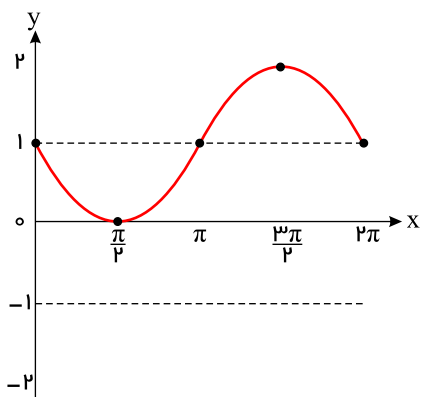
۲۸



۲۹



ب) $R = [-3, 1]$



مقدار مینیمم = 0

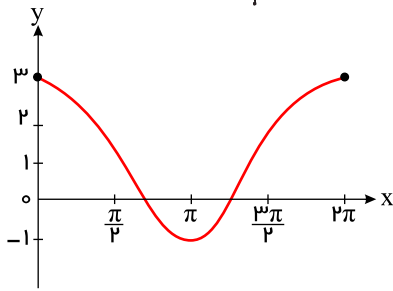
مقدار ماکسیمم = 2

۳۰
الف
یک
۳۱

۳۲ الف

۳۳

۳۴



۳۵

الف) $-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \xrightarrow{-1} -4 \leq 3 \sin x - 1 \leq 2$

$\rightarrow -4 \leq y \leq 2 \rightarrow R_y = [-4, 2]$

ب) $-1 \leq \cos x \leq 1 \xrightarrow{\times (-4)} 4 \geq -4 \cos x \geq -4 \xrightarrow{+2} 6 \geq 2 - 4 \cos x \geq -2$

$\rightarrow 6 \geq y \geq -2 \rightarrow R_f = [-2, 6]$

پ) $-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3 \sin^2 x \leq 3$

$\xrightarrow{-2} -2 \leq 3 \sin^2 x - 2 \leq 1 \rightarrow -2 \leq y \leq 1 \rightarrow R_h = [-2, 1]$

ت) $-1 \leq \cos(x - \frac{\pi}{3}) \leq 1 \xrightarrow{\times (-2)} 2 \geq -2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \geq -2 \xrightarrow{+1}$

$3 \geq 1 - 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \geq -1 \rightarrow 3 \geq y \geq -1 \rightarrow R_g = [-1, 3]$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۵ یازدهم

سال یازدهم
تجربی

فهرست

درس اول : تابع نمایی و ویژگی های آن

- ۱..... تعریف و نمودار تابع نمایی
- ۱..... معادلات و نامعادلات نمایی

درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی های آن

- ۱..... تعریف، نمودار و دامنه
- ۲..... قضایای لگاریتم
- ۲..... معادلات و نامعادلات لگاریتمی
- ۲..... محاسبه تقریبی مقدار لگاریتم

درس سوم : نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

- ۳..... رسم نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی
- ۳..... کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی



درس اول : تابع نمایی و ویژگی های

آن

تعریف و نمودار تابع نمایی

۱ جاهای خالی را با عبارت های مناسب کامل کنید.

الف برد تابع با ضابطه $y = 3^x$ بازه است.

۲ جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف دامنه تابع $f(x) = 2^x - 3$ برابر با و برد آن برابر با است.

۳ نمودار تابع $f(x) = 2^x - 1$ را رسم کنید. دامنه و برد آن را به صورت بازه بنویسید.

۴ اگر $f(x) = 3^x$ باشد مقدار $f(x+2) - 2f(x+1)$ را بدست آورید.

معادلات و نامعادلات نمایی

۵ معادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{2x-1} = 32^{1-x}$$

ب

$$\log_3(x^2 - 1) = 1 + \log_3(x + 3)$$

۶ معادله نمایی $\frac{1}{64} = 4^{2x+4}$ را حل کنید.

۷ معادله نمایی $\frac{1}{27} = 3^{2x-1}$ را حل کنید.



درس دوم : تابع لگاریتمی و ویژگی

های آن

تعریف، نمودار و دامنه

۸ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف اگر a عدد حقیقی مثبت و مخالف یک باشد. آن گاه $\log_a 1 = 0$ است.

۹ نمودار تابع $y = \log x$ را رسم کنید.

۱۰ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a x$ از نقطه $(8, 3)$ عبور کند، مقدار a را به دست آورید.

۱۱ آیا دو تابع $f(x) = \log x^2$ و $g(x) = 2 \log x$ مساوی اند؟ چرا؟

۱۲ نمودار تابع $f(x) = -\log_2(x + 2)$ را رسم کنید. دامنه آن را به صورت بازه بنویسید.

۱۳ نمودار تابع $y = -\log_3 x^{-3}$ را رسم کنید.

۱۴ لگاریتم 125 در چه مبنایی برابر $\frac{3}{4}$ است؟



۱۵ حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

الف) $\log 35 + 2 \log 2\sqrt{7} - \log 200 - 2 \log 7$

ب) $\log_5 200 - \log_5 40$

پ) $\log_6 12\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{12}$

ت) $7^{(2\log_7 3 + 3\log_7 2)}$

ث) $\sqrt{10}^{(\log 32 + \log 8)}$

ج) $8^{(\log_2 \sqrt[3]{20} - \log_2 3)}$

چ) $\log 20 + 6 \log \sqrt[3]{5} - \log_6 \sqrt[3]{32}$

۱۶ اگر $\log_e \sqrt[3]{e^2} = A$ باشد، حاصل $\log_{\sqrt{e}} 32$ را بدست آورید.

۱۷ اگر $\log 2 + \log 3 = a$, $\log 3 + \log 7 = b$, $\log 2 + \log 7 = c$ باشد، $\log 42$ چقدر است؟

معادلات و نامعادلات لگاریتمی

۱۸ معادلهٔ مقابل را حل کنید.

$$\log(x + 2) = 3 \log 2 - \log(x - 5)$$

۱۹ معادلات نمایی و لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف

$$3^{x-2} = \frac{1}{27^x}$$

ب

$$\log(x + 3) + \log x = 1$$

۲۰ معادلهٔ (الف) را حل کنید و حاصل عبارت (ب) را به دست آورید.

الف) $\log_8(x + 6) + \log_8(x + 2) = 1$

ب) $\log_{12} 4 + 2 \log_{12} 6 =$

۲۱ از معادلهٔ لگاریتمی $\log_3(2x^2 + 1) - \log_3(x + 2) = 1$ مقدار $\log_8(2x - 1)$ را بیابید.

۲۲ اگر $\log(x^2 - x + 1) + \log(x + 1) = 1$ باشد، مقدار $\log_3 x$ را بدست آورید.

محاسبه تقریبی مقدار لگاریتم

۲۳ اگر $\log 2 = m$ و $\log 3 = n$ باشند آنگاه مقدار $\log \frac{\sqrt{27}}{16}$ را بر حسب m و n به دست آورید.

۲۴ اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.5$ باشند، مقدار تقریبی $\log \sqrt[3]{12}$ را به دست آورید.

۲۵ اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.5$ باشند، مقدار تقریبی $\log \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ را به دست آورید.

۲۶ اگر $\log 2 \approx 0.3$ باشد، مقدار تقریبی $\log 400$ را به دست آورید.

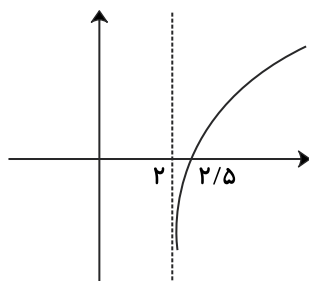
۲۷ اگر $\log 2 \approx 0.3$ و $\log 3 \approx 0.48$ آنگاه حاصل $\log 12$ را بیابید.



درس سوم : نمودارها و کاربردهای

رسم نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

۲۸ در دستگاه مختصات مقابل نمودار تابع با ضابطه $y = a + \log_p(x + b)$ رسم شده است. مقادیر a و b را به دست آورید.



۲۹ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف نقطه $(\frac{1}{p}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطه $y = 5^x$ قرار دارد.

۳۰ اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \log_a^x - 1$ از نقطه $(9, 1)$ عبور کند:

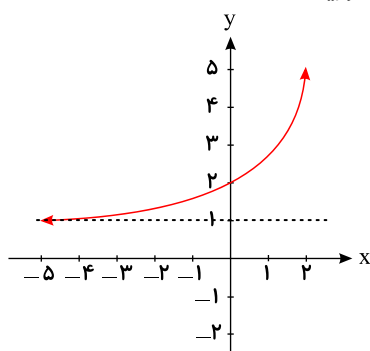
الف مقدار a را به دست آورید.

ب نمودار تابع را رسم کنید.

۳۱ نمودار تابعهای $y = 2^x + 1$, $y = 2^{(x+3)}$, $y = 2^{(x-2)} - 2$, $y = 3 - 2^x$ و $y = 2^{-x} - 4$ را رسم کنید و دامنه و برد هریک را مشخص کنید.

۳۲ نمودار تابع $y = -\log_3(x - 2)$ را رسم کنید. (مراحل انتقال را رسم کنید)

۳۳ در دستگاه مختصات روبرو نمودار تابع با ضابطه $y = a + 2^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را بدست آورید.



کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

۳۴ PH یک محلول از رابطه $PH = -\log[H^+]$ بدست می‌آید که در آن $[H^+]$ غلظت یون هیدرونیوم (H^+) بر حسب مول بر لیتر است. اگر $[H^+] = 10^{-3} \frac{mol}{L}$ باشد، PH محلول چقدر است؟

۳۵ بزرگی زمین‌لرزه از رابطه $\log E = 11.8 + 1.5M$ بدست می‌آید که در آن M بزرگی زمین‌لرزه بر حسب ریشتر و E انرژی آزاد شده بر حسب ارگ است. مقدار انرژی آزاد شده در هریک از زلزله‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) زلزله روز ۲۷ فوریه ۲۰۱۰ به شدت ۸٫۸ ریشتر در مائول شیلی

ب) زلزله روز ۲۶ دسامبر ۲۰۰۴ به شدت ۹٫۱ ریشتر در سوماترای اندونزی.

پ) زلزله روز ۲۲ می ۱۹۶۰ به شدت ۹٫۶ ریشتر در والدیویا شیلی. (بزرگ‌ترین زلزله ثبت شده در تاریخ)



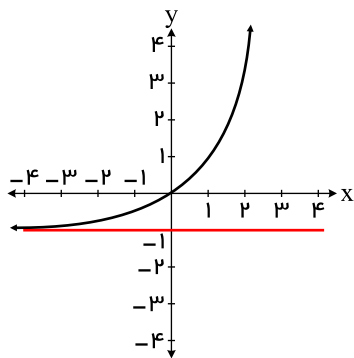
پاسخنامه تشریحی

۱
الف
(0, +∞)

۲
الف

۳

دامنه: $(-\infty, +\infty)$ برد: $(-3, +\infty)$



$D_f = (-\infty, +\infty)$ $R_f = (-1, +\infty)$

$$f(x+2) = 3^{x+2} = 3^2 \times 3^x = 9 \times 3^x, \quad f(x+1) = 3^{x+1} = 3^1 \times 3^x = 3 \times 3^x$$

$$\rightarrow f(x+2) - 2f(x+1) = 9 \times 3^x - 2(3 \times 3^x) = 9 \times 3^x - 6 \times 3^x = 3 \times 3^x$$

$$\rightarrow f(x+2) - 2f(x+1) = 3f(x)$$

۴

۵
الف

$$2^{-8x+4} = 2^{5-5x} \Rightarrow -8x+4 = 5-5x \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$$

ب
راه حل اول:

$$\log_3(x^2 - 1) - \log_3(x + 3) = 1 \Rightarrow \log_3\left(\frac{x^2 - 1}{x + 3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x + 3} = 3$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

راه حل دوم:

$$\log_3(x^2 - 1) = \log_3(3) + \log_3(x + 3) \Rightarrow \log_3(x^2 - 1) = \log_3(3x + 9)$$

$$\Rightarrow x^2 - 1 = 3x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$2^{4x+8} = 2^{-6} \Rightarrow 4x+8 = -6 \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$$

۶

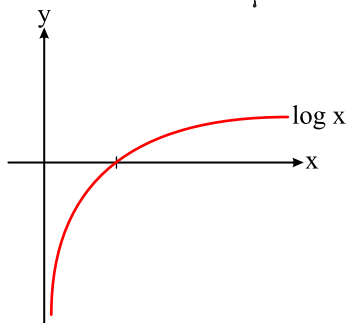
۷

$$3^{2x-1} = \frac{1}{27} \rightarrow 3^{2x-1} = 3^{-3} \Rightarrow 2x-1 = -3 \Rightarrow x = -1$$

۸

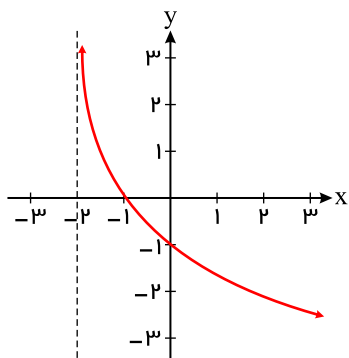
الف
درست

۹

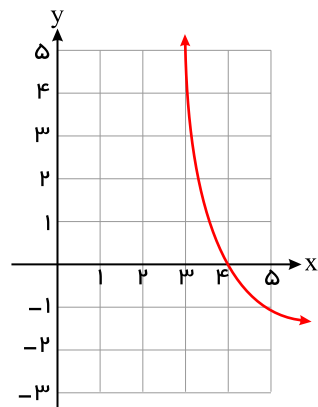


$$3 = \log_a 8 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} \quad D_g = (0, +\infty)$$



$$D_f = (-2, +\infty)$$



انتقال ۳ واحد به راست تابع $y = \log_2 x$ و سپس قرینه نسبت به محور x ها

$$\log_x 125 = \frac{3}{5} \rightarrow 125 = x^{\frac{3}{5}} \rightarrow 5^3 = (x^{\frac{1}{5}})^3 \rightarrow 5 = x^{\frac{1}{5}} \rightarrow 5 = \sqrt[5]{x} \rightarrow \boxed{x = 25}$$

$$\begin{aligned} \text{الف) } \log 35 + 2 \log 2\sqrt{5} - \log 200 - 2 \log 5 &= \log 35 + \log (2\sqrt{5})^2 - \log 200 - \log 5^2 \\ &= \log 35 + \log 20 - \log 200 - \log 25 = \log \frac{35 \times 20}{200 \times 25} = \log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1 \log 10 = -1 \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \log_5 200 - \log_5 40 = \log_5 \left(\frac{200}{40} \right) = \log_5 5 = 1$$

$$\begin{aligned} \text{پ) } \log_6 12\sqrt{3} + \log_6 3\sqrt{12} &= \log_6 (12\sqrt{3} \times 3\sqrt{12}) = \log_6 (36 \times \sqrt{36}) \\ &= \log_6 (36 \times 6) = \log_6 6^3 = 3 \log_6 6 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{ت) } \sqrt{(\log_2 3 + 3 \log_2 2)} = \sqrt{(\log_2 3 + \log_2 2^3)} = \sqrt{(\log_2 9 + \log_2 8)} = \sqrt{(\log_2 72)} = \sqrt{2^3 \log_2 9} = 2 \sqrt{3} \log_2 3 = 2 \sqrt{3}$$

$$\text{ث) } \sqrt{10^{-(\log 32 + \log 8)}} = (10^{\frac{1}{2}})^{-(\log 256)} = 10^{\frac{1}{2} \log 256} = 10^{\log \sqrt{256}} = 10^{\log 16} = 16$$



$$ج) \lambda^{(\log_r \sqrt[r]{r^o - \log_r r})} = (r^3)^{(\log_r \frac{\sqrt[r]{r^o}}{r})} = r^{3 \log_r \frac{\sqrt[r]{r^o}}{r}} = r^{\log_r (\frac{\sqrt[r]{r^o}}{r})^3} = r^{\log_r \frac{r^o}{r^3}} = \frac{r^o}{r^3}$$

$$ج) \log r^o + 6 \log \sqrt[5]{5} - \log_r \sqrt[5]{3r} = \log r^o + \log (\sqrt[5]{5})^6 - \log_r r^{\frac{1}{5}} \\ = \log r^o + \log 5 - (\frac{6}{5}) \log_r r = \log 100 - \frac{6}{5} \log_r r = r - \frac{6}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\log_r \sqrt[5]{e^r} = A \rightarrow \sqrt[5]{e^r} = r^A \rightarrow e^{\frac{r}{5}} = r^A \rightarrow (e^{\frac{r}{5}})^{\frac{5}{r}} = (r^A)^{\frac{5}{r}}$$

$$\rightarrow \boxed{e = r^{\frac{5A}{r}}} \rightarrow \sqrt{e} = (r^{\frac{5A}{r}})^{\frac{1}{2}} \rightarrow \sqrt{e} = r^{\frac{5A}{2r}}$$

$$\rightarrow \log_{\sqrt{e}} r^{\frac{5A}{2r}} = \log_{r^{\frac{5A}{2r}}} r^{\frac{5A}{2r}} = \frac{\frac{5A}{2r}}{\frac{5A}{2r}} \log_r r = \frac{r}{A} \log_r r = \frac{r}{A} \rightarrow \boxed{\log_{\sqrt{e}} r^{\frac{5A}{2r}} = \frac{r}{A}}$$

$$a + b + c = r(\log r + \log r + \log r) \rightarrow a + b + c = r \log(r \times r \times r)$$

$$\rightarrow a + b + c = r \log r^3 \rightarrow \boxed{\log r^3 = \frac{a+b+c}{r}}$$

$$\log(x + r) = \log \frac{A}{x - 5} \rightarrow x + r = \frac{A}{x - 5} \rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$$

$x_1 = 6, x_2 = -3$ غير قابل قبول

$$r^{x-r} = \frac{1}{(r^r)^x} = r^{-rx} \rightarrow x - r = -rx \rightarrow x = \frac{1}{r}$$

$$\log(x + r)x = 1 \rightarrow (x^r + rx) = 10 \rightarrow x^r + rx - 10 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -5 & \text{غ ق} \\ x = 2 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\log_8(x + 6)(x + r) = 1 \rightarrow (x + 6)(x + r) = 8 \rightarrow x^2 + 8x + 7 = 0$$

$x_1 = -1, x_2 = -7$ غير قابل قبول

$$\log_{1r} r + \log_{1r} r^6 = \log_{1r} 144 = r$$

$$\log_r(r^r + 1) - \log_r(x + r) = 1 \rightarrow \log_r \frac{r^r + 1}{x + r} = \log_r r \rightarrow \frac{r^r + 1}{x + r} = r$$

$$\rightarrow r^r + 1 = rx + r \rightarrow r^r - rx - 5 = 0 \rightarrow (x + 1)(rx - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \rightarrow \boxed{x = -1} \\ rx - 5 = 0 \rightarrow \boxed{x = \frac{5}{r}} \end{cases}$$

$$x = -1 \rightarrow \log_8(rx - 1) = \log_8(r(-1) - 1) = \log_8(-r) \quad \text{غ}$$

$$x = \frac{5}{r} \rightarrow \log_8(rx - 1) = \log_8(r(\frac{5}{r}) - 1) = \log_8 4 = \log_{rr} r^2 = \frac{r}{r} \log_r r \rightarrow \boxed{\log_8(rx - 1) = \frac{r}{r}}$$

$$\log(x^r - x + 1) + \log(x + 1) = 1 \rightarrow \log((x^r - x + 1)(x + 1)) = \log 10$$

$$\rightarrow \log(x^r + 1) = \log 10 \rightarrow x^r + 1 = 10 \rightarrow x^r = 9 \rightarrow \boxed{x = \sqrt[5]{9}}$$

$$\rightarrow \log_r x = \log_r \sqrt[5]{9} = \log_r (r^{\frac{r}{5}})^{\frac{1}{5}} = \log_r r^{\frac{r}{25}} = \frac{r}{25} \log_r r = \frac{r}{25} \rightarrow \boxed{\log_r x = \frac{r}{25}}$$

$$\log \frac{\sqrt{27}}{16} = \log(\sqrt{27}) - \log(16) = \log(r^{\frac{3}{2}}) - \log(r^4) = \frac{3}{2}n - 4m$$

$$\frac{r}{3} \log 12 = \frac{r}{3} (\log 3 + \log 4) = \frac{r}{3} (0.5 + 2 \log 2) = \frac{11}{15}$$

١٦

١٧

١٨

١٩

الف

ب

٢٠

٢١

٢٢

٢٣

٢٤

۲۵

$$\frac{1}{3} \log \frac{3}{4} = \frac{1}{3} (\log 3 - \log 4) = \frac{1}{3} (\log 3 - 2 \log 2) = -\frac{1}{30}$$

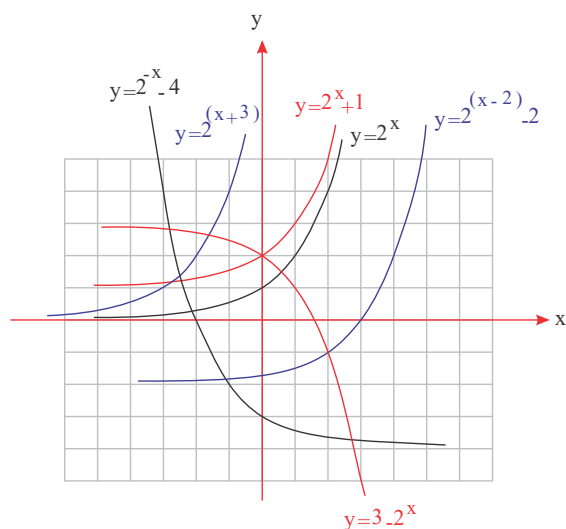
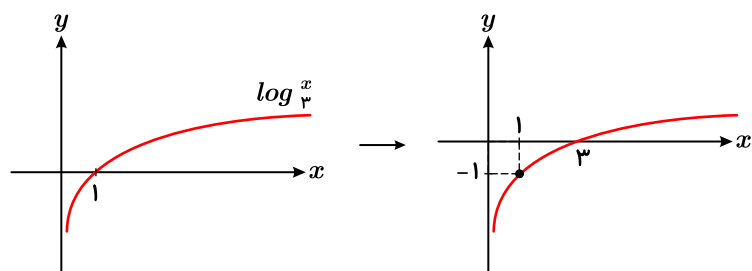
$$\log 400 = 2 \log 2 + \log 100 = 0,6 + 2 = 2,6$$

$$\log 2^2 \times 3 = 2 \log 2 + \log 3 = 2 \times 0,3 + 0,48 = 1,08$$

$$b = -2$$

$$(2,5,0) \in f \Rightarrow 0 = a + \log_2(2,5 - 2) \Rightarrow a + \log_2(2^{-1}) = 0 \Rightarrow a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$1 = \log_a^1 - 1 \Rightarrow a^1 = 9 \Rightarrow a = 3$$



الف) $y = 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$

ب) $y = 2^x + 1 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (1, +\infty)$

پ) $y = 2^{(x+2)} \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (0, +\infty)$

ت) $y = 2^{(x-2)} - 2 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-2, +\infty)$

ث) $y = 3 - 2^x \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-\infty, 3)$

ج) $y = 2^{-x} - 2 \rightarrow D = \mathbb{R}, R = (-2, +\infty)$

۲۶

۲۷

۲۸

۲۹

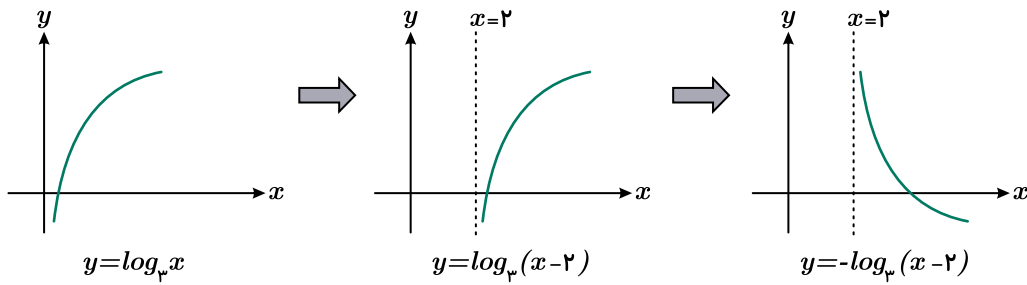
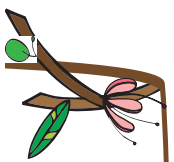
الف درست

۳۰

الف

ب

۳۱



۳۲

$$\begin{cases} (0, 2) \Rightarrow f(0) = 2 \Rightarrow 2 = a + 2^{-b} \Rightarrow 2 = a + \frac{1}{2^b} \\ (1, 3) \Rightarrow f(1) = 3 \Rightarrow 3 = a + 2^{1-b} \Rightarrow 3 = a + \frac{2}{2^b} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 = -a - \frac{1}{2^b} + \\ 3 = a + \frac{2}{2^b} \end{cases} \Rightarrow \frac{-2 = -a - \frac{1}{2^b} + 3 = a + \frac{2}{2^b}}{1 = \frac{1}{2^b} \Rightarrow 2^b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}} \Rightarrow 2 = a + \frac{1}{2^0} \Rightarrow 2 = a + 1 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

۳۳

$$PH = -\log[H^+] = -\log(10^{-3}) = -(-3) \Rightarrow \boxed{PH = 3}$$

۳۴

۳۵ الف) زلزله روز ۲۷ فوریه ۲۰۱۰ به شدت ۸٫۸ ریشتر در مائول شیلی.

$$M = ۸٫۸ \rightarrow \log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵(۸٫۸) \rightarrow \log E = ۲۵ \rightarrow \boxed{E = 10^{25} \text{ Erg}}$$

ب) زلزله روز ۲۶ دسامبر ۲۰۰۴ به شدت ۹٫۱ ریشتر در سوماترای اندونزی.

$$M = ۹٫۱ \rightarrow \log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵(۹٫۱) \rightarrow \log E = ۲۵٫۴۵ \rightarrow \boxed{E = 10^{25٫۴۵} \text{ Erg}}$$

پ) زلزله روز ۲۲ می ۱۹۶۰ به شدت ۹٫۶ ریشتر در والدیویا شیلی. (بزرگ‌ترین زلزله ثبت شده در تاریخ)

$$M = ۹٫۶ \rightarrow \log E = ۱۱٫۸ + ۱٫۵(۹٫۶) \rightarrow \log E = ۲۶٫۲ \rightarrow \boxed{E = 10^{2۶٫۲} \text{ Erg}}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۶
یازدهم

سال یازدهم
تجربی

فهرست

درس اول : فرآیندهای حدی

- ۱..... بررسی حد روی نمودارها و اشکال هندسی
- ۳..... بررسی حد در توابع چند ضابطه ای
- ۳..... محاسبهٔ حد از روی ضابطه

درس دوم : محاسبه ی حد توابع

- ۳..... قضایای حد
- ۵..... رفع ابهام از صفر صفرم

درس سوم : پیوستگی

- ۶..... پیوستگی در نقطه
- ۷..... پیوستگی در بازه

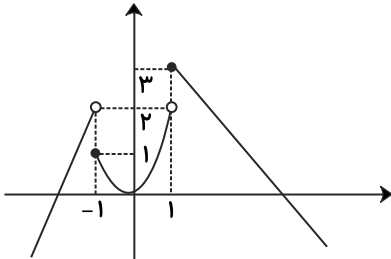


درس اول : فرآیندهای حدی



بررسی حد روی نمودارها و اشکال هندسی

۱ نمودار تابع f به صورت مقابل داده شده است. مطلوب است:

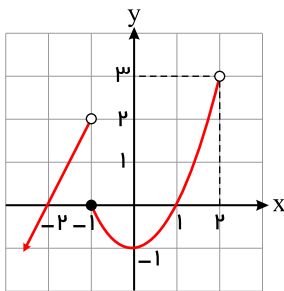


الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ب) آیا تابع f در بازه $[-1, 1]$ پیوسته است؟

۲ با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.

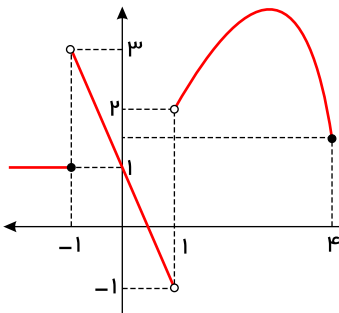


الف) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

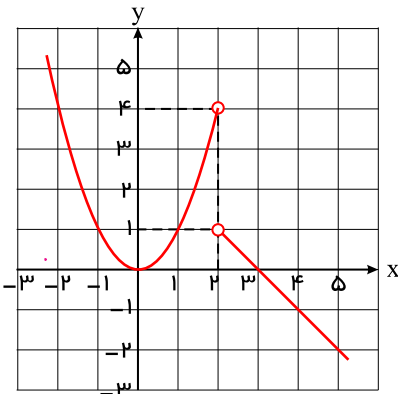
ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

۳ با توجه به نمودار حاصل را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) + 3f(-1) =$$

۴ با استفاده از نمودار مقابل، مقادیر خواسته شده را در صورت وجود به دست آورید.





الف

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

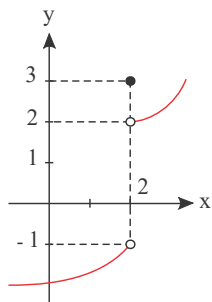
ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

پ

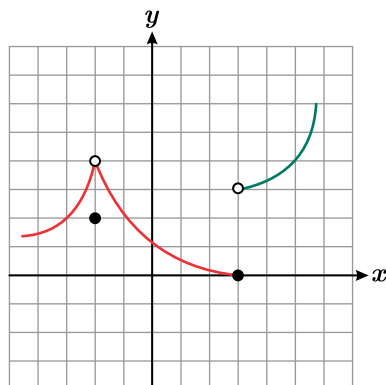
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

۵ شکل زیر نمودار تابع f است. حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) + f(2)$ را محاسبه کنید.



۶ نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}x & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$ را رسم کنید و به کمک آن وجود حد تابع را در $x = 1$ بررسی کنید.

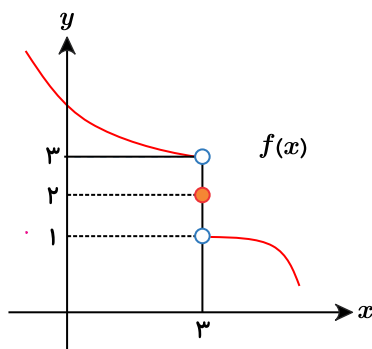
۷ با توجه به نمودار تابع f حاصل حدهای زیر را بیابید.



الف) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

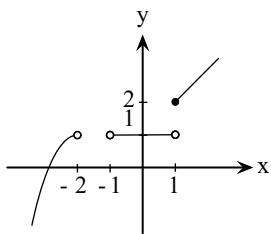
ب) $\lim_{x \rightarrow 2^-} (x + f(x))$

۸ با توجه به نمودار تابع $f(x)$ ، مقدار عبارت $\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] + f(3) - \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ را به دست آورید. ([]، نماد جزء صحیح است.)



۹ با توجه به نمودار داده شده، درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.





الف) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ برابر ۲ است.

ب) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ برابر ۱ است.

پ) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ برابر ۲ است.

ت) حاصل حد $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ برابر ۱ است.

۱۰) برای تابع f که نمودار آن داده شده است، کدامیک درست و کدامیک نادرست است؟

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

ب) $f(1) = 2$

پ) $f(2) = 1$

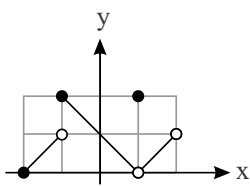
ت) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

چ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وجود ندارد.

ح) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وجود ندارد.



بررسی حد در توابع چند ضابطه ای

۱۱) در تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Z} \\ -1 & , x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$ حاصل عبارت $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x)$ را بدست آورید.

۱۲) اگر $f(x) = \sqrt{x-5}$ باشد، $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ را محاسبه کنید.

۱۳) اگر $f(x) = \begin{cases} \frac{ax+2}{x+1} & x > 1 \\ 2x+a & x < 1 \end{cases}$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ باشد، مقدار a را به دست آورید.

محاسبه حد از روی ضابطه

۱۴) در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) حاصل حد $\sqrt{x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ برابر است.

۱۵) جاهای خالی را با عبارات مناسب کامل کنید.

الف) حد تابع $f(x) = \frac{x+4}{[x]+3}$ وقتی $x \rightarrow -1^-$ برابر است.



درس دوم : محاسبه ی حد توابع



قضایای حد

۱۶) حدود زیر را در صورت وجود بیابید. ([] نماد جزء صحیح است)





الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{8 - x^3}{x^2 + 3x - 10}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|2 - x|}{[x] + 1}$$

۱۷. حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 3}{[x]}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tan x + \cot x)$$

۱۸. حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 + 1}{[x]}$$

پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sin x + \cos x)$$

۱۹. حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x} =$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 3}{[x] + 2} =$$

۲۰. مقدار حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow 1402^-} [x]$$



پ

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x$$

۲۱ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos^3 x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (3 \sin x - 1)$

ج) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x - 2}{3 + 5 \cos x}$

چ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 4 \sin x \cdot \cos x$

۲۲ در صورت وجود حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ([] نشان دهنده جزء صحیح است).

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{[x] + 1}{\cos(-\pi x)}$$

رفع ابهام از صفر صفرم

۲۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف

مقدار $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$ وقتی $x \rightarrow 0$ برابر صفر است.

۲۴ حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x}$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x}$

ت) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$





۲۵ حاصل حدهای زیر را بدست آورید.

الف) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2}$

ت) $\lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9}$

ث) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1}$

۲۶ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^3}$

پ) $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 2x - 3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$



درس سوم : پیوستگی

پیوستگی در نقطه

۲۷ پیوستگی تابع زیر را در $x = 0$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x & x < 0 \\ \sqrt{2} & x = 0 \\ x^2 + 1 & x > 0 \end{cases}$$

۲۸ پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} x - 5 & x < 2 \\ -3 & x = 2 \\ x^2 - 7 & x > 2 \end{cases}$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

۲۹

مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} 2 - x + a & x < 0 \\ b + 1 & x = 0 \\ x^2 + 2 & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد.

۳۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) تابع $f(x) = \sqrt{1-x}$ در $x = 1$ پیوستگی راست دارد.

۳۱ اگر تابع $f(x)$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a و b را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3 & x < 1 \\ 2 & x = 1 \\ x^2 + b & x > 1 \end{cases}$$



۳۲ مقادیر a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در نقطه $x = -1$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < -1 \\ ax + b & x = -1 \\ x^2 - b & x > -1 \end{cases}$$

۳۳ حاصل حد زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} =$$

۳۴ پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 9 & x > 2 \\ -5 & x = 2 \\ -2x^2 + 3 & x < 2 \end{cases}$$

۳۵ اگر تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \frac{-x+|x-2|}{x-1} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$ در نقطه $x = 1$ پیوسته باشد، a را بدست آورید.

۳۶ در تابع $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & , x > 1 \\ 5 & , x = 1 \\ -2x + b & , x < 1 \end{cases}$ مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع f در $x = 1$ پیوسته باشد.

۳۷ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$ در $x = 1$ پیوسته باشد، مقدار a را بدست آورید.

۳۸ مقدار a را طوری بدست آورید که تابع زیر در نقطه $x = 3$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} & , x < 3 \\ x^2 - ax & , x \geq 3 \end{cases}$$

پیوستگی در بازه

۳۹ با رسم نمودار تابع $f(x) = [x - 1]$ مشخص کنید که این تابع در چه بازه یا نقاطی پیوسته یا ناپیوسته است؟

۴۰ اگر تابع $f(x) = \begin{cases} 2ax + b & , x > 2 \\ 5 & , x = 2 \\ x^2 + bx - a & , x < 2 \end{cases}$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، a و b را بدست آورید.



پاسخنامه تشریحی

۱
الف

الف) وجود ندارد.

ب) ۱

ب

خیر

۲ الف) صفر

ب) ۲

ج) -۱

۳

۴

الف

۱

ب

۴

پ

صفر

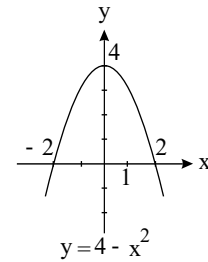
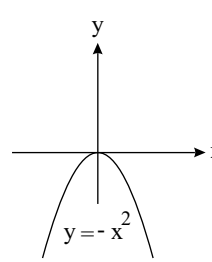
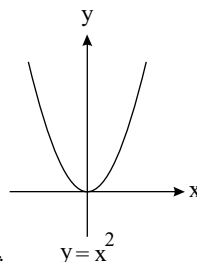
۵

۶

$$3 - 3(-1) + 3(1) = 9$$

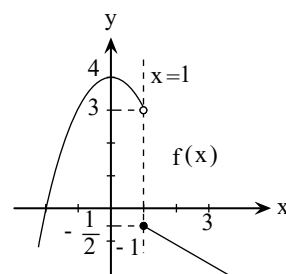
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1, f(2) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) + f(2) = 2 + (-1) + 3 = 4$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x \geq 1 \\ 4 - x^2 & x < 1 \end{cases}$$



شرط وجود حد در نقطه $x = 1$ آن است که: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\frac{1}{1} \end{aligned}$$



چون حد چپ و راست برابر نیستند، تابع در نقطه $x = 1$ حد ندارد.

۷

الف) ۳

ب)

$$\lim_{x \rightarrow -2} x + \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2 + 4 = 6$$

۸ بررسی حد تابع از روی نمودار:

برای تعیین حد تابع از روی نمودار به شکل زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا چند نقطه روی محور x ها در سمت راست نقطه a انتخاب می‌کنیم. از این نقاط از راست به چپ خطوطی عمود بر محور x ها خارج می‌کنیم و محل تقاطع آنها را با نمودار تابع به دست آورده و از نقاط تقاطع به محور y ها عمود می‌کنیم. با این کار رفتار y تابع هنگامی که x ها به a از سمت راست نزدیک می‌شوند را مشاهده می‌کنیم. همین کار را از سمت چپ نقطه a انجام می‌دهیم. اگر شاخه‌های سمت چپ و راست نمودار f در $x = a$ به عرض L روی محور y ها برسند، آنگاه تابع در نقطه a حد دارد.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] = [3^+] = 3$$

$$f(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] + f(3) - \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + 2 - 1 = 4$$

(صفحه ۱۲۵ تا ۱۲۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] = [3^+] = 3 \text{ (نمره ۵)}$$

$$f(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} [f(x)] + f(3) - \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + 2 - 1 = 4 \text{ (نمره ۲۵)}$$

۹

الف درست

ب درست

پ

نادرست؛ چون مقادیر حد چپ و حد راست در نقطه با هم برابر نیستند، لذا تابع در این نقطه حد ندارد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \text{حد ندارد}$$

ت

نادرست؛ چون تابع به ازای مقادیر بزرگ‌تر از -2 (یعنی $(-2)^+$) تعریف نشده است، پس تابع در این نقطه حد ندارد.

۱۰

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2 \text{ (الف) نادرست است (چون } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{ زیرا } 0 \neq 2 \text{)}$$

$$\text{درست: } f(1) = 2 \text{ (ب)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \text{ (پ) نادرست است (زیرا } f \text{ در } x = 2 \text{ تعریف نشده است)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0 \text{ (ت) درست}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2 \text{ (ث) نادرست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ (ج) درست}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد (چ) درست}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \text{وجود ندارد (ح) درست}$$

۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x) = -1 + (-1) = -2$$

۱۲

$$x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \Rightarrow D_f = [5, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} \sqrt{x-5} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{x-5} = \text{وجود ندارد}$$

$$f(x) = \frac{ax+2}{x+1} \text{ یک تابع دوضابطه‌ای است. مقدار حد چپ تابع } f \text{ در } x=1 \text{ را از ضابطه } f(x) = 2x+a \text{ و مقدار حد راست تابع } f \text{ در } x=1 \text{ را از ضابطه } f(x) = \frac{ax+2}{x+1} \text{ به دست می‌آوریم.}$$

$$x \rightarrow 1^- \Rightarrow x < 1 \Rightarrow f(x) = 2x+a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x+a) = 2+a \quad (1)$$

$$x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow f(x) = \frac{ax+2}{x+1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax+2}{x+1} = \frac{a+2}{2} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \xrightarrow{(1),(2)} (a+2) - \left(\frac{a+2}{2}\right) = 3$$

$$\xrightarrow{\times 2} 2(a+2) - (a+2) = 6 \Rightarrow a+2 = 6 \Rightarrow a = 4$$

۱۳

الف صفر



۱۵

الف

۱۶

الف

ب

۱۷

الف

ب

پ

۱۸

الف

ب

پ

۱۹

الف

ب

۲۰

الف

ب

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4+2x+x^2)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4+2x+x^2}{-(x+5)} = -\frac{12}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|2-x|}{[x]+1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-9}{x^2-3x} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{[x]} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2+3}{[2^-]} = \frac{5}{1} = 5$$

$$1+1=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2^x+1}{[2^+]} = \frac{4}{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-4)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-4}{x} = \frac{-5}{-1} = 5$$

$$\frac{2(-2)+3}{-3+2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \frac{2}{3+2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin x + \cos x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x} = \frac{1 - (1)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})} \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 - (-1)^2}{1 + (-1)} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{4})} (1 - \sin x) = 1 - (-1) = 2$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos^2 x} = \frac{1 - (1)^2}{1 - (1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = \frac{1 + 1}{1 + 1 + (1)^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (2 \sin x - 1) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{2}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x - 2}{2 + 5 \cos x} = \frac{2(0) - 2}{2 + 5(-1)} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{(x + 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{[x] + 1}{\cos(-\pi x)} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{-2 + 1}{-1} = 1$$

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sqrt{2} \sin x - \sqrt{2} \cos x} = \frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{0}{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{-\sqrt{2}(\cos x - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x + \sin x}{-\sqrt{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}} = -1$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \frac{1 - 1}{(0)^2} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\tan^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos)x \cos^2 x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \cos^2 x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{(1)^2}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \frac{(0)^2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{1 - \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \sin x) = 1 + 1 = 2$$



$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x} = \frac{4(\frac{1}{2})^2 - 1}{1 - 2(\frac{1}{2})} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^2 x - 1}{1 - 2 \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin x - 1)(2 \sin x + 1)}{-(2 \sin x - 1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x + 1}{-1} = \frac{2(\frac{1}{2}) + 1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2$$

۲۵

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6} = \frac{2(-2)^2 - 8}{(-2)^2 - (-2) - 6} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x^2 - 4)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{2(x-2)}{(x-3)} = \frac{2(-2-2)}{-2-3} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(1)^2 - 1}{(1)^2 - 4(1) + 3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-3} = \frac{1}{1-3} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(-2)^2 + (-2) - 2}{(-2)^2 + 3(-2) + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{(x+2)(x-1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow (-2)} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2-1}{-2+1} = \frac{-3}{-1} = 3$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2 + 3x^2}{x^2 - 9} = \frac{(-3)^2 + 3(-3)^2}{(-3)^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2(x+3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow (-3)} \frac{x^2}{x-3} = \frac{(-3)^2}{-3-3} = \frac{9}{-6} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4x^2 - 1}{8x^2 - 2x - 1} = \frac{4(\frac{\pi}{2})^2 - 1}{8(\frac{\pi}{2})^2 - 2(\frac{\pi}{2}) - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(2x-1)(2x+1)}{(2x-1)(4x+1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{2(\frac{\pi}{2})+1}{4(\frac{\pi}{2})+1} = \frac{2}{3}$$

۲۶

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x - 2} = \frac{(1)^2 - 3(1) + 2}{2(1) - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{2x^2 - x^2} = \frac{4(0)^2}{2(0)^2 - (0)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(2-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{2-x} = \frac{4}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x^2 + 5x + 2}{2x^2 + x - 1} = \frac{3(-1)^2 + 5(-1) + 2}{2(-1)^2 + (-1) - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{(x+1)(3x+2)}{(x+1)(2x-1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{3x+2}{2x-1} = \frac{3(-1)+2}{2(-1)-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 27}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(3)^2 - 27}{3^2 - 2(3) - 3} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^2 + 3x + 9)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 + 3x + 9)}{(x+1)} = \frac{3^2 + 3(3) + 9}{3+1} = \frac{27}{4}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{3(1)^2 + 4(1) - 3(1)^2 - 4}{(1)^2 + 1 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2(x-1) + 4(x-1)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^2 + 4)}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4}{x+2} = \frac{3(1)^2 + 4}{1+2} = \frac{7}{3}$$

۲۷

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (\sin x + \cos x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$f(0) = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow f \text{ در صفر پیوسته نیست}$$

۲۸

$$2 - 5 = -3 = 2^2 - 7 \rightarrow$$

$$-3 = -3 = -3$$

چون حد تابع و مقدار تابع برابر است پس تابع f در $x = 2$ پیوسته می باشد.

۲۹

$$-2(\circ) + a = (\circ)^2 + 2 = b + 1$$

$$a = 2, b = 1$$

۳۰

الف

نادرست

۳۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + b) = 1 + b = 2 \rightarrow b = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 3) = a + 3 = 2 \rightarrow a = -1$$

$$f(-1) = a(-1) + b = -a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 - b = (-1)^2 - b = 1 - b$$

$$\begin{cases} 1 - b = -1 \rightarrow b = 2 \\ -a + b = -1 \xrightarrow{b=2} -a + 2 = -1 \rightarrow a = 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x+3} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x - 9) = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x^2 + 3) = -5$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -5 = f(2)$$

در نتیجه تابع f در $x = 2$ پیوسته است.

۳۵

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x-2|}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + |x-2|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x + (-x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2(x-1)}{(x-1)} = -2$$

$$, f(1) = a \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + 3 = a(1)^2 + 3 = a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -2x + b = -2(1) + b = -2 + b, f(1) = 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} a + 3 = 5 \rightarrow \boxed{a = 2} \\ -2 + b = 5 \rightarrow \boxed{b = 7} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$, f(1) = a \rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}, & x < 3 \\ x^2 - ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2 - ax = (3)^2 - a(3) = 9 - 3a$$

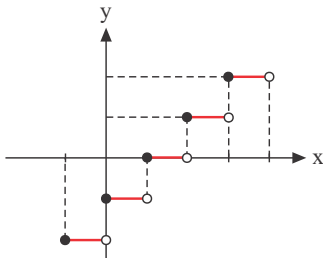
$$f(3) = 3^2 - a(3) = 9 - 3a$$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{|x - 3|} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 9}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x - 3)(x + 3)}{-(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{-1} = -6$$

$$\rightarrow 9 - 3a = -6 \rightarrow 15 = 3a \rightarrow \boxed{a = 5}$$

$$f(x) = [x - 1] \rightarrow f(x) = [x] - 1$$



۳۹

تابع f در تمام نقاط $x \in \mathbb{Z}$ ناپیوسته است و فقط پیوستگی راست دارد.

تابع f در تمام نقاط $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ پیوسته است.

تابع f در تمام بازه‌های بصورت $(a, a + 1)$ به طوری که $a \in \mathbb{Z}$ باشد، پیوسته است.

تابع f در تمام بازه‌های بصورت $[a, a + 1)$ به طوری که $a \in \mathbb{Z}$ باشد، پیوسته است.

۴۰

دو تابع چند جمله‌ای $2ax + b$ و $x^2 + bx - a$ در دامنه شان پیوسته هستند، برای پیوستگی تابع در $\mathbb{R}$ کافی است که تابع در $x = 2$ پیوسته باشد، پس داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2ax + b = 2a(2) + b = 4a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 + bx - a = (2)^2 + b(2) - a = 2b - a + 4$$

$$f(2) = 5$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ 2b - a + 4 = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ -a + 2b = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + b = 5 \\ -4a + 8b = 4 \end{cases} +$$

$$9b = 9 \rightarrow \boxed{b = 1}$$

$$\rightarrow 4a + 1 = 5 \rightarrow 4a = 4 \rightarrow \boxed{a = 1}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۷ یازدهم

سال یازدهم
تجربی

فهرست

درس اول : احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

- ۱ یادآوری احتمال سال دهم
- ۱ احتمال شرطی
- ۱ پیشامدهای مستقل و وابسته

درس دوم : آمار توصیفی

- ۲ میانگین
- ۲ میانه
- ۲ واریانس
- ۳ انحراف معیار و دامنه ی تغییرات
- ۳ ضریب تغییرات



درس اول : احتمال شرطی و

پیشامدهای مستقل

یادآوری احتمال سال دهم

۱ فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰٫۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰٫۶ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از دو تیم قهرمان خواهد شد؟

احتمال شرطی

۲ در پرتاب دو تاس با هم، دو پیشامد A و B را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:
 A : مجموع عددهای رو شده ۸ باشد.
 B : عددهای رو شده برابر باشند.

الف احتمال $P(B|A)$ را به دست آورید.

ب آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟ چرا؟

۳ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ باشد را به دست آورید.

۴ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A ، $\frac{1}{5}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B ، $\frac{1}{7}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B ، $\frac{1}{4}$ خواهد شد، با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

۵ احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{1}{6}$ است. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{1}{4}$ و در صورت بردن رقیب اصلی‌اش، این احتمال به $\frac{1}{3}$ افزایش می‌یابد. با چه احتمالی حداقل یکی از این دو اتفاق (قهرمانی یا بردن رقیب اصلی) برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

۶ اگر $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{1}{3}$ و $P(A|B) = \frac{1}{4}$ باشد، آنگاه $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

۷ اگر در یک فضای نمونه‌ای S داشته باشیم $P(A|B') = ۰٫۷$ و $P(B) = ۰٫۴$ آنگاه $P(A \cup B)$ را بدست آورید.

پیشامدهای مستقل و وابسته

۸ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند. آنگاه $p(A \cap B)$ برابر است.

۹ فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰٫۶ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰٫۷ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان آسیا خواهد شد.

۱۰ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه $P(A|B) = P(A)$

۱۱ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

الف $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

ب $P(A \cap B) = P(S)$

ج $A \cap B = \emptyset$

د $A \cap B = A \times B$

۱۲ اگر $P(A) = ۰٫۶$ و $P(B) = ۰٫۳$ و A و B مستقل باشند؛ $P(A \cup B)$ را بدست آورید.



۱۳ احتمال موفقیت عمل جراحی برای شخص A برابر $9/10$ و برای شخص B برابر $8/10$ است. احتمال این که لااقل عمل جراحی برای یکی از دو نفر موفقیت آمیز باشد را بدست آورید.

۱۴ احتمال قبولی علی و امیر در کنکور $5/7$ و $3/7$ است، احتمال‌های زیر را حساب کنید.
الف) احتمال قبولی حداقل یکی از آنها در کنکور.
ب) احتمال اینکه فقط علی در کنکور قبول شود.



میانگین

۱۵ اگر میانگین داده‌های $3, x_3, 2, x_2, 1, x_1$ برابر $\bar{X}$ باشد، میانگین باشد، میانگین داده‌های $3, 3x_3 + 2, 3x_2 + 1, 3x_1$ را بیابید.

میان

۱۶ در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

الف) در معیار گرایش مرکزی اگر داده دورافتاده داشته باشیم بهتر است از استفاده کنیم.

۱۷ در داده‌های مرتب شده $4, 6, 7, 8, 10, x, 20, 22, 27, 29$

الف- اگر میانه برابر با 13 باشد، x را بدست آورید.

ب- اگر میانگین برابر 15 باشد، x و میانه را بدست آورید.

۱۸ میانه یک مجموعه از داده‌های مرتب شده، برابر میانگین چهارمین و پنجمین داده و مجموع کل داده‌ها مساوی با 360 گردیده است. میانگین کل داده‌ها چقدر است؟

واریانس

۱۹ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) اگر واریانس داده‌های x_1, x_2, x_3, x_4 برابر 7 باشد آنگاه واریانس داده‌های $2, 3x_4 - 2, 3x_3 - 2, 3x_2 - 2, 3x_1 - 2$ برابر است.

۲۰ هشت داده آماری با میانگین 15 و واریانس 4 داریم. اگر دو داده 12 و 18 به آن‌ها افزوده شود، واریانس 10 داده حاصل را بدست آورید.

۲۱ میانگین و واریانس 29 داده آماری به ترتیب 17 و 5 می‌باشد. اگر داده‌های $12, 13, 21, 22$ حذف شوند، واریانس داده‌های باقی‌مانده را بدست آورید.

۲۲ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل باشند، آنگاه دو پیشامد A' و B مستقل‌اند.

ب) اگر توابع f و g در $x = a$ حد نداشته باشند، تابع $f - g$ هم در این نقطه حد ندارد.

ج) اگر تمام داده‌های آماری را با b جمع یا از b کم کنیم، اثری روی واریانس ندارد.

د) دو زاویه x و y را هم‌انتهای می‌گوییم هرگاه $x - y$ مضرب فردی از π رادیان یا 180° باشد.



۲۳ در هر سؤال، گزینه مناسب را انتخاب کنید.

الف) محل برخورد تابع $y = \cos x$ با محور x در نقاط است و حداقل مقدار $\cos x$ در نقاط به دست می‌آید.

- (۱) $(2k+1)\pi$ و $2k\pi$ (۲) $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ و $2k\pi$ (۳) $k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $(2k+1)\pi$ (۴) $k\pi$ و $2k\pi$

ب) با فرض $a > 0$ ، اگر واریانس داده‌های $a, a, a, 3a, 3a, 3a$ برابر ۱۶ باشد، ضریب تغییرات آنها کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{5}$ (۲) $\frac{2}{5}$ (۳) $\frac{3}{75}$ (۴) $\frac{4}{5}$

ج) حاصل $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{x-[x]}$ کدام است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) وجود ندارد

انحراف معیار و دامنه ی تغییرات

۲۴ برای داده‌های (۳، ۷، ۵، ۱۵، ۱۰) انحراف معیار را محاسبه کنید.

۲۵ نمرات ریاضی یک کلاس به قرار زیر است.

۱۸، ۱۸، ۱۳، ۲۰، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۹، ۲۰

میان و انحرافات معیار را برای این جامعه آماری به دست آورید.

۲۶ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر تمام داده‌های آماری را ۲ برابر کنیم، انحراف معیار نیز ۲ برابر می‌شود.

۲۷ نمرات ریاضی یک کلاس به قرار زیر است:

۱۹، ۱۱، ۱۷، ۱۴، ۱۵، ۱۷، ۲۰، ۱۳، ۱۸، ۱۶

میان و انحراف معیار را برای این جامعه آماری به دست آورید.

۲۸ اگر داده‌های یک جامعه آماری را از متر به سانتی‌متر تبدیل کنیم، انحراف معیار جدید چگونه بدست می‌آید؟

۲۹ ۱۵ داده آماری با واریانس ۱۲ و ۱۰ داده آماری دیگر با واریانس ۷٫۶ را با هم ترکیب می‌کنیم. اگر میانگین هر دو گروه یکسان باشند،

انحراف معیار ۲۵ داده حاصل را بدست آورید.

۳۰ میانگین طول اضلاع مربع‌هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات $\frac{2}{5}$ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع‌ها را بدست آورید.

۳۱ جاهای خالی را با عبارت‌های مناسب کامل کنید.

الف) تابع $f(x) = \frac{|x|}{x}$ در نقطه‌ای با طول ناپیوسته است.

ب) اگر $\sin x = \cos(x + 20^\circ)$ باشد، آنگاه زاویه x برابر درجه است. ($0 < x < 90$)

ج) اگر داده‌ها را در عدد k ضرب کنیم، انحراف معیار در ضرب می‌شود.

د) حاصل $\lim_{x \rightarrow 2^-} [-x]$ برابر است. ([]، نماد جزء صحیح است.)

ضریب تغییرات

۳۲ در داده‌های ۱۴، ۲۳، ۸، ۱۷، ۲۶، ۱۱، ۲۰

الف) چارک سوم را به دست آورید.

ب) ضریب تغییرات داده‌ها را محاسبه کنید.

۳۳ اگر میانگین داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ برابر ۳ و واریانس این داده‌ها برابر ۲ باشد.

الف) اگر داده‌ها دو برابر و با ۵ جمع شوند میانگین داده‌های جدید را به دست آورید.

ب) ضریب تغییرات داده‌های $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ را به دست آورید.

۳۴ ضرب تغییرات داده‌های مقابل را تعیین کنید.

۱, ۳, ۵, ۷

۳۵ دو نفر در یک کارگاه طلاسازی در ۵ روز متوالی، هم‌زمان شروع به کار کردند. امتیازات دقت کاری آنان مطابق جدول زیر است. دقت کاری کدامیک بیشتر است؟ دلیل بیاورد.

نفر اول	۷	۹	۷	۹	۸
نفر دوم	۶	۸	۱۰	۷	۹



پاسخنامه تشریحی



۱

$$P(A) = 0.5 \text{ پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ۰.۵}$$

$$P(B) = 0.6 \text{ پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ۰.۶}$$

$$P(A \cap B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3 \text{ مستقل}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.3 = 0.8$$

۲

الف

راه حل اول:

$$A = \{(2, 6), (6, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 4)\} \Rightarrow n(A) = 5, \quad A \cap B = \{(4, 4)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1$$

$$\Rightarrow P(B|A) = \frac{1}{5}$$

راه حل دوم:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{1}{5}$$

ب

راه حل اول:

$$P(B) = \frac{1}{6} \neq P(B|A)$$

A و B مستقل نیستند.

راه حل دوم:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{ استفاده از فرمول}$$

A و B مستقل نیستند.

۳

$$p(B) = \frac{5}{36} \quad p(A \cap B) = \frac{3}{36} \quad p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{3}{5}$$

۴

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{41}{100}$$

۵

$$P(A \cap B) = P(B|A) \times P(A) \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{18} = \frac{13}{36}$$

۶

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow \frac{1}{4} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{1}{3}} \rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = \frac{1}{12}}$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{9}{12} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{3}{4}}$$

۷

$$P(B) = 0.4 \rightarrow P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.4 \rightarrow \boxed{P(B') = 0.6}$$

$$P(A|B') = \frac{P(A \cap B')}{P(B')} \rightarrow P(A \cap B') = P(A|B') \cdot P(B') = 0.7 \times 0.6$$

$$\rightarrow \boxed{P(A \cap B') = 0.42}$$

$$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$



$$\rightarrow P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B) = P(B) + P(A \cap B') = 0.40 + 0.42$$

$$\rightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0.82}$$

$$p(A) \times p(B)$$

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B) = 0.6 \times 0.7 = 0.42$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.6 + 0.7 - 0.42 = 0.88$$

۸

الف

۹

۱۰

الف

درست

۱۱ گزینه الف

۱۲

۱۳

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{6}{10} \times \frac{3}{10} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{72}{100}}$$

پیشامد موفقیت عمل جراحی برای شخص B ، پیشامد موفقیت عمل جراحی برای شخص A

دو پیشامد مستقل هستند $A \rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$$

$$\rightarrow P(A \cup B) = \frac{9}{10} + \frac{8}{10} - \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{90}{100} + \frac{80}{100} - \frac{72}{100} \rightarrow \boxed{P(A \cup B) = \frac{98}{100}}$$

۱۴

الف A پیشامد قبولی علی و B پیشامد قبولی امیر.

قبولی امیر هیچ ربطی به قبولی علی ندارد؛ یعنی مستقل از یکدیگرند.

دو پیشامد مستقل اند:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

پیشامد حداقل قبولی یکی از آنها:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.7 - (0.5)(0.7) = 0.85$$

ب) پیشامد اینکه فقط علی قبول شود:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \xrightarrow{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)} P(A - B) = P(A) - P(A) \times P(B) \\ = 0.5 - (0.5)(0.7) = 0.15$$

(صفحة ۱۴۶ تا ۱۵۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5 + 0.7 - (0.5)(0.7) = 0.85 \text{ (نمره ۰.۷۵)}$$

ب)

$$P(A - B) = P(A) - P(A) \times P(B) = 0.5 - (0.5)(0.7) = 0.15 \text{ (نمره ۰.۷۵)}$$

۱۵

$$\frac{x_1 + 1 + x_2 + 2 + x_3 + 3}{3} = \bar{X} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + 6 = 3\bar{X} \rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 3\bar{X} - 6$$

$$\bar{Y} = \frac{3x_1 + 1 + 3x_2 + 2 + 3x_3 + 3}{3} = \frac{3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 6}{3} = \frac{3(x_1 + x_2 + x_3)}{3} + \frac{6}{3}$$

$$\rightarrow \bar{Y} = x_1 + x_2 + x_3 + 2 \rightarrow \bar{Y} = 3\bar{X} - 6 + 2 \rightarrow \boxed{\bar{Y} = 3\bar{X} - 4}$$

۱۶

الف

میان

۱۷

الف-

$$Q_r = \frac{10+x}{2} \rightarrow 13 = \frac{10+x}{2} \rightarrow 10+x = 26 \rightarrow \boxed{x = 16}$$

-ب-

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} \rightarrow 15 = \frac{4 + 6 + \dots + x + \dots + 29}{10} \rightarrow \boxed{15 = \frac{133+x}{10}}$$

$$\rightarrow 133 + x = 150 \rightarrow \boxed{x = 17} \rightarrow \boxed{Q_r = \frac{10+17}{2}} \rightarrow \boxed{Q_r = 13,5}$$

$$Q_r = \frac{x_4 + x_5}{2} \rightarrow \text{تعداد کل داده‌ها } \boxed{N = 8}$$

$$\rightarrow \bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{260}{8} \rightarrow \boxed{\bar{X} = 45}$$

۱۸

۱۹

الف ۶۳

۲۰

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8}{8} = 15 \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_8 = 120$$

$$r = \frac{(x_1 - 15)^r + (x_2 - 15)^r + \dots + (x_8 - 15)^r}{8}$$

$$\rightarrow (x_1 - 15)^r + (x_2 - 15)^r + \dots + (x_8 - 15)^r = 32$$

اگر دو داده جدید ۱۲ و ۱۸ را اضافه کنیم داریم:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_8 + 12 + 18}{8+2} = \frac{120+30}{10} \rightarrow \boxed{\bar{X} = 15}$$

$$\sigma^r = \frac{(x_1 - 15)^r + (x_2 - 15)^r + \dots + (x_8 - 15)^r + (12 - 15)^r + (18 - 15)^r}{10} = \frac{32+9+9}{10}$$

$$\rightarrow \sigma^r = \frac{50}{10} \rightarrow \boxed{\sigma^r = 5}$$

۲۱

$$\bar{X}_{r9} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{r9}}{r9} \rightarrow 17 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{r5} + 12 + 13 + 21 + 22}{r9}$$

$$\rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{r5} + 68 = 493 \rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{r5} = 425$$

همان میانگین قبلی است.

$$\rightarrow \bar{X}_{r5} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{r5}}{r5} = \frac{425}{r5} \rightarrow \boxed{\bar{X}_{r5} = 17}$$

$$\rightarrow \sigma^r_{r9} = \frac{(x_1 - \bar{X}_{r9})^r + \dots + (x_{r9} - \bar{X}_{r9})^r}{r9} \rightarrow 5 = \frac{(x_1 - 17)^r + \dots + (x_{r9} - 17)^r}{r9}$$

$$\rightarrow 5 \times r9 = (x_1 - 17)^r + \dots + (x_{r5} - 17)^r + (12 - 17)^r + (13 - 17)^r + (21 - 17)^r + (22 - 17)^r$$

$$\rightarrow 145 = (x_1 - 17)^r + \dots + (x_{r5} - 17)^r + 25 + 16 + 16 + 25$$

$$\rightarrow (x_1 - 17)^r + \dots + (x_{r5} - 17)^r = 63$$

$$\rightarrow \sigma^r_{r5} = \frac{(x_1 - 17)^r + \dots + (x_{r5} - 17)^r}{r5} = \frac{63}{r5} \rightarrow \sigma^r_{r5} = 2,52$$

۲۲ الف) درست؛ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند؛ متمم هر کدام نسبت به دیگری و همچنین متمم‌ها هم نسبت به هم مستقل‌اند.

$$\begin{array}{lll} A' \text{ و } B' \text{ نیز مستقل‌اند} & A' \text{ و } B \text{ نیز مستقل‌اند} & A' \text{ و } B' \text{ نیز مستقل‌اند} \\ P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') & P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) & P(A \cap B') = P(A) \times P(B') \end{array}$$

(صفحه ۱۵۱ کتاب درسی)

ب) نادرست؛ اگر توابع f و g در x = a حد نداشته باشند، در مورد f ± g نمی‌توان نظر قطعی داد. ممکن است حد داشته باشند و ممکن است حد نداشته باشند. مثلاً $f(x) = \left[\frac{x}{p}\right]$ و

$g(x) = \left[\frac{x}{p}\right]$ هر دو در x = 0 حد ندارد (چون حد چپ و راستشان در این نقطه برابر نیست) اما:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{p}\right] - \left[\frac{x}{p}\right] = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{x}{p}\right] - \left[\frac{x}{p}\right] = [0^+] - [0^+] = 0 - 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x}{p}\right] - \left[\frac{x}{p}\right] = [0^-] - [0^-] = -1 - (-1) = 0 \end{cases}$$

بنابراین در نقطه x = 0 حد دارد.



(صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)

ج) درست؛ اگر تمام داده‌های آماری را a برابر کرده و با b جمع کنیم، واریانس داده‌ها a^2 برابر می‌شود (یعنی اضافه یا کم کردن عددی به همه داده‌ها، اثری روی واریانس ندارد). (صفحه ۱۵۹ کتاب درسی)

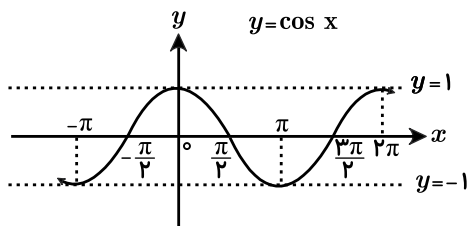
د) نادرست؛ چون مطابق تعریف کتاب درسی، دو زاویه x و y را هم‌انتهای می‌گوییم؛ هرگاه $x - y$ مضرب زوجی از π رادیان یا 180° باشد. (صفحه ۸۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست ب) نادرست ج) درست د) نادرست

(هر مورد ۲۵/۰ نمره)

۲۳ الف) گزینه ۳:



مطابق نمودار بالا تابع $\cos x$ در نقاط $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ و $\frac{5\pi}{2}$... یعنی مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ یا $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ و یا $k\pi + \frac{\pi}{2}$ با محور x برخورد می‌کند؛ یعنی: $\cos(k\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ یا $\cos(2k+1)\frac{\pi}{2} = 0$

و حداقل آن هم در نقاط π و 3π و 5π ... یعنی مضارب فرد π حاصل می‌شود.

$$\cos(2k+1)\pi = -1$$

(صفحه ۹۲ و ۹۳ کتاب درسی)

ب) گزینه ۴:

$$\begin{aligned} 3a, 3a, 3a, a, a, a &\Rightarrow \bar{x} = \frac{3a + 3a + 3a + a + a + a}{6} = 2a \\ \sigma^2 &= \frac{(3a - 2a)^2 + (3a - 2a)^2 + (3a - 2a)^2 + (a - 2a)^2 + (a - 2a)^2 + (a - 2a)^2}{6} \\ &\rightarrow \sigma^2 = \frac{6a^2}{6} = a^2 = 16 \xrightarrow{a>0} a = 4 \\ \begin{cases} \bar{x} = 2a = 2 \times 4 = 8 \\ \sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4 \end{cases} \Rightarrow cv = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5 \end{aligned}$$

(صفحه ۱۵۸ تا ۱۶۰ کتاب درسی)

ج) گزینه ۱:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x - 3|}{x - [x]} \xrightarrow[x \rightarrow 3^+]{x \rightarrow 3^+ \Rightarrow |x - 3| = x - 3, [x] = 3} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x - 3|}{x - [x]} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x - 3}{x - 3} = 1$$

(صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۳ ب) گزینه ۴ ج) گزینه ۱

(هر مورد ۵/۰ نمره)

۲۴

$$\bar{x} = 8 \quad \delta = \sqrt{\frac{88}{5}} = \sqrt{17,6}$$

۲۵

۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۸, ۱۸, ۱۹, ۲۰, ۲۰
 $Q_7 = 17,5$

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{170}{10} = 17 \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X - x_i)^2}{n}} \\ \sigma &= \sqrt{\frac{9 + 4 + 0 + 1 + 4 + 9 + 9 + 16 + 1 + 1}{10}} = \sqrt{5,4} \end{aligned}$$

۲۶

الف درست

۲۷

۱۱, ۱۳, ۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷, ۱۷, ۱۸, ۱۹, ۲۰
 $Q_7 = 16.5$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{160}{10} = 16 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X - x_i)^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{25 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 1 + 4 + 9 + 16}{10}} = \sqrt{7}$$

۲۸ اگر داده‌ها را از متر به سانتی‌متر تبدیل کنیم، تمام داده‌ها ۱۰۰ برابر می‌شوند و داریم:

انحراف معیار ۱۰۰ برابر می‌شود $\rightarrow \sigma_{100x} = 100\sigma_x \rightarrow \sigma_{100x} = 100\sigma_x$

۲۹

۱۵ داده آماری: $12 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{X})^2}{15} \rightarrow (x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{15} - \bar{X})^2 = 180$

۱۰ داده آماری: $7.6 = \frac{(x_{16} - \bar{X})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{X})^2}{10} \rightarrow (x_{16} - \bar{X})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{X})^2 = 76$

$\rightarrow \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + \dots + (x_{25} - \bar{X})^2}{15 + 10} = \frac{180 + 76}{15 + 10} \rightarrow \sigma^2 = \frac{256}{25} \rightarrow \sigma = \frac{16}{5} = 3.2$

۳۰ اگر طول ضلع مربع‌ها را $x_1, x_2, \dots, x_N$ در نظر بگیریم:

$\bar{X} = 15$, $CV = \frac{\sigma}{\bar{X}} \rightarrow 0.2 = \frac{\sigma}{15} \rightarrow \sigma = 3$

مساحت مربع‌ها را می‌توانیم بصورت $x_1^2, x_2^2, \dots, x_N^2$ بنویسیم و داریم:

$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - \bar{X}^2 \rightarrow 3^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} - 15^2$

$\rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 9 + 225 \rightarrow \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}{N} = 234$

۳۱ الف) $x = 0$ تابع در $x = 0$ تعریف نشده (چون ریشه مخرج کسر است.) و حد هم ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1 \end{cases}$$

(صفحه ۱۳۹ کتاب درسی)

ب) $x = 35^\circ$: چون سینوس یک زاویه با کسینوس دیگری برابر است، پس دو زاویه متمم یکدیگر هستند.

$\sin x = \cos(x + 20^\circ) \Rightarrow x + (x + 20^\circ) = 90^\circ \Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$

(صفحه ۸۷ کتاب درسی)

ج) $|k|$: اگر تمام داده‌ها را k برابر و با b جمع کنیم، انحراف معیار فقط $|k|$ برابر می‌شود. (صفحه ۱۵۹ کتاب درسی)

(د) ۲-

$\lim_{x \rightarrow 2^-} [-x] = [-(2^-)] \xrightarrow{2^- \cong 1.9} [-(1.9)] = -2$

(صفحه ۱۳۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) $x = 0$ ب) 35° ج) $|k|$ د) ۲-

(هر مورد ۲.۵ نمره)

۳۲

الف

۸, ۱۱, ۱۴, ۱۷, ۲۰, ۲۳, ۲۶

$Q_3 = 23$

ب



$$\bar{x} = 17$$

$$\sigma^2 = \frac{81 + 36 + 9 + 0 + 9 + 36 + 81}{7} = \frac{252}{7} = 36$$

$$\sigma = 6 \quad CV = \frac{6}{17}$$

$$\bar{x} = 2 \times 3 + 5 = 11$$

$$cv = \frac{\delta}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\bar{X} = \frac{1 + 3 + 5 + 7}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\sigma^2 \text{ واریانس} = \frac{(1-4)^2 + (3-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2}{4} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\sigma = \sqrt{5} \text{ انحراف معیار}$$

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{5}}{4} \text{ ضریب تغییرات}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{7 + 9 + 7 + 9 + 8}{5} = 8, \quad \bar{x}_2 = \frac{6 + 8 + 10 + 7 + 9}{5} = 8$$

چون میانگین‌ها برابرند؛ پس به نظر می‌رسد، به‌طور متوسط دقت هر دو یکی است ولی با شاخص مهم پراکندگی یعنی واریانس می‌فهمیم:

$$\sigma_1^2 = \frac{(7-8)^2 + (9-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(6-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

پس نفر اول دقت کاری بیشتری دارد، چون هرچه واریانس کمتر باشد، پراکندگی داده‌ها حول میانگین کمتر است.

(صفحه ۱۵۵ تا ۱۶۰ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\bar{x}_1 = \frac{7 + 9 + 7 + 9 + 8}{5} = 8, \quad \bar{x}_2 = \frac{6 + 8 + 10 + 7 + 9}{5} = 8 \text{ (نمره ۵)}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{(7-8)^2 + (9-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2}{5} = \frac{4}{5} \text{ (نمره ۵)}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{(6-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ (نمره ۵)}$$