



بیستوفیل

ریاضی دهم
تجربی





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیک نام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲
امیر محمد رضائی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴
امیر محمد کیانی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲
امیر محمد شکوهی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲
سید محمد صادق حسینی

رتبه ۳۴۱
حمید رضا بشیری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصریان

رتبه ۵۳۹
نجمه کبختا

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسونند

رتبه ۵۱۴
محمد پارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳
زهره بابائی

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰
زهره ولی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶
حسین تقضلی نژاد

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱
بهار ضرامی

رتبه ۶۷۲
محمد ماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷
زهره بابائی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیر حسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملک شاهی

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸
امیر محمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱
محمد رضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سید آبادی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵
زهره جمعی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۱ دهم

سال دهم

فهرست

درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

- ۱ مجموعه های اعداد
- ۱ بازه ها
- ۱ مجموعه های متناهی و نامتناهی

درس دوم: متمم یک مجموعه

- ۲ مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه
- ۲ تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

درس سوم: الگو و دنباله

- ۳ الگو
- ۳ الگوی خط

درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی

- ۳ دنباله حسابی
- ۳ دنباله هندسی



درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی

نامتناهی

مجموعه های اعداد

۱ طرف دوم تساوی های زیر را بنویسید.

الف) $W - N$ ب) $R \cap Q'$ پ) $Z \cap W$ ت) $Q' \cap Z$

۲ مجموعه های $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 8\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | 2x - 2 > -4\}$ و $C = (-2, 6]$ مفروض اند.

الف) مجموعه های A , B را به صورت بازه بنویسید.

ب) مجموعه $D = A - (B \cap C)$ را به صورت بازه بنویسید و روی محور نمایش دهید.

بازه ها

۳ باتوجه به دو بازه $A = (-5, 3]$ و $B = (-2, 1)$ حاصل عبارت های زیر را بدست آورید و به صورت بازه بنویسید.

الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ ج) $A - B$ د) $B - A$

۴ اگر $A_n = \left[\frac{-3}{n}, \frac{n-1}{2} \right)$ باشد، آنگاه حاصل $A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$ را بدست آورید و تعداد اعداد صحیح در بازه ی بدست آمده را معین کنید.

۵ مجموعه های $R - (-1, 1)$ و $R - [0, 1)$ را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

مجموعه های متناهی و نامتناهی

۶ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A نیز متناهی خواهد بود.

۷ مجموعه های زیر را بدست آورده و متناهی یا نامتناهی بودن هر کدام را مشخص کنید.

$A = [-3, +5)$ $B = (-\infty, 3]$ $C = [3, +\infty)$ $D = (-\infty, 5]$

الف) $A \cap B$ ب) $A \cup B$ پ) $B - C$
ت) $D \cup B$ ث) $D - B$ ج) $B \cup C$

۸ اگر اشتراک دو بازه $(x^2 + 2, 8)$ و $(3, 2x + 1)$ تهی باشد، آنگاه x کدام است؟

۹ متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید:

الف) $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ ب) مجموعه کتاب های کمک آموزشی $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$

ت) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر از ۷ ج) $\left[-3, \frac{1}{2}\right)$ ث) مجموعه مداد های جهان

چ) مجموعه مورچه های هر شهر

۱۰ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B نامتناهی باشند، $A \cap B$ می تواند متناهی باشد.

ب) اگر $A \cap B$ نامتناهی باشد، A و B هر دو نامتناهی هستند.

پ) اگر A متناهی و B نامتناهی باشد آنگاه $B - A$ متناهی است.

ت) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد آنگاه $A \cup B$ متناهی است.

۱۱ الف) مجموعه متناهی را تعریف کنید.

ب) اگر مجموعه $\mathbb{R}$ مرجع باشد، یک مجموعه نامتناهی مثال بزنید که متمم آن متناهی باشد.

ج) دو مجموعه نامتناهی مانند A , B مثال بزنید که $B - A \neq \emptyset$, $A - B = \emptyset$





درس دوم: متمم یک مجموعه

مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

۱۲ در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

(الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

(ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

۱۳ فرض کنید $u = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه مرجع باشد و $A = \{a, e\}$ و $B = \{b, c\}$ ؛ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید.

(الف) A' (ب) B' (پ) $A \cap B'$ (ت) $A' \cup B$ (ث) $A - B'$

۱۴ فرض کنید $A = [-3, 2]$ و $B = (-1, 3]$ و $\mathbb{R}$ مجموعه مرجع باشد؛ حاصل $(A \cap B)'$ را به صورت بازه بدست بیاورید.

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

۱۵ اگر $n(A) = 60$ ، $n(B) = 70$ و $n(A - B) = 15$ آنگاه $n(A \cup B)$ را به دست آورید.

۱۶ در یک مدرسه ۱۲۲ نفری، ۸۲ نفر ساعت در دست دارند و ۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفر هم عینک می‌زنند و هم ساعت در دست دارند.

چند نفر:

(الف) حداقل یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟

(ب) فقط ساعت در دست دارند؟

(پ) دقیقاً یکی از دو مورد را استفاده می‌کنند؟

(ت) نه ساعت می‌بندند و نه عینک می‌زنند؟

۱۷ اگر $n(A) = 10$ ، $n(A \cap B) = 3$ و $n(A \cup B) = 14$ باشد، آنگاه $n(B)$ را بدست آورید؟

۱۸ فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشد بطوریکه $n(u) = 120$ ، $n(A) = 75$ ، $n(B) = 50$ ،

$n(A \cap B) = 35$ مطلوب است:

(الف) $n(A \cup B)$ (ب) $n(A \cap B')$

(پ) $n(A' \cap B)$ (ت) $n(A' \cap B')$

۱۹ ۱۴ نفر به آزمایشگاهی مراجعه کرده‌اند که از بین آنها ۹ نفر برای انجام آزمایش خون و ۵ نفر برای انجام آزمایش قند خون مراجعه کرده‌اند که در این میان ۳ نفر هر دو آزمایش را داده‌اند مطلوب است تعداد کسانی که:

(الف) آزمایش خون یا قند انجام داده‌اند.

(ب) هیچ از دو یک آزمایش را انجام نداده‌اند.

۲۰ در مدرسه‌ای ۵۰ نفر به فوتبال و ۳۰ نفر فقط به والیبال علاقه‌مند هستند و ۳۰ نفر به هیچ کدام از این دو رشته ورزشی علاقه ندارند. اگر تعداد کل شاگردان این مدرسه یازده برابر افرادی که به هر دو رشته علاقه‌مند هستند باشد، مطلوب است:

(الف) تعداد دانش آموزانی که فقط به یکی از این دو رشته علاقه‌مند هستند.

(ب) تعداد دانش آموزانی که حداقل به یکی از این دو رشته علاقه دارند.

۲۱ در ساختمان اداری مجموعه‌ی منتا، ۲۰۰ نفر کارمند مشغول کار هستند. تعداد افرادی که فقط کار تایپ انجام می‌دهند دو برابر تعداد افرادی است که فقط کار ویراستاری انجام می‌دهند و ۴ برابر تعداد افرادی است که هر دو کار ویراستاری و تایپ را انجام می‌دهند. اگر ۳۰ درصد کارمندان هیچ کدام از این دو کار را انجام ندهند:

(الف) چند نفر حداقل یکی از این دو کار را انجام می‌دهند؟

(ب) چند نفر فقط یکی از این دو کار را انجام می‌دهند؟

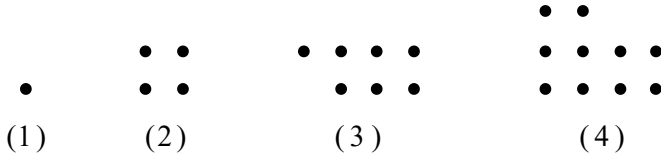


درس سوم: الگو و دنباله



الگو

۲۲ ✱ باتوجه به الگوی زیر، چندمین شکل دارای ۳۴ نقطه است؟



الگوی خط

۲۳ ✱ اگر جملات سوم و هفتم یک الگوی خطی برابر با ۸ و ۲۸ باشند، چندمین جمله ی این الگو برابر با ۵۳ خواهد بود؟

۲۴ ✱ در یک الگوی خطی جملات پنجم و هفتم به ترتیب برابر با ۲۳ و ۳۱ هستند. جمله عمومی آنرا بیابید.



درس چهارم: دنباله های حسابی و

هندسی



دنباله حسابی

۲۵ ✱ جمله های چهارم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۲۴ و ۱۹۲ است. قدر نسبت دنباله را به دست آورید.

۲۶ ✱ جمله یازدهم و هفدهم یک دنباله حسابی به ترتیب برابر ۲۵ و ۳۷ است. a_1 و d و جمله عمومی را بدست آورید.

۲۷ ✱ در دنباله ی ۲۱, ۱۸, ۱۵, ... اولین جمله منفی، چندمین جمله دنباله است؟

۲۸ ✱ باتوجه به دنباله ی ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ... :

الف) نوع دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله عمومی دنباله را بدست آورید.

پ) جمله دوازدهم دنباله را بدست آورید.

ت) جمله چندم این دنباله برابر با ۲۰ است؟

۲۹ ✱ جمله اول یک دنباله حسابی نصف جمله سوم است. جمله پانزدهم این دنباله چند برابر قدر نسبت آن است؟

۳۰ ✱ ۱۰۰ قرص نان را بین ۵ مرد چنان تقسیم کنید که سهم های دریافت شده دنباله حسابی تشکیل دهند و یک سوم مجموع سه سهم بزرگتر، مساوی مجموع دو سهم کوچکتر باشد.

۳۱ ✱ الف) در یک دنباله حسابی جمله چهارم و چهاردهم به ترتیب برابر ۶- و ۱۴ هستند. جمله اول و قدرنسبت دنباله را به دست آورید.

ب) اگر دنباله $19, 4x + 5, 2x + 1, x$ یک دنباله هندسی باشد، قدرنسبت این دنباله را به دست آورید.

۳۲ ✱ جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر $A = [-3, 3]$, $B = (0, 4]$, آنگاه مجموعه $A - B$ شامل عدد صحیح است.

ب) اگر $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, آنگاه به دو مجموعه A, B دو مجموعه می گویند.

ج) دنباله خطی $t_n = 5n - 69$, تعداد جمله منفی دارد.

د) اگر عدد x واسطه حسابی دو عدد ۱۲, ۴۰ و عدد y واسطه هندسی دو عدد ۵۰, ۲ باشد، مقدار xy^2 برابر است.



دنباله هندسی

۳۳ ✱ بین اعداد ۱۲ و ۱۹۲ سه واسطه هندسی درج کنید.

۳۴ ✱ جملات سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب ۱۲ و ۹۶ می باشند. دنباله را مشخص کنید.



۳۵ مجموع جمله‌های اول و چهارم یک دنباله هندسی ۵۶ و مجموع جمله‌های دوم و سوم آن ۲۴ است. دنباله را مشخص کنید.





پاسخنامه تشریحی

۱. باتوجه به مجموعه های اعداد داریم:

$$\begin{aligned} N &= \{1, 2, 3, \dots\} \\ W &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} \\ Z &= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} \\ Q &= \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\} \\ Q' &= \text{مجموعه اعدادی که نمی توان آن ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نشان داد} \\ R &= Q \cup Q' \end{aligned}$$

الف) $\{0\}$

ب) Q'

پ) $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

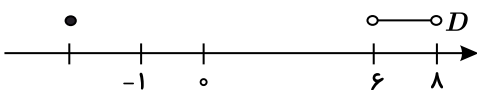
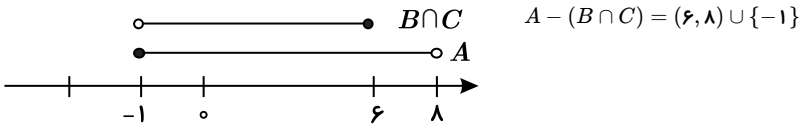
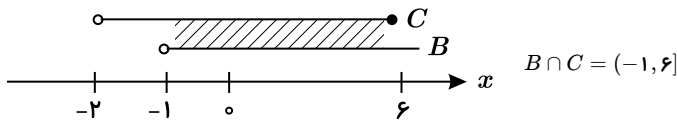
ت) $\emptyset$ یا $\{ \}$

۲. الف)

$$A = [-1, 8)$$

$$2x - 2 > -4 \Rightarrow 2x > -2 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow B = (-1, +\infty)$$

ب) با رسم محور مجموعه $B \cap C$ و سپس $A - (B \cap C)$ را به دست می آوریم.



(صفحة ۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

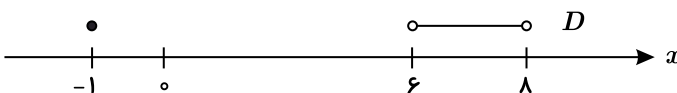
الف)

$$A = [-1, 8) \quad (\text{نمره ۲.۵})$$

$$B = (-1, +\infty) \quad (\text{نمره ۲.۵})$$

$$B \cap C = (-1, 6] \quad A - (B \cap C) = (6, 8) \cup \{-1\} \quad (\text{نمره ۲.۵})$$

(۰/۲.۵ نمره)



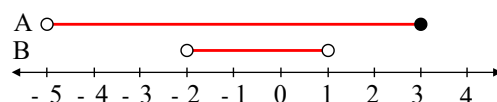
۳. باتوجه به شکل داریم:

الف) $A \cap B = (-2, 1)$

ب) $A \cup B = (-5, 3]$

ج) $A - B = (-5, -2] \cup [1, 3]$

د) $B - A = \emptyset$





۴ باتوجه به معلومات سوال ابتدا A_1 , A_2 , A_3 را تشکیل می‌دهیم:

$$A_1 = \left[\frac{-3}{1}, \frac{1-1}{1} \right] = [-3, 0)$$

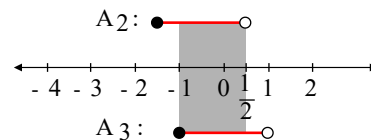
$$A_2 = \left[\frac{-2}{2}, \frac{2-1}{2} \right] = \left[\frac{-2}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_3 = \left[\frac{-1}{1}, \frac{1-1}{1} \right] = [-1, 1)$$

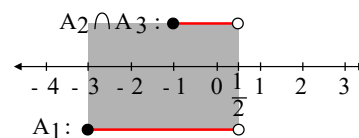
$$A_2 \cap A_3 = \left[-1, \frac{1}{2} \right)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3) = \left[-3, \frac{1}{2} \right)$$

حال $A_2 \cap A_3$ را با استفاده از محور بدست می‌آوریم:



و اجتماع آن را با A_1 رسم می‌کنیم:



اعداد صحیح موجود در این بازه عبارتند از: $-3, -2, -1, 0$
 $\Leftarrow$ در این بازه ۴ عدد صحیح موجود است.

الف) $R - [0, 1) = (-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$

ب) $R - (-1, 1) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

الف) $A \cap B = [-3, 3]$ نامتناهی

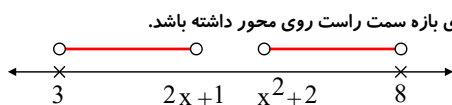
ب) $A \cup B = (-\infty, 5)$ نامتناهی

پ) $B - C = (-\infty, 3)$ نامتناهی

ت) $D \cup B = (-\infty, 5]$ نامتناهی

ث) $D - B = (3, 5]$ نامتناهی

ج) $B \cup C = (-\infty, +\infty) = R$ نامتناهی



باتوجه به شکل مشخص است برای تهی بودن اشتراک دو بازه، باید انتهای بازه سمت چپ، مقدار عددی کمتر از ابتدای بازه سمت راست داشته باشد.

$$x^2 + 2 > 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow (x - 1)^2 > 0$$

$$2x + 1 > 3 \Rightarrow x > 1$$

$$8 > x^2 + 2 \Rightarrow x^2 < 6 \Rightarrow -\sqrt{6} < x < \sqrt{6} \Rightarrow 1 < x < \sqrt{6}$$

بنابراین :

الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ متناهی

ب) متناهی

پ) $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\}$ نامتناهی

ت) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ متناهی

ث) متناهی: دقت کنید بزرگ بودن یک عدد یا سخت بودن شمارش آن به معنای نامتناهی بودن آن عدد نیست.

ج) نامتناهی: تمام بازه‌های اعداد حقیقی نامتناهی هستند.

چ) متناهی: باتوجه به توضیحات مورد ث، تعداد مورچه‌های هر شهر، هر قدر زیاد هم که باشد در نهایت عددی مشخص است.

الف) درست

ب) درست: $A \cap B$ زیرمجموعه A و B است و وقتی نامتناهی باشد، پس هر دو مجموعه نامتناهی است.

پ) نادرست: کم کردن یک مجموعه متناهی از یک مجموعه نامتناهی، آن را متناهی نمی‌کند.

ت) نادرست: از اجتماع یک مجموعه متناهی با یک مجموعه نامتناهی همواره مجموعه‌ای نامتناهی به وجود می‌آید.

۱۱ الف) هر مجموعه که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد را یک مجموعه متناهی می‌گوییم.

ب) مثلاً اگر A مجموعه اعداد حقیقی به جز صفر باشد، آنگاه $A' = \{0\}$ ، یک مجموعه متناهی می‌باشد. (هر مثال درست دیگری قابل قبول است)

$$A = \mathbb{R} - \{0\}$$

ج)

$$A = \{2, 4, \dots\} \Rightarrow A - B = \emptyset, B - A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

(در قسمت ج) مثال‌های درست دیگری نیز می‌توان نوشت که قابل قبول است.)

(صفحه ۸، ۷، ۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) هر مجموعه که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد را یک مجموعه متناهی می‌گوییم. (۲۵، شماره)

ب) مثلاً اگر A مجموعه اعداد حقیقی به جز صفر باشد، آنگاه $A' = \{0\}$ یک مجموعه متناهی می‌باشد. (هر مثال درست دیگری قابل قبول است) (۲۵، شماره)

$$A = \mathbb{R} - \{0\}$$

ج)

$$A = \{2, 4, \dots\} \Rightarrow A - B = \emptyset, B - A = \{1, 3, 5, \dots\}$$

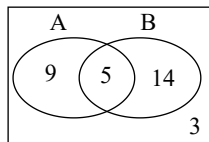
(در قسمت ج) مثال‌های درست دیگری نیز می‌توان نوشت که قابل قبول است.)

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

۱۲ می‌دانیم: اگر گروه سرود را A و گروه تئاتر را B بنامیم، داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 14 - 5 = 9$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 19 - 5 = 14$$



$$\text{الف) } n(A - B) = 9$$

$$\text{ب) } n(U) - n(A \cup B) = 31 - (9 + 5 + 14) = 31 - 28 = 3$$

۱۳

اگر M مجموعه مرجع باشد متمم مجموعه A را به صورت $M - A$ تعریف می‌کنیم و با A' نشان می‌دهیم.

$$\text{الف) } A' = \{b, c, d\}$$

$$\text{ب) } B' = \{a, d, e\}$$

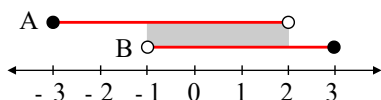
$$\text{پ) } A \cap B' = \{a, e\} \cap \{a, d, e\} = \{a, e\}$$

$$\text{ت) } A' \cup B = \{b, c, d\} \cup \{b, c\} = \{b, c, d\}$$

$$\text{ث) } A - B' = \{a, e\} - \{a, d, e\} = \emptyset$$

۱۴

باتوجه به محور اعداد داریم:



$$A \cap B = (-1, 2) \Rightarrow (A \cap B)' = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

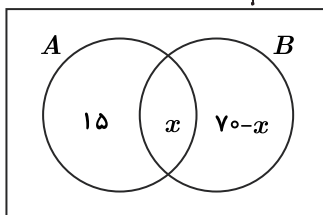
۱۵ روش اول:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) \Rightarrow 15 = 60 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 45$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 60 + 70 - 45 = 85$$

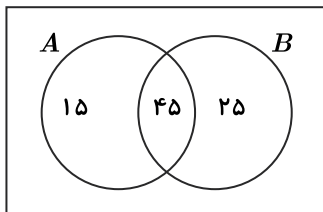


روش دوم:



$$n(A \cup B) = 15 + x + (70 - x) = 85$$

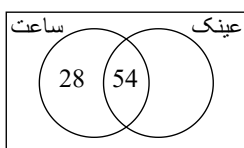
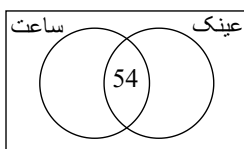
روش سوم:



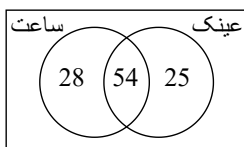
$$n(A \cup B) = 15 + 45 + 25 = 85$$

۱۶

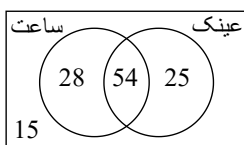
باتوجه به نمودار ون:



۸۲ نفر ساعت دارند که ۵۴ نفرشان عینک هم می‌زنند و $82 - 54 = 28$ نفر فقط ساعت دارند.

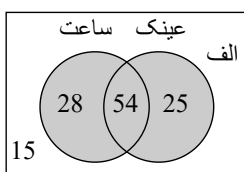


۷۹ نفر عینک می‌زنند که ۵۴ نفرشان ساعت هم دارند و $79 - 54 = 25$ نفر فقط عینک می‌زنند.

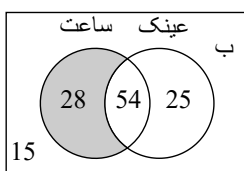


$$28 + 54 + 25 = 107$$

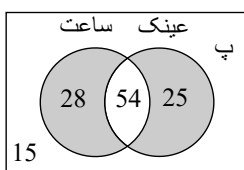
مجموع کسانی که ساعت، عینک یا هر دو را دارند ۱۰۷ نفر است که از ۱۲۲ نفر باقی می‌مانند که نه ساعت دارند نه عینک می‌زنند.



الف) $28 + 28 + 54 = 107$ حداقل یکی یعنی یا ساعت یا عینک یا هر دو



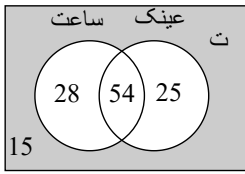
ب) ۲۸



$$28 + 25 = 53 \text{ (پ)}$$

دقیقاً یکی از دو مورد یعنی یا ساعت یا عینک فقط یک کدام (نه هر دو)

ت) ۱۵ نفر



۱۷ طبق رابطه‌ی تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه داریم:

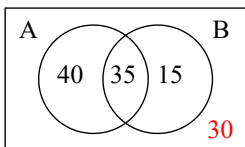
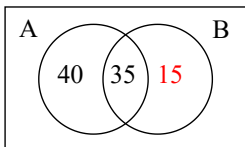
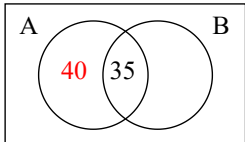
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$14 = 10 + n(B) - 3 \Rightarrow n(B) = 14 - 10 + 3 = 7$$

۱۸ باتوجه به نمودار ون داریم:

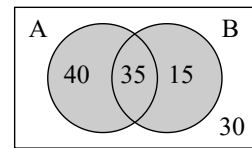
۱- از آنجا که $n(A) = 75$ است و $n(A \cap B) = 35$ نتیجه می‌گیریم که A ، ۴۰ عضو دارد که در $(A \cap B)$ نیست.

۲- با استدلال مشابه برای B داریم:

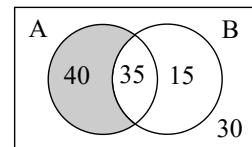


۳- از $40 + 35 + 15 = 90$ و $n(u) = 120$ نتیجه می‌گیریم ۳۰ عضو مجموعه‌ی مرجع در هیچ یک از مجموعه‌های A و B یا اکثرشان نیستند.

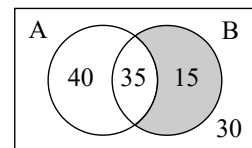
با توجه به نمودار ون:



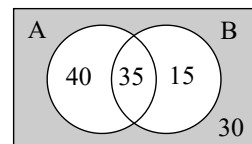
الف) $A \cup B$



ب) $A \cap B'$



پ) $A' \cap B$



ت) $A' \cap B'$

الف) $n(A \cup B) = 90$

ب) $n(A \cap B') = 40$

پ) $n(A' \cap B) = 15$

ت) $n(A' \cap B') = 30$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

راه اول: اگر آزمایش خون را با K و آزمایش قند را با G نشان دهیم:

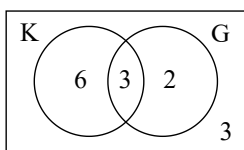
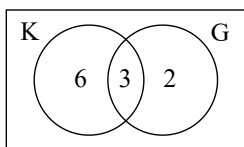
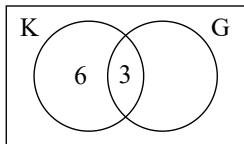
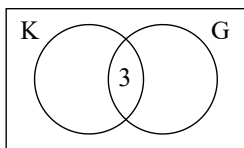
$$\begin{cases} n(K) = 9 \\ n(G) = 5 \\ n(K \cap G) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} n(K \cup G) &= n(K) + n(G) - n(K \cap G) \\ n(K \cup G) &= 9 + 5 - 3 = 11 \end{aligned}$$

یازده نفر آزمایش خون یا قند $(K \cup G)$ را انجام داده‌اند.

ب) $n(K \cup G)' = n(u) - n(K \cup G) = 14 - 11 = 3$



راه دوم:



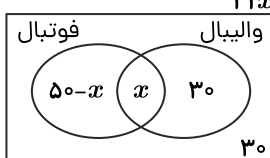
می‌دانیم در مجموع ۹ نفر آزمایش خون داده‌اند که ۳ نفر آزمایش قند هم داده‌اند پس ۶ نفر فقط آزمایش خون داده‌اند:

با استدلال مشابه در می‌یابیم که ۲ نفر فقط آزمایش قند داده‌اند:

با جمع کردن تعداد نفرات و مقایسه با تمام مراجعه‌کنندگان در می‌یابیم که ۳ نفر در هیچ کدام یک از این دو آزمایش شرکت نکرده‌اند و نمودار ون به شکل زیر کامل می‌گردد:

۲۰ فرض کنیم x نفر به هر دو رشته علاقه‌مند هستند، با توجه به نمودار ون داریم:

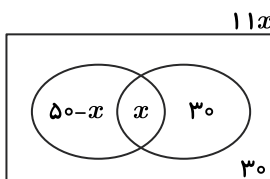
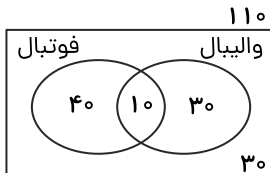
$$11x \Rightarrow (50 - x) + x + 30 + 30 = 11x \Rightarrow 110 = 11x \Rightarrow x = 10$$



الف) پس ۴۰ نفر فقط به فوتبال و ۳۰ نفر فقط به والیبال علاقه دارند؛ بنابراین ۷۰ نفر فقط به یک رشته علاقه دارند.

ب) تعداد $40 + 10 + 30 = 80$ نفر به هر دو رشته علاقه دارند.

(صفحه ۱۳ کتاب درسی)



راهنمای تصحیح:

رسم نمودار ون (۲۵، ۰، ۲۵)

محاسبه مقدار $x = 10$ (۲۵، ۰، ۲۵)

الف) ۷۰ نفر (۲۵، ۰، ۲۵)

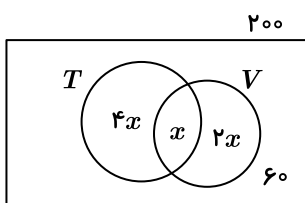
ب) ۸۰ نفر (۲۵، ۰، ۲۵)

۲۱ اگر تعداد افرادی که هر دو کار تایپ و ویراستاری را انجام می‌دهند برابر x در نظر بگیریم، با رسم نمودار ون داریم:

V = مجموعه افرادی که کار ویراستاری می‌کنند و T = مجموعه افرادی که کار تایپ می‌کنند

$$200 \times \frac{30}{100} = 60 \rightarrow \text{افرادی که این دو کار را انجام نمی‌دهند.}$$

$$4x + x + 2x + 60 = 200 \Rightarrow 7x = 140 \Rightarrow x = 20$$



$$n(T \cup V) = 4x + x + 2x = 140$$

الف)

(ب)

$$n(T \cup V) - n(T \cap V) = 4x + 2x = 6x = 120$$

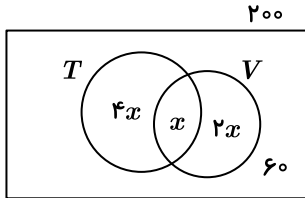
(صفحة ۱۲، ۱۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(ب) ۱۲۰ (۲۵، نمره)

(الف) ۱۴۰ (۲۵، نمره)

روش اول: نمودار ون:



(۵/۰ نمره)

$$\underbrace{4x + 60 = 200}_{(۲۵، نمره)} \Rightarrow x = 20 \quad (۲۵، نمره)$$

روش دوم:

$$\left. \begin{array}{l} n(T \cap V) = x \\ n(T) - n(T \cap V) = 4x \quad (۲۵، نمره) \\ n(V) - n(T \cap V) = 2x \quad (۲۵، نمره) \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{4x + 2x + x + 60 = 200}_{(۲۵، نمره)} \Rightarrow x = 20$$

۲۲

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 4 = 3 \times 2 - 2 \\ a_3 &= 7 = 3 \times 3 - 2 \\ a_4 &= 10 = 3 \times 4 - 2 \\ a_n &= 3 \times n - 2 = 3n - 2 \end{aligned}$$

$$a_n = 3n - 2 \Rightarrow 34 = 3x - 2 \Rightarrow 36 = 3x \Rightarrow x = 12$$

دوازدهمین شکل

جمله ی عمومی دنباله الگوی خطی به فرم $an + b$ می باشد ۲۳

$$\begin{cases} a_3 = 3a + b = 8 \\ a_4 = 7a + b = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} 4a &= 20 \\ a &= 5 \end{aligned}$$

$$3 \times 5 + b = 8 \Rightarrow 15 + b = 8 \Rightarrow b = -7$$

$$a_n = 5n - 7$$

$$\Rightarrow 5n - 7 = 53 \Rightarrow 5n = 60 \Rightarrow n = 12 \quad \text{دوازدهمین جمله}$$

جمله ی عمومی دنباله الگوی خطی به فرم $a_n + b$ می باشد ۲۴

$$t_n = an + b \rightarrow \begin{cases} 5a + b = 23 \\ 7a + b = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = -8 \\ 2a = 8 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$$

$$7a + b = 31 \Rightarrow 7 \times 4 + b = 31 \Rightarrow 28 + b = 31 \Rightarrow b = 3$$

$$\text{جمله عمومی } a_n = 4n + 3$$

۲۵

روش اول:

$$\frac{t_4}{t_2} = \frac{t_1 r^4}{t_1 r^2} = r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{192}{24} = 8 \Rightarrow r = 2$$

روش دوم:

$$t_4 = t_2 \times r^2 \rightarrow 192 = 24 \times r^2 \rightarrow r^2 = 8 \rightarrow r = 2$$

۲۶

قدر نسبت: d ، جمله ی اول دنباله: $a_1 + (n - 1)d$ ، جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$\begin{cases} a_{11} = a_1 + 10d = 25 \\ a_{17} = a_1 + 16d = 37 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 10d = -25 \\ a_1 + 16d = 37 \end{cases}$$



$$6d = 12 \Rightarrow d = 2$$

$$a_1 + 10 \times 2 = 25 \Rightarrow a_1 + 20 = 25 \Rightarrow a_1 = 5$$

$$a_n = 5 + (n-1) \times 2$$

$$a_n = 5 + 2n - 2 = 2n + 3$$

۲۷

قدر نسبت: d ، جمله ی اول دنباله: $a_n = a_1 + (n-1)d$ جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 21 \\ d = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 21 + (n-1) \times -3 = 21 - 3n + 3 = 24 - 3n$$

$$a_n < 0 \Rightarrow 24 - 3n < 0 \Rightarrow 24 < 3n \xrightarrow{\div 3} 8 < n$$

$n > 8 \Rightarrow n \geq 9$ از جمله هشتم به بعد دنباله منفی می شود، یعنی اولین جمله منفی دنباله نهمین جمله آن است.

۲۸

قدر نسبت: d ، جمله ی اول دنباله: $a_n = a_1 + (n-1)d$ جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

الف) حسابی (با توجه به اضافه شدن مقدار ثابت ۳ به تک تک جملات)

(ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 2 \\ d = 3 \end{array} \right. \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)d = 2 + (n-1) \times 3 \Rightarrow a_n = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$$

$$a_{12} = 3 \times 12 - 1 = 36 - 1 = 35 \quad \text{پ)}$$

$$a_n = 20 = 3n - 1 \Rightarrow 3n = 21 \Rightarrow n = 7 \quad \text{ت) هفتمین جمله}$$

۲۹

قدر نسبت: d ، جمله ی اول دنباله: $a_n = a_1 + (n-1)d$ جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$a_1 = \frac{a_3}{2} = \frac{a_1 + 2d}{2} \rightarrow 2a_1 = a_1 + 2d \Rightarrow a_1 = 2d$$

$$a_{15} = a_1 + 14d = 2d + 14d = 16d$$

جمله پانزهم، ۱۶ برابر قدر نسبت دنباله است.

۳۰

قدر نسبت: d ، جمله ی اول دنباله: $a_n = a_1 + (n-1)d$ جمله ی عمومی دنباله ی حسابی

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$$

$$\frac{a_3 + a_4 + a_5}{3} = a_1 + a_2$$

$$\frac{a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d}{3} = a_1 + a_1 + d$$

$$\frac{3a_1 + 9d}{3} = 2a_1 + d$$

$$a_1 + 3d = 2a_1 + d$$

$$2d = a_1$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + a_1 + 4d = 100$$

$$5a_1 + 10d = 100 \xrightarrow{a_1=2d} 5 \times 2d + 10d = 100 \quad 10d + 10d = 100$$

$$20d = 100 \Rightarrow d = 5$$

$$a_1 = 2d = 10$$

نحوه ی توزیع نان بین ۵ نفر $10, 15, 20, 25, 30 \rightarrow$

۳۱ الف) می دانیم در دنباله حسابی با جمله اول t_1 و قدر نسبت d جمله عمومی به صورت $t_n = t_1 + (n-1)d$ است.

حال داریم:

$$\left. \begin{array}{l} t_4 = -6 \Rightarrow t_1 + 3d = -6 \quad (1) \\ t_{14} = 14 \Rightarrow t_1 + 13d = 14 \quad (2) \end{array} \right\} \xrightarrow{(2)-(1)} 10d = 20 \Rightarrow d = 2 \quad (*)$$

اکنون به کمک رابطه (۱) یا (۲) جمله اول را به دست می آوریم:

$$t_1 + 3d = -6 \xrightarrow{(*)} t_1 + 6 = -6 \Rightarrow t_1 = -12$$

(صفحه ۲۴ کتاب درسی)

ب) می‌دانیم اگر r قدرنسبت دنباله هندسی a_n باشد، آنگاه: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = r$

حال داریم:

$$\begin{aligned} x+1, 2x+5, 4x+19, \dots &\Rightarrow \frac{2x+5}{x+1} = r, \frac{4x+19}{2x+5} = r \\ \Rightarrow \frac{2x+5}{x+1} &= \frac{4x+19}{2x+5} \Rightarrow (2x+5)^2 = (4x+19)(x+1) \\ \Rightarrow 4x^2 + 20x + 25 &= 4x^2 + 23x + 19 \\ \Rightarrow 3x &= 6 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

پس قدرنسبت دنباله برابر است با:

$$r = \frac{2x+5}{x+1} = \frac{9}{3} = 3$$

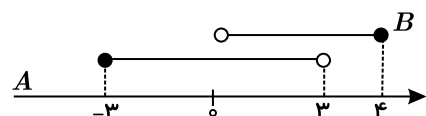
(صفحه ۲۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) $t_1 + 3d = -6$ (نمره ۲۵) $\Rightarrow d = 2$ (نمره ۲۵), $t_1 = 12$ (نمره ۲۵)
 $t_1 + 13d = 14$ (نمره ۲۵)

ب) $\frac{2x+5}{x+1} = \frac{4x+19}{2x+5}$ یا $(2x+5)^2 = (x+1)(4x+19)$ (نمره ۲۵)
 $x = 2$ (نمره ۲۵) $\Rightarrow r = 3$ (نمره ۲۵)

۳۲ الف ۴: با نمایش هندسی هر دو مجموعه داریم:



$$A - B = [-3, 0]$$

پس مجموعه $A - B$ شامل چهار عدد صحیح ۰، -۱، -۲، -۳ است. (صفحه ۴ و ۵ کتاب درسی)

ب) جدا از هم - مجزا: اگر $A \cap B = \emptyset$ ، آنگاه دو مجموعه A ، B را دو مجموعه «جدا از هم» یا «مجزا» می‌گوییم.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \xrightarrow{\text{طبق فرض}} n(A \cup B) = n(A) + n(B) \Rightarrow n(A \cap B) = 0 \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

(صفحه ۱۰ کتاب درسی)

ج) ۱۳: باید نامعادله $t_n < 0$ را حل کنیم:

$$5n - 69 < 0 \Rightarrow 5n < 69 \Rightarrow n < \frac{69}{5} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 1, 2, \dots, 13 \Rightarrow \text{دنباله ۱۳ جمله منفی دارد}$$

(صفحه ۱۹، ۱۸ کتاب درسی)

د) ۲۶۰۰:

روش اول:

$$\left. \begin{aligned} 12, x, 40 &\xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 40 - x = x - 12 \Rightarrow 2x = 52 \Rightarrow x = 26 \\ 2, y, 50 &\xrightarrow{\text{دنباله هندسی}} \frac{y}{2} = \frac{50}{y} \Rightarrow y^2 = 100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy^2 = 2600$$

روش دوم: اگر $b = \frac{a+c}{2}$ باشد، b را واسطه حسابی a ، c می‌گوییم و اگر $y^2 = x \cdot z$ باشد، y را واسطه هندسی x ، z می‌نامند.

$$\left. \begin{aligned} 40, x, 12 &\xrightarrow{\text{واسطه حسابی}} x = \frac{12+40}{2} = 26 \\ 50, y, 2 &\xrightarrow{\text{واسطه هندسی}} y^2 = 2 \times 50 = 100 \end{aligned} \right\} \Rightarrow xy^2 = 2600$$

(صفحه ۲۶، ۲۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) ۴ (۵ نمره)

ب) جدا از هم - مجزا (۵ نمره)



ج ۱۳ (۵، نمره)

د ۲۶۰۰ (۵، نمره)

۳۳

قدر نسبت: r , جمله اول دنباله: $a_1 = a_1 r^{n-1} a_n$ جمله عمومی دنباله هندسی

$$12, \circ, \circ, \circ, 192$$

$$a_1 \quad a_5$$

$$a_1 = 12$$

$$a_5 = a_1 r^4 = 192$$

$$12 \times r^4 = 192$$

$$r^4 = \frac{192}{12} = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = 2 \Rightarrow 12, 24, 48, 96, 192 \\ r = -2 \Rightarrow 12, -24, 48, -96, 192 \end{cases}$$

۳۴

می‌دانیم: جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول t_1 و قدر نسبت r برابر با $t_n = t_1 r^{n-1}$ است.

$$\begin{cases} t_3 = t_1 r^2 = 12 \\ t_6 = t_1 r^5 = 96 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_1 r^5}{t_1 r^2} = \frac{96}{12} = 8 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$$

$$t_1 r^2 = 12 \xrightarrow{r=2} t_1 \times 4 = 12 \Rightarrow t_1 = 3$$

دنباله: ۳, ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, ۹۶, ...

۳۵

$$a_1 + a_4 = 56 \Rightarrow a + ar^3 = 56 \Rightarrow a(1 + r^3) = 56$$

$$a_2 + a_5 = 24 \Rightarrow ar + ar^4 = 24 \Rightarrow ar(1 + r) = 24$$

$$\frac{a(1 + r^3)}{ar(1 + r)} = \frac{56}{24} \xrightarrow{\text{مکعبیات}} \frac{(1+r^3)(1-r+r^2)}{r(1+r)} \xrightarrow{\text{اتحاد نقاضل}}$$

$$\Rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه ۲}} r = 3, \frac{1}{3}$$

$$\text{حالت اول: } r = \frac{1}{3} \Rightarrow a\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \Rightarrow a = 54 \Rightarrow a_n = 54\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{حالت دوم: } r = 3 \Rightarrow a(3)(4) = 24 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow a_n = 2(3)^{n-1}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۲ دهم

سال دهم

فهرست

درس اول: نسبت های مثلثاتی

- ۱..... مثلث های متشابه
- ۱..... نسبت های مثلثاتی (تعریف و خواص)
- ۲..... مساحت مثلث

درس دوم: دایره ی مثلثاتی

- ۲..... دایره ی مثلثاتی
- ۳..... تعیین علامت نسبت های مثلثاتی
- ۳..... رابطه ی شیب خط و تانژانت زاویه

درس سوم : روابط بین نسبت های مثلثاتی

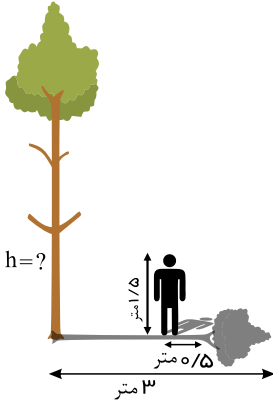
- ۳..... روابط بین نسبت های مثلثاتی
- ۴..... بررسی درستی اتحادهای مثلثاتی



درس اول: نسبت های مثلثاتی

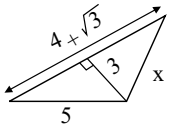
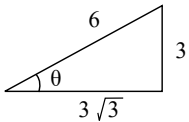
مثلث های متشابه

۱ علی می خواهد ارتفاع یک درخت را که طول سایه آن ۳ متر است، حساب کند. قد علی ۱٫۵ متر و طول سایه او در همان لحظه ۰٫۵ متر است. ارتفاع درخت چقدر است؟



نسبت های مثلثاتی (تعریف و خواص)

۲ در مثلث زیر، نسبت های مثلثاتی زاویه θ را بدست آورید همچنین، اندازه زاویه θ را مشخص کنید.



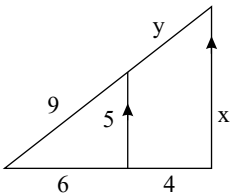
۳ در شکل زیر مقدار x را محاسبه کنید.

۴ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ باشد آنگاه $\sin \alpha = \cos \beta$

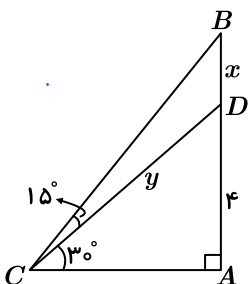
ب) در مثلث قائم الزاویه، ضلع روبه رو به زاویه 30° نصف وتر است.

۵ مقدار x و y به ترتیب در شکل مقابل و می باشد.



۶ حاصل عبارت $3 \tan^2 60^\circ + 2\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cot 45^\circ$ را به دست آورید.

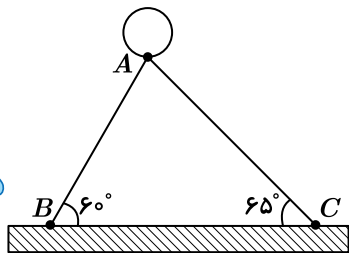
۷ در مثلث روبه رو، مقادیر x و y را به دست آورید.



۸ مطابق شکل مقابل، یک بالن توسط دو طناب AB و AC ، به زمین بسته شده است.

اگر طول طناب AB برابر ۳۶ متر باشد. با توجه به شکل، ابتدا ارتفاع بالن را تعیین و سپس طول طناب AC را محاسبه کنید.

$$(\sin 65^\circ \cong 0.9)$$

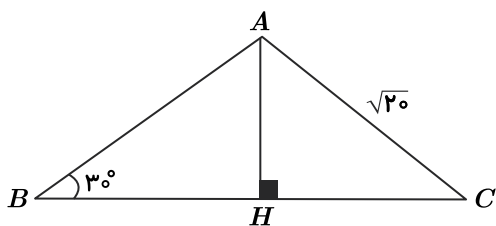


۹ با فرض بامعنی بودن عبارت مقابل، حاصل آن را محاسبه کنید.

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x} \times \cot x$$

۱۰ در شکل مقابل اگر $\cos \hat{C} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ باشد، مطلوب است:

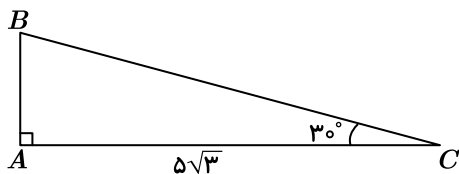
الف) طول CH ب) طول BH



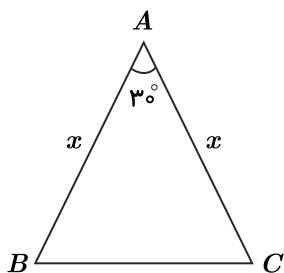
مساحت مثلث

۱۱ طول دو ضلع مثلثی $2\sqrt{3}$ و ۴ و زاویه بین این دو ضلع 60° است. مساحت این مثلث را به دست آورید.

۱۲ مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



۱۳ مساحت مثلث متساوی الساقین ABC برابر ۹ است. اندازه x را به دست آورید.



درس دوم: دایره ی مثلثاتی

دایره ی مثلثاتی

۱۴ درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید.

الف) زاویه ی 90° در ربع اول است.

ب) زاویه ی 180° در ربع سوم است.



۱۵ $\sin \theta + \cos \alpha$ همواره عددی در بازه $[a, b]$ است. مطلوبست محاسبه‌ی مقدار عددی $3a - 5b$.

۱۶ نقطه P به طول $\frac{1}{3}$ روی دایرهٔ مثلثاتی و در ناحیهٔ چهارم مثلثاتی قرار دارد. اگر زاویهٔ بین نیم‌خط $\overrightarrow{OP}$ با محور $\overrightarrow{Ox}$ باشد، حاصل $\cos \theta + \tan^2 \theta$ را به دست آورید.

۱۷ توضیح دهید که اگر انتهای کمان روبه‌رو به زاویه‌ای در ربع اول باشد (زاویه در ربع اول باشد)، آنگاه چرا نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه، همگی مثبت‌اند؟

تعیین علامت نسبت‌های مثلثاتی

۱۸ θ زاویه‌ای در ربع دوم است؛ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\frac{\sin \theta |\cos \theta| - |\sin \theta| \cos \theta}{|\sin \theta \cos \theta|}$$

۱۹ جدول زیر را کامل کنید:

مقدار	0°	90°	?	270°	360°
$\sin \theta$	۰		۰	-۱	۰
$\cos \theta$			-۱		
$\tan \theta$		تعریف نشده	۰		
$\cot \theta$			تعریف نشده		

رابطه‌ی شیب خط و تانژانت زاویه

۲۰ خطی از نقطه‌ی $A(2, 3)$ گذشته و محور x را با زاویه‌ی 45° قطع می‌کند، عرض نقطه‌ای به طول ۴ بر روی این خط کدام است؟

۲۱ دو خط L_1 و L_2 یکدیگر را با چه زاویه‌ای قطع می‌کنند؟

$$L_1 : \sqrt{3}x - 1$$

$$L_2 : -x + 7$$

۲۲ معادلهٔ خطی را بنویسید که با جهت مثبت محور x زاویهٔ 45° می‌سازد و از نقطهٔ $(3, -2)$ می‌گذرد.

۲۳ خط d با معادلهٔ $5x + 2y = c$ مفروض است. اگر زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد، برابر α باشد، حاصل $\sin \alpha$ را به دست آورید.

۲۴ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف اگر زاویهٔ خطی با جهت مثبت محور افقی 45° باشد آنگاه شیب آن برابر است.



درس سوم : روابط بین نسبت‌های

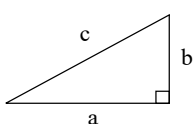
مثلثاتی

روابط بین نسبت‌های مثلثاتی

۲۵ اگر داشته باشیم $\sin \alpha = 0.6$ ، $\cot \alpha$ را بدست آورید.

۲۶ با فرض $\cot \alpha = 2$ ، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha}{3 \sin \alpha + \cos \alpha}$$



۲۷ در مثلث روبرو اگر $\frac{b}{c} = \frac{1}{3}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.





۲۸ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۲۹ با فرض با معنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{ب)}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{الف)}$$

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x \quad \text{ت)}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha \quad \text{پ)}$$

$$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x} \quad \text{ث)}$$

۳۰ اگر $\tan 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار سایر نسبت‌های مثلثاتی 15° را به دست آورید.

۳۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، $AB = 2$ ، $\hat{A} = 90^\circ$ و $\tan C = \frac{1}{3}$ می‌باشند. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه C را به دست آورید.

۳۲ اگر $27^\circ < a < 36^\circ$ و $\tan a = \frac{-4}{3}$ ، نسبت‌های مثلثاتی $\cot a$ و $\cos a$ را به دست آورید.

۳۳ اگر $45^\circ < x < 90^\circ$ ، $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ باشد، مقدار $\sin x + \cos x$ را به دست آورید.

بررسی درستی اتحادهای مثلثاتی

۳۴ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

۳۵ درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} = |\cot \alpha|$$

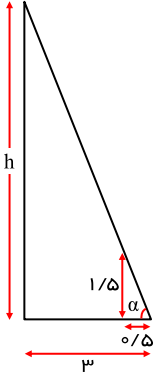


پاسخنامه تشریحی

۱

$$\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}}$$

شکل کتاب در این سؤال ایراد داشته و تصحیح شده آن به شکل مقابل است:
با نوشتن $\tan \alpha$ در دو مثلث داریم:



$$\tan \alpha = \frac{1/5}{3/5} = \frac{h}{3} \Rightarrow h = \frac{3 \times 1/5}{3/5} = 9m$$

۲

$$\sin \theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

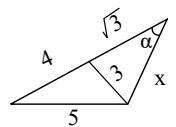
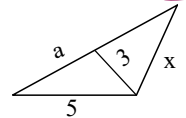
$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

باتوجه به مقادیر بدست آمده، اندازه زاویه θ ، 30° است.

۳

باتوجه به رابطه فیثاغورس داریم:

$$3^2 + a^2 = 5^2 \Rightarrow 9 + a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$



$$\tan \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

$$\tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{x} \Rightarrow x = 2\sqrt{3}$$

۴

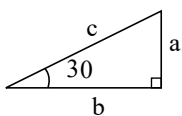
الف) درست: اگر $\alpha = 30^\circ$ و $\beta = 60^\circ$ باشد:

یا اگر $\beta = \alpha = 45^\circ$ باشد:

ب) درست:

$$\sin \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \cos \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\sin 30^\circ = \frac{a}{c} = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{c}{2}$$

$$\frac{5}{x} = \frac{6}{10} = \frac{9}{9+y} \Rightarrow x = \frac{10 \times 5}{6} = \frac{25}{3} \text{ و } y = \frac{36}{6} = 6$$

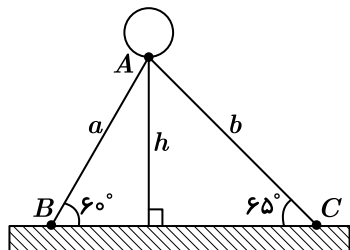
$$3 \tan^2 60^\circ + 2\sqrt{2} \sin 45^\circ - \cot 45^\circ = 3(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1 = 9 + 2 - 1 = 10$$

۷



$$\triangle ACD : \sin 30^\circ = \frac{AD}{CD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = 8 \Rightarrow AC^2 = CD^2 - AD^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow CA = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\triangle ABC : \tan 60^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \Rightarrow 4 + x = 4\sqrt{3} \Rightarrow x = 4\sqrt{3} - 4$$



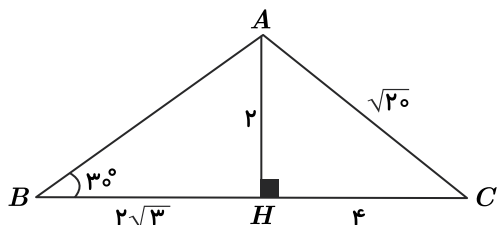
$$\sin 60^\circ = \frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{36} \Rightarrow h = 18\sqrt{3}$$

$$\sin 60^\circ = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{9}{10} = \frac{18\sqrt{3}}{b} \Rightarrow b = 20\sqrt{3}$$

$$\frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \times \cot x = \frac{\sin x(1 - \sin^2 x)}{\cos^2 x} \times \cot x = \frac{\sin x \times \cos^2 x}{\cos^2 x} \times \cot x$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x} \times \cot x = \tan x \times \cot x = 1$$

۱۰ الف ابتدا با توجه به $\cos \hat{C} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ طول CH را به دست می آوریم:



$$\triangle AHC : \cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{HC}{\sqrt{20}}$$

$$\Rightarrow HC = \frac{2\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times 2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 4$$

ب) با استفاده از رابطه فیثاغورس AH را به دست می آوریم:

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH^2 = (\sqrt{20})^2 - (4)^2 = 20 - 16 = 4$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{4} = 2$$

$$\triangle ABH : \tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{BH} \Rightarrow BH = 2\sqrt{3}$$

حال داریم:

(صفحه ۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف)

$$\cos \hat{C} = \frac{HC}{AC} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{HC}{\sqrt{20}} \Rightarrow HC = 4 \text{ (نمره ۲۵, نمره ۲۵)}$$

$$AH^2 = \sqrt{20}^2 - 4^2 \Rightarrow AH = 2 \text{ (نمره ۲۵, نمره ۲۵)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan 30^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{BH} \Rightarrow BH = 2\sqrt{3} \text{ (نمره ۲۵, نمره ۲۵)} \\ \cot 30^\circ = \frac{BH}{AH} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BH}{2} \Rightarrow BH = 2\sqrt{3} \text{ (مشابه روش بالا)} \end{array} \right.$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A = \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(4) \sin 60^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

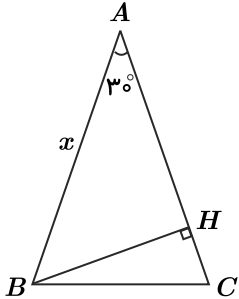
$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = 10$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

روش اول:

$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin 30^\circ = 9 \Rightarrow \frac{1}{2} \times x^2 \times \frac{1}{2} = 9 \Rightarrow x = 6$$

روش دوم:



$$\triangle ABH : \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{x}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{BH \times AC}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times x}{2} = 9 \Rightarrow x = 6$$

۱۴ الف و ب هر دو نادرست:

زوایای ۰، ۹۰، ۲۷۰، ۳۶۰ و ... در هیچ یک از ربع‌ها نیستند؛ بلکه روی مرز ناحیه‌های مثلثاتی هستند.

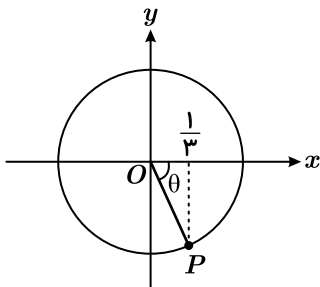
۱۵

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

$$-2 \leq \sin \theta + \cos \alpha \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 3a - 5b = -6 - 10 = -16$$

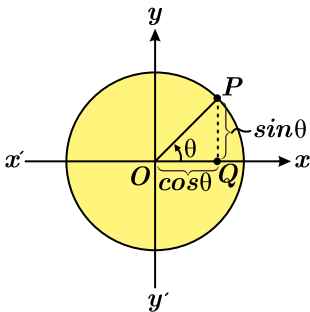
۱۶



$$P(x, y), \quad x = \frac{1}{3}, y < 0$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = 1 &\Rightarrow \frac{1}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{8}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{y < 0} y = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \Rightarrow \cos \theta = x = \frac{1}{3}, \tan \theta = \frac{y}{x} = -2\sqrt{2} &\Rightarrow \cos \theta + \tan^2 \theta = \frac{1}{3} + 8 = \frac{25}{3} \end{aligned}$$

۱۷ با توجه به شکل زیر، زاویه θ را در ربع اول در نظر می‌گیریم. در این صورت اندازه‌های PQ (همان y) و OQ (همان x) همواره مقادیری مثبت خواهند بود.



۱۸ از آنجاکه θ زاویه‌ای در ربع دوم است، در می‌یابیم که $\begin{cases} \sin \theta > 0 \\ \cos \theta < 0 \end{cases}$ ربع دوم

قدر مطلق‌ها را برداشته و عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{\sin \theta |\cos \theta| - |\sin \theta| \cos \theta}{|\sin \theta \cos \theta|} = \frac{\sin \theta (-\cos \theta) - \sin \theta \cos \theta}{-\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{-\sin \theta \cos \theta - \sin \theta \cos \theta}{-\sin \theta \cos \theta} = \frac{-2 \sin \theta \cos \theta}{-\sin \theta \cos \theta} = 2$$

۱۹



مقدار	0°	90°	180°	270°	360°
$\sin \theta$	0	1	0	-1	0
$\cos \theta$	1	0	-1	0	1
$\tan \theta$	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0
$\cot \theta$	تعریف نشده	0	تعریف نشده	0	تعریف نشده

۲۰. برای نوشتن معادله خط، یکی از راه‌ها در دست داشتن شیب خط و یک نقطه از خط است:

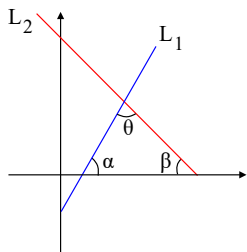
$$A = \left| \frac{2}{3} \right| \text{ شیب } m = \tan 45^\circ = 1$$

$$y = mx + b$$

$$\xrightarrow{m=1} y = x + b \xrightarrow{\left| \frac{2}{3} \right|} 3 = 2 + b \Rightarrow b = 1 \rightarrow y = x + 1$$

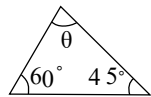
$$y \xrightarrow{x=4} 4 + 1 = 5 \quad (4, 5)$$

۲۱. $m = \tan \alpha$ با توجه به شیب خطوط (ضرایب x) شکل تقریبی از دو خط داده شده را رسم می‌کنیم و با احتساب زاویه‌ی هر یک نسبت به افق، زاویه‌ی این دو نسبت به یکدیگر را بدست می‌آوریم.



$$L_1: \sqrt{3}x - 1 \quad m = \tan \alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$L_2: -x + 7 \quad m = \tan \beta = -1 \Rightarrow \beta = -45^\circ$$



$$\theta = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 180^\circ - 105^\circ \Rightarrow \theta = 75^\circ$$

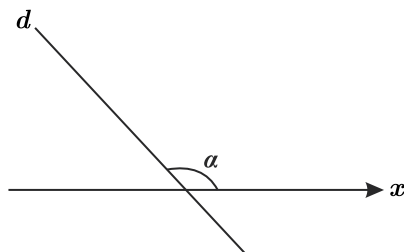
$$\text{شیب خط } m = \tan 45^\circ = 1, A(3, -2)$$

$$\text{معادله خط: } y - (-2) = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 5$$

۲۲. نکته: شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد برابر است. $m = \tan \alpha$ شیب خط ابتدا m ، شیب خط داده شده را به دست می‌آوریم:

$$5x + 2y = c \Rightarrow 2y = -5x + c \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{c}{2} \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

چون $m < 0$ ، پس زاویه‌ای که این خط با محور طول‌ها می‌سازد زاویه‌ای منفرد است. $\tan \alpha = -\frac{5}{2}$ و $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$.



حال داریم:

$$\tan \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{29}{25} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{29}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{29}} \xrightarrow{90^\circ < \alpha < 180^\circ} \sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

(صفحه ۴۰، ۴۱، ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$m = -\frac{5}{2} \text{ (محاسبه شیب خط (۲۵، ۵ نمره))}$$

$$\tan \alpha = -\frac{5}{2} \text{ (۲۵، ۵ نمره)}$$

(۲۵، ۵ نمره) اشاره به α منفرد است یا اشاره به $180^\circ < \alpha < 90^\circ$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \text{ (۵، ۵ نمره)}$$

۲۴

الف

۲۵

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - 0.36 = 0.64 \Rightarrow \cos \alpha = \pm 0.8$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \pm \frac{0.8}{0.6} = \pm \frac{4}{3}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Rightarrow \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

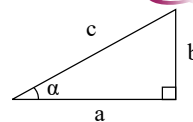
با جایگذاری $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$ خواهیم داشت:

$$\frac{2(2 \sin \alpha) - \sin \alpha}{2 \sin \alpha + 2 \sin \alpha} = \frac{4 \sin \alpha - \sin \alpha}{4 \sin \alpha} = \frac{3 \sin \alpha}{4 \sin \alpha} = \frac{3}{4}$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{2} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = 4 \rightarrow \cot^2 \alpha = 3 \rightarrow \cot \alpha = \sqrt{3} = \frac{a}{b}$$

۲۷ با در نظر گرفتن زاویه ی بین ضلع a و c بعنوان زاویه ی α داریم:



$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{می دانیم: } 28$$

$$1 + \tan^2 \alpha = 1 + (\sqrt{3})^2 = 1 + 3 = 4 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$$

$$\frac{\cos \alpha = \frac{1}{2}}{\cos \alpha < 0} \rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin \alpha < 0} \rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

۲۹

$$\text{الف) } \frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\text{ب) } \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta (1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\text{پ) } \frac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta} = \frac{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$$

$$\text{ت) } 1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + (1 - \cos^2 x)}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x (1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \sin x$$

$$\text{ث) } \frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \times \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$



۳۰

$\theta = 150^\circ$ در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد. در ناحیه دوم مثلثاتی، سینوس مثبت و بقیه منفی اند. بنابراین داریم:

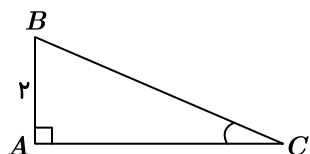
$$1 + \tan^2 150^\circ = \frac{1}{\cos^2 150^\circ} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 150^\circ} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos^2 150^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos^2 150^\circ = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 150^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\cos 150^\circ < 0} -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 150^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 150^\circ} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cot 150^\circ = \frac{1}{\tan 150^\circ} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

۳۱ با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 4$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

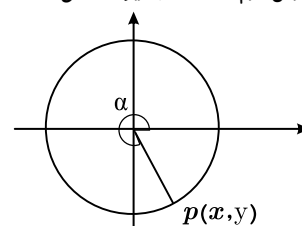
$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۳۲ روش اول: استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \xrightarrow{a \text{ در ناحیه چهارم}} \cos a = +\frac{3}{5}$$

$$\cot a = \frac{1}{\tan a} = -\frac{3}{4}$$

روش دوم: استفاده از دایره مثلثاتی



$$\tan a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}, \cot a = -\frac{3}{4}$$

روش سوم:

$$\tan a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cot a = -\frac{3}{4}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sin a = -\frac{4}{3} \cos a$$

$$\cos^2 a + \frac{16}{9} \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \xrightarrow{a \text{ در ناحیه چهارم}} \cos a = \frac{3}{5}$$

۳۳ ابتدا طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned}\sin x - \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} - 2 \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

اکنون با فرض $\sin x + \cos x = A$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= A \xrightarrow{\text{توان ۲}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1} + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{=\frac{1}{2}} = A^2 \\ \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} &= A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

چون $90^\circ < x < 135^\circ$ است پس $\cos x, \sin x > 0$ و $\sin x + \cos x > 0$ و جواب $\sqrt{\frac{3}{2}}$ است.

روش دوم: با فرض $\sin x + \cos x = A$ داریم:

$$\sin x + \cos x = A \quad (1)$$

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}(1) + (2) &\Rightarrow 2 \sin x = A + \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 \sin^2 x = A^2 + \frac{1}{2} + \frac{2A}{\sqrt{2}} \xrightarrow{(+)} \\ (1) - (2) &\Rightarrow 2 \cos x = A - \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 4 \cos^2 x = A^2 + \frac{1}{2} - \frac{2A}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$$4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 2A^2 + 1 \Rightarrow 4(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{=1}) = 2A^2 + 1 \Rightarrow 2A^2 = 3 \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

چون $90^\circ < x < 135^\circ$ است، پس $\cos x, \sin x > 0$ و $\sin x + \cos x > 0$ و جواب $\sqrt{\frac{3}{2}}$ است.

(صفحه ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad (25 \text{ نمره})$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\sin x + \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5 \text{ نمره})$$

چون $90^\circ < x < 135^\circ$ است، پس $\cos x, \sin x > 0$ و $\sin x + \cos x > 0$ و جواب $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است. (۲۵ نمره)

۳۴

$$\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + 1 - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \sin x$$

۳۵

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha\right) \cot \alpha}{\cos \alpha}} &= \sqrt{\frac{\left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}\right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\cot^2 \alpha} = |\cot \alpha|\end{aligned}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۳ دهم

سال دهم

فهرست

- ۱ درس اول: ریشه و توان
- ۲ درس دوم: ریشه n ام
- ۳ درس سوم: توان های گویا
- ۴ درس چهارم: عبارت های جبری



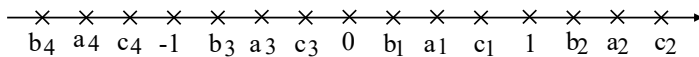
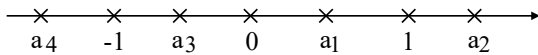
درس اول: ریشه و توان



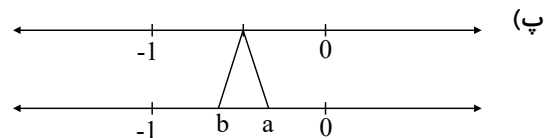
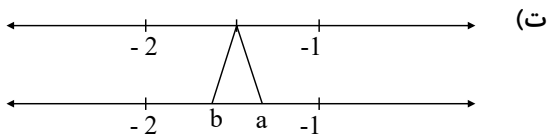
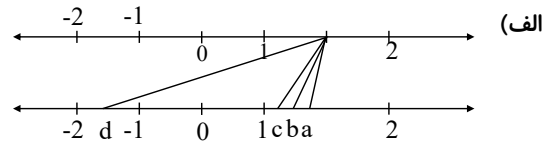
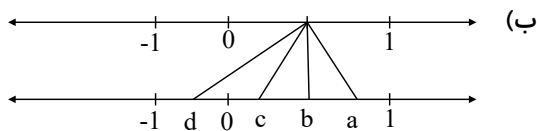
۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف عبارت $\sqrt{\sqrt{81}}$ ، برابر با عدد صحیح است.

۲ هر یک از اعداد مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه‌ی سوم آن عدد است وصل کنید.



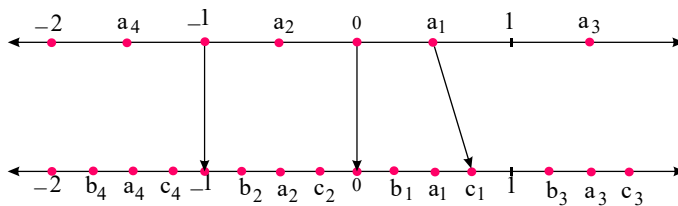
۳ در هر یک از اشکال زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود در محور پایین وصل شده است. مشخص کنید هر کدام از اعداد a و b و c و d مربوط به کدام ریشه است.



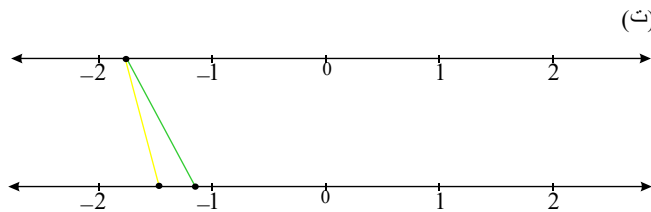
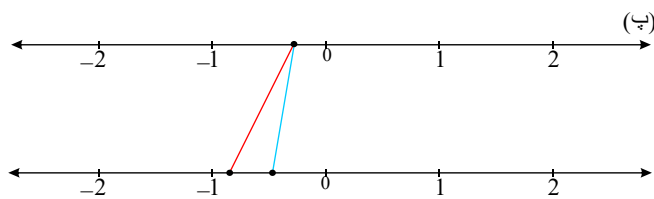
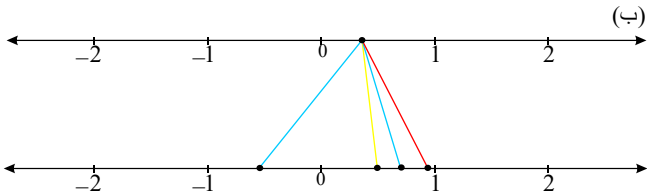
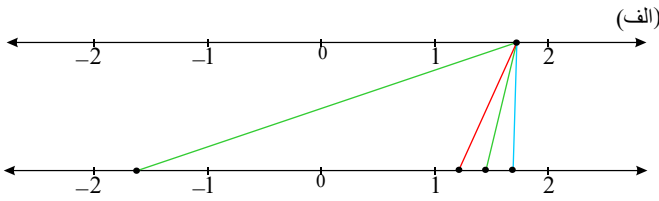
۴ مقدار تقریبی هر کدام از اعداد رادیکالی زیر را با یک رقم اعشار مشخص کنید (می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید).

$$\sqrt{10} \quad \sqrt[3]{7,25} \quad \sqrt[5]{16} \quad \sqrt[6]{64}$$

۵ مانند نمونه در شکل زیر، هر یک از نقاط مشخص شده روی محور بالا را به یکی از نقاط مشخص شده روی محور پایین که متناظر با ریشه‌ی سوم آن عدد است وصل کنید (یک مثال عددی از هر مورد ارائه کنید).

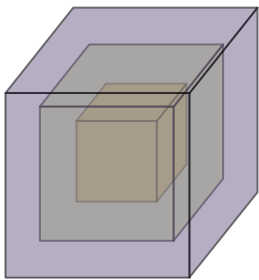


۶ در هر یک از شکل‌های زیر، نقطه‌ای از محور بالا به ریشه‌های سوم، چهارم و پنجم خود وصل شده است. مشخص کنید هر رنگ مربوط به کدام ریشه است.



۷ عبارت گویای $\frac{2x-1}{(x+3)(3x-4)}$ به ازای چه مقادیری از x تعریف نمی‌شود؟

۸ سه مکعب تو در تو مانند شکل مقابل واقع شده‌اند. حجم مکعب بیرونی (بزرگ) برابر ۶۴ و حجم مکعب داخلی (کوچک) ۲۷ است. طول ضلع مکعب میانی چه عددی می‌تواند باشد؟ (حداقل سه پاسخ متفاوت ارائه کنید).



درس دوم: ریشه nام

۹ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف اگر $1 < a < \sqrt[n]{a}$ آنگاه $\sqrt[n]{a} < \sqrt{a}$

۱۰ راجع به تساوی $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n$ با توجه به مثبت یا منفی بودن a و زوج یا فرد بودن n چه می‌توان گفت و این تساوی چه مواقعی برقرار است؟

۱۱ تفاوت $\sqrt{a^2} = |a|$ و $(\sqrt{a})^2 = a$ در چیست؟



۱۲ کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف اگر $\mathbb{Z}$ مجموعه مرجع باشد، آنگاه $(\mathbb{Z} - \mathbb{W})' = \mathbb{N}$

ب اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند، آنگاه $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$

۱۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف ریشه پنجم عدد ۳۲ برابر عدد ۲ است.

۱۴ درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف $\sin 145^\circ$ ، عددی مثبت است.

ب به ازای تمام مقادیر x ، رابطه $\sin x + \cos x = 1$ برقرار است.

ج قطر دایره مثلثاتی برابر یک واحد است.

د هر عدد مثبت حقیقی دارای دو ریشه ششم است که قرینه هم هستند.

۱۵ k, n اعداد طبیعی و بزرگتر از یک هستند. با ارائه یک مثال عددی نشان دهید روابط زیر همواره درست نیستند.

الف $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ ب $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$



درس سوم: توان های گویا



۱۶ تا حد ممکن اعداد زیر رادیکال را خارج کنید.

مثال: $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 4} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$

- | | | | |
|------------------|----------------|----------------|----------------|
| الف) $\sqrt{32}$ | ب) $\sqrt{20}$ | پ) $\sqrt{37}$ | ت) $\sqrt{52}$ |
| ث) $\sqrt{72}$ | ج) $\sqrt{36}$ | چ) $\sqrt{44}$ | ح) $\sqrt{33}$ |
| خ) $\sqrt{24}$ | د) $\sqrt{12}$ | | |

۱۷ حاصل عبارت $\sqrt[n]{a^{2n}} + \sqrt[n+1]{b^{2n+1}}$ را در هر یک از حالت های زیر محاسبه کنید.

(می دانیم که $2n$ نماد اعداد زوج و $2n+1$ نماد اعداد فرد هستند)

- | | |
|---------------------|-------------------|
| الف) $a > 0, b > 0$ | ب) $a > 0, b < 0$ |
| ج) $a < 0, b < 0$ | د) $a < 0, b > 0$ |

۱۸ حاصل عبارت $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5}$ را بیابید؟

۱۹ عدد $\sqrt[3]{-3\sqrt[3]{3}}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۲۰ عدد $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$ را به صورت یک رادیکال بنویسید.

۲۱ اگر داشته باشیم $\sqrt[3]{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x}}} = y^{\frac{1}{2}}$ ، چه رابطه ی بین x و y برقرار است؟

۲۲ هر یک از عبارت های زیر را به شکل رادیکالی نوشته و در صورت امکان حاصل آنها را به دست آورید.

$\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{2}$	$\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} =$	$\frac{1}{64^{\frac{1}{6}}} =$
$\frac{1}{5^{\frac{1}{7}}} =$	$\frac{1}{6^{\frac{1}{4}}} =$	$\frac{1}{81^{\frac{1}{4}}} =$





درس چهارم: عبارت های جبری

۲۳ صورت و مخرج کسر $\frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2}$ را تجزیه و عبارت را ساده کنید.

۲۴ مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$ را گویا کنید.

۲۵ عبارت $x^3 + x^2 - x - 1$ را تجزیه کنید (استفاده از اتحادها به طور مستقیم امکان پذیر نیست)

۲۶ حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها بدست آورید.

الف $(2x - \frac{y}{2})^3$ ب $(3 + 2y)^3$ پ $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

ت $(x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4})$ ث $(x^2 + 2)(x^4 + 2x^2 + 4)(x^2 - 2)(x^4 - 2x^2 + 4)$

۲۷ ابتدا کسرها را گویا کرده و سپس مجموع آن ها را حساب کنید.

$$\frac{2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2}}$$

۲۸ هریک از عبارت های زیر را تا حد ممکن (به عبارت های گویا) تجزیه کنید.

الف $x^4 - y^4$ ب $x^6 - y^6$ پ $8a^3 + 27$ ت $a^3b^6 - 8$

۲۹ حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف $\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1} - \frac{1}{x - 1}$ ب $\frac{1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{5x}{x - 1}$

۳۰ صورت و مخرج کسرها را تجزیه کرده و حاصل را تا حد امکان ساده کنید.

الف

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 5x - 6} \times \frac{x^2 - 4x - 12}{x^2 - 7x + 12} \times \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 4} =$$

ب

$$\frac{4a + 12b}{4a - 12b} \times \frac{6a - 3b}{5a + 15b} =$$

پ

$$\frac{x^2 + 7x + 12}{x^2 - 9} \div \frac{x^2 + 8x + 16}{2x + 8} =$$

ت

$$\frac{6x^2y^2 + 4xy^3}{9x^2 - 4y^2} \div \frac{12x^2y}{9x^2 - 6xy} =$$

۳۱ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف

ک. م. م عبارات $x^3 - 8$ و $x^2 - 4$ به صورت می باشد.

۳۲ حاصل $\sqrt{3 - \sqrt{2}} \times \sqrt[4]{11 + 6\sqrt{2}}$ را به کمک اتحادها به دست آورید.

۳۳ عبارت $x^6 - 2y^6 + 2x^3y^3$ را تجزیه کنید.

۳۴ مخرج کسرها را گویا کنید.



الف

$$\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} =$$

ب

$$\frac{1}{3\sqrt{2} + 4} =$$

پ

$$\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} =$$

ت

$$\frac{h}{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}} =$$

۳۵ اگر $A = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$ ، $B = \sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2}}$ ، مقدار $\frac{2}{AB}$ را به دست آورید.





پاسخنامه تشریحی

۱

الف

۳

۲ $a_1: a_2$ عددی است بین صفر و یک

ریشه‌ی سوم a_1 باید بزرگتر از خودش و کوچکتر از ۱ باشد. در نتیجه ریشه‌ی سوم a_1 ، C_1 خواهد بود.
(اعداد بین صفر و یک، هر چه به توان بزرگتری برسند کوچکتر می‌شوند).

مثال:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{8} > \frac{1}{2^n} \quad (n \geq 3)$$

۲: a_2 عددی بزرگتر از یک است.ریشه‌ی سوم a_2 ، باشد بزرگتر از یک و کوچکتر از a_2 باشد یعنی b_2 .

۳: هر چه یک عدد بین صفر و منفی یک به توان فرد بزرگتری برسد، عدد منفی نزدیک‌تری به صفر به وجود می‌آورد (عددی بزرگتر)

پس ریشه سوم عددی بین صفر و منفی یک، باید از خودش کوچکتر باشد (از صفر دورتر باشد) (می‌دانیم هر چه در اعداد منفی روی محور به سمت چپ حرکت کنیم عدد کوچکتر می‌شود به عنوان مثال: $-2 < -3$)

در نتیجه ریشه‌ی سوم a_3 ، b_3 می‌شود که از خودش کوچکتر است.۴: a_4 عددی منفی و کوچکتر از منفی یک است پس ریشه‌ی سومش از خودش بزرگتر می‌شود.

(می‌دانیم که در محور اعداد منفی هر چه به سمت صفر پیش برویم عددمان بزرگتر می‌شود.)

فقط ریشه‌ی سوم a_4 ، C_4 می‌شود که از خودش بزرگتر است.۳ الف) $a: 3 \quad b: 4 \quad c: 5 \quad d: 4$

اعداد مثبت بزرگتر از یک هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر)، عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

ب) $a: 5 \quad b: 4 \quad c: 3 \quad d: 4$

اعداد مثبت بین صفر و یک، هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر) عددی بزرگتر حاصل می‌شود.

و همچنین، دو ریشه چهارم قرینه یکدیگر دارند.

پ) $a: 3 \quad b: 5$

اعداد بین صفر و منفی یک، هر چه زیر رادیکال با فرجه‌ی فرد بزرگتری قرار بگیرند (ریشه بزرگتر) عدد کوچکتری حاصل می‌کنند.

و در اعداد منفی هر چه به سمت چپ روی محور حرکت کنیم، عدد کوچکتر می‌شود. ضمن اینکه اعداد منفی، تنها ریشه‌های فرد دارند.

ت) $a: 5 \quad b: 3$

اعداد منفی کوچکتر از منفی یک هر چه رادیکال با فرجه‌ی بزرگتری از آنها بگیریم (ریشه بزرگتر)، عدد بزرگتری حاصل می‌کنند.

با توجه به اینکه هر چه روی محور اعداد منفی به سمت چپ حرکت کنیم عدد ما کوچکتر می‌شود و اعداد منفی تنها ریشه‌های فرد دارند.

۴

$$\sqrt{10} \approx 3,2$$

$$\sqrt[3]{16} \approx 1,7$$

$$\sqrt[3]{25} \approx 2,9$$

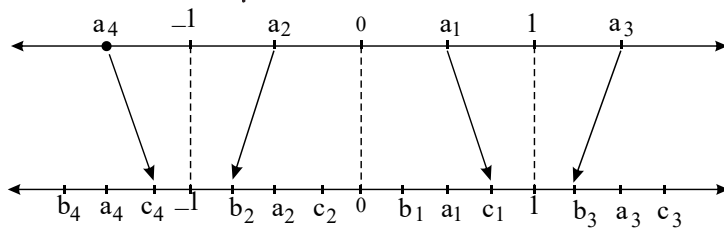
$$\sqrt[3]{64} \approx 2,3$$

$$\sqrt[3]{7,25} \approx 1,9$$

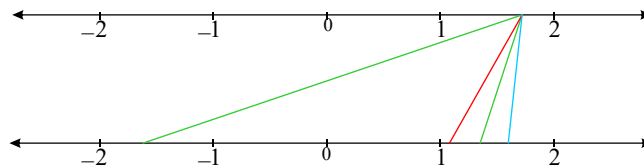
$$\sqrt[3]{90} \approx 3,1$$

۵

۱: هر چه از اعداد بزرگتر از یک، ریشه بزرگتری بگیریم، کوچکتر می‌شوند: $\sqrt[n]{a} < \sqrt{a}$ ؛ مثال: $\sqrt[3]{8} = 2 < \sqrt{8}$ ۲: هر چه از اعداد بین صفر و یک، ریشه بزرگتری بگیریم، بزرگتر می‌شوند: $\sqrt[n]{a} > \sqrt{a}$ ؛ مثال: $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} > \sqrt{\frac{1}{8}}$ ۳: هر چه از اعداد بین صفر و منفی یک، ریشه بزرگتری بگیریم، کوچکتر می‌شوند: $\sqrt[n]{a} > \sqrt{a}$ ؛ مثال: $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} < \sqrt{-\frac{1}{8}}$ ۴: اعداد کوچکتر از منفی یک، هر چه ریشه بزرگتری بگیریم، بزرگتر می‌شوند: $\sqrt[n]{a} > \sqrt{a}$ ؛ مثال: $\sqrt[3]{-8} = -2 < \sqrt{-8}$



۶ الف: اعداد بزرگتر از یک هرچه ریشه بزرگتری از آنها بگیریم، کوچکتر می شوند.

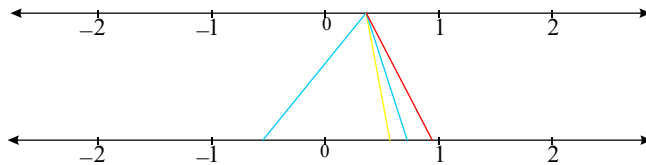


ریشه سوم: آبی

ریشه چهارم مثبت و منفی: سبز

ریشه پنجم: قرمز

ب: اعداد بین صفر و یک هرچه ریشه بزرگتری از آنها بگیریم، بزرگتر می شوند.

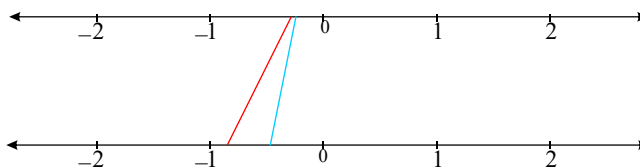


ریشه پنجم: قرمز

ریشه های چهارم مثبت و منفی: آبی

ریشه سوم: زرد

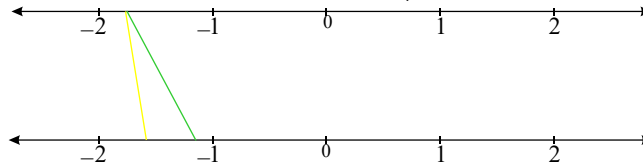
پ: اعداد بین صفر و منفی یک هرچه ریشه بزرگتری از آنها بگیریم کوچکتر می شوند.



ریشه سوم: آبی

ریشه پنجم: قرمز

ت: اعداد کوچکتر از منفی یک هرچه ریشه بزرگتری از آنها بگیریم بزرگتر می شوند.



ریشه سوم: زرد

ریشه پنجم: سبز

$$(x + 3)(3x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \\ 3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \end{cases}$$

بنابراین عبارت داده شده به ازای $x = -3$ و $x = \frac{4}{3}$ تعریف نشده است.

۸ چون مکعب میانی حجمی کمتر از ۶۴ و بیشتر از ۲۷ دارد پس طول ضلع این مکعب باید از $\sqrt[3]{64}$ (یعنی ۴) کمتر باشد و از $\sqrt[3]{27}$ (یعنی ۳) بیشتر باشد، بنابراین طول ضلع مکعب میانی می تواند تمامی اعداد بین ۳ و ۴ باشد. مانند $3\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $3\frac{5}{8}$.

۹

الف

درست

۱۰

اگر n فرد باشد:

$$(\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{a} \times \dots \times \sqrt[n]{a}}_{n \text{ بار}} = \sqrt[n]{a^n} = a$$

$$*: \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

علامت a اهمیتی ندارد.

اگر n زوج باشد و $a \geq 0$

باتوجه به اینکه زیررادیكال با فرجه ی زوج تنها اعداد بزرگتر مساوی صفر قرار می گیرند.

$$(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = |a| \stackrel{a \geq 0}{=} a \quad a \geq 0$$



پس می توان گفت:

در صورت فرد بودن فرجه تساوی همواره برقرار است.

اما اگر فرجه زوج بود، a باید بزرگتر مساوی صفر باشد تا تساوی برقرار شود.

۱۱ در $a = (\sqrt{a})^2$ ، از آنجا که زیر رادیکال به فرجه‌ی زیر عبارت منفی قرار نمی‌گیرد پس $a \geq 0$ و در نتیجه تساوی همواره برقرار است.

اما در $\sqrt{a^2}$ ، از آنجا که عبارت زیر رادیکال a^2 می‌باشد و a^2 در هر صورت (چه a مثبت باشد، چه منفی) مثبت است، پس ممکن است به ازای یک a که مقداری منفی دارد، $\sqrt{a^2}$ شکل بگیرد و پاسخ رادیکال به فرجه‌ی زوج هرگز منفی نخواهد بود که ما را مجبور به استفاده از قدر مطلق می‌کند که اگر احياناً a مقداری منفی بود، باز هم عبارت برقرار باشد مانند $a = -3$

$$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = |-3| = 3$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$(\sqrt{a})^2 = a$$

۱۲

الف

نادرست - زیرا:

$$\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} - \{0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -2, -1\} \Rightarrow (\mathbb{Z} - \mathbb{W})' = \{0, 1, 2, \dots\} \neq \mathbb{N}$$

درست

۱۳

الف

درست

۱۴ الف) درست؛ زیرا انتهای کمان زاویه 145° در ناحیه دوم دایره مثلثاتی قرار دارد، پس $\sin 145^\circ > 0$ است. (صفحه ۳۸ کتاب درسی)

ب) نادرست؛ به ازای هر زاویه دلخواهی مانند x رابطه $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ برقرار است و رابطه $\sin x + \cos x = 1$ به ازای بعضی مقادیر x مثل $x = 0$ درست و به ازای بعضی مقادیر مانند $x = 30^\circ$ نادرست است. (صفحه ۴۳ کتاب درسی)

ج) نادرست؛ دایره مثلثاتی دایره‌ای است جهت دار و به شعاع یک واحد، پس قطر آن ۲ واحد است. (صفحه ۳۶ کتاب درسی)

د) درست؛ اگر n عدد طبیعی زوج باشد، آنگاه هر عدد حقیقی مثبت دارای دو ریشه n ام است که این دو ریشه قرینه هم هستند، مثلاً ریشه ششم عدد ۶۴ برابر ± 2 است. (صفحه ۵۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) درست (۲، ۵ نمره)

ب) نادرست (۲، ۵ نمره)

ج) نادرست (۲، ۵ نمره)

د) درست (۲، ۵ نمره)

۱۵ الف)

$$a = -2, b = -3, n = 2$$

$$\sqrt{ab} = \sqrt{6} \text{ ولی } \sqrt{-2}, \sqrt{-3} \text{ تعریف نشده هستند.}$$

ب)

$$a = -2, n = 4, k = 2$$

$$\sqrt[n]{a^k} = \sqrt[4]{(-2)^2} = \sqrt[4]{4}$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = (\sqrt[4]{-2})^2 = \text{تعریف نشده است}$$

(صفحه ۵۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) اگر n زوج و a, b منفی باشند رابطه نادرست است. (۵ نمره)

$$a = -2, b = -3, n = 2$$

ب) اگر k, n زوج و a منفی باشد رابطه نادرست است. (۵ نمره)

$$a = -2, n = 4, k = 2$$

۱۶

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ و } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \text{ که اگر } n \text{ زوج بود } \leftarrow a \geq 0$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4 \times 8} = \sqrt{4 \times 4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times 2 \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

یا می توان نوشت

$$\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

ب) $\sqrt{20} = \sqrt{4 \times 5} = \sqrt{4} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

پ) $\sqrt{37} = \sqrt{37}$

۳۷ عدد اول است و نمی توان آن را به صورت حاصل ضرب یک عدد مربع کامل در عددی دیگر نوشت.

ت) $\sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = \sqrt{4} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

ث) $\sqrt{72} = \sqrt{2 \times 36} = \sqrt{2} \times \sqrt{36} = 6\sqrt{2}$

ج) $\sqrt{36} = 6$

چ) $\sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

ح) $\sqrt{33} = \sqrt{3 \times 11} = \sqrt{33}$

می بینیم 33 به شکل ساده تری قابل نوشتن نیست چرا که با تجزیه ی آن به 3×11 به دو عدد اول که مربع کامل نیستند بر می خوریم و در نتیجه:

$$\sqrt{33} = \sqrt{33}$$

خ) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

د) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = 2\sqrt{3}$

باتوجه به مثال های بالا در می یابیم برای ساده سازی یک عدد زیر رادیکال به فرجه ی 2 باید آن را به صورت حاصل ضرب عددی در یک عدد مربع کامل بخش کامل آن را از زیر رادیکال خارج کرد.

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ زوج } n$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ فرد } n$$

۱۷

الف) $\sqrt[n]{a^{rn}} + \sqrt[n+1]{b^{rn+1}} = |a| + b \xrightarrow{a > 0} a + b$

ب) $\sqrt[n]{a^{rn}} + \sqrt[n+1]{b^{rn+1}} = |a| + b \xrightarrow{a > 0} a + b$

ج) $\sqrt[n]{a^{rn}} + \sqrt[n+1]{b^{rn+1}} = |a| + b \xrightarrow{a < 0} -a + b$

د) $\sqrt[n]{a^{rn}} + \sqrt[n+1]{b^{rn+1}} = |a| + b \xrightarrow{a < 0} -a + b$

۱۸

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \text{ زوج } n$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ فرد } n$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} - \sqrt[4]{(\sqrt{3}-2)^4} - \sqrt[5]{(\sqrt{3}-2)^5} = \\ & (\sqrt{3}-2) - |\sqrt{3}-2| - (\sqrt{3}-2) \\ & = -|\sqrt{3}-2| \xrightarrow{\sqrt{3}-2 < 0} -(-(\sqrt{3}-2)) = \sqrt{3}-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{-3\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{3\sqrt{3}} = -\sqrt[3]{3 \times 3^{\frac{1}{2}}} = -\sqrt[3]{3^{\frac{3}{2}}} \\ & = -(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}} = -(3^{\frac{1}{2}}) = -\sqrt{3} = -\sqrt{1} \end{aligned}$$

$$\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2} = 3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{6}} \times 2^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{3^2} \times \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3^2 \times 2^2} = \sqrt[6]{12} = \sqrt[6]{108}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{x \sqrt[n]{x}}} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{x \times x^{\frac{1}{n}}}}$$

$$= \sqrt[n]{\sqrt[n]{x^{\frac{n+1}{n}}}} = \sqrt[n]{(x^{\frac{n+1}{n}})^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{x^{\frac{n+1}{n^2}}} = x^{\frac{n+1}{n^2}}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = y^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[\text{به توان ۳}]{\text{طرفین}} (x^{\frac{1}{n}})^3 = (y^{\frac{1}{n}})^3 \Rightarrow x^{\frac{3}{n}} = y^{\frac{3}{n}} \Rightarrow \sqrt[n]{x} = y$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a \geq 0, m, n \in N$$

۱۹

ابتدا منفی را از زیر رادیکال خارج می کنیم:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^k a^m} = a^{\frac{k}{n}} \sqrt[n]{a^m}$$

$$a \geq 0, m, n, k \in N$$

۲۰

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$m, n \in N, a \geq 0$$

۲۱

ابتدا عبارت دارای x را ساده می کنیم:
از داخلی ترین رادیکال شروع می کنیم:



۲۲

$$2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

$$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$$

$$6^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{6}$$

$$81^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$\star 23 \quad \frac{x^2 + x}{x^2 - x - 2} = \frac{x(x+1)}{(x-2)(x+1)} = \frac{x}{x-2}$$

۲۴

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1} \times \frac{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2} + 1} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$$

۲۵

$$x^3 + x^2 - x - 1 \xrightarrow{\text{فاکتور}} x^2(x+1) - (x+1) \xrightarrow{\text{فاکتور}} (x+1)(x^2-1) \\ = (x+1)(x+1)(x-1) = (x+1)^2(x-1)$$

۲۶

$$(a+b)^r = a^r + r a^{r-1} b + r a^{r-2} b^2 + \dots + b^r (a-b)^r = a^r - r a^{r-1} b + r a^{r-2} b^2 - \dots + b^r (a+b)(a^r - ab + b^r) = a^r + b^r (a-b)(a^r + ab + b^r) = a^r - b^r$$

$$\text{الف) } (2x - \frac{y}{2})^r \xrightarrow{\frac{a=2x}{b=-\frac{y}{2}}} (2x)^r - r(2x)^{r-1}(\frac{y}{2}) + r(2x)^{r-2}(\frac{y}{2})^2 - (\frac{y}{2})^r \\ = 8x^3 - 3 \times 4x^2 \times \frac{y}{2} + 3 \times 2x \times \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{8} = 8x^3 - 6x^2y + \frac{3xy^2}{2} - \frac{y^3}{8}$$

$$\text{ب) } (3+2y)^r \xrightarrow{\frac{a=3}{b=2y}} 3^r + r(3)^{r-1}(2y) + r(r-1)(3)^{r-2}(2y)^2 + (2y)^r \\ = 27 + 3 \times 9 \times 2y + 3 \times 3 \times 4y^2 + 8y^3 = 27 + 54y + 36y^2 + 8y^3$$

$$\text{پ) } (x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 8$$

$$\text{ت) } (x - \frac{1}{2})(x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}) = x^3 - \frac{1}{8}$$

$$\text{ث) } (x^2+2)(x^2+2x^2+4)(x^2-2)(x^2-2x^2+4) \\ = (x^2+2)(x^2-2x^2+4) \times (x^2-2)(x^2+2x^2+4) = (x^2+2) \times (x^2-2) \xrightarrow{\text{مزدوج}} x^4 - 4$$

۲۷

$$(I) \quad \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{x-2}$$

$$(II) \quad \frac{3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}} = \frac{3(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x+2}$$

$$I, II \rightarrow \frac{2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt{x}+2\sqrt{2}}{x-2} + \frac{3(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x+2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2) + 3(x-2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{2})(x+2) + 3(x-2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}{x^2-4}$$

۲۸

$$\text{الف) } x^r - y^r = (x^r - y^r)(x^r + y^r) = (x-y)(x+y)(x^r + y^r)$$

$$\text{ب) } x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) = (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^3 - xy + y^3)$$

$$\text{پ) } 8a^3 + 27 = (2a)^3 + 3^3 = (2a+3)(4a^2 - 6a + 9)$$

$$\text{ت) } a^r b^6 - 8 = (ab^2)^r - 2^3 = (ab^2 - 2)(a^r b^4 + 2ab^2 + 4)$$



٢٩

$$\text{الف) } \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} - \frac{5x}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1+2\sqrt{x}-2-5x}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3\sqrt{x}-5x-1}{x-1}$$

$$\text{ب) } \frac{1}{\sqrt[3]{x}-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1 - 1}{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{\sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{x}}{x-1}$$

٣٠

الف

$$\frac{(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+1)} \times \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-3)} \times \frac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x}{x+1}$$

ب

$$\frac{3(a+3b)}{3(a-3b)} \times \frac{3(2a-b)}{5(a+3b)} = \frac{3(2a-b)}{5(a-3b)}$$

ج

$$\frac{(x+3)(x+4)}{(x-3)(x+3)} \times \frac{2(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{2}{x-3}$$

د

$$\frac{yxy^2(3x+2y)}{(3x-2y)(3x+2y)} \times \frac{3x(3x-2y)}{12x^2y} = \frac{y}{2}$$

٣١

الف

$$(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)$$

$$x^2-8 = (x-2)(x^2+2x+4) \text{ و } x^2-4 = (x-2)(x+2)$$

$$\text{م.م.ك} = (x-2)(x+2)(x^2+2x+4)$$

٣٢

$$\sqrt{3-\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{11+6\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(3-\sqrt{2})^2} \times \sqrt[3]{11+6\sqrt{2}} = \sqrt[3]{9-6\sqrt{2}+2} \times \sqrt[3]{11+6\sqrt{2}} =$$

$$\sqrt[3]{(11-6\sqrt{2})(11+6\sqrt{2})} = \sqrt[3]{121-72} = \sqrt[3]{49} = \sqrt[3]{7^2} = \sqrt{7}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{7}+1} = \frac{2}{\sqrt[3]{7}+1} \times \frac{(\sqrt[3]{7})^2 - \sqrt[3]{7} + 1}{(\sqrt[3]{7})^2 - \sqrt[3]{7} + 1} = \frac{2(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{7} + 1)}{\underbrace{(\sqrt[3]{7})^3 + 1^3}_{7+1=8}} = \frac{\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{7} + 1}{2}$$

٣٣

$$x^6 - 2y^6 + 2x^2y^2 = (x^6 + 2x^2y^2 + y^6) - 3y^6 = (x^2 + y^2)^3 - (\sqrt{3}y^2)^3 = (x^2 + y^2 - \sqrt{3}y^2)(x^2 + y^2 + \sqrt{3}y^2)$$

٣٤

الف

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

ب

$$\frac{8}{3\sqrt{2}+4} = \frac{8}{3\sqrt{2}+4} \times \frac{3\sqrt{2}-4}{3\sqrt{2}-4} = \frac{8(3\sqrt{2}-4)}{18-16} = 4(3\sqrt{2}-4)$$

ج

$$\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \times \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(x-y)} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$$

د



$$\frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} = \frac{h}{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{x+h-x} = \frac{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h} = \sqrt{x+h}+\sqrt{x}$$

۳۵. روش اول: می‌دانیم $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ ($a > 0, n, k \in \mathbb{N}, n > 1$)

$$AB = \sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(\sqrt{2}+1)^2} \times \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt[6]{2+2\sqrt{2}+1} \times \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{3+2\sqrt{2}} \times \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[6]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}$$

$$\sqrt[6]{9-8} = \sqrt[6]{1} = 1 \Rightarrow \frac{2}{AB} = 2$$

روش دوم: می‌دانیم $\sqrt[n]{a^n} = |a|$ ($n \in \mathbb{N}$, زوج)

$$B = \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2})^2 - 2(\sqrt{2})(1) + 1} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^2} = \sqrt{|\sqrt{2}-1|} = \sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$AB = \sqrt{\sqrt{2}+1} \times \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2-1} = 1 \Rightarrow \frac{2}{AB} = 2$$

(صفحه ۶۳، ۶۴، ۶۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

روش اول: رسیدن به $\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}}$ (۲۵، نمره) $A =$

$$AB = \sqrt[6]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} \text{ (۲۵، نمره)} \Rightarrow AB = \sqrt[6]{9-8} \text{ (۲۵، نمره)} \Rightarrow \frac{2}{AB} = 2 \text{ (۲۵، نمره)}$$

روش دوم: رسیدن به $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$ (۲۵، نمره) $B =$

$$AB = \sqrt{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} \text{ (۲۵، نمره)} \Rightarrow AB = \sqrt{2-1} \text{ (۲۵، نمره)} \Rightarrow \frac{2}{AB} = 2 \text{ (۲۵، نمره)}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۴ دهم

سال دهم

فهرست

درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

۱..... حل معادله درجه دوم به روش تجزیه

۱..... حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

۲..... حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

درس دوم: سهمی

درس سوم: تعیین علامت

۳..... تعیین علامت چند جمله ای درجه اول

۳..... تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

۴..... نامعادله

۵..... نامعادله های قدرمطلق



درس اول: معادله درجه دوم و روش

های مختلف حل آن

۱ درجه‌ی هر یک از معادلات زیر را تعیین کنید:

الف) $x^2 - 3x + 5 = 2$ ب) $x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0$

پ) $x^2 = -1$ ت) $x = -1$

ث) $\frac{3x^2}{2} + 1 = 0$ ج) $x - 5 = 4$

۲ معادله‌ی درجه‌ی دومی بنویسید که ریشه‌های آن ۱- و ۳ باشد.

۳ هر یک از معادله‌های زیر را با ریشه‌ی دوم گرفتن حل کنید.

۱) $n^2 - 2 = 26$

۲) $x^2 + 12 = 3$

۳) $(3t - 2)^2 = 4$

۴) $3 - 3k = 3k(2k - 1)$

۴ معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

۱) $x^2 - 6x = 7$

۲) $s^2 - 3s + 3 = 0$

۳) $r^2 + 4r + 4 = 0$

۴) $2a^2 + 5a - 3 = 0$

۵ هر یک از معادله‌های زیر را با روش فرمول کلی حل کنید.

۱) $4x^2 - 13x + 3 = 0$

۲) $r - r^2 = 3$

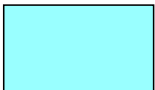
۳) $a^2 + 2\sqrt{3}a = 9$

۴) $\frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0$

۶ طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر مساحت این مستطیل ۴۵ سانتی‌متر مربع باشد، ابعاد این مستطیل را مشخص کنید.

$4a + 3$

a



۷ اگر بدانیم $AB = 0$ ، آنگاه راجع به A و B چه می‌توان گفت؟

۸ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف) $x = 1$ جواب معادله $2x^2 + 4x = 2x + 1$ می‌باشد.

ب) خط $x = 1$ ، محور تقارن سهمی گذرنده از دو نقطه $(2, -1)$ ، $(-1, 0)$ می‌باشد.

پ) عرض رأس سهمی $y = x^2 - 2x$ برابر ۲ می‌باشد.

حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل

۹ معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $4x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$

ب) $3x^2 - 6x + 3 = 1$

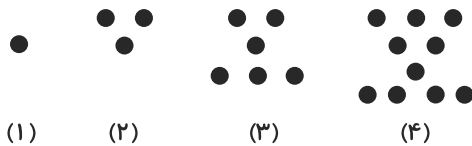




۱۰ گزینه درست را انتخاب کنید.

الف) در الگوی مقابل، تعداد نقاط شکل سی‌ام کدام گزینه است؟

- ۴۷۰ (۱) ۴۶۵ (۲) ۴۳۰ (۳) ۴۳۵ (۴)



ب) اگر $\sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha > 0$ ، $\cot \alpha \cdot \sin \alpha < 0$ ، انتهای کمان زاویه α در کدام ناحیه است؟

- اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

ج) اگر $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2} = 10$ باشد، حاصل $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2}$ کدام است؟

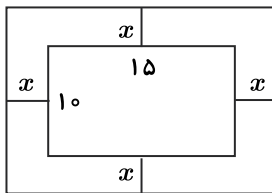
- ۰٫۳ (۱) ۰٫۸ (۲) ۰٫۵ (۳) ۰٫۷ (۴)

د) در حل معادله $3x^2 - 6x - 8 = 0$ با روش مربع کامل، بعد از طی مراحل، کدام معادله زیر به دست می‌آید؟

- $(x-2)^2 = \frac{8}{3}$ (۱) $(x-3)^2 = \frac{14}{3}$ (۲) $(x-1)^2 = \frac{11}{3}$ (۳) $(x-1)^2 = \frac{5}{3}$ (۴)

حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

۱۱ یک عکس به ابعاد ۱۰ در ۱۵ سانتی‌متر درون یک قاب با مساحت ۳۰۰ سانتی‌متر مربع، قرار دارد. اگر فاصله همه لبه‌های عکس تا قاب برابر x باشد، مقدار x را پیدا کنید.

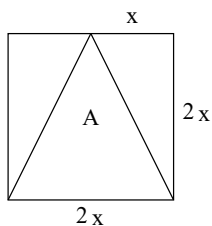


۱۲ معادله‌های زیر را به روش دلخواه حل کنید.

الف) $x^2 - 2x + 1 = 4$ ب) $x^2 - 2x - 10 = 5$

۱۳ مجموع مربعات سه عدد مثبت متوالی زوج، ۲۰۰ است؛ حاصل جمع آن سه عدد کدام است؟

۱۴ در شکل مقابل اگر بدانیم مجموع اندازه‌های محیط و مساحت مثلث A برابر با $5 - \sqrt{5}$ است، آنگاه مساحت مربع را بدست آورید.



۱۵ معادله‌های زیر را با فرمول کلی حل کنید.

الف

$x^2 - x + 1 = 0$

ب

$-2x^2 + x + 3 = 0$

پ

$-x^2 + 4x - 4 = 0$



درس دوم: سهمی



۱۶ در سهمی $y = ax^2 + 2x + 3$ خط $x = 2$ محور تقارن آن است. مقدار a را به دست آورید.

۱۷ در مسابقات پرتاب نیزه، دو پرتاب کننده A و B ، نیزه‌های خود را با زوایای α و β پرتاب کرده‌اند که معادله‌ی حرکت آنها به شکل $y_A = -x^2 + 3x + 4$ و $y_B = -4x^2 + 6x + 4$ است. که در آن x مسافت افقی طی شده بر روی زمین و y ارتفاع نیزه‌ها از سطح زمین است، تعیین کنید کدام پرتاب کننده برنده می‌شود؟

۱۸ نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاط به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید و آن را رسم کنید.

۱۹ معادله یک سهمی را بنویسید که محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۶ و محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند و از نقطه $(-1, 2)$ نیز بگذرد.

۲۰ سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۲ و محور x ها را در نقاطی به طول ۱ و ۲ قطع کرده است. معادله این سهمی را بنویسید.

۲۱ در هر یک از سهمی‌های زیر، رأس را مشخص و سپس آن را رسم کنید.

الف

$$y = (x + 1)^2 - 2$$

ب

$$y = -2x^2 + 1$$

۲۲ اگر رأس دو سهمی $y_1 = mx^2 + 2mx + 6$ و $y_2 = -4x^2 + nx + m$ برهم منطبق باشند، مقادیر m و n را به دست آورید.



درس سوم: تعیین علامت



تعیین علامت چند جمله‌ای درجه اول

۲۳ هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف

$$A = (3x + 1)(x - 2)$$

ب

$$B = (2x - 3)^2$$

پ

$$C = x^3(7 - x)$$

ت

$$D = \frac{x - 1}{5 - 2x}$$

تعیین علامت چند جمله‌ای درجه دوم

۲۴ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.





الف

$$P = \frac{(x-2)^{100}(x+3)^{101}}{(x+1)^{102}}$$

ب

$$P = \frac{(1-2x)(3x^2+2x-1)}{x^2+8}$$

پ

$$P = \frac{(-2x^2+x-1)(x+1)^3}{(-x^2+5x-6)(x^2+6x+9)}$$

۲۵ * حدود m را طوری تعیین کنید که سهمی $y = 2x^2 + (m+1)x + \frac{1}{4}m + 2$ همواره بالای محور x ها قرار داشته باشد.

۲۶ * عبارت $\frac{x(2-x)^2}{-2x^2-3x+5}$ به ازای چه مقادیری از x منفی است؟ حاصل را به صورت بازه بنویسید.

نامعادله

۲۷ * مجموعه نامعادله $\frac{-(x-4)^2}{2x+1} \geq 0$ را به دست آورید.

۲۸ * نامعادله $4x - 7 \leq 3x - 1 < 2x + 5$ را حل کنید.

۲۹ * دمای ایده آل برای پرورش قارچ گلخانه ای بین ۱۸ تا ۲۵ درجه ی سانتی گراد است؛ اگر سیستم تنظیم دمای گلخانه برحسب فارنهایت باشد

و بدانیم $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ، سیستم را باید بین چه دماهایی برحسب فارنهایت تنظیم کنیم؟

۳۰ * حدود a را طوری تعیین کنید که عبارت $y = ax^2 + (a-1)x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4a}$ همواره منفی باشد.

۳۱ * نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب آن را به صورت بازه نشان دهید.

الف

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} > 0$$

ب

$$-1 < \frac{2x+1}{3x-1} < 2$$

پ

$$1 + \frac{x^2}{3x-4} \leq \frac{8x+10}{3x-4}$$

ت

$$\begin{cases} 2x-5 \geq 1 \\ \frac{x}{2} + 3 \leq 7 \end{cases}$$

۳۲ * حدود m را چنان بیابید که نامساوی های زیر برقرار باشد.

الف

$$\frac{m(m^3+m)}{m-2} > 0$$

ب

$$\frac{x^2+mx+m}{x-x^2-3} < 0$$



۳۳ هر یک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف

$$\frac{x^2 - 3x}{x + 2} > 0$$

ب

$$|4 - x| < 2$$

۳۴ نامعادله $|x| \geq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ بزرگ‌تر یا مساوی ۳ باشد، این اعداد را روی محور زیر نشان دهید. مجموعه این مقادیر را که در نمودار بالا مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۳۵ نامعادله $|x| \geq 3$ را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این نامعادله، شامل اعداد حقیقی x است که فاصله آنها از مبدأ کوچک‌تر یا مساوی ۳ باشد. این اعداد را روی محور زیر نمایش دهید. مجموعه مقادیری را که در نمودار مشخص کرده‌اید، به صورت بازه بنویسید.

۳۶ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ به دست می‌آید. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول‌اند؟

۳۷ نامعادله $\frac{2x - 3}{x - 1} \geq \frac{x}{x + 1}$ را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید.

نامعادله های قدرمطلق

۳۸ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف

مجموعه جواب نامعادله $|x| \leq 6$ بازه است.

۳۹ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

$$x(x^2 + 4) < 0 \quad (\text{ث})$$

$$1 < 2x - 2 \leq 3 \quad (\text{الف})$$

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \quad (\text{ج})$$

$$x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3 \quad (\text{ب})$$

$$|7 - 2x| < 1 \quad (\text{چ})$$

$$-2 < \frac{5 - x}{2} < 0 \quad (\text{پ})$$

$$\left| \frac{x - 1}{2} - 1 \right| \geq 3 \quad (\text{ح})$$

$$\frac{4 - 2x}{3x + 1} \geq 0 \quad (\text{ت})$$

۴۰ یک نامعادله قدرمطلق بنویسید که جواب آن به صورت $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ باشد.





پاسخنامه تشریحی

۱ می‌دانیم که در هر معادله بزرگترین توان متغیر پس از ساده سازی، درجه‌ی آنرا مشخص می‌کند، پس:

الف) $x^2 - 3x + 5 = 2 \xrightarrow{x^{(2)}}$ درجه دوم

ب) $x^3 - 4x^2 + 5x + 1 = 0 \xrightarrow{x^{(3)}}$ درجه سوم

پ) $x^2 = -1 \xrightarrow{x^{(2)}}$ درجه دوم

دقت کنید با این که می‌دانیم x^2 هرگز منفی نمی‌شود، اما معادله‌ی ما صحیح است و معادله‌ی درجه‌ی دومی است که جواب ندارد.

ت) $x = -1 \xrightarrow{x^{(1)}}$ درجه اول $x + 1 = 0$ است. دقت کنید $x = -1$ نیز یک معادله است که شکل استاندارد آن $x + 1 = 0$ است.

ث) $\frac{3x^2}{2} + 1 = 0 \xrightarrow{x^{(2)}}$ درجه دوم

ج) $x - 5 = 4 \xrightarrow{x^{(1)}}$ درجه اول

۲ عدد -1 ریشه‌ی معادله‌ی $x + 1 = 0$ و عدد 3 ریشه‌ی معادله‌ی $x - 3 = 0$ است.

پس کفایت معادله را به صورت $(x - 3)(x + 1) = 0$ بنویسیم:

$$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + (-3 + 1)x + (-3)(1) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{ معادله‌ی درجه‌ی دومی با ریشه‌های } 1 \text{ و } 3 \text{ است.}$$

۱) $n^2 - 2 = 26 \Rightarrow n^2 = 28 \Rightarrow n = \pm\sqrt{28}$

۲) $x^2 + 12 = 3 \Rightarrow x^2 = -9$ معادله جواب ندارد

۳) $(3t - 2)^2 = 4 \Rightarrow 3t - 2 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} 3t - 2 = 2 \Rightarrow 3t = 4 \Rightarrow t = \frac{4}{3} \\ 3t - 2 = -2 \Rightarrow 3t = 0 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

۴) $3 - 3k = 3k(2k - 1) \Rightarrow 3 - 3k = 6k^2 - 3k \Rightarrow 6k^2 = 3 \Rightarrow k^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

۱) $x^2 - 6x = 7 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x^2 - 6x - 7 + 16 = 16 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 16$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 = 16 \Rightarrow x - 3 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 4 \Rightarrow x = 7 \\ x - 3 = -4 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

۲) $s^2 - 3s + 3 = 0 \Rightarrow s^2 - 3s + 3 - \frac{9}{4} = -\frac{9}{4} \Rightarrow s^2 - 3s + \frac{9}{4} = -\frac{9}{4}$

$\Rightarrow (s - \frac{3}{2})^2 = -\frac{9}{4}$ جواب ندارد

۳) $r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r + 2)^2 = 0 \Rightarrow r + 2 = 0 \Rightarrow r = -2$

۴) $2a^2 + 5a - 3 = 0 \Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a - \frac{3}{2} + \frac{49}{16} = \frac{49}{16}$

$$\Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{49 - 24}{16} = \frac{49}{16} \Rightarrow a^2 + \frac{5}{2}a + \frac{25}{16} = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow (a + \frac{5}{4})^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow a + \frac{5}{4} = \pm \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{5}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ a + \frac{5}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow a = -\frac{12}{4} = -3 \end{cases}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ریشه‌های معادله } ax^2 + bx + c = 0 \text{ برابر است با}$$

۵ می‌دانیم:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ریشه‌های معادله } ax^2 + bx + c = 0 \text{ برابر است با}$$

۱) $4x^2 - 13x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-13)^2 - 4(4)(3) = 169 - 48 = 121 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$

$$x = \frac{-(-13) \pm 11}{2(4)} = \frac{13 \pm 11}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{13 + 11}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\ x = \frac{13 - 11}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

۲) $r - r^2 = 3 \Rightarrow -r^2 + r - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4(-1)(-3) = 1 - 12 = -11 < 0$ ریشه ندارد

۳) $a^2 + 2\sqrt{3}a = 9 \Rightarrow a^2 + 2\sqrt{3}a - 9 = 0 \Rightarrow \Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-9)$

$$= 12 + 36 = 48 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{48}$$

$$a = \frac{-2\sqrt{3} \pm \sqrt{48}}{2(1)} \Rightarrow a = \frac{-2\sqrt{3} \pm 4\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-2\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \\ a = \frac{-2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{-6\sqrt{3}}{2} = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$4) \frac{t^2}{3} - \frac{t}{2} - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \frac{3}{2}$$

$$t = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \frac{3}{2}}{2\left(\frac{1}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 \\ t = \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{-1}{\frac{2}{3}} = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$a(4a + 3) = 45 \Rightarrow 4a^2 + 3a - 45 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(4)(-45) = 729 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 27$$

$$a = \frac{-3 \pm 27}{2(4)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-3 + 27}{8} = \frac{24}{8} = 3 \\ a = \frac{-3 - 27}{8} = \frac{-30}{8} \end{cases} \quad (\text{غُثَقِ (طول مثبت است)})$$

$$AB = 0 \rightarrow A = 0 \text{ یا } B = 0 \text{ یا } A, B = 0$$

۶

۷

۸

الف

نادرست است، زیرا به ازای $x = 1$ تساوی عددی برقرار نمی باشد.

ب

درست

پ

نادرست - زیرا:

$$x = -\frac{b}{2a} = 1 \Rightarrow y = 1^2 - 2 = -1$$

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

۹

با دیدن عبارت های $4x^2$ و $3x^2$ که در آنها x^2 مضرب دارد، دو راه برای حل مسئله به روش مربع کامل خواهیم داشت:
الف) روش اول) در عبارت $a^2 + 2ab + b^2$ ، a را برابر با $2x$ بگیریم که در آن صورت $4x^2 = a^2$ خواهد بود:

$$(2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} = 0$$

$$\xrightarrow{+ \frac{1}{4}} (2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$(2x)^2 - 2(2x)\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$4x^2 - 2x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow \left(2x - \frac{1}{2}\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ 2x - \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

روش دوم: تمام جملات را تقسیم بر ۴ می کنیم:

$$4x^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$$

$$\frac{4x^2}{4} - \frac{2x}{4} - \frac{\frac{1}{4}}{4} = \frac{0}{4} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{16} = 0$$

از این جا به بعد مانند قبل عمل می کنیم:

$$x^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{16} = 0 \xrightarrow{+ \frac{1}{16}} x^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)x - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$

$$x^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$$



$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \Rightarrow x - \frac{1}{4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

دقت: در هر دو روش، جواب بدست آمده باید یکسان باشد وگرنه در حل معادله اشتباه کرده‌ایم؛ بعلاوه اینکه همواره می‌توانیم با جایگذاری جواب نهایی بدست آمده در معادله اصلی از صحت جواب بدست آمده مطمئن شویم.

(ب) اگر بخواهیم از روش اول استفاده کنیم با $3x^2 = (\sqrt{3}x)^2$ بر می‌خوریم که حل معادله مشکل می‌شود بنابراین از روش دوم بهره می‌گیریم و با تقسیم جملات به ۳، معادله را به شکل استاندارد در می‌آوریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم:

$$3x^2 - 6x + 3 = 1 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x + 1 = \frac{1}{3} \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pm\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3+\sqrt{3}}{3} \\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3} + 1 = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

۱۰

الف) گزینه ۲: می‌دانیم اگر $n \in \mathbb{N}$ باشد، آنگاه:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

با توجه به الگوی داده شده داریم:

مرحله	۱	۲	۳	۴	...	۳۰
تعداد	۱	۱+۲	۱+۲+۳	۱+۲+۳+۴	...	۱+۲+...+۳۰

بنابراین:

$$\text{تعداد نقاط شکل سی‌ام} = 1 + 2 + \dots + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465$$

(صفحه ۱۹ کتاب درسی)

(ب) گزینه ۳:

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \alpha - 3 \sin \alpha > 0 &\Rightarrow \sin \alpha \underbrace{(\sin \alpha - 3)}_{(-)} > 0 \\ -1 \leq \sin \alpha \leq 1 &\Rightarrow -4 \leq \sin \alpha - 3 \leq -2 \\ \cot \cdot \sin \alpha < 0 &\Rightarrow \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \sin \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \alpha < 0 \quad (1) \quad \left. \begin{aligned} &\rightarrow \text{در ربع سوم است.} \\ &\rightarrow (1), (2) \end{aligned} \right\}$$

(صفحه ۴۱ کتاب درسی)

(ج) گزینه ۴: اگر $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2} = k$ باشد، داریم:

$$(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-2})(\sqrt{x+5} - \sqrt{x-2}) = 10k \Rightarrow (\sqrt{x+5})^2 - (\sqrt{x-2})^2 = 10k$$

$$\Rightarrow x+5-x-2 = 10k \Rightarrow k = \frac{3}{10} = 0,3$$

(صفحه ۶۷ کتاب درسی)

(د) گزینه ۳: مراحل روش مربع کامل را طی می‌کنیم:

$$3x^2 - 6x - 8 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 8 \xrightarrow{\div 3} x^2 - 2x = \frac{8}{3}$$

$$\xrightarrow{(-\frac{2}{2})^2=1} x^2 - 2x + 1 = \frac{8}{3} + 1 \Rightarrow (x-1)^2 = \frac{11}{3} \Rightarrow \text{گزینه ۳ پاسخ است}$$

(صفحه ۷۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه (۲) ب) گزینه (۳) ج) گزینه (۴) د) گزینه (۳)
(هر مورد ۵/۰ نمره)

۱۱ روش اول: استفاده از روش کلی در حل معادله درجه ۲

$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 4900 \\ x_1 = \frac{5}{2}, \text{ قابل قبول}, x_2 = -15 \end{cases}$$

روش دوم: استفاده از تجزیه در حل معادله درجه ۲

$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$(2x + 30)(2x - 5) = 0 \Rightarrow x = -15, x = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول}$$

روش سوم:

$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$(x + 15)(4x - 10) = 0 \Rightarrow x = -15, x = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول}$$

۱۲

$$(x-1)^2 = 4 \Rightarrow x-1 = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\Delta: x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-3) = 16$$

$$x_1, x_2 = \frac{+2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-3=0 \Rightarrow x=3 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 10 = 5 \Rightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-5=0 \Rightarrow x=5 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow x^2 - 2(1)(x) - 15 + 16 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 16 \Rightarrow (x-1)^2 = 16 \Rightarrow x-1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x-1=4 \Rightarrow x=5 \\ x-1=-4 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

$$\Delta: x^2 - 2x - 15 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-15) = 4 + 60 = 64$$

$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{10}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

۱۳ اگر $2x$ اولین عدد زوج باشد، $2x+2$ و $2x+4$ دو عدد زوج بعدی خواهند بود و داریم:

$$(2x)^2 + (2x+2)^2 + (2x+4)^2 = 4x^2 + (4x^2 + 8x + 4) + (4x^2 + 16x + 16) = 200$$

$$4x^2 + 4x^2 + 4x^2 + 8x + 16x + 4 + 16 = 200 \Rightarrow 12x^2 + 24x + 20 = 200$$

$$\div 4 \rightarrow 3x^2 + 6x + 5 = 50 \Rightarrow 3x^2 + 6x - 45 = 0 \xrightarrow{\div 3} x^2 + 2x - 15 = 0$$

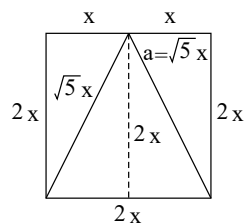
$$\Rightarrow (x+5)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -5 \text{ غ.ق.} \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 6 \\ 2x + 2 = 8 \\ 2x + 4 = 10 \end{cases}$$

حاصل جمع آن سه عدد $6 + 8 + 10 = 24$

۱۴

با نوشتن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث کناری داریم:



$$a^2 = (2x)^2 + x^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2 \Rightarrow a = \sqrt{5}x$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{2x \times 2x}{2} = 2x^2$$

$$P_{\text{مثلث}} = \sqrt{5}x + \sqrt{5}x + 2x = 2(\sqrt{5} + 1)x$$

$$2x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x = 5 - \sqrt{5} \Rightarrow 2x^2 + 2(\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} - 5 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(5 + 1 + 2\sqrt{5}) - 4(2)(\sqrt{5} - 5)$$

$$\Rightarrow 4(6 + 2\sqrt{5}) - 4(2\sqrt{5} - 10) = 24 + 8\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + 40 = 64$$



$$x_1, x_2 = \frac{-2(\sqrt{5}+1) \pm \sqrt{64}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{5}-1 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\sqrt{5}-1+4}{2} \\ x = \frac{-\sqrt{5}-1-4}{2} \end{cases} \text{ غقی}$$

$$\text{مساحت مربع} = 4x^2 = 4 \times \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{4 \times (9+5-6\sqrt{5})}{4} = 14-6\sqrt{5}$$

۱۵

الف

$x^2 - x + 1 = 0$ در این معادله $a = 1$ و $b = -1$ و $c = 1$ پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(1)(1) = -3$$

و چون $\Delta < 0$ است، این معادله ریشه حقیقی ندارد.

ب

$-2x^2 + x + 3 = 0$ در این معادله $a = -2$ و $b = 1$ و $c = 3$ پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4(-2)(3) = 1 + 24 = 25$$

$\Delta > 0$ است؛ پس این معادله دو ریشه حقیقی دارد که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 5}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1+5}{-4} = \frac{4}{-4} = -1 \\ x = \frac{-1-5}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

پ

در این معادله $a = -1$ و $b = 4$ و $c = -4$ پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-1)(-4) = 16 - 16 = 0$$

معادله یک ریشه مضاعف دارد، که از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2$$

۱۶

روش اول:

$$x = \frac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow x = \frac{-2}{2a} = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

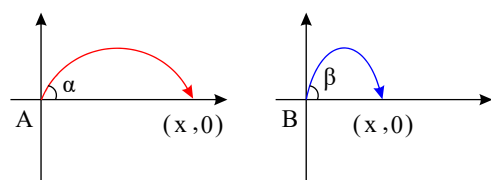
روش دوم:

$$f(1) = f(3) \Rightarrow a + 5 = 9a + 9 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

۱۷

در شکل مقابل:

نیزه در $y = 0$ است، فرود می‌آید.



پس با محاسبه x ‌هایی که برحسب آنها y در دو معادله صفر می‌شود و مقایسه آنها با یکدیگر معلوم می‌شود کدام نیزه جلوتر است و برنده کیست.

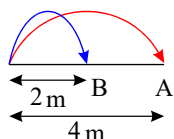
پس:

$$A: 0 = -x^2 + 3x + 4 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 9 - 4(-1)(4) = 9 + 16 = 25$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-3 \pm 5}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3+5}{-2} = -1 \\ x_2 = \frac{-3-5}{-2} = 4 \end{cases} \text{ غقی}$$

$$B: 0 = -4x^2 + 6x + 4 \xrightarrow{\Delta = b^2 - 4ac} \Delta = 36 - 4(-4)(4) = 36 + 64 = 100$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{100}}{-8} = \frac{-6 \pm 10}{-8} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-6+10}{-8} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-6-10}{-8} = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ غقی}$$



از آنجا که نیزه A ، ۴ متر و نیزه B ، ۲ متر رفته‌اند، برنده A است.

۱۸

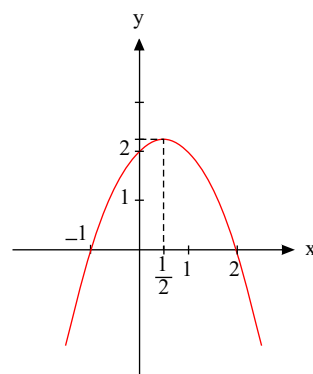
$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\xrightarrow{(0,2)} y = 2 = 0 + 0 + c \Rightarrow c = 2$$

$$\xrightarrow{(-1,0)} 0 = a - b + 2 \Rightarrow a - b = -2$$

$$\xrightarrow{(2,0)} 0 = 4a + 2b + 2 \Rightarrow 4a + 2b = -2$$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - 2b = -4 \\ 4a + 2b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a = -6 \Rightarrow a = -1 \end{cases}$$



$$a - b = -2 \xrightarrow{a=-1} -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1$$

$$y = -x^2 + x + 2$$

۱۹. معادله سهمی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. داریم:

$$f(0) = 6 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 6 \Rightarrow c = 6$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \xrightarrow{c=6} 4a - 2b = -6 \Rightarrow 2a - b = -3$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 2 \Rightarrow a - b + 6 = 2 \Rightarrow a - b = -4$$

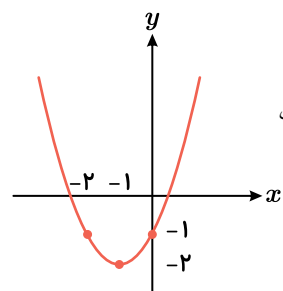
$$\begin{cases} 2a - b = -3 \\ a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -3 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{a-b=-4} 1 - b = -4 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 5x + 6$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (0, 2) \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=2} a - b = -2 \quad (1)$$

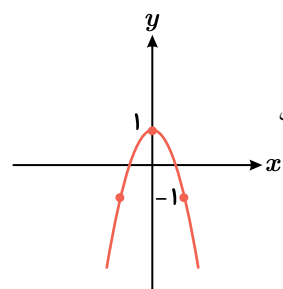
$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (2, 0) \Rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + c \xrightarrow{c=2} 4a + 2b = -2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{a-b=-2} -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = -x^2 + x + 2$$



مختصات رأس سهمی = $(-1, -2)$

x	$y = (x+1)^2 - 2$	(x, y)
0	$y = (0+1)^2 - 2 = -1$	$(0, -1)$
-1	$y = (-1+1)^2 - 2 = -2$	$(-1, -2)$
-2	$y = (-2+1)^2 - 2 = -1$	$(-2, -1)$



مختصات رأس سهمی = $(0, 1)$

x	$y = -2x^2 + 1$	(x, y)
1	$y = -2(1)^2 + 1 = -1$	$(1, -1)$
0	$y = -2(0)^2 + 1 = 1$	$(0, 1)$
-1	$y = -2(-1)^2 + 1 = -1$	$(-1, -1)$



۲۲ می‌دانیم طول رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$ برابر $x_s = \frac{-b}{2a}$ است.

ابتدا رأس سهمی y_1 را به دست می‌آوریم:

$$y_1 = mx^2 + 2mx + 6$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{2m} = -1 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} y_s = m(-1)^2 + 2m(-1) + 6 = m - 2m + 6 = -m + 6$$

پس رأس سهمی y_1 ، نقطه $S(-1, -m + 6)$ است.

حال طول رأس سهمی y_2 را به دست می‌آوریم:

$$y_2 = -4x^2 + nx + m$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-n}{-8} = \frac{n}{8}$$

چون رأس دو سهمی برهم منطبق است؛ پس:

$$\frac{n}{8} = -1 \Rightarrow n = -8$$

حال داریم:

$$y_2 = -4x^2 - 8x + m \xrightarrow{x_s = -1} y_s = -4(-1)^2 - 8(-1) + m = -4 + 8 + m = m + 4$$

پس رأس سهمی y_2 ، نقطه $S(-1, m + 4)$ است؛ بنابراین:

$$-m + 6 = m + 4 \Rightarrow m = 1$$

(صفحه ۷۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$y_1 \rightarrow s \left(\underbrace{-1}_{\text{نمره ۲۵}}, \underbrace{-m+6}_{\text{نمره ۲۵}} \right)$$

$$\xrightarrow{x_s = -1} \frac{n}{8} = 1 \Rightarrow n = 8 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$-m + 6 = m + 4 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow m = 1$$

۲۳

الف

x	$-\frac{1}{3}$	۲
$3x+1$	- ○ +	+
$x-2$	-	- ○ +
A	+ ○ - ○ +	+

$$3x + 1 = 0 \Rightarrow 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ب

عبارت B چون یک مربع کامل است بنابراین همواره نامنفی است.

در واقع به ازای $x = \frac{3}{4}$ مقدار B صفر است و به ازای $x \neq \frac{3}{4}$ مقدار آن مثبت است. این موضوع را از جدول تعیین علامت نیز می‌توان دریافت.

x	$\frac{3}{4}$
$2x-3$	- ○ +
$2x-3$	- ○ +
B	+ ○ +

پ

x	۰	۷
x	- ○ +	+
x	- ○ +	+
x	- ○ +	+
$7-x$	+ ○ +	-
B	- ○ + ○ -	-

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$7 - x = 0 \Rightarrow x = 7$$

ت

x	$\frac{5}{2}$	
$x-1$	-	+
$5-2x$	+	-
D	-	+

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

$$5-2x=0 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$$

۲۴

الف

$$x-1, x=-3, x=2$$

x	-3	-1	2
$(x-2)^{100}$	+	+	+
$(x+3)^{101}$	-	+	+
$(x+1)^{102}$	+	-	+
P	-	+	+

ب

$$x=\frac{1}{2}, x=-1, x=\frac{1}{3}$$

x	-1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$(1-2x)$	+	+	-
$3x^2+2x-1$	+	-	+
P	+	-	-

۸ + x^2 همواره مثبت است پس می‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم.

پ

$$\begin{cases} -2x^2 + x - 1 = 0 \\ \Delta = 1 - 4(-2)(-1) < 0 \end{cases} \xrightarrow{a < 0} \text{همواره منفی است} \rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$(x+1)^3 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{cases} -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 25 - 4(-1)(-6) = 1 \\ x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -3$$

x	-3	-1	2	3
$-2x^2+x-1$	-	-	-	-
$(x+1)^3$	-	-	+	+
$-x^2+5x-6$	-	-	-	+
x^2+6x+9	+	+	+	+
P	-	-	+	-

۲۵ اگر ضریب x^2 مثبت و $\Delta < 0$ باشد، آنگاه سهمی همواره بالای محور x قرار می‌گیرد:

$$a = 2 > 0, \Delta = b^2 - 4ac = (m+1)^2 - 4(2)\left(\frac{1}{2}m+2\right) = m^2 - 2m - 15$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 2m - 15 = (m-5)(m+3) = 0 \Rightarrow m = 5, m = -3$$



m	-3	5
Δ	$+ \circ - \circ +$	

$\Delta < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$

۲۶ با تعیین علامت هر کدام و استفاده از قاعده‌ی ضرب، کل عبارت را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x = 0, (2-x)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$-2x^2 - 3x + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4(-2)(5)$$

$$= 9 + 40 = 49 \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3+7}{-4} = \frac{10}{-4} = -\frac{5}{2} \\ x = \frac{3-7}{-4} = \frac{-4}{-4} = 1 \end{cases}$$

x	$-2/5$	0	1	2
x	$-$	$- \circ +$	$+$	$+$
$(2-x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-2x^2 - 3x + 5$	$- \circ +$	$+$	$+$	$-$
$\frac{x(2-x)^2}{-2x^2 - 3x + 5}$	$+$	$+$	$+$	$-$

دقت کنید در ۱ و $-2/5$ که مخرج صفر می‌شوند، عبارت تعریف نشده است چرا که $\frac{\text{عدد}}{0}$ تعریف نشده است. باتوجه به جدول تعیین علامت، عبارت در بازه‌ی $(1, +\infty) \cup (-2/5, 0)$ منفی است.

۲۷

روش اول:

مجموعه جواب: $\{-4\} \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$-(X-4)^2$	$-$	$-$	$\circ$	$-$
$2X+1$	$-$	$\circ$	$+$	$+$
$\frac{-(X-4)^2}{2X+1}$	$+$	$-$	$\circ$	$-$

روش دوم:

$$\frac{-(x-4)^2}{2x+1} \geq 0 \xrightarrow{(x-4)^2 \geq 0} 2x+1 < 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

ریشه‌ی صورت کسر: $x-4=0 \rightarrow x=4$

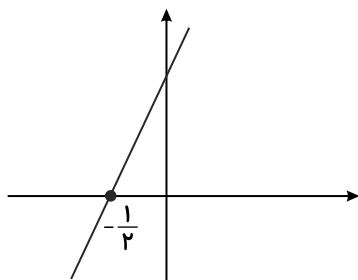
مجموعه جواب: $\{-4\} \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$\frac{-(X-4)^2}{2X+1}$	$+$	$-$	$\circ$	$-$

$$-(x-4)^2 \leq 0$$

روش سوم:

مجموعه جواب: $\{-4\} \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$



روش چهارم:

$-(x-4)^2$ به ازای هر $x \neq 4$ منفی است. و با توجه به نمودار $y = 2x + 1$

عبارت $2x + 1$ به ازای $x < -\frac{1}{2}$ منفی است. پس:

مجموعه جواب: $\{-4\} \cup (-\infty, -\frac{1}{2})$

۲۸ هر نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$$\begin{cases} 4x - 7 \leq 3x - 1 \Rightarrow x \leq 6 \\ 3x - 1 < 2x + 5 \Rightarrow x < 6 \end{cases} \Rightarrow (-\infty, 6] \cap (-\infty, 6) = (-\infty, 6)$$

$$18 < C < 25 \xrightarrow{C = \frac{5}{9}(F - 32)} 18 < \frac{5}{9}(F - 32) < 25$$

$$\xrightarrow{\times 9} 162 < 5F - 160 < 225 \xrightarrow{+160} 322 < 5F < 385 \xrightarrow{\div 5} \frac{322}{5} < F < \frac{385}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{64.4 < F < 77}$$

۳۰ می‌دانیم عبارت $y = ax^2 + bx + c$ زمانی همواره منفی خواهد بود که:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\text{displaystyle \left\{ \begin{array} \boxed{a < 0}, (I) \parallel \{ \{ (a-1)^2 \} - 4(a) \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2a} \right) = \{ a^2 \} - 2a + 1 + \frac{4a}{2} - \frac{4a}{2a} \} \right. \\ \left. < 0 \right\} \text{right}}$$

$$a^2 - 2a + 1 + 2a - 2 < 0 \Rightarrow a^2 - 1 < 0$$

$$a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

a	-1	1
$a^2 - 1$	+ ○ -	○ +

$$\Rightarrow \boxed{-1 < a < 1} \quad (II)$$

$$\boxed{I, II} \Rightarrow \boxed{-1 < a < 0}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1} > 0$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	-1	1	2
$x^2 - 3x + 2$	+ ○ -	○ +	+ ○ -
$x + 1$	- ○ +	○ +	+ ○ +
	-	تغییر	+

مجموعه جواب: $(-1, 1) \cup (2, +\infty)$

$$-1 < \frac{2x+1}{3x-1} < 2$$

$$I \quad \left\{ \begin{array} \frac{2x+1}{3x-1} < 2 \Rightarrow \frac{2x+1-6x+2}{3x-1} < 0 \Rightarrow \frac{-4x+3}{3x-1} < 0 \\ \frac{2x+1}{3x-1} > -1 \Rightarrow \frac{2x+1+3x-1}{3x-1} > 0 \Rightarrow \frac{5x}{3x-1} > 0 \end{array} \right.$$

I)

x	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
$-4x+3$	+ ○ -	○ -
$3x-1$	- ○ +	○ +
	-	تغییر

$$\Rightarrow (-\infty, \frac{1}{3}) \cup (\frac{3}{4}, +\infty)$$

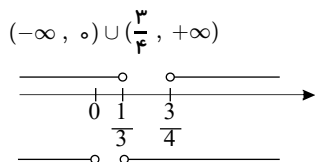
II)



x	0	$\frac{1}{3}$	
5x	-	+	+
3x-1	-	-	+
	+	-	+

$\Rightarrow (-\infty, 0) \cap (\frac{1}{3}, +\infty)$

از دو بازه پاسخ I و II اشتراک می گیریم:



$$\frac{3x - 4 + x^2 - 8x - 10}{3x - 4} \leq 0$$

$$\frac{x^2 - 5x - 14}{3x - 4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x-7)(x+2)}{3x-4} \leq 0$$

x	-2	$\frac{4}{3}$	7	
x-7	-	-	-	+
x+2	-	+	+	+
3x-4	-	-	+	+
	-	+	-	+

مجموعه جواب: $(-\infty, -2] \cup (\frac{4}{3}, 7]$

$$2x - 5 \geq 1 \Rightarrow 2x \geq 6 \Rightarrow x \geq 3$$

$$2(\frac{x}{2} + 3 \leq 7) \Rightarrow x + 6 \leq 14 \Rightarrow x \leq 8 \xrightarrow{\cap} [3, 8]$$

$$\frac{m(m^2 + m)}{m - 2} > 0 \Rightarrow \frac{m^2(m^2 + 1)}{m - 2} > 0$$

صورت نامنفی است، کافیسست مخرج مثبت باشد.

$$m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$\frac{x^2 + mx + m}{x - x^2 - 3} < 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-1)(-3) = -11 < 0 \quad (1)$$

$$a < 0 \quad (2)$$

طبق (1) و (2) مخرج همواره منفی است، پس صورت بایستی مثبت شود.

$$\Delta < 0 \quad \text{صورت}$$

$$\Delta = m^2 - 4(1)(m) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m < 0$$

m	0	4	
$m^2 - 4m$	+	-	+

$\Rightarrow m \in (0, 4)$

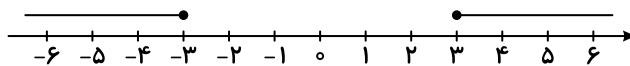
$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

$$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

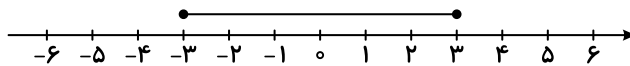
$$\frac{x^2 - 3x}{x + 2} > 0 \Rightarrow x \in (-2, 0) \cup (3, +\infty)$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
x^2-2x	$+$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	
$x+2$	$-$	$\circ$	$+$	$+$	$+$		
$\frac{x^2-2x}{x+2}$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

$$|x - 3| < 2 \Rightarrow -2 < x - 3 < 2 \xrightarrow{+3} 1 < x < 5 \xrightarrow{\div(-1)} -5 < -x < -1 \xrightarrow{\div(-1)} 1 < x < 5$$



$$(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$



$$[-3, 3]$$

$$y = \frac{15}{\lambda} x^2 - 30x + 200 > 110 \Rightarrow \frac{15}{\lambda} x^2 - 30x + 200 - 110 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{15}{\lambda} x^2 - 30x + 90 > 0 \xrightarrow{\times \frac{\lambda}{15}} x^2 - 12x + 60 > 0 \Rightarrow (x - 12)(x - 4) > 0$$

	4	12	
$x - 12$	—	—	○ +
$x - 4$	—	○ +	+
$x^2 - 16x + 48$	+	○ —	○ +

$\Rightarrow x \in (-\infty, 4) \cup (12, +\infty) \xrightarrow{x > 0} x \in (0, 4) \cup (12, +\infty)$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 4) \cup (12, +\infty) \xrightarrow{x > 0} x \in (0, 4) \cup (12, +\infty)$$

جواب بدست آمده از نظر ریاضیاتی قابل قبول است اما مورد قبول واقع شدن یا نشدن آن از نظر پزشکی و فیزیولوژیکی نیازمند نظرات متخصصان فن است!!!

۳۷ ابتدا همه ی عبارت را به یک طرف می بریم و ساده می کنیم:

$$\frac{2x - 3}{x - 1} \geq \frac{x}{x + 1} \Rightarrow \frac{2x - 3}{x - 1} - \frac{x}{x + 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(2x - 3)(x + 1) - x(x - 1)}{(x - 1)(x + 1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2 + 2x - 3x - 3 - x^2 + x}{x^2 - 1} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} \geq 0$$

$$x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

عبارت بدست آمده را تعیین علامت می کنیم:

x	$-\sqrt{3}$	-1	1	$\sqrt{3}$
x^2-3	+ ○ -	-	- ○ +	
x^2-1	+ + ○ - ○ + +			
$\frac{x^2-3}{x^2}$	+ ○ -	○ +	○ - ○ +	

باتوجه به جدول تعیین علامت، جواب نامعادله به صورت زیر است:

$$(-\infty, -\sqrt{3}] \cup (-1, 1) \cup [\sqrt{3}, +\infty)$$



الف) $1 < 2x - 3 \leq 3 \Rightarrow 4 < 2x \leq 6 \Rightarrow 2 < x \leq 3 \Rightarrow x \in (2, 3]$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

$I: x + 1 \leq 5 - x \Rightarrow 2x \leq 4 \Rightarrow x \leq 2$

$II: 5 - x < 2x + 3 \Rightarrow 2 < 3x \Rightarrow x > \frac{2}{3} \Rightarrow I \cap II: x \in (\frac{2}{3}, 2]$

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0 \Rightarrow -4 < 5-x < 0 \Rightarrow -9 < -x < -5 \Rightarrow 5 < x < 9 \Rightarrow x \in (5, 9)$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 4-2x = 0 \Rightarrow 4=2x \Rightarrow x=2 \\ 3x+1 = 0 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \end{cases}$

	$-\frac{1}{3}$	2	
$4-2x$	+	+	○ -
$3x+1$	-	○ +	+
$\frac{4-2x}{3x+1}$	-	+	○ -

$\Rightarrow x \in (-\frac{1}{3}, 2]$

ث) $x(x^2 + 4) < 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 4 \text{ همواره مثبت} \end{cases}$

	0	
x	-	○ +
x^2+4	+	+
$x(x^2+4)$	-	+

$\Rightarrow x \in (-\infty, 0)$

ج) $\frac{x^3-x}{x^2-2x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x(x^2-1)}{x^2-2x+2} \leq 0 \Rightarrow \frac{x(x-1)(x+1)}{x^2-2x+2} \leq 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-1 = 0 \Rightarrow x=1 \\ x+1 = 0 \Rightarrow x=-1 \\ x^2-2x+2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 4 - 4(1)(2) = -4 \Rightarrow \text{جواب ندارد} \\ a > 0 \end{cases} \end{cases}$

	-1	0	1	
x	-	-	○ +	+
x-1	-	-	-	○ +
x+1	-	○ +	+	+
x^2-2x+2	+	+	+	+
$\frac{x^3-x}{x^2-2x+2}$	-	○ +	○ -	○ +

$\Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$

چ) $|7-2x| < 1 \Rightarrow -1 < 7-2x < 1 \Rightarrow -8 < -2x < -6$

$\Rightarrow -4 < -x < -3 \Rightarrow 3 < x < 4$

ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3 \Rightarrow \begin{cases} I: \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \Rightarrow x-1-2 \geq 6 \Rightarrow x \geq 9 \\ II: \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \Rightarrow x-1-2 \leq -6 \Rightarrow x \leq -3 \end{cases}$

$x \in (-\infty, -3] \cup [9, +\infty)$

۴۰. مجموعه جواب نامعادله $|x - \frac{a+b}{2}| > \frac{a-b}{2} (a > b)$ به صورت $(-\infty, b) \cup (a, +\infty)$ است.

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $|x - \frac{-1+3}{2}| > \frac{3-(-1)}{2}$ به صورت $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ است.

نامعادله: $|x-1| > 2$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۵ دهم

سال دهم

فهرست

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن

- ۱..... مفهوم تابع
- ۱..... نمودار پیکانی
- ۱..... نمایش زوج مرتبی
- ۱..... نمودار مختصاتی

درس دوم: دامنه و برد توابع

- ۲..... دامنه
- ۲..... تابع خطی

درس سوم: انواع توابع

- ۴..... توابع چند جمله ای
- ۴..... تابع همانی و تابع ثابت
- ۵..... تابع قدرمطلق
- ۵..... تابع قطعه ای (چند ضابطه ای)
- ۶..... رسم توابع به کمک انتقال



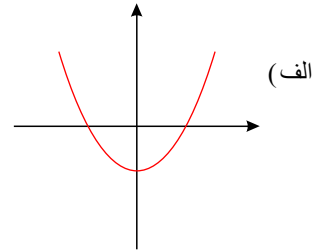
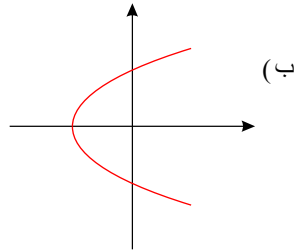
درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن

مفهوم تابع

۱ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف رابطه‌ای که به هر عدد طبیعی کمتر از ۴، مقسوم علیه‌های آن را نسبت می‌دهد، تابع است.

۲ کدام یک از نمودارهای زیر نمایانگر تابع است؟



۳ a و b را طوری تعیین کنید که روابط زیر تابع باشند.

الف $f(x) = \left\{ (3, 2a - b), \left(\frac{6}{3}, 2a + b\right), (1, a), (2, 3), \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{a}\right) \right\}$

ب $g(x) = \{(a, a), (b, a), (2a - b, 0), (b, 2a - b), (a, 2b)\}$

۴ چرا خطوطی از قبیل $x = 2$ ، $x = 3$ و در کل $x = k$ تابع نیستند اما خطوطی از قبیل $y = 2$ ، $y = 3$ و $y = k$ و تابع هستند؟

۵ کدامیک از موارد زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف رابطه $\{(2, 3), (-1, 4), (2, 5)\}$ تابع است.

نمودار پیکانی

۶ اگر روابط زیر بر روی مجموعه‌های $A = \{a, b, c, d, e\}$ و $B = \{f, g, h\}$ و از A به B تعریف شده باشند، آن‌ها را به شکل نمودار پیکانی رسم کنید و مشخص کنید کدام یک تابع هستند و کدام یک تابع نیستند؟

الف $f(x) = \{(a, f), (b, g), (c, h), (d, f), (e, g)\}$

پ $h(x) = \{(d, f), (d, g)\}$

ب $g(x) = \{(a, f), (b, f), (c, g)\}$

ت $z(x) = \{(a, f), (b, g), (d, h), (e, g)\}$

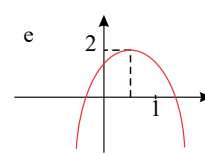
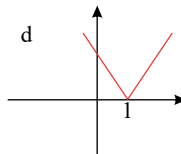
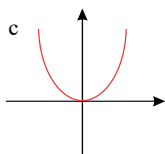
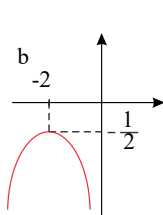
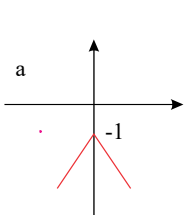
نمایش زوج مرتبی

۷ الف) دو تابع با دامنه و برد یکسان مثال بزنید که هیچ دو زوج مرتب مشترکی نداشته باشند.

ب) نمودار تابع با دامنه‌ی $[-1, 1]$ و برد $[-3, 0]$ رسم کنید. چه تعداد از این تابع می‌توان رسم کرد؟

نمودار مختصاتی

۸ هر یک از نمودارهای a تا e کدام یک از توابع الف تا ه را نشان می‌دهد؟ دامنه و برد این توابع چیست؟



الف $y = x^2$

ب $y = |x - 1|$

ج $-|x| - 1$

د $-(x - \frac{1}{3})^2 + 2$

ه $-(x + 2)^2 - \frac{1}{3}$

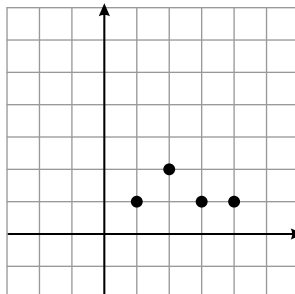
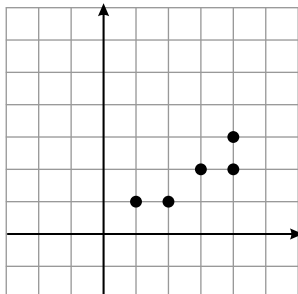




درس دوم: دامنه و برد توابع

دامنه

۹ کدام یک از نمودارهای زیر یک تابع را نمایش می‌دهند؟ توضیح دهید.

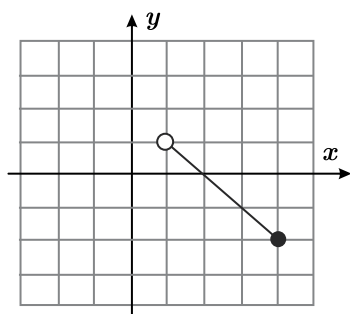


تابع خطی

۱۰ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف تعداد تابع خطی وجود دارد که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ است.

۱۱ دامنه و برد تابع خطی مقابل را بنویسید و ضابطه آن را به دست آورید.



۱۲ هر تابع که بتوان آنرا به فرم نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

۱۳ یک دوچرخه‌سوار مسیری به طول 200 km را پیش رو دارد. اگر در هر ساعت 40 km را طی کند؛ پس از چند ساعت به مقصد می‌رسد؟ با

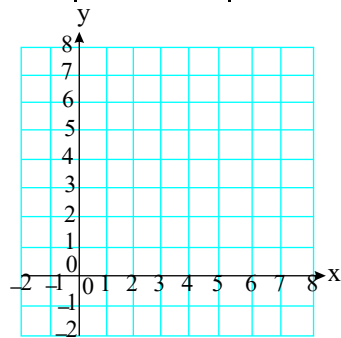
کامل کردن جدول و رسم نمودار، خطی بودن یا نبودن این تابع را مشخص کنید.

x (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (مسافت باقی‌مانده)						

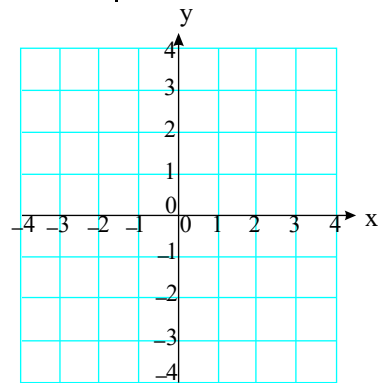


۱۴ جاهای خالی در جدول را کامل کنید و نمودار توابعی را که در جدول، توصیف شده‌اند، رسم کنید.

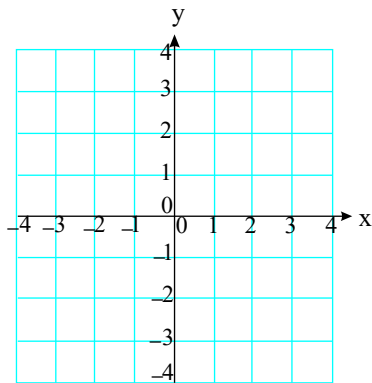
	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$[2, 3]$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	?	مجموعه اعداد حقیقی	?	?



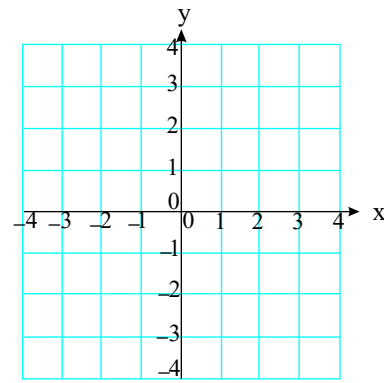
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۱۵ جدول زیر دمای سنگ‌ها در عمق‌های زیر سطح زمین را نشان می‌دهد.

عمق (کیلومتر)	۱	۲	۳	۴	۵	۶
دما (سانتی‌گراد)	۵۵	۹۰	۱۲۵	۱۶۰	۱۹۵	۲۳۰

الف) توضیح دهید که چرا این جدول یک تابع را به‌دست می‌دهد. نمودار آن را رسم کنید.

ب) معادله‌ای برای این تابع به‌دست آورید.

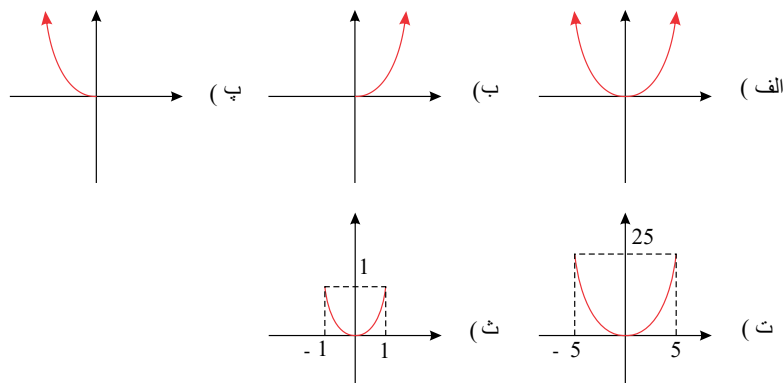
پ) دمای یک سنگ را که در عمق ۱۰ کیلومتری زیر زمین است، بیابید.



درس سوم: انواع توابع

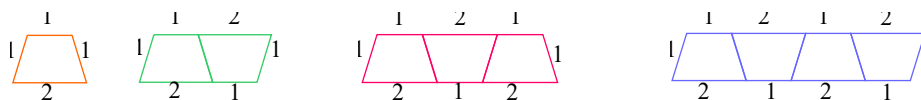
توابع چند جمله ای

۱۶ کدام یک از نمودارهای زیر نمایش صحیحی برای تابع $f(x) = x^2$ است؟ چرا؟



۱۷ یک تانکر گاز از یک استوانه و دو نیم کره به شعاع r در دو انتهای استوانه، تشکیل شده است. اگر ارتفاع استوانه ۳۰ متر باشد، حجم تانکر را بر حسب تابعی از r بنویسید.

۱۸ الگوی زیر از تعدادی دوزنقه تشکیل شده است.



(الف) جدول زیر را کامل کنید.

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل						

(ب) چرا رابطه بین تعداد دوزنقه‌ها و محیط شکل، یک تابع را معلوم می‌کند؟ دامنه و برد این تابع چیست؟ نمودار آن را رسم کنید.

تابع همانی و تابع ثابت

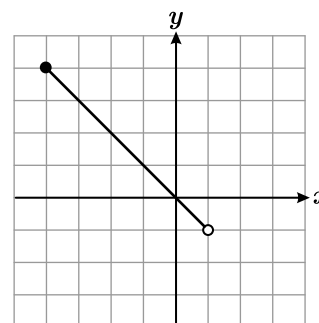
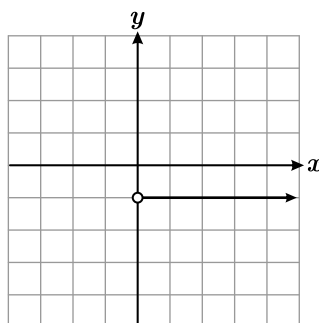
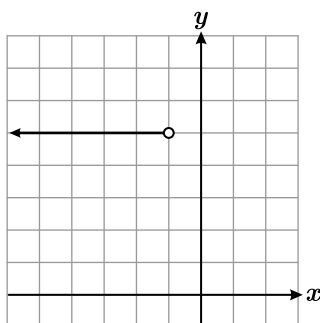
۱۹ توابع f ، g ، h و نیز قسمتی از نمودارهای آنها داده شده‌اند. نمودارها را کامل و مشخص کنید هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ دامنه و برد

هر تابع را نیز مشخص کنید. مقادیر $f(3)$ ، $g(-2)$ ، $f(-\frac{1}{5})$ ، $h(\sqrt{5})$ و $g(0)$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & x > 1 \\ \frac{5}{2} & x = 1 \\ -x & -4 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 2 \leq x \leq 3 \\ 5 & x < -1 \end{cases}$$



۲۰ تابعی را مثال بزنید که دامنه و برد آن برابر باشند، ولی همانی نباشد.



۲۱ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

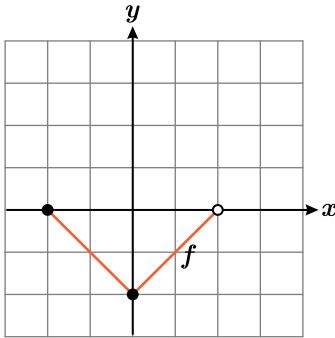
الف تابعی را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم.

تابع قدرمطلق

۲۲ ابتدا نمودار تابع $y = |x|$ را رسم کرده و با کمک انتقال آن، نمودار تابع $f(x) = |x - 3| + 2$ را رسم کنید.

۲۳ نمودار تابع $g(x) = 2|x - 1| - 3$ را به کمک انتقال تابع $y = |x|$ رسم کنید.

۲۴ نمودار تابع f در شکل مقابل را در نظر بگیرید و سپس به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف مقدار $f(0)$ چقدر است؟

ب دامنه و برد را بنویسید.

پ نمودار تابع $g(x) = f(x) + 2$ را رسم کنید.

تابع قطعه‌ای (چند ضابطه‌ای)

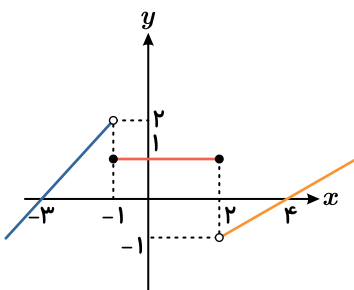
۲۵

تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 3 & x \geq 0 \end{cases}$ را رسم کنید، $f(-4)$ و $f(0)$ را به دست آورید.

۲۶ کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع را نمایش می‌دهد؟ چرا؟ نمودار هر دو معادله را رسم کنید.

$$f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ x + 2 & x \leq 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$



۲۷ نمودار تابع قطعه‌ای f در شکل مقابل داده شده است.

الف ضابطه تابع را بنویسید.

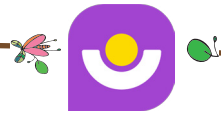
ب دامنه و برد تابع را مشخص کنید.

۲۸ تابع $f(x) = \begin{cases} |x - 1| & x < 3 \\ 2 & 3 \leq x < 5 \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف نمودار تابع $f(x)$ را رسم کنید.

ب دامنه تابع $f(x)$ را مشخص کنید.





۲۹ گزینه مناسب را انتخاب کنید.

الف) اگر $f = \{(-1, 2), (-3, 4), (m, 6)\}$ یک تابع خطی باشد، مقدار m برابر کدام است؟

- ۱) ۳ ۲) ۰ ۳) -۵ ۴) ۲

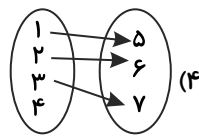
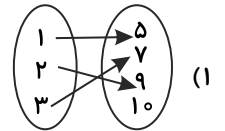
ب) علی در هر دقیقه پیاده روی مسافت ۰٫۲ کیلومتر را طی می کند، اگر مسافتی که علی در t دقیقه طی می کند را با $f(t)$ نمایش دهیم، کدام عبارت نمایش جبری این تابع را به دست می دهد؟

۱) $f(t) = t - 0.2$ ۲) $f(t) = t + 0.2$

۳) $f(t) = 0.2t - 1$ ۴) $f(t) = 0.2t$

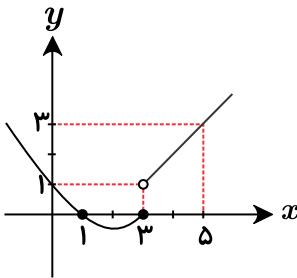
ج) کدام گزینه نمایانگر یک تابع است؟

۲) $f(x) = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (1, 5)\}$



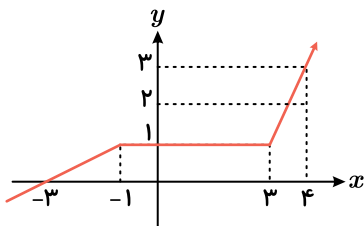
۳) $f(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ -2 & x < 1 \end{cases}$

۳۰ ضابطه تابع زیر را، که از دو بخش خطی و سهمی تشکیل شده است، بنویسید.



۳۱ با استفاده از نمودار تابع $f(x) = |x|$ و به کمک انتقال، نمودار تابع $g(x)$ را رسم کنید.

$g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - 3$



۳۲ نمودار تابع f به صورت مقابل است:

الف) ضابطه تابع f را مشخص کنید.

ب) مقادیر $f(-4)$ و $f(5)$ را به دست آورید.

رسم توابع به کمک انتقال

۳۳ توابع $z(x) = (x - 2)^2$ و $g(x) = (x + 2)^2$ و $k(x) = |x - 3|$ و $m(x) = |x + 3|$ را به کمک انتقال رسم کنید.

۳۴ نمودار تابع $f(x) = 2|x - 1| - 3$ را به کمک انتقال رسم کنید.



۳۵ در شکل‌های زیر نمودار توابع درجهٔ دوم f ، g و t رسم شده‌اند.

$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

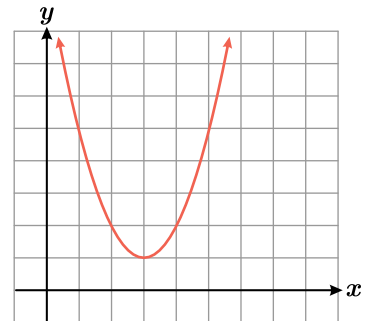
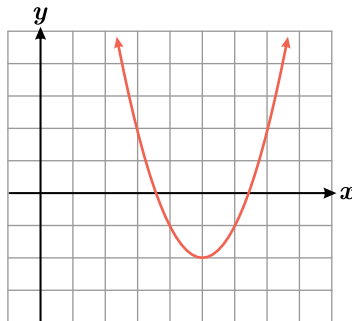
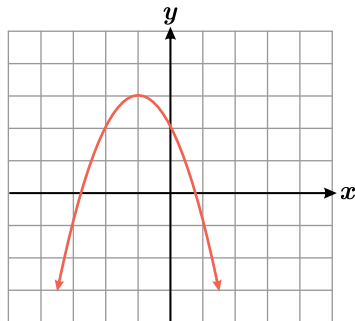
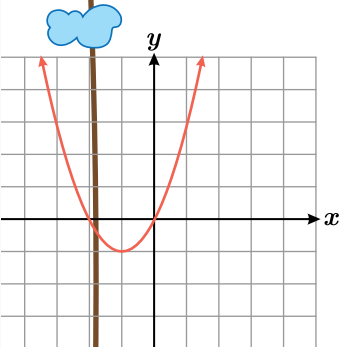
$$g(x) = (x + 1)^2 - 1$$

$$h(x) = (x - 3)^2 + 1$$

$$t(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

الف) هر یک از نمودارها کدام تابع را نشان می‌دهند؟

ب) دامنه و برد هر یک از این توابع را به دست آورید:





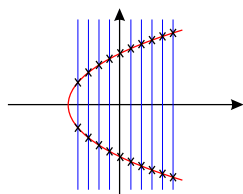
پاسخنامه تشریحی

۱

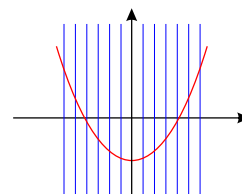
الف

نادرست

۲ باتوجه به تعریف، برای اینکه یک نمودار، تابع باشد باید به ازای هر x ، فقط و فقط یک y موجود باشد یا به عبارت دیگر، خطوط موازی با محور y ها، نمودار را در بیش از یک نقطه قطع نکنند.



ب) تابع نیست:



الف) تابع است:

۳ برای اینکه یک رابطه که به صورت زوج مرتب نوشته شده است تابع باشد، باید مؤلفه‌های اول یکسان، مؤلفه‌های دوم یکسان نیز داشته باشند، در واقع زوج مرتب تکراری باشد پس:

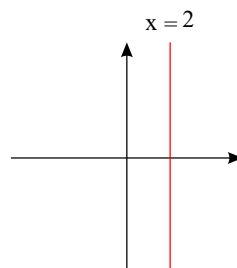
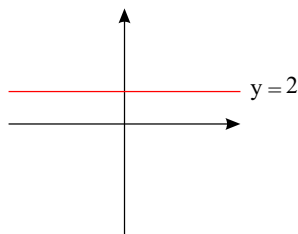
$$\text{الف)} \left\{ \begin{array}{l} (3, 2a-b) \\ (\frac{6}{3}, 2a+b) \end{array} \right\} \Rightarrow 2a-b = 2a+b \Rightarrow b=0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (2, 3) \\ (\frac{2}{1}, \frac{3}{a}) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{a} = 3 \Rightarrow a=1$$

$$\text{ب)} \left\{ \begin{array}{l} (b, a) \\ (b, 2a-b) \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2a-b \Rightarrow a=b \quad (I) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a, a) \\ (a, 2b) \end{array} \right\} \Rightarrow a = 2b \Rightarrow a=b=2b \quad (II)$$

$$\xrightarrow{I, II} a=b=2b \Rightarrow \begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \end{array}$$

۴

با رسم دو خط $x=2$ و $y=2$ داریم:



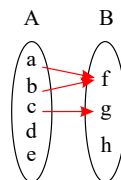
گفتیم نمودار توابع، خطوط موازی محور y ها را در حداکثر یک نقطه قطع می‌کنند که خطوط $y=k$ این ویژگی را دارند و خطوط $x=k$ ، خطوط موازی با محور y را در بی‌نهایت نقطه قطع می‌کنند.

۵

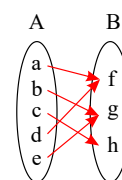
الف

نادرست

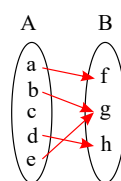
۶



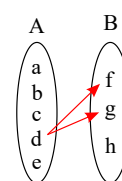
ب) تابع نیست



الف) تابع است

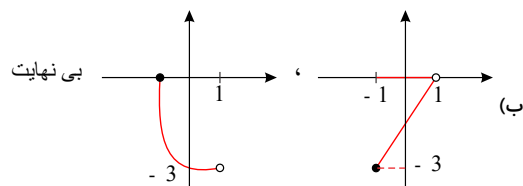


ت) تابع نیست



پ) تابع نیست

۷ الف) $f(x) = x$, $g(x) = x+1$ هر دو دامنه و بردشان $\mathbb{R}$ است اما هیچ دو زوج مرتب مشترکی ندارند.



۸

تابع الف نمودار c

تابع ب نمودار d

تابع ج نمودار a

تابع د نمودار e

تابع ه نمودار b

دامنه = $\mathbb{R}$ برد = $[0, +\infty)$

دامنه = $\mathbb{R}$ برد = $[0, +\infty)$

دامنه = $\mathbb{R}$ برد = $(-\infty, -1]$

دامنه = $\mathbb{R}$ برد = $(-\infty, 2]$

دامنه = $\mathbb{R}$ برد = $(-\infty, -\frac{1}{3}]$

۹ نمودار سمت راست یک تابع را نشان می‌دهد، زیرا برای هر مقدار روی محور افقی (ها) تنها یک مقدار روی محور عمودی (ها) در نظر گرفته شده است، این در حالی است که در نمودار سمت چپ برای یک مقدار از محور افقی (۴)، دو مقدار ۲، ۳ از محور عمودی در نظر گرفته شده است، بنابراین تابع نیست.

۱۰

الف ۲

۱۱

روش اول:

$$a = \frac{-2 - 0}{4 - 2} = -1 \quad y = ax + b \Rightarrow y = -x + b \xrightarrow{(4, -2)} b = 2$$

$$D = (1, 4] \quad R = [-2, 1)$$

روش دوم:

$$m = \frac{-2 - 0}{4 - 2} = -1 \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-2) = -1(x - 4) \Rightarrow y = -x + 2$$

$$D = (1, 4] \quad R = [-2, 1)$$

روش سوم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 4a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$$

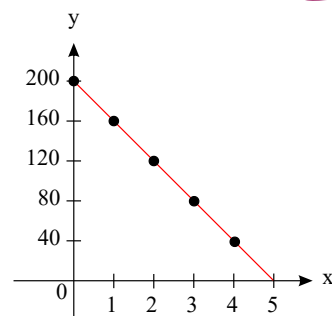
$$D = (1, 4] \quad R = [-2, 1)$$

$$y = ax + b$$

۱۲

۱۳

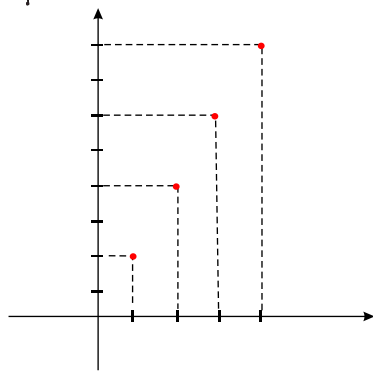
x (ساعت)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y (مسافت باقی‌مانده)	۲۰۰	۱۶۰	۱۲۰	۸۰	۴۰	۰



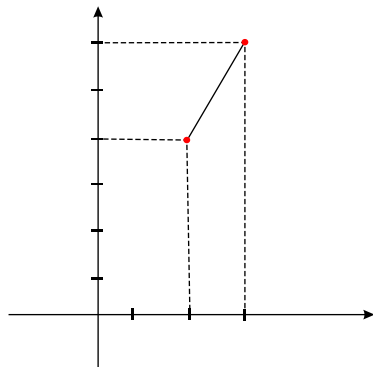
فرم تابع $y = -40x + 200$: $y = ax + b$ است : خطی است.

۱۴

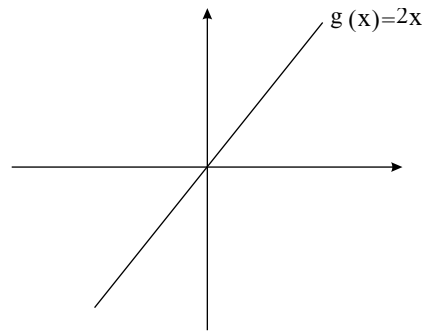
	(الف)	(ب)	(پ)	(ت)
تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$y = 2x$
دامنه	$\{1, 2, 3, 4\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$\{2, 3\}$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی
برد	$\{2, 4, 6, 8\}$	مجموعه اعداد حقیقی	$\{4, 6\}$	مجموعه اعداد حقیقی نامنفی



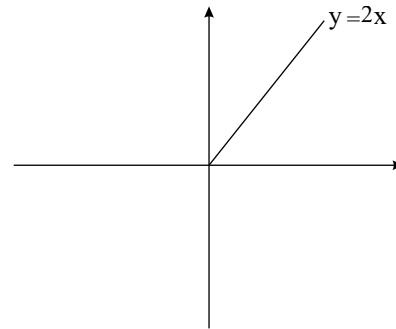
(الف)



(ب)



(ب)



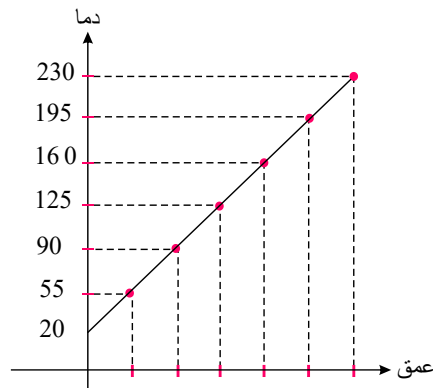
(ت)

۱۵

الف) زیرا به ازای هر عمق تنها یک دما داریم.

$$y = 35x + 20 \quad (\text{ب})$$

$$f(10) = 35 \times 10 + 20 = 370^\circ \text{C} \quad (\text{پ})$$



۱۶

اگر نمایش جبری تابع داده شده باشد، ولی دامنه‌ی آن مشخص نباشد، معمولاً دامنه را، بزرگترین مجموعه‌ی ممکن در نظر می‌گیریم. بعنوان مثال در تابع $f(x) = x^2$ ، دامنه را مجموعه‌ی اعداد حقیقی در نظر می‌گیریم. در غیر این صورت باید دامنه را به طور دقیق مشخص کنیم.

باتوجه به نکته‌ی فوق نمایش الف برای تابع درست است.

دقت کنید که تمام نمایش‌های فوق در دامنه‌های خاصی از مجموعه اعداد حقیقی برای $f(x) = x^2$ صحیح هستند اما از آنجا که دامنه مشخص نشده طبق نکته، نمایش الف درست است.

۱۷

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{استوانه}} + 2V_{\text{نیمکره}} = \pi r^2 \times 30 + 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = 30\pi r^2 + \frac{8}{3} \pi r^3 = \pi r^2 \left(30 + \frac{8}{3} r \right)$$

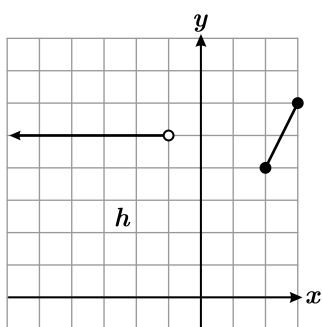
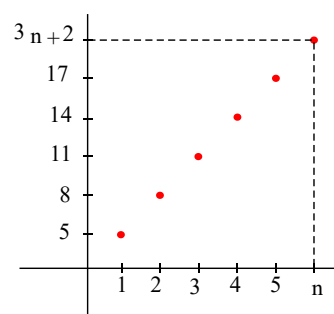
۱۸ الف)

تعداد دوزنقه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	n
محیط شکل	۵	۸	۱۱	۱۴	۱۷	$3n + 2$

ب) زیرا از فرم تابع خطی پیروی می‌کند و هر ورودی تنها یک خروجی دارد.

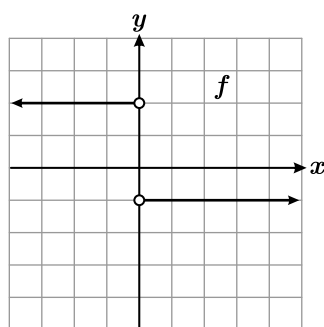
$$D_f = \{1, 2, 3, 4, n\}$$

$$R_f = \{5, 8, 11, 14, 17, 3n + 2\}$$



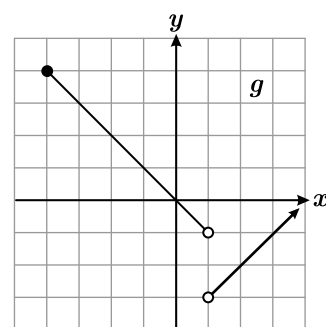
$$\text{دامنه} = (-\infty, -1) \cup [2, 3]$$

$$\text{برد} = [4, 6]$$



$$\text{دامنه} = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\text{برد} = \{-1, 2\}$$

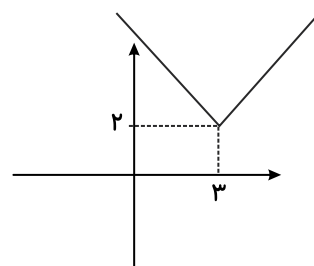
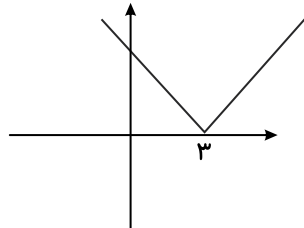
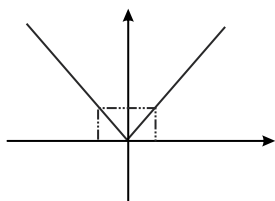


$$\text{دامنه} = [-4, +\infty)$$

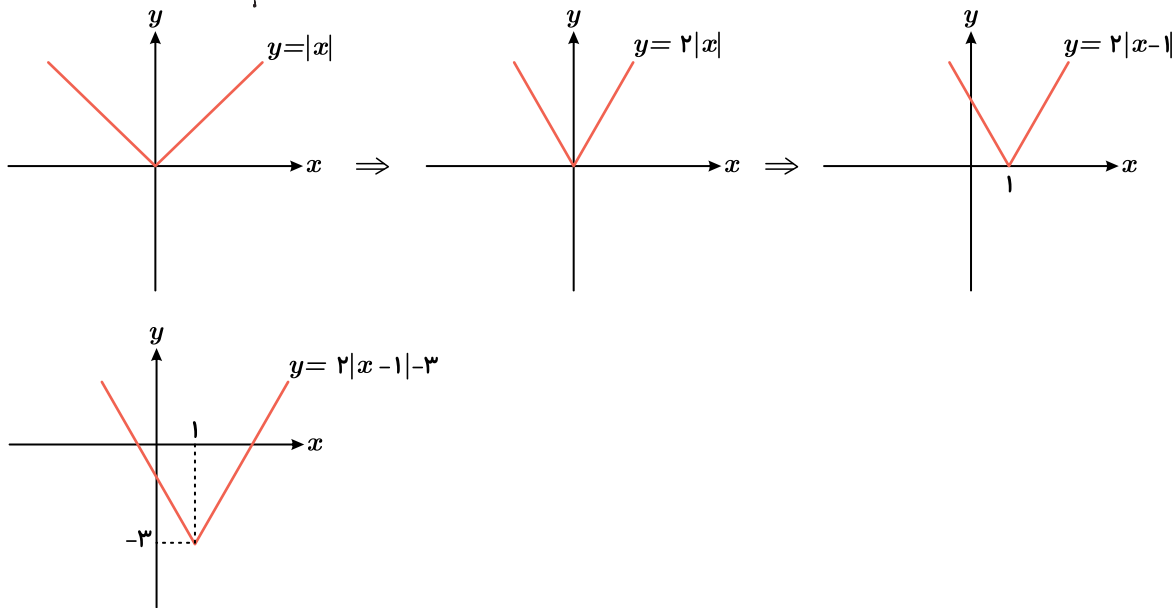
$$\text{برد} = (-3, +\infty)$$

$$g(\circ) = \circ, h(\sqrt{5}) = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}, f(-\frac{1}{5}) = 2, g(-2) = -(-2) = 2, f(3) = -1$$

$$f = \{(1, 2), (2, 1)\}$$



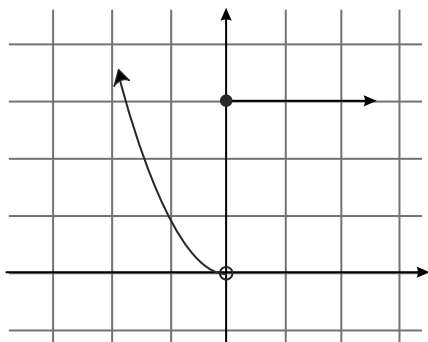
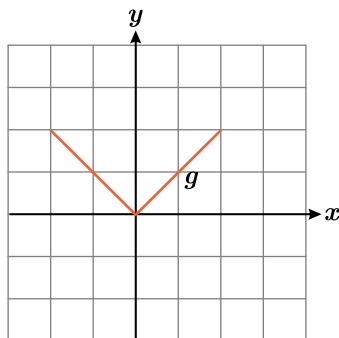
درست



$$f(0) = -2$$

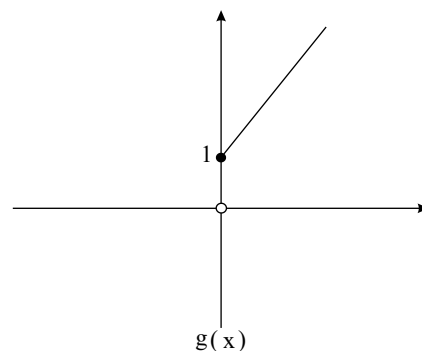
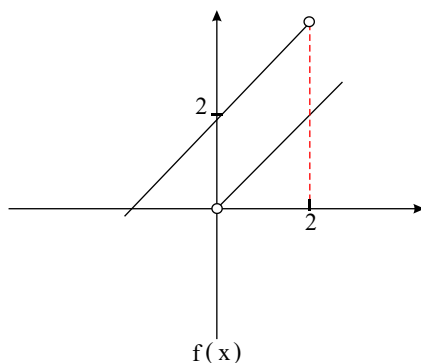
روش اول: $D_f = [-2, 2]$ و $R_f = [-2, 0]$

روش دوم: $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x < 2\}$ و $R_f = \{x | x \in \mathbb{R}, -2 \leq x \leq 0\}$



$$f(0) = 3, f(-4) = 16$$

$g(x)$, زیرا خطوط موازی محور y ها را حداکثر در یک نقطه قطع کرده است.



۲۷

الف

ضابطه تابع خطی به صورت $y = ax + b$ می باشد.

$$\text{روی نمودار قرار دارند. } (-3, 0), (-1, 2) \Rightarrow \begin{cases} 2 = -a + b \\ 0 = -3a + b \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = 3 \Rightarrow y = x + 3$$

$$\text{روی نمودار قرار دارند. } (2, 1), (-1, 1) \Rightarrow y = 1$$

$$\text{روی نمودار قرار دارند. } (4, 0), (2, -1) \Rightarrow \begin{cases} -1 = 2a + b \\ 0 = 4a + b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 2$$

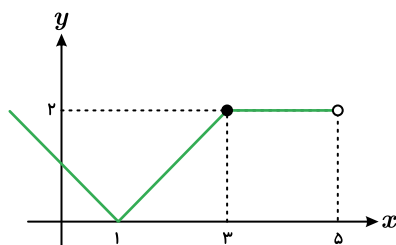
$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & x < -1 \\ 1 & -1 \leq x \leq 2 \\ \frac{1}{2}x - 2 & x > 2 \end{cases}$$

$$f \text{ دامنه } = (-\infty, +\infty) \text{ , } f \text{ برد } = (-\infty, +\infty)$$

ب

۲۸

الف



ب

دامنه : $(-\infty, 5)$

۲۹ الف در توابع خطی بین هر دو نقطه اگر شیب به دست بیاوریم، باید عددی یکسان شود.

$$\begin{cases} (-1, 2), (-3, 4) \Rightarrow m_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-2}{(-3)-(-1)} = \frac{2}{-2} = -1 \\ (-1, 2), (m, 6) \Rightarrow m_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6-2}{m-(-1)} = \frac{4}{m+1} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{m_1=m_2} \frac{4}{m+1} = -1 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4 = -m-1 \rightarrow m = -5$$

ب) مسافتی که علی طی می کند، برابر زمان ضرب در سرعت است. در نتیجه تابع مسافت طی شده بر حسب زمان (دقیقه) به صورت زیر است:

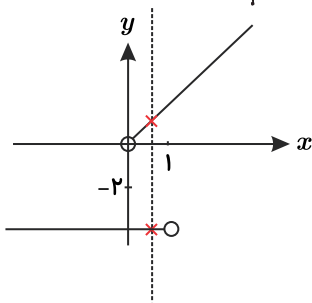
$$f(t) = 0.2t$$

ج

۱) چون در دامنه، هر عضو فقط به یک عضو از مجموعه دیگر وصل شده است و عضو بیکار در دامنه وجود ندارد، پس تابع است.

۲) در زوج مرتب های $(1, 2)$ و $(1, 5)$ که دارای مؤلفه های اول یکسان هستند و مؤلفه دوم یکسان نیست، در نتیجه تابع نیست.

۳) با رسم شکل متوجه می شویم که رابطه تابع نیست. زیرا در بازه $(0, 1)$ با رسم خط موازی محور y ها، این خط نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می کند.



۴) اگر در نمودار پیکانی در دامنه، عضوی داشته باشیم که به هیچ یک از اعضای برد مربوط نشده باشد، آن رابطه تابع نیست.

(صفحه ۹۹ و ۱۰۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۳ (۵، نمره) ب) گزینه ۴ (۵، نمره) ج) گزینه ۱ (۵، نمره)

۳۰ با توجه به شکل و فرم کلی سهمی داریم:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow c = 1$$

$$\begin{cases} a(1)^2 + b(1) = -1 \\ a(3)^2 + b(3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 3b = +3 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow 6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

$$\text{معادله نیم خط: } y = ax + b \Rightarrow y = x + b \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-3} = 1 \Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = x + b$$

$$\begin{matrix} (3,1) \\ \text{نیم خط است} \end{matrix} \Rightarrow 1 = 3 + b \Rightarrow b = -2 \Rightarrow y = x - 2$$

با توجه به دامنه‌هایی که در شکل مشخص شده است، ضابطه را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 & x \leq 3 \\ x - 2 & x > 3 \end{cases}$$

(صفحه ۱۱۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

با توجه به شکل و فرم کلی سهمی داریم:

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow c = 1 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\begin{cases} a(1)^2 + b(1) = -1 \\ a(3)^2 + b(3) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a - 3b = +3 \\ 9a + 3b = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$6a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \text{ (نمره ۲۵)}, b = -\frac{4}{3} \text{ (نمره ۲۵)}$$

معادله نیم خط:

$$\text{دو نقطه‌ای و نیم خط هستند: } \begin{cases} (3,1) \\ (5,3) \end{cases} \Rightarrow \text{شیب نیم خط} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-3} = 1 \text{ (نمره ۲۵)}$$

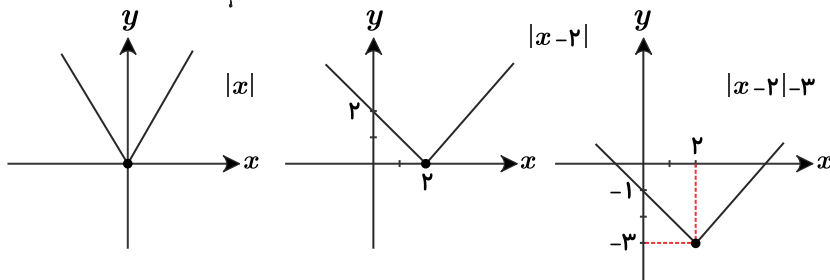
$$\Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = x + b$$

$$\begin{matrix} (3,1) \\ \text{نیم خط است} \end{matrix} \Rightarrow 1 = 3 + b \Rightarrow b = -2 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow y = x - 2$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1 & x \leq 3 \\ x - 2 & x > 3 \end{cases} \text{ (نمره ۵)}$$

۳۱ با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای، عبارت زیر رادیکال ساده شده و به شکل قدرمطلق درمی‌آید.

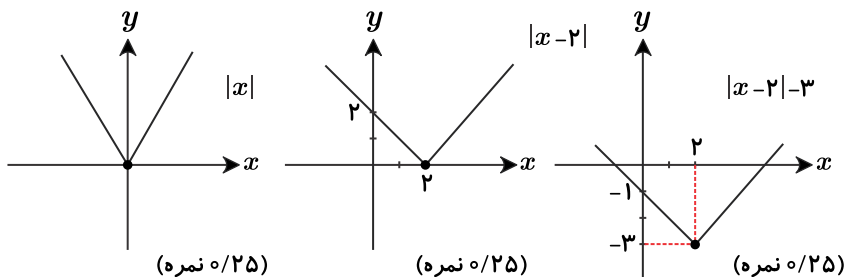
$$g(x) = \sqrt{(x-2)^2} - 3 = |x-2| - 3$$



(صفحه ۱۱۳ و ۱۱۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$g(x) = \sqrt{(x-2)^2} - 3 = |x-2| - 3 \text{ (نمره ۰/۲۵)}$$



۳۲

الف

تابع خطی گذرنده از نقاط $(-3, 0)$, $(-1, 1)$ $y = ax + b$

$$\begin{cases} 1 = -a + b \\ 0 = -3a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b = -1 \\ -3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = 1 + a = \frac{3}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, x \geq -1$$

$f(x) = x - 2 \Rightarrow$ تابع خطی گذرنده از نقاط $(4, 2)$, $(3, 1)$

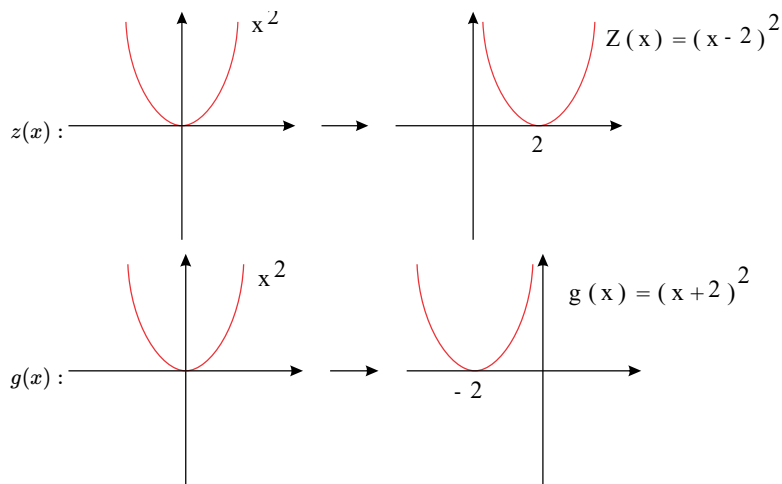
$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x - 2 & x > 3 \\ 1 & -1 < x \leq 3 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & x \leq -1 \end{cases}$$

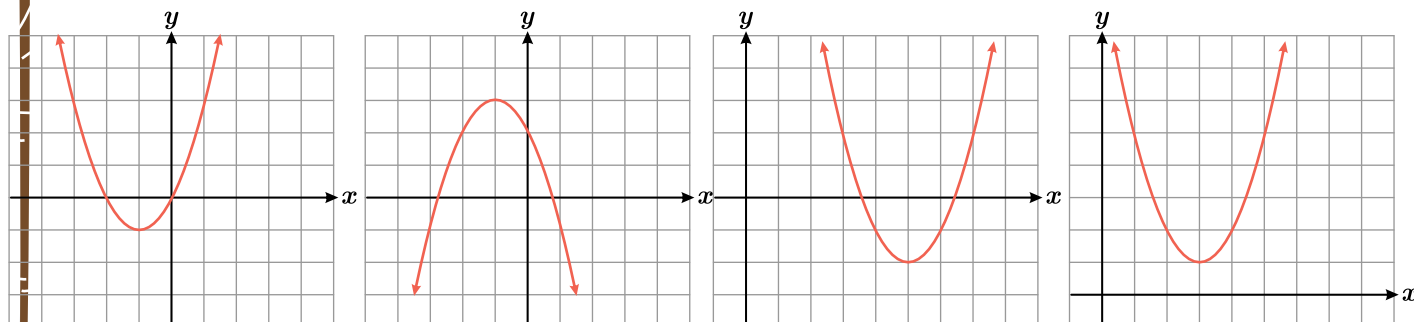
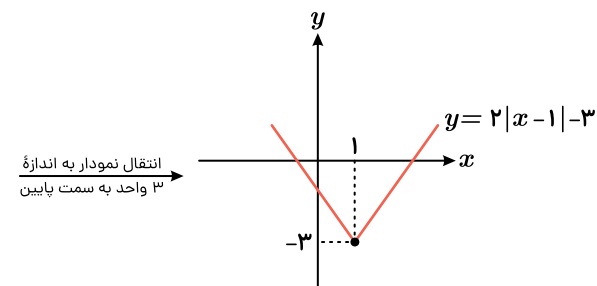
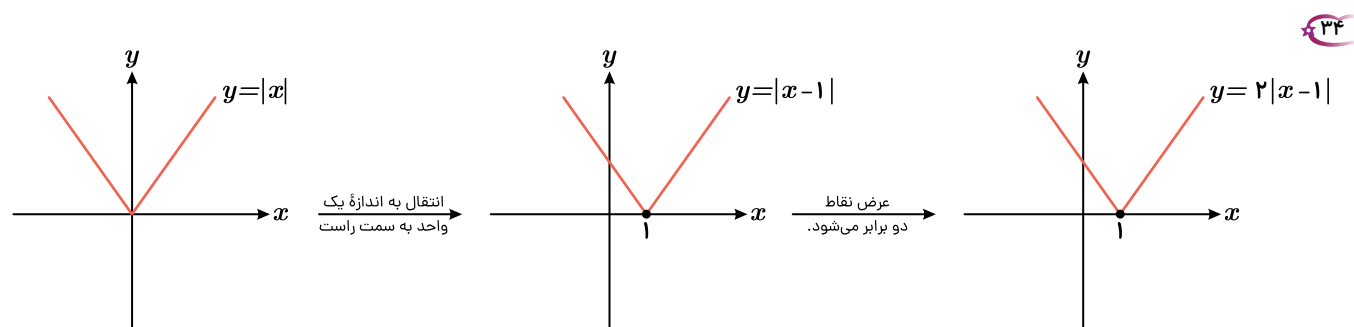
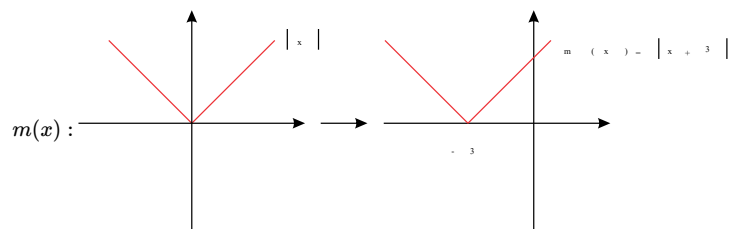
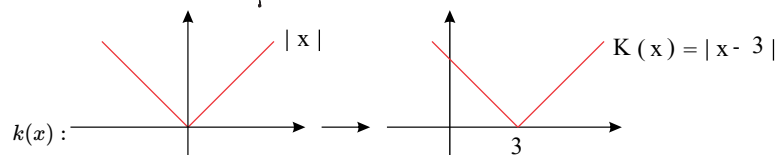
ب

$$x = -4 \leq -1 \Rightarrow f(-4) = \frac{1}{2}(-4) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$x = 5 > 3 \Rightarrow f(5) = 5 - 2 = 3$$

۳۳ برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافیت تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور x ها انتقال دهیم که اگر $k > 0$ باشد انتقال در جهت منفی و اگر $k < 0$ باشد انتقال در جهت مثبت خواهد بود.





$$g(x) = (x + 1)^2 - 1$$

دامنه $g = \mathbb{R}$
برده $g = [-1, +\infty)$

$$t(x) = -(x + 1)^2 + 3$$

دامنه $t = \mathbb{R}$
برده $t = (-\infty, 3]$

$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

دامنه $f = \mathbb{R}$
برده $f = [-2, +\infty)$

$$h(x) = (x - 3)^2 + 1$$

دامنه $h = \mathbb{R}$
برده $h = [1, +\infty)$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۶ دهم

سال دهم

فهرست

درس اول: شمارش

۱..... اصل جمع و اصل ضرب

درس دوم: جایگشت

۲..... فاکتوریل

۲..... جایگشت

درس سوم: ترکیب

۳..... ترکیب

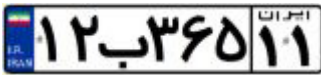
۴..... مسائل ویژه (ترکیبی)



درس اول: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

- ۱ با ارقام ۰, ۲, ۳, ۴, ۷, ۸ چند عدد ۴ رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟
- ۲ با ارقام ۲, ۵, ۷, ۸, ۹ چند عدد ۵ رقمی می توان نوشت؟
- ۳ با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ چند عدد ۴ رقمی زوج می توان نوشت؟
- ۴ یک آزمون شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه ای و ۵ سؤال ۲ گزینه ای (بله - خیر) است. فردی تصمیم دارد به سؤال ها به صورت اتفاقی پاسخ دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد:
الف) اگر مجبور باشد به همه ی سؤال ها جواب دهد؟
ب) اگر بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟
- ۵ می خواهیم ۴ مداد به شماره های ۱ تا ۴ را بین علی و حسن و رضا تقسیم کنیم به طوریکه مدادی باقی نماند. این کار به چند طریق ممکن است؟
- ۶ با پلاک هایی به صورت زیر که عدد دو رقمی سمت راست آن ها از مجموعه A انتخاب شوند و سایر ارقام از مجموعه B انتخاب شوند و حرف استفاده شده در آن از مجموعه C انتخاب شود، چند ماشین را می توان شماره گذاری کرد؟



$$A = \{11, 22, \dots, 99\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$C = \{ي, ه, و, ن, م, ل, ق, ط, ص, س, د, ج, ب\}$$

- ۷ یک آزمون چند گزینه ای شامل ۱۰ سؤال ۴ گزینه ای و ۵ سؤال ۲ گزینه ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به سؤال ها به صورت تصادفی جواب دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر:
الف) اگر مجبور باشد به همه ی سؤال ها جواب دهد؟
ب) بتواند سؤال ها را بدون جواب هم بگذارد؟
- ۸ با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵: (بدون تکرار)
الف. چند رمز ۴ رقمی می توان ساخت؟
ب. چند کد تلفن بین شهری ۴ رقمی می توان ساخت؟
پ. چند عدد چهار رقمی می توان ساخت؟
- ۹ چند عدد سه رقمی بزرگ تر از ۵۰۰ وجود دارد که مجموع ارقام یکان و دهگان آنها ۸ باشد؟
- ۱۰ می دانیم برای یک آزمون چهارگزینه ای با n سؤال، دانش آموزان می توانند ۳۱۲۵ حالت پاسخ نامه متمایز داشته باشند. اگر ۳ سؤال چهارگزینه ای دیگر به آزمون اضافه کنیم، چند پاسخ نامه متفاوت به شرط آنکه به همه ی سؤالات پاسخ داده شود، می تواند وجود داشته باشد؟
- ۱۱ امین قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش پوریا، شیرینی بدهد. او با خود فکر می کند که پوریا را به یکی از دو مکان رستوران «آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلو خورشت قورمه سبزی و قیمه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب میوه هویج، سیب و پرتقال را می تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای پوریا وجود دارد؟
- ۱۲ پژمان قصد دارد به عیادت دوستش برود. او به یکی از دو انتخاب «یک شاخه گل» یا «یک نوع شیرینی» برای بردن به خانه دوستش فکر می کند. گل هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از: مریم، گلابیل، زنبق و رُز. شیرینی هایی که او در نظر دارد، عبارت اند از: گردویی، نارگیلی و کشمش. او چند انتخاب دارد؟





۱۳ با ارقام ۱ و ۰ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ و بدون تکرار ارقام چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ می توان نوشت؟



درس دوم: جایگشت



فاکتوریل

۱۴ حاصل عبارت‌های زیر را بدست آورید. (مانند نمونه)

$$6! = 6 \times \underbrace{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{5!} = 6 \times 5!$$

(ب) $10!$

(ت) $(n-3)!$

(الف) $7!$

(پ) $n!$

(ث) $(n+2)!$

۱۵ از تساوی $P(n, n-2) = 12$ مقدار n را به دست آورید.

۱۶ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف)

$$C(7, 2) + P(5, 3)$$

(ب)

$$\frac{(n+2)!}{n!}$$

جایگشت

۱۷ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) تعداد جایگشت‌های متمایز حروف کلمه «نرگس» برابر ۴! است.

۱۸ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

(الف) تعداد جایگشت‌های n شی متمایز برابر است با

(ب) تعداد جایگشت‌های r تایی از n شی متمایز یا به عبارتی تعداد حالت‌های انتخاب r شی از بین n شی که در آن‌ها ترتیب قرار گرفتن مهم باشد را با نمایش می‌دهیم که برای محاسبه‌ی آن از رابطه‌ی استفاده می‌کنیم.

۱۹ برای روشن شدن یک هواپیما باید از بین ۲۰ کلید موجود، ۴ کلید به ترتیب فشرده شوند. اگر شخص بخواهد به طور اتفاقی این هواپیما را روشن کند و فشار دادن هر کلید ۲۸ زمان ببرد در بدترین حالت، این شخص به چند ثانیه زمان نیاز دارد؟

۲۰ با حروف کلمه «جهان‌گردی» و بدون تکرار حروف:

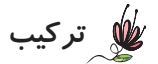
(الف) چند کلمه ۸ حرفی می‌توان ساخت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند.

(ب) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان ساخت که به «گردی» ختم شود.

۲۱ از بین تعدادی کتاب مختلف می‌خواهیم ۳ کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه‌ای بچینیم. اگر تعداد حالت‌های این کار ۶۰ تا باشد، تعداد کتاب‌ها چند جلد است؟



درس سوم: ترکیب



۲۲ برای برگزاری یک دوره مسابقات ریاضی، از بین ۴ دبیر، ۳ دانشجو و ۲ دانش آموز قرار است گروهی تشکیل شود. به چند طریق می توان این کار را انجام داد اگر:

الف گروه ۴ نفره باشد؟

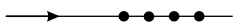
ب گروه ۵ نفره باشد و حداقل یک دبیر در آن باشد؟

۲۳ یک نقاش قوطی هایی از ۴ رنگ قرمز، آبی، زرد و مشکی دارد. اگر او با ترکیب دو یا چند قوطی از رنگ های متمایز بتواند دقیقاً یک رنگ جدید درست کند، او چند رنگ می تواند داشته باشد؟

چرا با این که در کارهای هنری فقط از همین ۴ رنگ استفاده می شود، اما تعداد رنگ های حاصل بیش تر از جواب شماس؟



۲۴ با توجه به نقاط روی دو خط موازی، در شکل روبه رو چند مثلث می توان ساخت؟



۲۵ درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را تعیین کنید.

الف همیشه حاصل $C(n, 1)$ معادل n است.

۲۶ جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

الف حاصل $C(6, 3) - P(5, 2)$ برابر با است.

۲۷ از بین ۵ دانش آموز سال دهم تجربی و ۶ دانش آموز سال دهم ریاضی به چند طریق می توان ۴ نفر را انتخاب کرد، به طوری که:

الف دقیقاً ۳ نفر از گروه تجربی باشند.

ب حداقل ۳ نفر از گروه ریاضی باشند.

پ تعداد اعضای دو گروه یکسان باشند.

۲۸ ۹ نقطه متمایز روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که رئوس آن، از این ۹ نقطه انتخاب شده باشند؟ (روش حل خود را بنویسید)

۲۹ در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

الف از بین n نفر، به ۴۵ روش متفاوت می توان ۲ نفر را انتخاب کرد، در این صورت n برابر است.

۳۰ جاهای خالی را پر کنید.

الف در اصل اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد، به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد برای انجام کار مورد نظر روش وجود دارد.

ب مقدار $\frac{0!}{1!}$ برابر است.

ج حاصل عبارت $P(6, 2) = \dots\dots\dots$ و $C(6, 2) = \dots\dots\dots$ است.

د ۱۰ نقطه متمایز روی محیط یک دایره قرار دارند، تعداد مثلث هایی که با وصل کردن آنها می توان ساخت، برابر است.

۳۱ اگر $\binom{n}{2} + 2n = 14$ باشد، مقدار n را به دست آورید.





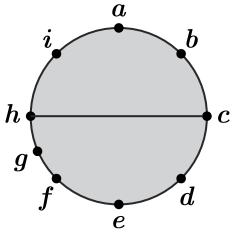
۳۲ در یک کلاس ۳۵ نفری دانش آموزان در ۵ ردیف ۷ تایی نشسته‌اند. معلم کلاس ۵ نفر را از روی لیست صدا می‌زند، چند حالت وجود دارد که:

الف) این ۵ نفر از یک ردیف انتخاب شده باشند.

ب) این ۵ نفر از ۵ ردیف مختلف باشند.

ج) دو نفر از ردیف چهارم و سه نفر از ردیف اول باشند.

۳۳ با نقاط متمایزی که روی محیط دایره زیر قرار دارد، چند چهارضلعی می‌توان ایجاد کرد که پاره خط ch یکی از قطرهای آن ۴ ضلعی باشد؟



مسائل ویژه (ترکیبی)

۳۴ معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$P(5, 2) = 2n + C(5, 3)$$

۳۵ اگر $\frac{P(n, 4)}{C(n-1, 4)} = 26$ باشد، n را به دست آورید.



پاسخنامه تشریحی

۱ روش اول:

$$\text{تعداد کل حالت ها } ۶۰ = ۳۶ + ۲۴$$

$$۲۴ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ : \text{حالت اول که رقم سمت راست صفر باشد}$$

$$۳۶ = ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ : \text{حالت دوم که رقم سمت راست ۲ یا ۴ باشد}$$

روش دوم:

$$\begin{cases} ۹۶ = ۲ \times ۳ \times ۴ \times ۴ : \text{همه اعداد چهاررقمی} \\ ۶۰ = ۳۶ - ۹۶ : \text{اعداد چهاررقمی زوج} \\ ۳۶ = ۲ \times ۲ \times ۳ \times ۳ : \text{اعداد فرد چهاررقمی} \end{cases}$$

۲ طبق اصل ضرب، ۵ خانه داریم که هر یک ۵ حالت می تواند داشته باشند:

$$۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ \times ۵ = ۵^۵$$

۳ دقت کنید رقم سمت چپ نمی تواند صفر باشد و برای زوج بودن عدد، رقم آخر باید یکی از ارقام ۲، ۴، ۶ باشد پس:

$$\frac{۵}{۱}, \frac{۶}{۰}, \frac{۶}{۰}, \frac{۳}{۰} = ۵ \times ۶ \times ۶ \times ۳ = ۱۵ \times ۳۶$$

۵	۶	۶	۳
۱	۰	۰	۰
۲	۱	۱	۲
۳	۲	۲	۴
۴	۳	۳	
۵	۴	۴	
	۵	۵	

۴ الف) دقت کنید چون پاسخ به سؤالات، مرحله به مرحله است و هر کدام از سؤالات چهارگزینه ای، ۴ حالت دارد بنابر اصل ضرب داریم:

$$۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^{۱۰}$$

و برای سؤال های دو گزینه ای داریم:

$$۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۲^۵$$

و چون به هر دو سری از سؤالات با هم جواب می دهد تعداد حالات کل برابر است با:

$$۴^{۱۰} \times ۲^۵$$

ب) اگر بتواند به هر سؤال پاسخ بدهد یا ندهد آن وقت برای سؤال های ۴ گزینه ای، ۵ حالت وجود دارد: یکی از ۴ گزینه یا اینکه اصلاً جواب ندهد و برای سؤال های ۲ گزینه ای هم ۳ حالت وجود دارد: یکی از دو گزینه یا جواب ندادن به سؤال پس داریم:

$$۵^{۱۰} \times ۳^۵$$

۵ هر مداد ۳ حالت دارد:

$$۳, ۳, ۳, ۳ = ۳^۴$$

۶

$$\frac{۹}{B} \times \frac{۹}{B} \times \frac{۱۳}{C} \times \frac{۹}{B} \times \frac{۹}{B} \times \frac{۹}{B} \times \frac{۹}{A} = ۶۹۰۸۷۳۳$$

۷ الف) هر سؤال ۴ گزینه ای ۴ حالت (یکی از ۴ گزینه) دارد و هر سؤال ۲ گزینه ای ۲ حالت (بله / خیر)

$$\underbrace{۴ \times ۴ \times \dots \times ۴}_{۱۰ \text{ تا}} \times \underbrace{۲ \times ۲ \times \dots \times ۲}_{۵ \text{ تا}} = ۴^{۱۰} \times ۲^۵ = (۲^۲)^{۱۰} \times ۲^۵ = ۲^{۲۰} \times ۲^۵ = ۲^{۲۵}$$

ب) هر سؤال ۴ گزینه ای ۵ حالت (یکی از ۴ گزینه یا عدم پاسخ) دارد و هر سؤال ۲ گزینه ای ۳ حالت (بله / خیر / عدم پاسخ)

$$\underbrace{۵ \times ۵ \times \dots \times ۵}_{۱۰ \text{ تا}} \times \underbrace{۳ \times ۳ \times \dots \times ۳}_{۵ \text{ تا}} = ۵^{۱۰} \times ۳^۵$$

۸

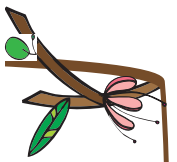
الف) $۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳$

ب) $\frac{۰}{۵۴۳} \quad ۵ \times ۴ \times ۳$

پ) $\frac{۰}{۵۵۴۳} \quad ۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳$

۹

با توجه به صورت سؤال، برای آنکه اعداد موردنظر بزرگ تر از ۵۰۰ باشند در رقم صدگان یکی از ارقام ۵، ۶ و ۷ و ۸ و ۹ می تواند قرار بگیرد و در حالت کلی برای اینکه مجموع ارقام یکان و دهگان ۸ باشد مجموعه اعداد $\{(۰, ۸), (۱, ۷), (۲, ۶), (۳, ۵), (۴, ۴)\}$ را خواهیم داشت، بنابراین داریم:



یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{8} \boxed{0} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{0} \boxed{8} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان صفر یا ۸ باشد ۱۰ حالت است، به همین ترتیب برای مجموعه ارقام $\{(1, 7), (2, 6), (3, 5)\}$ نیز همین روند را داریم:

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۱ یا ۷ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۲ یا ۶ باشد، ۱۰ حالت است.

کل حالاتی که رقم یکان و دهگان ۳ یا ۵ باشد، ۱۰ حالت است.

یکان دهگان صدگان

$$\boxed{5, 6, 7, 8, 9} \boxed{4} \boxed{4} \Rightarrow 5 \times 1 \times 1 = 5$$

بنابراین تعداد کل حالت‌ها برابر خواهد بود با: $10 + 10 + 10 + 10 + 5 = 45$

۱۰

در ابتدا چون می‌توان به هر سؤال به ۵ حالت پاسخ داد (یکی از گزینه‌ها انتخاب شود یا بدون پاسخ (سفید) بماند). پس:

$$\underbrace{5 \times 5 \times \dots \times 5}_{n \text{ تا}} = 5^n = 3125$$

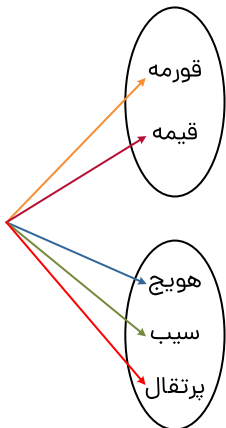
$$\Rightarrow 5^n = 5^5 \Rightarrow n = 5$$

$$\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4}_{8 \text{ تا}} = 4^8 = 2^{16}$$

سه سؤال اضافه شود و شرط پاسخ‌گویی به تمام سؤالات را داشته باشیم:

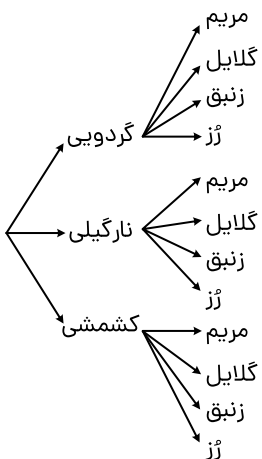
۱۱

پنج انتخاب وجود دارد.



۱۲

هفت انتخاب دارد، زیرا طبق اصل جمع $3 + 4 = 7$.



$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300$$

۱۳ کل اعداد ۴ رقمی با ارقام ذکر شده و بدون تکرار ارقام:

اعداد ۴ رقمی ذکر شده که مضرب ۵ نیستند و بدون تکرار ارقام:

$$4 \times 4 \times 3 \times 4 = 192$$

اعداد ۴ رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام:

$$300 - 192 = 108$$

راهنمای تصحیح:

راه حل اول:

$$5 \times 5 \times 4 \times 3 = 300 \text{ (نمره ۵)}$$

$$4 \times 4 \times 3 \times 4 = 192 \text{ (نمره ۵)}$$

$$300 - 192 = 108 \text{ (نمره ۲۵)}$$

راه حل دوم:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{اصل جمع} \\ 108 \text{ (نمره ۲۵)} \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} 5 \times 4 \times 3 \times 1 = 60 \text{ (نمره ۵)} \\ 4 \times 4 \times 3 \times 1 = 48 \text{ (نمره ۵)} \end{array}$$

۱۴

$$\text{الف) } 7! = 7 \times \underbrace{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{6!} = 7 \times 6!$$

$$\text{ب) } 10! = 10 \times \underbrace{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}_{9!} = 10 \times 9!$$

$$\text{پ) } n! = n \times \underbrace{(n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1}_{(n-1)!} = n \times (n-1)!$$

$$\text{ت) } (n-3)! = (n-3) \times \underbrace{(n-4) \times (n-5) \times \dots \times 1}_{(n-4)!} = (n-3)(n-4)!$$

$$\text{ث) } (n+2)! = (n+2) \times \underbrace{(n+1) \times n \times (n-1) \times \dots \times 1}_{(n+1)!} = (n+2)(n+1)!$$

۱۵

طبق فرض داریم:

$$P(n, n-2) = 12 \Rightarrow \frac{n!}{(n-(n-2))!} = 12$$

$$\frac{n!}{2!} = 12 \Rightarrow n! = 12 \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = (4 \times 3) \times 2 \times 1 \Rightarrow n! = 4! \Rightarrow n = 4$$

۱۶

الف

$$C(7, 2) + P(5, 3) = \frac{7!}{2!5!} + \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{7 \times 6}{2} + 5 \times 4 \times 3 = 21 + 60 = 81$$

ب

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

۱۷

الف

درست

۱۸ الف) $n!$

$$\text{ب) } P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, P(n, r)$$

۱۹

$$P(20, 4) = \frac{20!}{16!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16!}{16!} = 20 \times 19 \times 18 \times 17$$

هر کلید ۲۵:

$$20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 2$$

۲۰ کلمات «جهان» را در یک بسته قرار می‌دهیم، این حروف می‌توانند ۴ جایگشت داشته باشند غیر از حروف جهان ۴ حرف دیگر داریم که جمعاً ۵ بسته می‌شود. در نتیجه:

$$\begin{array}{c} 4! \\ \uparrow \\ \text{الف) } \boxed{\text{جهان}} - - - - = 4! \times 5! \end{array}$$

با توجه به ثابت بودن حروف «گردی» در آخر کلمه ۱ حالت و با توجه به ۴ حرف باقی‌مانده ۴ حرف برای ۲ جایگاه تعداد حالت‌ها به صورت زیر است:



راهنمای تصحیح:

$$\frac{4}{\boxed{\text{گردی}}} \times \frac{3}{12} = 12 \quad \text{ب)}$$

$$\frac{4!}{\boxed{\text{ج} \text{ ان}}} = \dots = 4! \times 5! \quad \text{الف)}$$

$$\frac{4}{\boxed{\text{گردی}}} \times \frac{3}{12} = 12 \quad \text{ب)}$$

۲۱ چون در این سؤال چیدمان مهم است؛ پس از فرمول $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ استفاده می‌کنیم.

$$P(n, 3) = 60 \rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 60 \rightarrow (n) \times (n-1) \times (n-2) = 60$$

$$n = 5$$

(صفحه ۱۲۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$P(n, 3) = 60 \quad \text{(نمره ۲۵)} \rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = 60 \rightarrow (n) \times (n-1) \times (n-2) = 60 \quad \text{(نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow n = 5 \quad \text{(نمره ۵)}$$

۲۲

الف

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = 126$$

ب

روش اول: استفاده از روش متمم

$$\binom{9}{5} - \binom{5}{5} = 125$$

روش دوم: به روش مستقیم

$$\binom{4}{1} \binom{5}{4} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} + \binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{4} \binom{5}{1} = 125$$

۲۳ از ترکیب هر ۲ رنگ، هر ۳ رنگ و هر ۴ چهار رنگ، رنگ‌های جدید به وجود می‌آید. بنابراین داریم:

$$\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = \frac{4!}{2!2!} + \frac{4!}{3!1!} + \frac{4!}{4!0!} = 6 + 4 + 1 = 11$$

۱۱ رنگ از ترکیب ۴ رنگ اصلی بوجود می‌آید.

مجموع رنگ‌ها:

۱۵ رنگ = ۴ رنگ اصلی + ۱۱ رنگ ترکیبی

دقت کنید زمانی که نقاشی کشیده می‌شوند؛ خود رنگ‌های ترکیبی و اصلی دوباره با یکدیگر ترکیب می‌شوند و رنگ‌های جدیدتری بوجود می‌آیند.

پس در عمل، تعداد رنگ‌ها بیش‌تر از ۱۵ رنگ است.

۲۴

$$\binom{3}{1} \binom{4}{2} + \binom{3}{2} \binom{4}{1}$$

۲۵

الف درست

۲۶

الف صفر

$$C(6, 3) - P(5, 2) = \frac{6!}{3! \times 3!} - \frac{5!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2 \times 1 \times 3!} - \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20 - 20 = 0$$

۲۷

الف

$$\text{تعداد} = \binom{5}{3} \binom{6}{1} = 10 \times 6 = 60$$

$$\text{تعداد} = \binom{6}{3} \binom{5}{1} + \binom{6}{4} = 20 \times 5 + 15 = 115$$

$$\text{تعداد} = \binom{5}{2} \binom{6}{2} = 10 \times 15 = 150$$

$$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \times 6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6 \times 6!} = 84$$

ب

پ

۲۸

۲۹

الف ۱۰

۳۰

(صفحه ۱۲۰ کتاب درسی) $m + n$ ، جمع (الف)

(صفحه ۱۲۸ کتاب درسی) ۱ (ب)

(صفحه ۱۲۹، ۱۳۴ کتاب درسی) $C(6, 2) = \frac{6!}{2!4!} = 15$ ، $P(6, 2) = \frac{6!}{4!} = 30$ ، ج

د) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6 \times 7!} = 120$ (صفحه ۱۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(۲۵، نمره) $m + n$ ، جمع (الف)

(۲۵، نمره) ۱ (ب)

(۲۵، نمره) $C(6, 2) = \frac{6!}{2!4!} = 15$ ، $P(6, 2) = \frac{6!}{4!} = 30$ ، ج

د) $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \times 7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{6 \times 7!} = 120$ (۲۵، نمره)

۳۱ با استفاده از فرمول $C\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ مسئله را حل می‌کنیم.

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} + 2n = 14 \rightarrow \frac{n \times (n-1) \times \cancel{(n-2)!}}{2! \times \cancel{(n-2)!}} + 2n = 14 \rightarrow$$

$$\frac{n^2 - n}{2} + 2n = 14 \rightarrow \frac{n^2 - n + 4n}{2} = 14 \rightarrow n^2 + 3n - 28 = 0$$

$$(n-4)(n+7) = 0 \rightarrow \begin{matrix} n=4 & \checkmark \\ n=-7 & \times \text{ غ ق ق} \end{matrix}$$

با توجه به طبیعی بودن n ، $n = -7$ غ ق ق است.

راهنمای تصحیح:

(۲۵، نمره) $\frac{n!}{2!(n-2)!} + 2n = 14 \rightarrow \frac{n \times (n-1) \times \cancel{(n-2)!}}{2! \times \cancel{(n-2)!}} + 2n = 14 \rightarrow$

(۲۵، نمره) $\frac{n^2 - n}{2} + 2n = 14 \rightarrow \frac{n^2 - n + 4n}{2} = 14 \rightarrow n^2 + 3n - 28 = 0$

$(n-4)(n+7) = 0 \rightarrow \begin{cases} n=4 & \checkmark \\ n=-7 & \times \text{ غ ق ق} \end{cases}$ (۲۵، نمره)

۳۲ الف) وقتی ۵ نفر باید از یک ردیف انتخاب شوند پس باید ابتدا از بین ۵ ردیف یک $\binom{5}{1}$ سپس در آن ردیف از ۷ نفر، ۵ نفر را انتخاب می‌کنیم $\binom{7}{5}$ پس از آن باید در هم

ضرب شوند. $\binom{7}{5} \binom{5}{1}$

ب) انتخاب هر نفر از ۱ ردیف جداگانه می‌شود $\binom{7}{1}$ ، ۵ بار باید $\binom{7}{1}$ را محاسبه کنیم و آنها را در هم ضرب کنیم.

ج) وقتی ردیف‌ها مشخص هستند فقط باید از بین نفرات آن ردیف انتخاب شود.



$$\binom{7}{2} \times \binom{7}{3} = \frac{7!}{5! \times 2!} \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 21 \times 35 = 735$$

راهنمای تصحیح:

اگر جواب نهایی نوشته نشده بود نمره کسر نشود.

$$\text{الف)} \quad \binom{7}{5} \times \binom{5}{1} = 21 \times 5 = 105 \text{ (نمره ۵)}$$

$$\text{ب)} \quad \binom{7}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{7}{1} = 7^5 \text{ (نمره ۵)}$$

$$\text{ج)} \quad \binom{7}{2} \times \binom{7}{3} = 21 \times 35 = 735 \text{ (نمره ۵)}$$

۳۳ ✖ اگر بخواهیم ch قطر ۴ ضلعی باشد، c و h باید دو رأس غیرمجاور از این چهارضلعی باشند، پس باید ۱ نقطه از بین ۴ نقطه پایین و ۱ نقطه از ۳ نقطه بالا را به عنوان رئوس دیگر ۴ ضلعی انتخاب کنیم.

$$\binom{3}{1} \binom{4}{1} = 3 \times 4 = 12$$

(صفحة ۱۳۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\binom{3}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \times 4 = 12 \text{ (نمره ۲۵)}$$

(نمره ۲۵) (نمره ۲۵)

۳۴ ✖

$$P(5, 2) = 2n + C(5, 2) \rightarrow \frac{5!}{2!} = 2n + \frac{5!}{3! \times 2!} \rightarrow 20 = 2n + 10 \rightarrow n = 5$$

۳۵ ✖ با توجه به فرمول $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ و $C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ داریم:

$$\frac{\frac{n!}{(n-4)!}}{\frac{(n-1)!}{(n-5)! \times 4!}} = 26 \Rightarrow \frac{n! \times (n-5)! \times 4!}{(n-4)! \times (n-1)!} = 26 \Rightarrow \frac{n \times (n-1)! \times (n-5)! \times 24}{(n-4)(n-5)! \times (n-1)!} = 26$$

$$\frac{n \times 24}{(n-4)} = 26 \Rightarrow 26(n-4) = 24n \Rightarrow 26n - 104 = 24n \Rightarrow 2n = 104 \Rightarrow n = 52$$

(صفحة ۱۲۹ و ۱۳۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\frac{\frac{n!}{(n-4)!} \text{ (نمره ۲۵)}}{\frac{(n-1)!}{(n-5)! \times 4!} \text{ (نمره ۲۵)}} = 26 \Rightarrow \frac{n! \times (n-5)! \times 4!}{(n-4)! \times (n-1)!} = 26 \Rightarrow \frac{n \times (n-1)! \times (n-5)! \times 24}{(n-4)(n-5)! \times (n-1)!} = 26$$

$$\frac{n \times 24}{(n-4)} = 26 \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow 26(n-4) = 24n \Rightarrow 26n - 104 = 24n \Rightarrow 2n = 104 \Rightarrow n = 52 \text{ (نمره ۲۵)}$$



مشاوره کنکور نوتروفیل

بیستوفیل ریاضی فصل ۷ دهم

سال دهم

فهرست

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

- ۱..... پیشامدهای تصادفی
- ۱..... اعمال روی پیشامدهای تصادفی
- ۲..... احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس)
- ۳..... احتمال اجتماع دو پیشامد و پیشامدهای ناسازگار

درس دوم: مقدمه ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

- ۴..... جامعه و نمونه

درس سوم: متغیر و انواع آن

- ۵..... متغیر و مقدار متغیر
- ۵..... متغیرهای کیفی و انواع آنها
- ۵..... مسائل ترکیبی



درس اول: احتمال یا اندازه گیری

شانس

پیشامدهای تصادفی

۱ دو تاس را با هم می‌اندازیم. پیشامد A را «هر دو تاس مضرب ۵ باشند» و پیشامد B را «مجموع دو تاس ۱۱ باشد» تعریف می‌کنیم:

الف A و B را با نمایش اعضا مشخص کنید.

ب آیا این دو پیشامد ناسازگارند؟ چرا؟

۲ هر یک از اعداد طبیعی و کوچک‌تر از هفت را روی یک کارت می‌نویسیم و یکی از کارت‌ها را به تصادف انتخاب می‌کنیم
الف فضای نمونه‌ای را بنویسید.

ب چه تعداد پیشامد روی این فضای نمونه‌ای می‌توان تعریف کرد؟

پ پیشامد A که در آن، عدد روی کارت انتخاب شده مضرب ۳ باشد را بنویسید.

۳ هر یک از ارقام ۱ تا ۱۲ را روی یک کارت می‌نویسیم و آن‌ها را در یک کیسه قرار می‌دهیم؛ سپس یک کارت به تصادف از کیسه خارج می‌کنیم. هر یک از پیشامدهای زیر را تعیین کنید:

الف فضای نمونه‌ای و پیشامد A که در آن «عدد روی کارت فرد باشد».

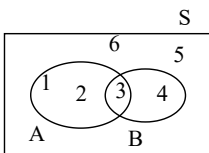
ب پیشامد B که در آن «عدد روی کارت اول باشد».

پ پیشامد C که در آن «عدد رو شده بزرگ‌تر از ۷ و کوچک‌تر از ۱۰ باشد».

ت پیشامد D که در آن «عدد رو شده، مضرب ۳ باشد».

اعمال روی پیشامدهای تصادفی

۴ باتوجه به نمودار ون مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید.



ث پیشامد A'

ج پیشامد $(B' \cap A)$

چ پیشامد $(A' \cup B)$

الف پیشامد $(A \cup B)$

ب پیشامد $(A \cap B)$

پ پیشامد $A - B$

ت پیشامد $B - A$





۵ در پرتاب دو تاس با رنگ‌های قرمز و آبی به‌طور همزمان مطلوبست:

الف) تعداد اعضای فضای نمونه‌ای

ب) پیشامدهای زیر:

A = پیشامد آن‌که هر دو تاس فرد بیایند

B = پیشامد آن‌که تاس آبی زوج بیاید

C = پیشامد آن‌که مجموع دو تاس از ۶ بیش‌تر باشد

پ) پیشامدهای زیر:

$A - B$

$A \cap C$

$B \cup C$

$A' - B'$

$A' \cap C$

ت) تعیین ناسازگار بودن یا نبودن یکی از پیشامدهای قسمت ب و یک پیشامد دلخواه از قسمت ج با یکدیگر (برای مثال $A - B$ و A)

۶ فرض کنید A, B, C سه پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، هر یک از عبارت‌های توصیفی زیر را با نمودار ون نمایش دهید و هاشور بزنید.

الف) پیشامدهای A, C رخ بدهند ولی B رخ ندهد.

ب) فقط پیشامد B رخ بدهد.

پ) پیشامد B رخ بدهد و C رخ ندهد.

ت) پیشامد A و B رخ ندهد.

۷ تاسی را دو بار پرتاب می‌کنیم. احتمال این‌که در هیچ یک از دو پرتاب، عدد ۱ دیده نشود چه قدر است؟

۸ به موارد زیر پاسخ دهید.

الف) اگر A و B و C پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند، عبارت زیر را به صورت ریاضی نوشته و با نمودار ون نمایش دهید.

« A یا C رخ بدهند ولی B رخ ندهد»

ب) اعداد از ۱ تا ۱۲ را روی توپ‌هایی نوشته و درون جعبه‌ای قرار داده‌ایم، سپس دو توپ با هم از این جعبه خارج می‌کنیم، چه قدر احتمال دارد که حداقل یک توپ عدد اول باشد؟

احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس)

۹ اگر ۶ نامزد انتخابات شورای مدرسه که دو نفر از آنها هم‌کلاسی هستند به تصادف در یک ردیف قرار گیرند، چقدر احتمال دارد که این دو هم‌کلاسی کنار هم باشند؟

۱۰ از بین پنج کتاب ریاضی، فیزیک، شیمی، هندسه و ادبیات ۳ کتاب به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که کتاب ریاضی در بین این سه کتاب نباشد چند درصد است؟

۱۱ می‌خواهیم از بین ۳ دانش‌آموز دهم رشته‌ی ریاضی و ۲ دانش‌آموز دهم رشته‌ی تجربی یک تیم دو نفره‌ی تنیس روی میز انتخاب کنیم. اگر این عمل به صورت تصادفی انجام شود، مطلوبست احتمال آنکه:

الف) هر دو نفر، از دهم ریاضی باشند.

ب) هر دو نفر، هم‌رشته باشند.

پ) ۱ نفر از رشته‌ی ریاضی و ۱ نفر از رشته‌ی تجربی باشد.

۱۲ اگر A, B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید: $P(A) \leq P(B)$



۱۳ در یک کارخانه ۵ نوع کالا A, B, C, D, E تولید می‌شوند. می‌خواهیم برای آزمایش دو نوع از این پنج نوع کالا را به تصادف انتخاب کرده و آزمایش کنیم. مطلوبست احتمال آن‌که:

الف) A انتخاب شود.

ب) A, B انتخاب نشوند.

پ) C انتخاب شود ولی D انتخاب نشود.

۱۴ در یک کتابخانه، ۱۰ کتاب علمی، ۱۰ کتاب تاریخی، ۱۵ کتاب ادبیات و ۲۰ کتاب مرجع وجود دارد، اگر در یک آتش‌سوزی، ۳۰ جلد کتاب از بین برود، احتمال آن‌که کتاب‌های علمی و تاریخی سالم مانده باشند، چه قدر است؟ (محاسبه‌ی عدد نهایی لازم نیست.)

۱۵ از بین ۱۰ کتاب داستان، ۵ کتاب علمی و ۵ کتاب تاریخی، می‌خواهیم سه کتاب را به شخصی به‌طور تصادفی هدیه دهیم. احتمال این‌که حداقل ۲ کتاب تاریخی در بین این سه کتاب باشد، تقریباً چند درصد است؟

۱۶ صفحه‌ی عقربه A را به ۴ قسمت و صفحه‌ی عقربه B را به ۵ قسمت تقسیم کرده‌ایم. عقربه‌ها را می‌چرخانیم. احتمال آن‌که هر دو عقربه سوی ناحیه با اعداد مساوی قرار نگیرد چه قدر است؟

۱۷ ۴ جفت جوراب کنار هم در یک سبد قرار گرفته‌اند، ۲ لنگه از آن‌ها را به تصادف بیرون می‌آوریم. احتمال آن‌که ۲ لنگه به هم مربوط باشند، چه قدر است؟

۱۸ گزینه‌ی صحیح را انتخاب کنید.

الف) از بین ۱۰ فوتبالیست می‌خواهیم تیمی ۴ نفره تشکیل دهیم؛ به‌طوری‌که بازیکن a حتماً انتخاب شود و بازیکن b حتماً انتخاب نشود. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

$$(1) \binom{8}{3} \quad (2) \binom{9}{3} \quad (3) \binom{8}{4} \quad (4) \binom{9}{4}$$

ب) اگر $n! = 72(n-2)!$ باشد، حاصل $\binom{n}{n-2}$ برابر کدام است؟

$$(1) 45 \quad (2) 21 \quad (3) 28 \quad (4) 36$$

ج) اگر $f(x) = \frac{3x-k}{x+2}$ تابع ثابت و تابع $g(x) = (m + \frac{k}{p})x + c - 1$ تابع همانی باشد، مقدار $c - m - k$ کدام است؟

$$(1) -9 \quad (2) 3 \quad (3) -5 \quad (4) 4$$

د) دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال آن‌که مجموع دو عدد روبرو شده مضرب ۴ باشد، کدام است؟

$$(1) \frac{1}{4} \quad (2) \frac{1}{3} \quad (3) \frac{2}{9} \quad (4) \frac{5}{18}$$

۱۹ کیسه‌ای شامل ۳ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۵ مهره سبز است. ۳ مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آن‌که سه مهره هم‌رنگ نباشند، چقدر است؟

۲۰ عددی را به تصادف از مجموعه $\{700, \dots, 202, 201\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که این عدد نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

۲۱ در جعبه‌ای ۵ مهره سفید، ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز وجود دارد. از این جعبه ۳ مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد هر سه مهره هم‌رنگ باشند؟

احتمال اجتماع دو پیشامد و پیشامدهای ناسازگار

۲۲ اگر ۷ نفر که دو نفر آن‌ها باهم برادرند، به تصادف در یک ردیف قرار بگیرند، چه قدر احتمال دارد: الف) دو برادر کنار یکدیگر نباشند.

ب) یکی از آن‌ها در ابتدای ردیف و دیگری در انتهای ردیف قرار بگیرد.



۲۳ در یک باشگاه تیراندازی، ۳۰٪ افراد با سلاح نوع A ، ۵۰٪ با سلاح نوع B و ۱۰٪ با هر دو سلاح تیراندازی می‌کنند. مطلوبست احتمال این که یک نفر:

الف) حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

ب) فقط با سلاح A تیراندازی کند.

ج) با هر دو سلاح تیراندازی کند.

۲۴ سکه‌ای را پرتاب می‌کنیم و سپس تاسی می‌ریزیم. مطلوبست احتمال آن که:

الف) تاس زوج بیاید.

ب) سکه رو بیاید.

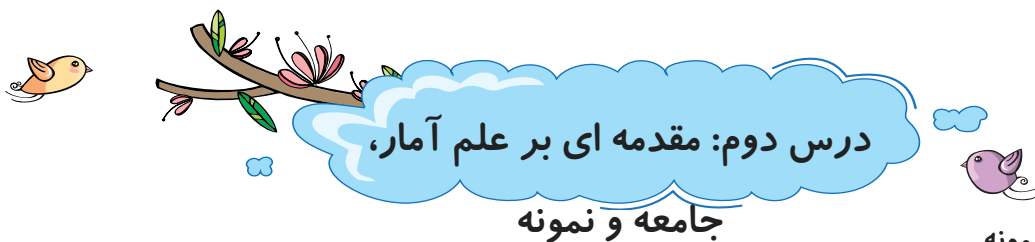
ج) تاس فرد و سکه پشت بیاید.

د) تاس فرد یا سکه پشت بیاید.

۲۵ ۶ گوی یکسان با شماره‌های ۱ تا ۶ درون کیسه‌ای وجود دارد. از این کیسه، ۲ گوی با هم و به تصادف خارج می‌کنیم. احتمال آنکه مجموع شماره‌های دو گوی برابر ۵ باشد را به دست آورید.

۲۶ اگر $P(A) = \frac{3}{8}$ و $P(B') = \frac{3}{4}$ باشد و A و B ناسازگار باشند، $P(A \cup B)$ را بیابید.

۲۷ احتمال اینکه فردی بیماری نوع A را داشته باشد، ۵۰ درصد و احتمال اینکه بیماری نوع B را داشته باشد، ۷۰ درصد است. اگر احتمال اینکه این فرد حداقل یکی از این دو بیماری را داشته باشد، ۸۵ درصد باشد، چقدر احتمال دارد که این فرد هر دو بیماری نوع A و B را داشته باشد؟



جامعه و نمونه

۲۸ مفاهیم زیر را تعریف کنید.

الف) جامعه یا جامعیت

ب) اندازه یا حجم جامعه

ج) نمونه

د) اندازه یا حجم نمونه

۲۹ درستی یا نادرستی هر عبارت را تعیین کنید.

الف) اندازه‌ی جامعه، کم‌تر از اندازه‌ی نمونه است.

ب) اعضای نمونه، همان اعضای جامعه‌اند.

ج) نمونه، زیرمجموعه‌ای از جامعه است.

۳۰ در شهرداری تهران میزان رضایت شهروندان شهر تهران از پارک‌های تهران مورد بررسی قرار می‌گیرد. از میان ۲۰۰۰۰۰۰ نفر شهروند تهرانی ۲۰۰۰ نفر به طور تصادفی انتخاب و یک پرسشنامه را پر کردند.

جدول زیر را پر کنید.

جامعه	اندازهٔ جامعه	نمونه	اندازهٔ نمونه	ویژگی مورد بررسی



درس سوم: متغیر و انواع آن



متغیر و مقدار متغیر

۳۱ متغیر و مقدار متغیر را تعریف کرده و برای هر یک مثالی بزنید.

متغیرهای کیفی و انواع آنها

۳۲ متغیرهایی که قابل اندازه‌گیری هستند، هستند.

۳۳ کدامیک از موارد زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف رنگ مورد علاقه افراد یک متغیر کیفی اسمی است.

مسائل ترکیبی

۳۴ نوع متغیرهای زیر را از نظر کمی، کیفی، گسسته، پیوسته، اسمی، ترتیبی مشخص کنید.

الف) میزان بارندگی برحسب سانتی‌متر در یک شهر

ب) گروه خونی دانش‌آموزان یک کلاس

۳۵ کمی یا کیفی بودن متغیرهای زیر را مشخص کنید.

الف) قد افراد ب) وزن افراد پ) رنگ چشم افراد ت) رنگ موی افراد

ث) مدت زمان سفر از ایران تا عراق ج) جنسیت فرزندان چ) قوم افراد ح) مهارت رانندگی افراد



پاسخنامه تشریحی

الف

$$A = \{(5, 5)\} \quad B = \{(6, 5), (5, 6)\}$$

$$A \cap B = \emptyset$$

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{الف ۲}$$

(ب) هر يك از زیرمجموعه‌های S يك پیشامد هستند. پس باتوجه به تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی 6 عضوی S ، $2^6 = 64$ پیشامد می‌توان روی این فضای نمونه‌ای تعریف کرد.
(پ)

$$A = \{3, 6\}$$

$$\text{الف } S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$$

$$\text{ب) } B = \{2, 3, 5, 7, 11\}$$

$$\text{پ) } C = \{8, 9\}$$

$$\text{ت) } D = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{3, 4\}$$

$$\text{الف) } A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{ب) } A \cap B = \{3\}$$

$$\text{پ) } A - B = \{1, 2\}$$

$$\text{ت) } B - A = \{4\}$$

$$\text{ث) } A' = \{4, 5, 6\}$$

$$\text{ج) } B' = \{1, 2, 5, 6\} \Rightarrow B' \cap A = \{1, 2\}$$

$$\text{چ) } A' \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$$

۵ الف برای تاس آبی ۶ حالت و برای تاس قرمز هم ۶ حالت وجود دارد (باتوجه به متفاوت بودن رنگ‌ها) طبق اصل ضرب (چون باهم پرتاب می‌شوند) $6 \times 6 = 36$ حالت دارد پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر ۳۶ است.
(ب) با فرض این‌که مؤلفه اول، تاس آبی باشد:

$$A = \{(1, 1)(1, 3)(1, 5)(3, 1)(3, 3)(3, 5)(5, 1)(5, 3)(5, 5)\}$$

$$B = \left\{ \begin{array}{l} (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

$$C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 2), (5, 3) \\ (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{array} \right\}$$

$$A - B = \{(1, 1)(1, 3)(1, 5)(3, 1)(3, 3)(3, 5)(5, 1)(5, 3)(5, 5)\} = A$$

$$A \cap C = \{(3, 5)(5, 3)(5, 5)\}$$

$$B \cup C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6)(3, 4)(3, 5)(3, 6)(4, 1)(4, 2) \\ (4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4) \\ (6, 5)(6, 6) \end{array} \right\}$$

$$A' = S - A = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2)(1, 4)(1, 6)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6) \\ (3, 2)(3, 4)(3, 6)(4, 1)(4, 2)(4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6) \\ (5, 2)(5, 4)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5)(6, 6) \end{array} \right\}$$

$$B' = S - B = \left\{ \begin{array}{l} (1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)(3, 1)(3, 2)(3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6) \\ (5, 1)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6) \end{array} \right\}$$

$$A' - B' = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2)(1, 4)(1, 6)(2, 1)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(2, 5)(2, 6) \\ (3, 2)(3, 4)(3, 6)(4, 1)(4, 2)(4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6) \\ (5, 2)(5, 4)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5)(6, 6) \end{array} \right\} = A'$$

$$A' \cap C = \left\{ \begin{array}{l} (1, 6)(2, 5)(2, 6)(3, 4)(3, 6)(4, 3)(4, 4)(4, 5)(4, 6) \\ (5, 2)(5, 4)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4) \\ (6, 5)(6, 6) \end{array} \right\}$$

$$A, (A - B) : A \cap (A - B) = A \cap A = A \neq \emptyset$$

$$B, (A - B) : B \cap (A - B) = B \cap A = \emptyset$$

$$C, (A - B) : C \cap (A - B) = C \cap A \neq \emptyset$$

$$A, (A \cap C) : A \cap (A \cap C) = A \cap C \neq \emptyset$$

$$B, (A \cap C) : B \cap (A \cap C) = \emptyset$$

$$C, (A \cap C) : C \cap (A \cap C) \neq \emptyset$$

$$A, (B \cup C) : A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$$

$$B, (B \cup C) : B \cap (B \cup C) = B \neq \emptyset$$

$$C, (B \cup C) : C \cap (B \cup C) = C \neq \emptyset$$

$$A, (A' - B') : A \cap (A' - B') = A \cap A' = \emptyset$$

$$B, (A' - B') : B \cap (A' - B') = B \cap A' \neq \emptyset$$

$$C, (A' - B') : C \cap (A' - B') = C \cap A' \neq \emptyset$$

$$A, (A' \cap C) : A \cap (A' \cap C) = \emptyset$$

$$B, (A' \cap C) : B \cap (A' \cap C) \neq \emptyset$$

$$C, (A' \cap C) : C \cap (A' \cap C) \neq \emptyset$$

(ت)

سازگار

ناسازگار

سازگار

سازگار

ناسازگار

سازگار

سازگار

سازگار

سازگار

ناسازگار

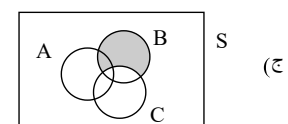
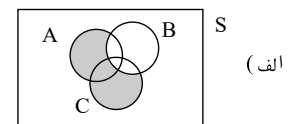
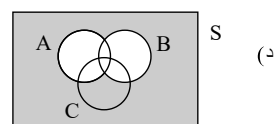
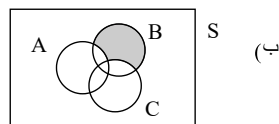
سازگار

سازگار

ناسازگار

سازگار

سازگار



۷ چون تعداد حالت‌هایی که ۱ دیده نشود، زیاد است، از متمم استفاده می‌کنیم:

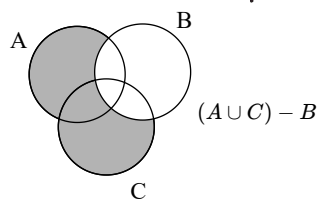
$$P(A') = 1 - P(A)$$

$$A' = \{(1, 1)(1, 2)(1, 3)(1, 4)(1, 5)(1, 6)(3, 1)(3, 2)(3, 3)(3, 4)(3, 5)(3, 6)(5, 1)(5, 2)(5, 3)(5, 4)(5, 5)(5, 6)(6, 1)(6, 2)(6, 3)(6, 4)(6, 5)(6, 6)\}$$

$$P(A') = \frac{n(A')}{n(S)} = \frac{11}{36}$$

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow \frac{11}{36} = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = \frac{25}{36}$$

A' : پیشامدن رو شدن عدد ۱ در حداقل یکی از پرتاب‌ها



ب

$$\underbrace{2, 3, 5, 7, 11}_{\text{اول}} , \underbrace{1, 4, 6, 8, 9, 10, 12}_{\text{عزراول}}$$

$$n(S) = \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{2} = 66$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{1} \binom{7}{1}}_{\text{یکی اول و یکی عزراول}} + \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{هر ۲ اول}} = 35 + 10 = 45 \rightarrow P(A) = \frac{45}{66} = \frac{15}{22}$$

۹

$$P(A) = \frac{5! \times 2!}{6!} = \frac{1}{3}$$

۱۰ برای این که کتاب ریاضی در بین کتاب‌ها نباشد، باید ۳ کتاب از بین ۴ کتاب باقی‌مانده انتخاب شوند.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{5}{3}} = \frac{\frac{4!}{3!1!}}{\frac{5!}{3!2!}} = \frac{4}{10} = 40\%$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad 11$$

$$\text{الف) } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1+3}{10} = \frac{4}{10}$$

$$\text{پ) } P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{\binom{2}{1} \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2 \times 3}{10} = \frac{6}{10}$$

۱۲

$$A \subseteq B \Rightarrow n(A) \leq n(B) \xrightarrow[n(S) \geq 0]{\div n(S)} \frac{n(A)}{n(S)} \leq \frac{n(B)}{n(S)} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} \quad 13$$

$$\text{الف) } P(A) = \frac{\overset{\text{انتخاب } A}{\uparrow} \binom{1}{1} \times \overset{\text{انتخاب دومین کالا}{\uparrow} \binom{4}{1}}{\binom{5}{2}}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$\text{ب) } P(B) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$P(C) = \frac{\binom{1}{1} \times \binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

انتخاب دومین کالا انتخاب

۱۴. برای این که کتاب‌های علمی و تاریخی سالم بمانند باید ۳۰ جلد کتاب سوخته از بین کتب ادبیات و مرجع باشند:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{35}{30}}{\binom{55}{30}} = \frac{\frac{35!}{5!}}{\frac{55!}{30!25!}} = \frac{35! \times 30! \times 25!}{55! \times 3! \times 5!}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{5}{2} \binom{15}{1} + \binom{5}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{10 \times 15 + 10}{\frac{20!}{3!17!}} = \frac{160}{1140} \approx 14\%$$

$$\begin{array}{l} 1, 1 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \\ 2, 2 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \\ 3, 3 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \\ 4, 4 \quad \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{20} \\ 1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} \end{array}$$

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}}{\binom{8}{2}}$$

۱۸. الف) چون a حتماً باید انتخاب شود، پس ۳ نفر دیگر را باید از بین ۹ نفر انتخاب کنیم و چون b نباید انتخاب شود، پس از بین ۸ نفر باقی‌مانده باید ۳ نفر انتخاب شوند، بنابراین

پاسخ $\binom{8}{3}$ است.

(صفحه ۱۳۸ کتاب درسی)

(ب)

$$n! = 72(n-2)! \Rightarrow \binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{72}{2} = 36$$

(صفحه ۱۲۸ و ۱۳۴ کتاب درسی)

(ج)

$$f(x) = \frac{3x-k}{x+2} = P \quad (\text{چون تابع ثابت است}) \Rightarrow 3x-k = Px+2P \Rightarrow$$

باید ضرایب در دو طرف با هم برابر باشند پس:

$$3 = P \Rightarrow -k = 6 \Rightarrow k = -6$$

تابع g همانی است و باید ضرایب در دو طرف تساوی با هم برابر باشند؛ پس:

$$g(x) = (m + \frac{k}{p})x + c - 1 = x$$

$$\xrightarrow{k=-6} m + \frac{-6}{2} = 1 \Rightarrow m = 4 \text{ و } c - 1 = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$c - m - k = 1 - 4 - (-6) = 1 - 4 + 6 = 3$$

(صفحه ۱۱۰ کتاب درسی)

(د)



$$۳۶ = ۶ \times ۶ = \text{تعداد کل حالت‌ها}$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} (۱, ۳) & (۳, ۵) & (۶, ۶) \\ (۳, ۱) & (۵, ۳) & (۲, ۶) \\ (۲, ۲) & (۴, ۴) & (۶, ۲) \end{array} \right\} \Rightarrow n(A) = ۹ \Rightarrow P(A) = \frac{۹}{۳۶} = \frac{۱}{۴}$$

حالت‌هایی که مجموع مضرب ۴ است.

(صفحه ۱۴۸ و ۱۴۹ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۱ ب) گزینه ۴ ج) گزینه ۲ د) گزینه ۱

(هر مورد ۵ نمره)

۱۹. با توجه به ساده‌تر بودن محاسبه مهره‌های هم‌رنگ از روش متمم استفاده می‌کنیم:

ابتدا تعداد کل حالت‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹!۳!} = ۲۲۰$$

تعداد حالات نامطلوب را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تعداد حالات‌هایی که مهره‌ها هم‌رنگ باشند} = \binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۱ + ۴ + ۱۰ = ۱۵$$

حالت مطلوب که مهره‌ها هم‌رنگ نیستند، برابر:

$$\text{تعداد حالات‌های نامطلوب} - \text{کل حالت‌ها} = \text{تعداد حالات‌های مطلوب}$$

$$\text{تعداد حالات‌های مطلوب} = \binom{۱۲}{۳} - ۱۵ = ۲۲۰ - ۱۵ = ۲۰۵ \Rightarrow P(A) = \frac{۲۰۵}{۲۲۰}$$

(صفحه ۱۴۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\text{کل حالت‌ها} = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲!}{۹!۳!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times ۹!}{۹! \times ۳!} = ۲۲۰ \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\text{تعداد حالات‌های انتخاب ۳ مهره هم‌رنگ} = \binom{۳}{۳} + \binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۱ + ۴ + ۱۰ = ۱۵ \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\text{تعداد حالات‌هایی که هم‌رنگ باشند} - \text{کل حالت‌ها} = \text{تعداد حالات‌هایی که ۳ مهره هم‌رنگ نباشند}$$

$$\text{تعداد حالات‌هایی که ۳ مهره هم‌رنگ نباشند} = ۲۲۰ - ۱۵ = ۲۰۵ \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow P(A) = \frac{۲۰۵}{۲۲۰}$$

۲۰. طبق فرمول $(A' \cap B')' = A \cup B$ و با روش متمم داریم:

پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۳: A

پیشامد بخش‌پذیر بودن بر ۵: B

$$۲۰۱ \leq ۳k \leq ۷۰۰ \xrightarrow{\div ۳} ۶۷ \leq k \leq ۲۳۳,۳ \Rightarrow ۶۷ \leq k \leq ۲۳۳ \Rightarrow n(A) = ۱۶۷$$

$$۲۰۱ \leq ۵k \leq ۷۰۰ \xrightarrow{\div ۵} ۴۰,۲ \leq k \leq ۱۴۰ \Rightarrow ۴۱ \leq k \leq ۱۴۰ \Rightarrow n(B) = ۱۰۰$$

$$۲۰۱ \leq ۱۵k \leq ۷۰۰ \xrightarrow{\div ۱۵} ۱۳,۴ \leq k \leq ۴۶,۶ \Rightarrow ۱۴ \leq k \leq ۴۶ \Rightarrow n(A \cap B) = ۳۳$$

$$n(A' \cap B') = n(S) - n(A' \cap B')' = n(S) - n(A \cup B) = ۵۰۰ - (۱۶۷ + ۱۰۰ - ۳۳) = ۲۶۶$$

(صفحه ۱۴۶ تا ۱۵۱ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

بخش‌پذیر بودن بر ۳: A

بخش‌پذیر بودن بر ۵: B

$$۲۰۱ \leq ۳k \leq ۷۰۰ \xrightarrow{\div ۳} ۶۷ \leq k \leq ۲۳۳,۳ \Rightarrow ۶۷ \leq k \leq ۲۳۳ \Rightarrow n(A) = ۱۶۷ \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$۲۰۱ \leq ۵k \leq ۷۰۰ \xrightarrow{\div ۵} ۴۰,۲ \leq k \leq ۱۴۰ \Rightarrow ۴۱ \leq k \leq ۱۴۰ \Rightarrow n(B) = ۱۰۰ \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$۲۰۱ \leq ۱۵k \leq ۷۰۰ \xrightarrow{\div ۱۵} ۱۳,۴ \leq k \leq ۴۶,۶ \Rightarrow ۱۴ \leq k \leq ۴۶ \Rightarrow n(A \cap B) = ۳۳ \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$n(A' \cap B') = n(S) - n(A' \cap B')' = n(S) - n(A \cup B) = ۵۰۰ - (۱۶۷ + ۱۰۰ - ۳۳) = ۲۶۶ \text{ (نمره ۲۵)}$$

۲۱. در این جعبه $۱۰ = ۲ + ۳ + ۵$ مهره وجود دارد و ما سه مهره می‌خواهیم انتخاب کنیم که این کار به $\binom{۱۰}{۳}$ روش ممکن است؛ پس:

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۱۲۰$$

چون قرار است هر سه مهره هم‌رنگ خارج شوند؛ پس یا باید سه مهره از مهره‌های سفید انتخاب شوند که به $\binom{۵}{۳}$ روش ممکن است یا باید هر سه مهره از مهره‌های سیاه انتخاب شوند

که به $\binom{3}{3}$ روش ممکن است. دقت کنید از بین ۲ مهره قرمز نمی‌توان سه مهره هم‌رنگ انتخاب کرد؛ بنابراین:

$$n(A) = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 10 + 1 = 11$$

پس احتمال پیشامد A ، یعنی هم‌رنگ بودن سه مهره برابر است با:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{120}$$

روش دوم:

$$n(S) = 120, n(A') = \binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \binom{7}{1} + \binom{2}{2} \binom{8}{1} + \binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1}$$

$$= 50 + 21 + 8 + 30 = 109 \rightarrow P(A') = \frac{109}{120}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{109}{120} = \frac{11}{120}$$

(صفحه ۱۴۷ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$n(S) = \binom{10}{3} = 120 \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$n(A) = \underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{(نمره ۲۵)}} + \underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{(نمره ۲۵)}} = 10 + 1 = 11 \Rightarrow P(A) = \frac{11}{120} \text{ (نمره ۲۵)}$$

روش دوم:

$$n(S) = 120 \text{ (نمره ۲۵)}, n(A') = \binom{5}{2} \binom{5}{1} + \binom{3}{2} \binom{7}{1} + \binom{2}{2} \binom{8}{1} + \binom{5}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$= 50 + 21 + 8 + 30 = 109 \rightarrow P(A') = \frac{109}{120} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \frac{109}{120} = \frac{11}{120} \text{ (نمره ۲۵)}$$

۲۲ فضای نمونه‌ای برابر است تعداد حالت‌های ایستادن ۷ نفر در کنار هم که برابر با ۷! است.

الف) از آنجایی که تعداد حالت‌هایی که دو برادر کنار یکدیگر نباشند، زیاد است، از متمم استفاده می‌کنیم.

تعداد حالت‌هایی که دو برادر کنار یکدیگر باشند:

دو برادر را یک نفر فرض می‌کنیم و جایگشت ۶ نفر را محاسبه می‌کنیم که برابر با ۶! است.

و از آنجایی که خود دو برابر نیز ۲! حالت برای کنار هم ایستادن دارند.

طبق اصل ضرب ۶! × ۲! حالت برای ایستادن دو برادر کنار هم وجود دارد.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

کنار هم نباشند کنار هم باشند

$$P(A) = 1 - \frac{n(A')}{n(S)} = 1 - \frac{6!2!}{7!} = 1 - \frac{6! \times 2}{7 \times 6!} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

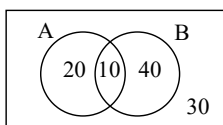
ب) جایگاه‌های اول و آخر مشخص‌اند و برای ۵ جایگاه وسط نیز ۵! حالت داریم.

خود جایگاه اول و آخر نیز توسط هر یک از دو برادر می‌تواند پر شود که ۲! حالت دارد. پس در کل طبق اصل ضرب ۲! × ۵! حالت داریم.

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5! \times 2!}{7!} = \frac{5! \times 2}{7 \times 6 \times 5!} = \frac{1}{21}$$

۲۳

باتوجه به نمودار ون مقابل (اعداد روی نمودار بیانگر درصد احتمال هستند) داریم:



الف) احتمال این که حداقل با یکی از دو سلاح تیراندازی کند.

یعنی با A یا با B یا هر دو:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{30}{100} + \frac{50}{100} - \frac{10}{100} = \frac{70}{100}$$

ب) باتوجه به نمودار، احتمال این که فقط با سلاح A تیراندازی کند $\frac{20}{100}$ است.

ج) احتمال این که با هر دو سلاح تیراندازی کند یعنی $P(A \cap B)$ که باتوجه به نمودار برابر $\frac{10}{100}$ است.



۲۴ فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$S = \{(ج, ۱), (پ, ۱), (ج, ۲), (پ, ۲), (ج, ۳), (پ, ۳), (ج, ۴), (پ, ۴), (ج, ۵), (پ, ۵), (ج, ۶), (پ, ۶)\}$$

الف) اگر پیشامد زوج آمدن تاس را A بنامیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد فرد آمدن تاس، A' است و برابر است با $\frac{۱}{۲}$ $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۲}$

ب) اگر پیشامد رو آمدن سکه را B بنامیم:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۶}{۱۲} = \frac{۱}{۲}$$

بالتبع پیشامد پشت آمدن سکه، B' است و برابر است با: $\frac{۱}{۲}$ $P(B') = 1 - P(B) = \frac{۱}{۲}$

ج) پیشامد تاس فرد و سکه پشت بیاید یعنی $(A' \cap B')$

$$P(A' \cap B') = \frac{n(A' \cap B')}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲}$$

د) پیشامد تاس فرد یا سکه پشت بیاید یعنی $(A' \cup B')$

$$P(A' \cup B') = P(A') + P(B') - P(A' \cap B') = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۱۲} = \frac{۹}{۱۲} = \frac{۳}{۴}$$

۲۵

$$n(S) = \binom{۶}{۲} = ۱۵$$

$A = \{\{1, ۴\}, \{۲, ۳\}\} \Rightarrow n(A) = ۲ \Rightarrow P(A) = \frac{۲}{۱۵}$ مجموع شماره‌های دو گوی ۵ باشد.

۲۶ با توجه به ناسازگار بودن دو مجموعه A و B داریم:

$$P(A \cap B) = ۰$$

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = ۰ \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۸}$$

(صفحه ۱۴۵ تا ۱۴۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۴} \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (نمره ۲۵)}$$

$$P(A \cap B) = ۰ \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{۳}{۸} + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۸}$$

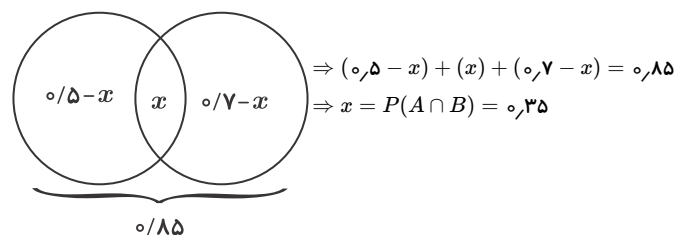
۲۷ روش اول: می‌دانیم اگر A و B دو پیشامد دلخواه از فضای نمونه‌ای S باشند، آنگاه:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

احتمال داشتن حداقل یکی از بیماری‌ها یعنی $P(A \cup B)$: بنابراین:

$$۰٫۸۵ = ۰٫۵ + ۰٫۷ - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = ۰٫۳۵$$

روش دوم: اگر $P(A \cap B) = x$ ، با رسم نمودار ون داریم:



(صفحه ۱۵۱ و ۱۵۰ کتاب درسی)

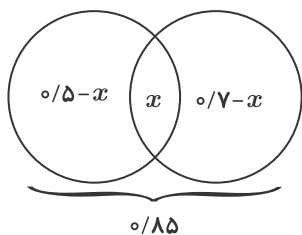
راهنمای تصحیح:

روش اول:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ (نمره ۲۵)} \Rightarrow ۰٫۸۵ = ۰٫۵ + ۰٫۷ - P(A \cap B)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = ۰٫۳۵ \text{ (نمره ۲۵)}$$

روش دوم:



$$\Rightarrow 0,5 - x + x + 0,7 - x = 0,85 \Rightarrow x = 0,35$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0,35 \text{ (نمره } 0/5)$$

۲۸ الف) مجموعه‌ی تمام افراد یا اشیائی که درباره‌ی یک یا چند ویژگی آن‌ها، تحقیق صورت گیرد جامعه یا جامعیت نامیده می‌شود و هر یک از این افراد یا اشیاء را عضو جامعه می‌نامند.

ب) تعداد اعضای جامعه را اندازه‌ی جامعه یا حجم جامعه گویند.

به عنوان مثال، دانش‌آموزان یک مدرسه می‌توانند یک جامعه باشند و هر یک از دانش‌آموزان مدرسه عضو این جامعه هستند.

ج) بخشی از جامعه را که برای مطالعه انتخاب شوند، نمونه گویند و هر یک از افراد یا اشیای انتخاب شده را عضو نمونه گویند.

د) تعداد اعضای نمونه را اندازه‌ی نمونه یا حجم نمونه گویند.

به عنوان مثال دانش‌آموزان یک کلاس به عنوان یک نمونه از دانش‌آموزان مدرسه هستند و هر یک از دانش‌آموزان کلاس، عضو نمونه محسوب می‌شوند.

۲۹ الف) نادرست: اندازه‌ی جامعه، بیش‌تر از اندازه‌ی نمونه است.

ب) درست

ج) درست

۳۰ جامعه: شهروندان تهرانی نمونه: برخی از شهروندان

اندازه‌ی جامعه: ۲۰۰۰۰۰۰۰ اندازه‌ی نمونه: ۲۰۰۰

ویژگی: میزان رضایت‌مندی از پارک‌ها

۳۱ متغیر، ویژگی خاصی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می‌شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند.

عددی را که به این ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود، مقدار متغیر می‌گویند.

برای مثال در یک مدرسه، وزن و قد دانش یک دانش‌آموز به عنوان متغیر مربوط به دانش‌آموز است و برای مثال مقدار آن برای علی، 70 kg و 180 cm است.

۳۲ کمی

۳۳

الف) درست

۳۴

الف) کمی پیوسته

ب) کیفی اسمی

۳۵ الف) کمی ب) کمی پ) کیفی ت) کیفی ث) کمی ج) کیفی چ) کیفی ح) کیفی