

یستوفیل

ریاضی دوازدهم - رشته تجربی



 notruphil  notruphil

 www.notruphil.com





نوטר وفیل خونه رتبه برترها

قبولی های کنکور ۱۴۰۴



تک رتبه نوטר وفیل

رتبه ۸
ایمان نیکانام جهرمی

دو رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۳۲
امیرمحمد رضائی

رتبه ۲۰
سینا راضی

رتبه ۱۶
آریا قهرمانی

رتبه ۱۴
امیرمحمد کیانی

رتبه ۸۰
محمد مهدی شریفی

رتبه ۷۵
محمد صالح عارفی

رتبه ۶۱
بهار هلالی

رتبه ۵۹
ایمان انفرادی

رتبه ۵۵
مهسا سیاوشی

سه رتبه و چهار رتبه های نوטר وفیل

رتبه ۲۲۲
امیرمحمد شکوهی

رتبه ۱۶۹
هانیه خواجه

رتبه ۱۶۰
اشکان کوثری

رتبه ۱۴۷
محدثه حیدری

رتبه ۴۳۲
سید محمدصادق حسینی

رتبه ۳۴۱
حمیدرضا بشیری

رتبه ۳۰۸
سید علی اکرمی

رتبه ۲۷۱
فاطمه سادات موسوی

رتبه ۲۵۹
ابوالفضل ناصران

رتبه ۵۳۹
نجمه کیخا

رتبه ۵۳۷
ریحانه حیدری

رتبه ۵۲۳
فاطمه شاهسوند

رتبه ۵۱۴
محمدپارسا عبدالله آبادی

رتبه ۴۷۳
زهرا بابائی

رتبه ۶۶۱
فاطمه اصغری

رتبه ۶۰۶
سجاد محمودی زاده

رتبه ۵۷۰
زهرا ولی نژاد

رتبه ۵۵۷
محمد صالح زارعی

رتبه ۵۴۶
حسین تفضلی نژاد

رتبه ۷۸۱
احسان قنبری

رتبه ۷۱۴
محمد یزدیان

رتبه ۶۹۱
بهار ضرغامی

رتبه ۶۷۲
محمدماهان عنبرستانی

رتبه ۶۶۷
سیاوش مصطفایی

رتبه ۹۰۹
کیمیا فدائی

رتبه ۸۹۳
فاطمه مشاوری نجف آبادی

رتبه ۸۰۴
آرمین رضایی

رتبه ۸۰۳
ماتده رنجبر

رتبه ۷۸۶
نیما غفاری

رتبه ۱۱۲۷
زهرا بابائی

رتبه ۱۱۲۲
علی طاهر زاده

رتبه ۱۰۵۸
الینا جلالی فر

رتبه ۱۰۵۲
پویان فریور افشار

رتبه ۹۴۷
صفورا بقائی

رتبه ۱۳۵۰
علی زینلی

رتبه ۱۲۸۴
فاطمه معین زاده

رتبه ۱۲۸۴
بهار امیری

رتبه ۱۲۳۶
مبینا ایزدی

رتبه ۱۲۳۴
مطهره توحیدی

رتبه ۱۵۰۳
فاطمه رحیم زاده

رتبه ۱۴۹۳
محمد مهدی خرم زاده

رتبه ۱۴۸۳
سینا خاوری خراسانی

رتبه ۱۴۲۴
سید امیرحسین حسینی

رتبه ۱۳۷۲
پارسا رضایی

رتبه ۱۶۹۶
ندا ملکشاهی

رتبه ۱۶۷۸
سجاد ینکی

رتبه ۱۶۳۹
ابوالفضل نیرومند

رتبه ۱۶۲۸
امیرمحمد فکور حقیقی

رتبه ۱۵۳۴
فاطمه عبیری

رتبه ۲۵۵۹
سارا حمزه

رتبه ۲۰۱۵
علی شیرزاد

رتبه ۱۹۶۶
مهسا رضایی مقدم

رتبه ۱۷۵۴
هلیا حاجیلوئی

رتبه ۱۷۳۱
محمدرضا محسنی

رتبه ۲۷۹۴
مریم بادلی

رتبه ۲۷۸۱
سعید شبانی

رتبه ۲۷۵۱
فهمیه سیدآبادی

رتبه ۲۷۱۱
محمد غلامی

رتبه ۲۶۲۵
زهرة جمعی

رتبه ۳۳۴۳
سینا ارزمانی

رتبه ۳۲۴۴
هلیا سجادی

رتبه ۳۱۳۳
صبا شایع ثانی

رتبه ۲۸۸۱
پارسا جمال امیدی

رتبه ۲۸۱۰
هدیه رحیمی

بچه‌ی نوتروفیلی من ، سلام 🍷

به رسم همیشه که توی این مسیر کنارت بودیم ، این بار هم یک مجموعه سوال برای شب امتحانات آماده کردیم که با کار کردنشون تسلط رو افزایش بدی و به امید خدا بری واسه نمره‌ی ۲۰ 🍷 جان دلم نترسی از سختی امتحانات اگه به کتاب درسی کاملا مسلط باشی و این مجموعه سوال رو هم به عنوان مکمل حل کنی مطمئن باش نمره‌ت بهتر از چیزی که فکرش رو کنی میشه 🍷 یادت باشه امتحانات نهایی رو جدی رو بگیری چون با نمره‌ی خوب این امتحانات کار کنکور رو خیلی آسون میکنی

یه حرف دلی هم دارم با بچه‌هایی که کمی دیرتر شروع کردن ... مبادا خودت رو ببازی بچه‌ی من امید دارم بهت و میدونم اگه خوب بخونی قطعا میتونی نمره‌ی عالی بگیری پس پرقدردت بریم واسه ترکوندن اولین امتحان 🍷 یادت نره این فایل رو برای اون دوستت که بهش احتیاج داره بفرستی و جزئی از این زنجیره‌ی عشق و مهربونی باشی 🍷

پ:ن: مرسی که با وجود درگیری‌های ذهنی و عدم تمرکزی که ماجرای کارت ورود به جلسه براتون به همراه داشت ، همچنان قوی موندی و ادامه میدی 🍷 به امید روزی که اینجا به عنوان همکار کنار خانواده‌ی بزرگ نوتروفیل باشی



دوست همیشگی تو ، نوتروفیل



روش مطالعه :

قبل از هر چیزی یادت باشه از ریاضی نترسی !
ریاضی نهایی نسبت به کنکور خیلی ساده تره و اگه خوب بخونی میتونی ازش نمره ی خوب بگیری .
بهترین روش برای خوندن درس ریاضی اینه اول بری سراغ یه درسنامه ی خلاصه و درعین حال کامل .
بعد تمام تمارین کتاب درسی رو مسلط بشی . حالا وقتشه بری سراغ یه مجموعه نمونه سوال خفن که همه ی تیپ سوالات رو پوشش بده و با حل کردن نمونه سوال کاملا به مطلب مسلط بشی .
مرور فرمول ها و نکات مهم هم یادت نره

سوالات مربوط به هر فصل از این شماره ها شروع میشه

فصل ۱ : ۱

فصل ۲ : ۱۹

فصل ۳ : ۴۰

فصل ۴ : ۶۲

فصل ۵ : ۱۱۲

فصل ۶ : ۱۴۸

فصل ۷ : ۱۷۸



بارم بندی ریاضی دوازدھم تجربی

شہریور / دی	نوبت دوم	نوبت اول	محدودہ فصل	فصل
۳	۲/۵	۷	کل	۱
۳	۲/۵	۵	کل	۲
۳	۲/۵	۵	کل	۳
۵	۱	۳	تا ص ۷۶	۴
	۳/۵		ص ۷۷ بہ بعد	
۳	۳		کل	۵
۲/۵	۳		کل	۶
۱/۵	۳		کل	۷





ریاضی دوازدهم (تجربی)

۱ اگر $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ تابع $g \circ f$ را محاسبه کنید.

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را تعیین کنید.

۲ تابع $f(x)$ در بازه شامل a و b صعودی است، اگر $f(a) \leq f(b)$ آنگاه: $a \leq b$

۳ درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

الف تابع $y = 2x(1 - 3x^2) + 1$ یک تابع چندجمله‌ای از درجه سوم است.

ب نمودار تابع $y = x^2$ در بازه $(0, 1)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y = x^3$ است.

پ هر تابع یکنوا، یک‌به‌یک است.

۴ تابع f با ضابطه $f(x) = (x + 1)^3 - 4$ مفروض است.

الف نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y = x^3$ رسم کنید.

ب باتوجه‌به نمودار تابع f ، مشخص کنید چرا این تابع وارون‌پذیر است.

پ ضابطه تابع f^{-1} را به دست آورید.

۵ ابتدا نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را رسم نموده سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x) = -2f(x) - 1$ را رسم کنید.

۶ دو تابع $f(x) = 3x^2 - 1$ و $g(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ داده شده‌اند.

الف ضابطه تابع $g \circ f$ و دامنه $g \circ f$ را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

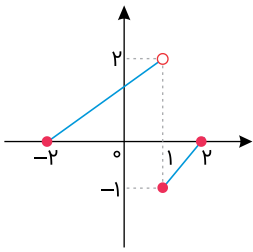
۷ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد:

الف دامنه تابع $f \circ g$ را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب ضابطه تابع $f \circ g$ را بنویسید.

۸ ابتدا نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & ; x \leq 0 \\ x & ; 0 < x < 1 \\ 2^{1-x} & ; x \geq 1 \end{cases}$ را رسم کنید. سپس بازه‌هایی که تابع در آن بازه‌ها اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی هستند را تعیین کنید.

۹ نمودار $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است، نمودار $y = -f(2x - 1) + 1$ را رسم کنید. (مراحل ترسیم بیان شود).



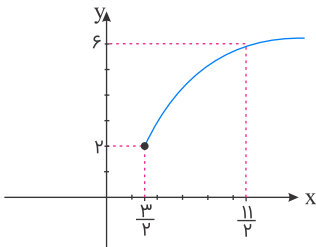
۱۰ ضابطه تابع وارون $f(x) = -5 - \sqrt{3x+1}$ را به دست آورید.

۱۱ نمودار تابع $y = |2x - 4|$ را با استفاده از تعریف قدرمطلق رسم کنید.

۱۲ اگر $f(x-2) = x^2 + 4x$ ضابطه $f(2x+1)$ را حساب کنید.

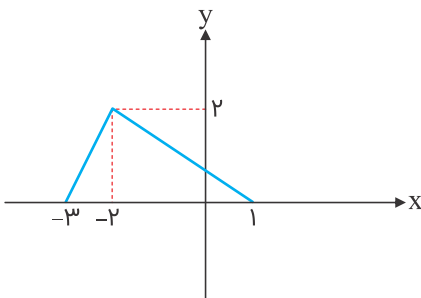
۱۳ ضابطه وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & ; x \geq 0 \\ 1 - x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ را به دست آورید.

۱۴ نمودار زیر از انتقال‌های عمودی و یا افقی و همچنین انبساط یا انقباض افقی تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطه آن را بیابید.



۱۵ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟
 الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.
 ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۱۶ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ و نمودار $g(x)$ به صورت زیر باشد، دامنه تابع $y = f \circ g(x)$ کدام است؟



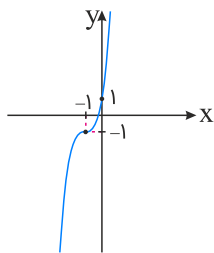
(۱) $[-3, 1]$

(۲) $[-9, 3]$

(۳) $[0, 1]$

(۴) $[0, 3]$

شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ می‌باشد. حاصل ضرب مقادیر a, b, c و d کدام است؟



۴۸ (۱)

۵۶ (۲)

۶۴ (۳)

۷۲ (۴)

بُرد تابع $y = 2^{x-[x]} - 2^{[x]-x}$ کدام است؟

(۱) $[1, 2)$

(۲) $[0, \frac{3}{2})$

(۳) $[1, \frac{3}{2}]$

(۴) $[0, 2)$

درستی یا نادرستی هریک از احکام زیر را مشخص کنید:

اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ کوچک‌ترین عدد T با خاصیت $f(x \pm T) = f(x)$ را دوره تناوب f می‌نامیم.

دوره تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $f(x) = 2 \sin(2x) - 3$ را محاسبه کنید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

دوره تناوب تابع $y = 5 \cos \frac{x}{5} + 1$ برابر با 4π است.

تابع تانژانت در بازه $(-\pi, \pi)$ ، تابعی صعودی است.

اگر α زاویه‌ای در ربع دوم باشد که $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ، مقدار $\sin 2\alpha$ را محاسبه کنید.

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 1 - 2 \sin(\frac{-\pi}{3}x)$ را به دست آورید.

دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3 \cos 2\pi x + 1$ را به دست آورید.

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

دامنه تابع با ضابطه $y = \tan x$ به صورت $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \dots\}$ است.

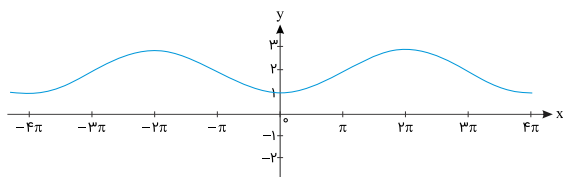
درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

مینیمم تابع $y = -3 \cos \pi x + 2$ برابر با یک است.

می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

۲۸ فرض کنید $\tan \alpha = -\frac{1}{2}$ و زاویه‌ای منفرد باشد، عبارت $\cos 2\alpha$ را محاسبه کنید.

۲۹ تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.



معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

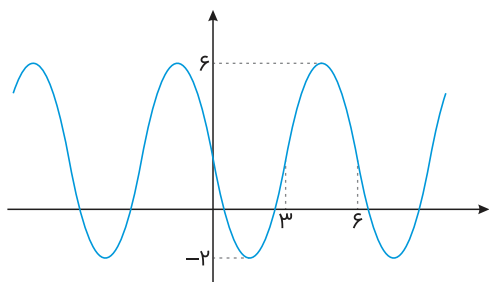
۳۰ $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$

۳۱ $\cos 2x - \sin x = 0$

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

۳۲ $\sin \frac{\pi}{\lambda} \times \cos \frac{\pi}{\lambda}$

۳۳ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطه $y = a \sin(bx) + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را بنویسید.



۳۴ معادله مثلثاتی $2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را حل کنید.

۳۵ معادله مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.

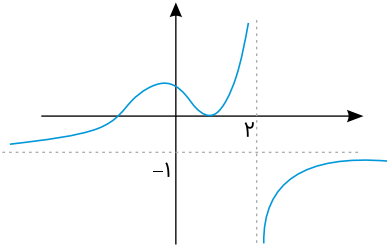
۳۶ مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

۳۷ اگر $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ و α در ربع چهارم باشد، مقادیر $\sin \frac{\alpha}{2}$ و $\tan \frac{\alpha}{2}$ را محاسبه کنید.

۳۸ مقدار کسر $A = \frac{\sqrt{\tan 2x} - \sqrt{\cot 2x}}{\sqrt{\tan 2x} + \sqrt{\cot 2x}}$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ چقدر است؟

۳۹ اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ و داشته باشیم: $\cot x - \tan x = -2$ ، مقدار $\sin x - \cos x$ را محاسبه کنید.

۴۰ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است، حاصل حدود زیر را بیابید.



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

الف

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

پ

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۴۱ حاصل حد $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 5}{x - 2}$ برابر با است.

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.

۴۲ باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 2x^3 - x^2 + 1$ بر $x - 1$ برابر ۲ است.

حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x + 12} - x}$$

۴۳

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

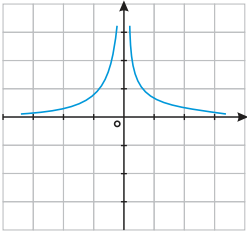
۴۴

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1}$$

۴۵

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۴۶ باتوجه به شکل زیر حد تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در نقطه $x = 0$ برابر است با



حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5 - x}{\sqrt{2x - 1} - 3}$$

۴۷

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{1 + \cos x}$$

۴۸

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{7 + 5x}$$

۴۹

۵۰ مقدار k را چنان بیابید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 - kx^2 - x + 3$ بر $x + 1$ بخش پذیر باشد.

حاصل هر کدام از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

۵۱

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$$

۵۲

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x}$$

۵۳

حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x + 3} - 2x + 7}{3x - 5}$$

۵۴

۵۵ اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = 3x^2 + mx + 2m + 1$ بر $x - 2$ برابر ۳ باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = mx^2 - mx + 3$ بر $x + 2$ را تعیین کنید.

حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}}$$

۵۶

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2}$$

۵۷

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2 + \sqrt{x^2+x}}{2x^3+1}$$

۵۸

حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1} + x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x^3-1} + x^2 + 2x - 3}$$

۵۹

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\cos x}$$

۶۰

۶۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$$

الف

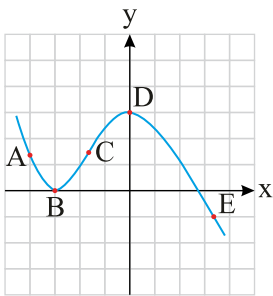
۶۲ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = 2t^3 + t - 1$ است،

الف سرعت متوسط متحرک در بازه $[1, 2]$ را محاسبه کنید.

ب سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه $t = 2$ چقدر است؟

۶۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x+5}$ را وقتی تغییر از $x = -1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند به دست آورید.

۶۴ باتوجه به نمودار زیر:



الف در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟

ب در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟

پ در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟

ت شیب نقاط D و A را باهم مقایسه نمایید.

۶۵ تابع $f(x) = x^2 + 5x - 6$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی که متغیر از $x = 1$ به $x = 4$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

مشتق توابع زیر را به دست آورید: (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۶۶ $y = (x^3 + \frac{1}{x})$

۶۷ $y = 3(2x - 5)^6 + \sqrt[3]{x}$

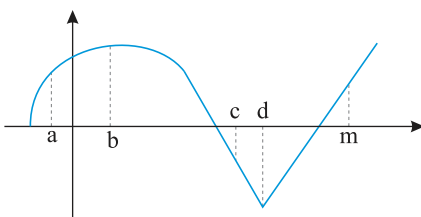
۶۸ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^2$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه $t = 9$ چقدر است؟

۶۹ معادله حرکت متحرکی به صورت $f(t) = \frac{1}{3}t^2 - 3t + 1$ می‌باشد.

الف سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 0$ تا $t = 4$ به دست آورید.

ب آهنگ آنی تغییرات $f(t)$ را در $t = 7$ بیابید.

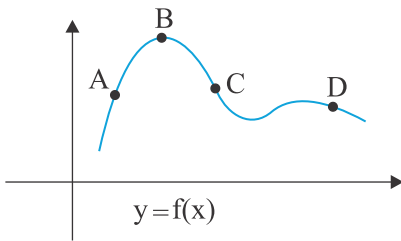
۷۰ باتوجه به نمودار f به سوالات زیر پاسخ دهید.



الف طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

ب طول نقطه "گوشه‌ای" را بنویسید.

پ طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.



الف علامت شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقاط مشخص شده را بنویسید.

ب علامت $f'(x_A) + f'(x_D)$ چیست؟

۷۲ گوشه‌ای بودن نقطه‌ای به طول $x = 0$ در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > 0 \\ -x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$ را بررسی کنید.

در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۷۳ اگر $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x$ مقدار $f''(-1)$ برابر است.

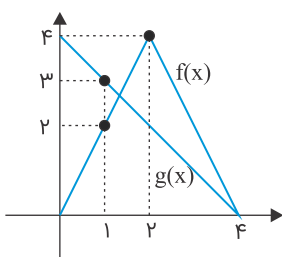
۷۴ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & x \leq 1 \\ x + 1 & x > 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

۷۵ تابعی با ضابطه $f(x) = \frac{3x - 6}{x^2 + 2}$ را در نظر بگیرید:

الف آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-2, 0]$ را به دست آورید.

ب آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = -1$ را به دست آورید.

۷۶ نمودار تابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید. اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(1)$ را بیابید.



۷۷ تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ 2x + 1 & ; x < 0 \end{cases}$ داده شده است؛

الف نشان دهید که $f'(0)$ وجود ندارد.

ب ضابطه تابع مشتق را بنویسید.

پ نمودار تابع f' را رسم کنید.

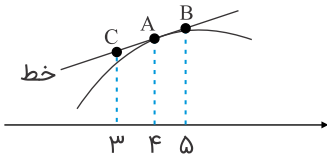
۷۸ مشتق تابع $f(x) = \sqrt{6 - 2x}$ را به دست آورده و دامنه مشتق‌پذیری آن را مشخص کنید.

۷۹ آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن، برای دایره‌ای به محیط 3π را بیابید.

۸۰ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x|x^2 - 2x|$ را در نقطه $x = 2$ در صورت وجود به دست آورید.

۸۱ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{2}{x}$ را در $x = 3$ حساب کنید.

۸۲ برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(4) = 1/5$ و $f(4) = 24$. با توجه به شکل، مختصات نقاط A ، B و C را بیابید.



۸۳ در تابعی با ضابطه $f(x) = \frac{36}{x^2}$ آهنگ متوسط تابع در بازه $[2, 3]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[3]{12}$ بیشتر است؟

مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

۸۴ $f(x) = (\Delta x^3 - x)^9 (\sqrt{2x+1})$

۸۵ تابع با ضابطه $f(x) = x^2 - x + 3$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی از $x_1 = 1$ به $x_2 = 5$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

۸۶ مشتق تابع $f(x) = (1 + \sqrt{x})^3$ را به دست آورید و دامنه مشتق‌پذیری آن را مشخص کنید.

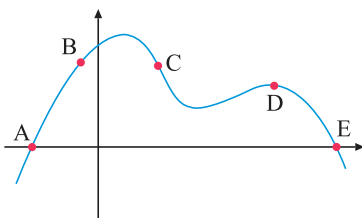
۸۷ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 1$ ، $g(2) = -3$ و $g'(2) = 2$ ، مقادیر $(fg)'(2)$ و $(f+g)'(2)$ را به دست آورید.

۸۸ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^2 - 4|$ را در $x = 2$ بررسی کنید.

۸۹ اگر $f(x) = x[x]$ باشد، مقدار $f'_+(0)$ و $f'_-(0)$ چقدر است؟

۹۰ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + 2t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم توده باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازه زمانی $0 \leq t \leq 4$ می‌شود؟

۹۱ از بین نقاط مشخص شده A ، B ، C ، D و E روی نمودار زیر، در کدام نقطه:



الف مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟

۹۲ اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $f'(1) = 3$ و $g'(1) = 5$ ، مقدار $(3f + 2g)'(1)$ را به دست آورید.

مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن الزامی نیست)

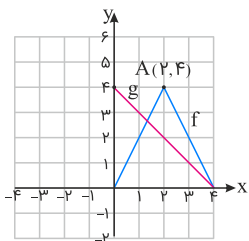
$$g(x) = \left(\frac{3x^2 - x}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{1}{3}}$$

۹۴ با استفاده از تعریف مشتق، معادله خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^2 + 10x$ را در نقطه $A(2, f(2))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

۹۵ محیط هر دایره ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره ای به مساحت 2π حساب کنید.

۹۶ تابع $f(x) = x^2|x - 1|$ مفروض است. این تابع را بدون قدر مطلق نوشته و ضابطه و دامنه تابع مشتق، یعنی f' را به دست آورید.

۹۷ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

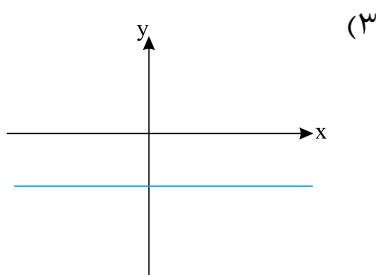
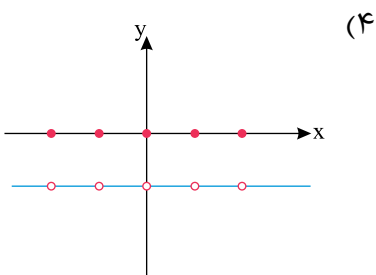
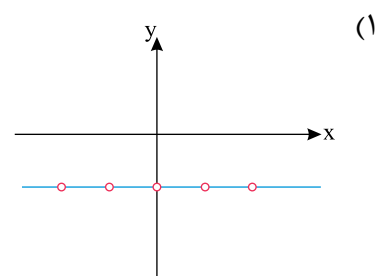
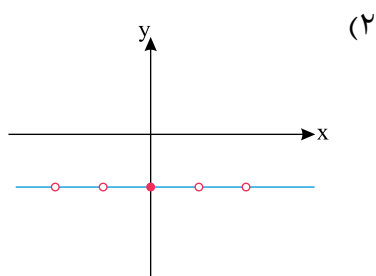


الف اگر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ، مطلوب است $h'(1)$ ، $h'(2)$ و $h'(3)$.

ب اگر $k(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ مطلوب است $k'(1)$ ، $k'(2)$ و $k'(3)$.

۹۸ تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 4\sqrt{x} + x^2 & ; x > 1 \\ 2x^3 - 3\sqrt[3]{x} + 6 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ 3x + 10 & ; x < -1 \end{cases}$ مفروض است. ضابطه و دامنه تابع مشتق f' ، یعنی f' را به دست آورید.

۹۹ نمودار تابع مشتق $f(x) = x([x] + [-x])$ به کدام شکل است؟



اگر $f(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = x^3 + 1$ باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع $f \circ g$ در نقطه‌ای به طول -2 واقع بر آن، کدام است؟

- (۱) ۳۱
- (۲) ۳۲۱
- (۳) -31
- (۴) -321

اگر $f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & ; x \geq 1 \\ x^2 - 1 & ; x < 1 \end{cases}$ آن‌گاه حاصل $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1-2h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) وجود ندارد
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) ۲

اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد و $f(a) \neq 0$ و $f'_+(a) = -\infty$ و $f'_-(a) = +\infty$ ، نمودار تابع $y = \frac{1}{f(x)}$ در همسایگی $x = a$ کدام است؟



اگر $f(x) = \begin{cases} |x - 3| & ; x \leq 4 \\ |x^2 + 3x| - 27 & ; x > 4 \end{cases}$ ، مجموع عرض نقاط گوشه‌ای $y = 2f(x+1) + 2$ کدام است؟

- (۱) ۲
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

اگر $g(x) = f(x^2 - f(x^3 + x^2 + 1))$ باشد، در صورتی که $f'(0) = -2$ و $f'(1) = 1$ ، $g'(0)$ کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) $f'(-1)$
- (۳) $f'(-2)$
- (۴) $f'(2)$

اگر $f(x) = x[x]$ باشد، $f'(x)$ و $D_{f'}$ کدام است؟

- (۱) $\begin{cases} f'(x) = [x] \\ D_{f'} = \mathbb{R} \end{cases}$
- (۲) $\begin{cases} f'(x) = 0 \\ D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$
- (۳) $\begin{cases} f'(x) = [x] \\ D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$
- (۴) $\begin{cases} f'(x) = [x] - 1 \\ D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$

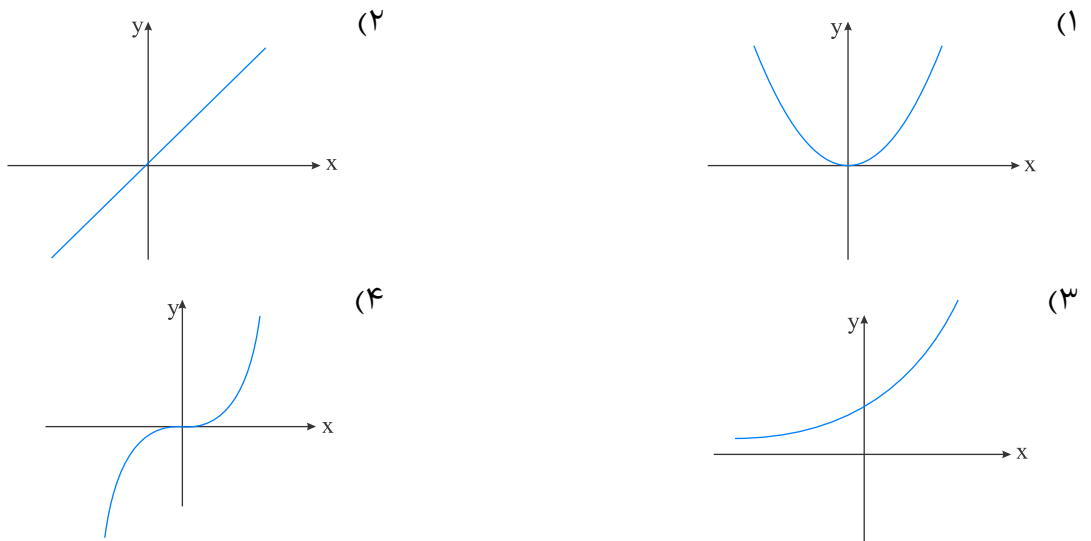
۱۰۶ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = 3\sqrt{4x+1}$ در بازه $[2, 2/001]$ کدام است؟

- (۱) ۳/۰۰۱
(۲) ۲/۰۰۱
(۳) ۲/۹۹۹
(۴) ۱/۹۹۹

۱۰۷ تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + ax + 2}$ در نقاطی به طول‌های ۱ و b دارای خط مماس قائم است. مقدار $a - b$ کدام است؟

- (۱) ۱
(۲) -۱
(۳) ۵
(۴) -۵

۱۰۸ تابع f به گونه‌ای است که مقدار آن در هر نقطه با مشتق آن برابر است. کدام گزینه می‌تواند نمودار تقریبی این تابع باشد؟



۱۰۹ اگر $f'(3) = 4$ باشد، حاصل $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h) - f(3-5h)}{h}$ کدام است؟

- (۱) ۱۲
(۲) -۱۲
(۳) ۲۸
(۴) -۲۸

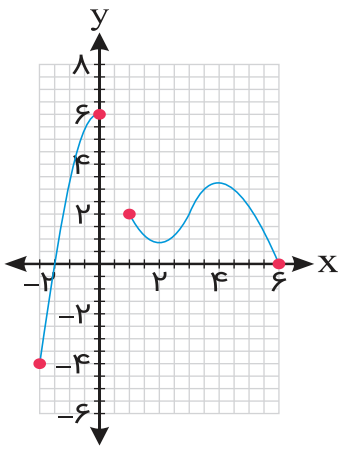
۱۱۰ تابع $f(x) = (-x)(3x^2 + ax + b)$ در $x_0 = 2$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

- (۱) -۷۲
(۲) -۱۴۴
(۳) -۳۶
(۴) -۱۲

۱۱۱ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $f(x) = \begin{cases} |x-2| & ; x > 1 \\ \sqrt[5]{x^2 - 4x} & ; x \leq 1 \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) ۴
(۲) ۳
(۳) ۲
(۴) ۱

باتوجه به نمودار داده شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



۱۱۲ مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.

۱۱۳ مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.

۱۱۴ طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

۱۱۵ طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

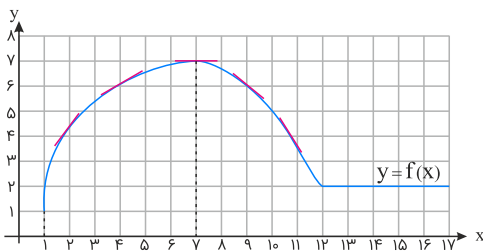
۱۱۶ اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطه c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$ ، در این صورت $f(c)$ را یک تابع f می‌نامیم.

۱۱۷ تابع با ضابطه $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

الف ریشه معادله $f'(x) = 0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

ب با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطه اکسترمم f منطبق بر نقطه بحرانی آن است؟

۱۱۸ باتوجه به توضیحات کتاب، می‌دانیم مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را در نظر بگیرید:



موارد زیر را کامل کنید.

الف) در بازه $(1, 7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خطهای مماس بر نمودار f مثبت است. بنابراین در این بازه علامت f' است.

ب) در بازه $(7, 12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خطهای مماس بر نمودار f است. بنابراین در این بازه علامت f' است.

پ) در بازه $(12, +\infty)$ که تابع مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر است.

۱۱۹ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰ مترمربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف هزینه موردنیاز برای انجام این کار را به صورت یک تابع بنویسید.

ب ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینه دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

۱۲۰ تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ را در نظر بگیرید و به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

الف مختصات نقاط اکسترمم نسبی این تابع را بیابید.

ب بزرگترین بازه‌ای که تابع f در آن اکیداً نزولی است را مشخص کنید.

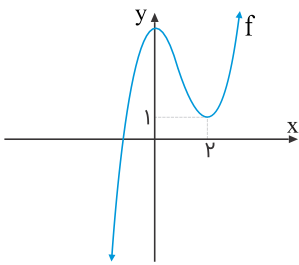
۱۲۱ ضرایب a و b در تابع $f(x) = -x^2 + ax + b$ را طوری تعیین کنید که در نقطه $(1, 2)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۱۲۲ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^3 - 3x + 7$ را در بازه $[-1, 3]$ ، در صورت وجود به دست آورید.

جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

۱۲۳ اگر تابع $y = f(x)$ در بازه $[a, b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه است.

۱۲۴ نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ به صورت شکل زیر رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



۱۲۵ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۲۶ تابع با ضابطه $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

۱۲۷ در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$$

۱۲۸ در کره‌ای به قطر ۱۲ سانتی‌متر یک استوانه با حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. ارتفاع استوانه را به دست آورید.

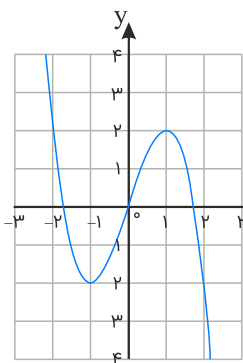
۱۲۹ تابع $g(x) = -x^2 - 1$ را در فاصله $[-1, 2]$ رسم کنید و نقاط بحرانی را مشخص کنید.

۱۳۰ نمودار تابع $f(x) = -x^3 + 3x$ را رسم کرده‌ایم.

الف طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

ب می‌دانیم این تابع در \mathbb{R} مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادله $f'(x) = 0$ ، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.

پ) باتوجه به الف و ب، درستی قضیه فرما (هر نقطه اکسترمم نسبی تابع یک نقطه بحرانی آن است) را در x مورد این تابع بررسی کنید.



۱۳۱ اکستریم‌های مطلق تابع $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ را در فاصله $[-1, 3]$ محاسبه کنید.

۱۳۲ با یک نرده به طول ۱۰۰ متر، می‌خواهیم به دور یک زمین مستطیل‌شکل با مساحت ماکزیمم، حصار بکشیم. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

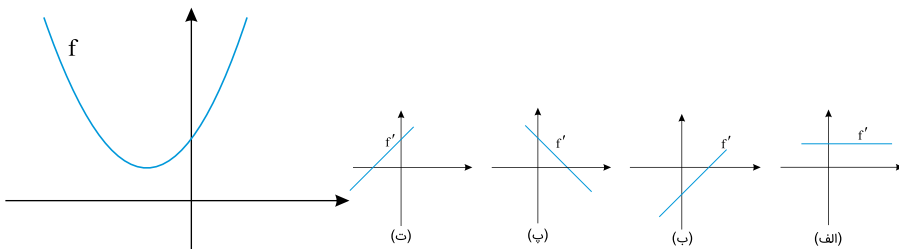
۱۳۳ تابع $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$ را در نظر بگیرید:

الف با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

ب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازه $[0, 3]$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۳۴ اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطه $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقدار x و y را طوری به دست آورید که حاصل ضرب دو عدد مینیمم گردد.

۱۳۵ باتوجه به نمودار تابع f ، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.

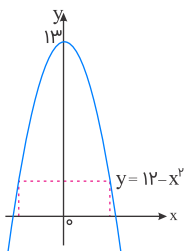


۱۳۶ ورق فلزی مربع‌شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشه آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم؛ سپس لبه جعبه را به اندازه x برمی‌گردانیم تا یک جعبه در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

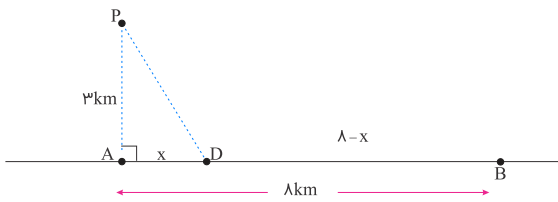
۱۳۷ اگر تابع $f(x) = ax^2 + bx$ در $x = 1$ دارای ماکزیمم نسبی برابر با 7 باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱۳۸ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای‌شکل و در باز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً 900 سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به کاررفته در تولید آن مینیمم شود؟ ($\pi \simeq 3$)

۱۳۹ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ‌ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ‌ها و روی سهمی $y = 12 - x^2$ باشند.



۱۴۰ آرتا درون قایقی در نقطه P قرار دارد که فاصله آن از نزدیک‌ترین نقطه ساحل یعنی نقطه A ، معادل 3 کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطه B در ساحل برسد که در 8 کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق 2 km/h و سرعت پیاده‌روی آرتا در ساحل 4 km/h باشد. اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به سوی B پیاده‌روی کند؟



۱۴۱ نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

در هریک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

۱۴۲ $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$

۱۴۳ $g(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

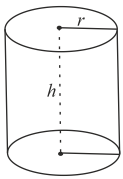
۱۴۴ $h(x) = -x^3 - 3x + 2$

۱۴۵ غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطه $C(t) = \frac{3t}{t^3 + 27}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

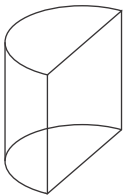
۱۴۶ یک مستطیل در یک نیم‌دایره به شعاع ۲ محاط شده است، طول و عرض مستطیل را طوری بیابید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

۱۴۷ تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

۱۴۸ استوانه‌ای به شعاع قاعده r و ارتفاع h مفروض است. اگر صفحه P این استوانه را برش بدهد چه شکل‌هایی از سطح مقطع به دست می‌آید؟ (سه نمونه آن را ذکر کنید)



۱۴۹ در شکل زیر نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های عمودی و افقی به چه شکل است؟



۱۵۰ معادله دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید.

در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید.

۱۵۱ اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)

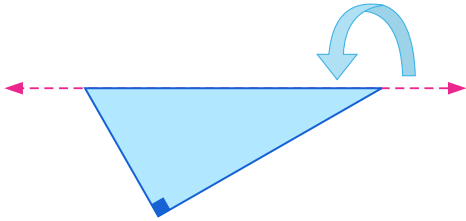
۱۵۲ اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه)

۱۵۳ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطه $O(3, -2)$ بوده و بر محور x مماس باشد.

۱۵۴ معادله گسترده دایره‌ای به صورت $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ است. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

۱۵۵ حدود a را طوری به دست آورید که $x^2 + y^2 - 3x + 5y + a = 0$ بتواند معادله یک دایره باشد.

۱۵۶ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟



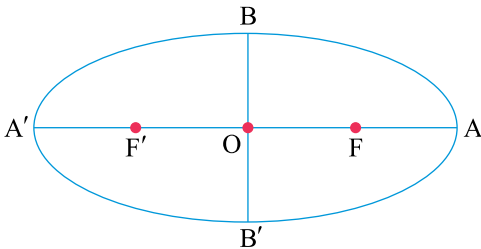
۱۵۷ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O(-1, 3)$ بوده و از نقطه $A(2, 1)$ می‌گذرد.

۱۵۸ اگر معادله دایره به شکل $(x+1)^2 + y^2 = 4$ باشد:

الف مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

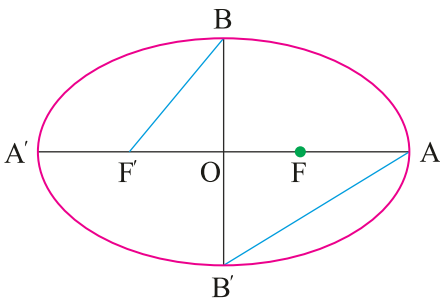
ب مختصات تقاطع دایره با محور x ها را پیدا کنید.

۱۵۹ اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه $\widehat{F'BF}$ چند درجه است؟



۱۶۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که $O(-1, -1)$ مرکز آن بوده و روی خط $2x + y = 2$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۱۶۱ در بیضی زیر، خروج از مرکز برابر $\frac{4}{5}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید.



۱۶۲ وضعیت دو دایره به معادلات $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه راه‌حل)

۱۶۳ اگر دو دایره به معادله‌های $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ و $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = m^2$ مماس خارج باشد، مقدار m را بیابید.

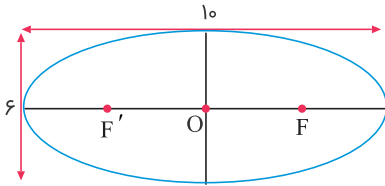
۱۶۴ مساحت بین دو دایره $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$ و $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = m$ برابر 4π است. m را بیابید.

۱۶۵ معادله گسترده دایره $C(O, R)$ به شکل $x^2 + y^2 + 2y - 4x - 4 = 0$ است.

الف مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.

ب آیا نقطه $A(0, 3)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

۱۶۶ در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید (F و F' کانون‌های بیضی هستند).



۱۶۷ مستطیلی که طول آن $1/5$ برابر عرض آن است را ابتدا حول طول آن و سپس حول عرض آن دوران می‌دهیم. نسبت حجم‌های دو جسم حاصل را بیابید.

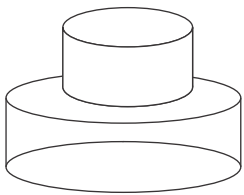
۱۶۸ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{4}{5}$ ، مرکز آن $(-4, -1)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

۱۶۹ وضعیت دو دایره $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ را بررسی کنید.

۱۷۰ دو استوانه روی یکدیگر قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای از بالا به‌طور عمودی هر دو استوانه را برش دهد، سطح مقطع حاصل چه شکلی خواهد بود؟ (همراه با رسم شکل)



۱۷۱ شکل حاصل از دوران هریک را با رسم نام ببرید.

الف نیم‌دایره حول قطر آن

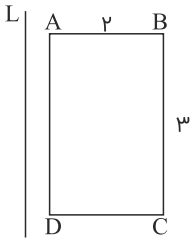
ب مستطیل حول طول یا عرض

پ مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویه قائمه

ت دوزنقه قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن

۱۷۲ وضعیت نقطه $A(1, -2)$ نسبت به دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ را تعیین کنید.

۱۷۳ در شکل زیر، ضلع AD از مستطیل ABCD موازی با خط L و به فاصله ۱ واحد از آن است. حجم جسم حاصل از دوران مستطیل حول خط L، چقدر است؟

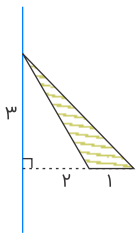


۱۷۴ معادله قطر کانونی یک بیضی، $y = -1$ و معادله قطر کوچک، $x = 2$ است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصله کانونی را به دست آورید.

۱۷۵ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $x + y = 2$ و بر خطوط $y = x - 3$ و $y = x + 1$ مماس باشد.

۱۷۶ استوانه قائم به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۱ واحد را روی استوانه قائم دیگری به شعاع قاعده ۳ و ارتفاع ۲ واحد، قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای قائم، استوانه‌ها را قطع کند، حداکثر مساحت سطح مقطع حاصل، چقدر است؟

۱۷۷ حجم حاصل از دوران سطح هاشورخورده حول خط d را محاسبه کنید.



۱۷۸ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم:

الف با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟

در جاهای خالی گزینه مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

۱۷۹ دو پیشامدی که باهم رخ ندهند، دو پیشامد (مستقل - ناسازگار) هستند.

۱۸۰ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آنها را انتخاب کنیم:

الف با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسه A و با چه احتمالی از مدرسه B است؟

ب با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

۱۸۱ در یک دانشگاه ۱۲۰۰ نفری ۸۰۰ دانشجوی دختر وجود دارند و بقیه پسر هستند. اگر ۶۰٪ دختران و ۷۰٪ پسران در یک درس قبول شده باشند:

الف با چه احتمالی یک دانشجو که به دلخواه از دانشکده انتخاب شده است، در این درس قبول نشده است؟

- ۱۸۲ هرگاه برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ آن‌گاه دو پیشامد A و B هستند.
- ۱۸۳ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر $0/07$ و نوزاد دختر $0/04$ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟
- ۱۸۴ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟
- ۱۸۵ درون کیسه A ، سه مهره آبی و پنج مهره قرمز و درون کیسه B ، چهار مهره آبی و چهار مهره قرمز موجود است. از کیسه A یک مهره خارج کرده و در کیسه B قرار می‌دهیم. حال از کیسه B یک مهره خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مهره‌های خارج شده از کیسه A و B هم‌رنگ خواهد بود؟
- ۱۸۶ در جعبه‌ای سه ظرف وجود دارد. ظرف اول شامل یک مهره سفید و یک مهره سیاه، ظرف دوم شامل یک مهره سفید و دو مهره سیاه و ظرف سوم شامل سه مهره سفید و دو مهره سیاه است. در برداشتن یک مهره به تصادف از یک ظرف احتمال خارج شدن مهره سیاه کدام است؟
- ۱۸۷ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ظرف دوم شامل ۶ مهره قرمز و ۶ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

- ۱۸۸ اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول، B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C = \dots\dots\dots$ باشند، A ، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی است.
- ۱۸۹ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟
- ۱۹۰ ظرف A ، شامل ۳ مهره آبی و ۴ مهره قرمز و ظرف B شامل ۵ مهره آبی و ۷ مهره قرمز است. از ظرف A ، دو مهره به تصادف و باهم خارج می‌کنیم و در ظرف B قرار می‌دهیم سپس از ظرف B یک مهره خارج می‌کنیم. اگر مهره خارج شده از ظرف B آبی باشد با چه احتمالی مهره‌های خارج شده از ظرف A هم‌رنگ بوده‌اند؟
- ۱۹۱ ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همه مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶تای آن‌ها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهره قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهره انتخابی قرمز باشد چقدر است؟
- ۱۹۲ مینا در انتخاب رشته خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشته ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشته ریاضی را انتخاب کند، به احتمال $0/45$ ، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال $0/1$ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال $0/3$ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشته ریاضی را انتخاب کند $0/1$ ، احتمال اینکه رشته تجربی را انتخاب کند $0/6$ و احتمال اینکه رشته انسانی را انتخاب کند $0/3$ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بسته سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بسته سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بسته سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. در صورتی که با چرخاندن عقربه چرخان در شکل زیر نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود، تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟



فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

درون جعبه A چهار مهره زرد و سه مهره قرمز و درون جعبه B سه مهره زرد و سه مهره قرمز قرار دارد. از جعبه A مهره‌ای را برداشته و در جعبه B قرار می‌دهیم، سپس از جعبه B مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. اگر دو مهره هم‌رنگ باشند، با چه احتمالی هر دو زرداند؟

- | | |
|-------------------|-------------------|
| $\frac{4}{7}$ (۲) | $\frac{4}{5}$ (۱) |
| $\frac{3}{5}$ (۴) | $\frac{3}{7}$ (۳) |

یک تاس را پرتاب می‌کنیم و به تعداد عدد روشده سکه می‌اندازیم. با چه احتمالی دقیق ۳ سکه رو داریم؟

- | | |
|-------------------|--------------------|
| $\frac{2}{6}$ (۲) | $\frac{1}{4}$ (۱) |
| $\frac{1}{6}$ (۴) | $\frac{1}{12}$ (۳) |

دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز، ۵ کارت یک رو قرمز و یک رو آبی، ۳ کارت دو رو آبی است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را می‌بینیم، با چه احتمالی رویی که دیده‌ایم آبی است؟

- | | |
|--------------------|---------------------|
| $\frac{9}{20}$ (۲) | $\frac{5}{20}$ (۱) |
| $\frac{7}{20}$ (۴) | $\frac{11}{20}$ (۳) |

در کلاسی که n دانشجوی پسر ($n > 5$) و ۵ دانشجوی دختر دارد، به تصادف دو دانشجو را یکی پس از دیگری انتخاب می‌کنیم. با احتمال $\frac{10}{21}$ دانشجویان انتخابی هم‌جنس نیستند. تعداد دانشجویان پسر، کدام می‌تواند باشد؟

- | | |
|--------|--------|
| ۷ (۲) | ۱۰ (۱) |
| ۱۶ (۴) | ۱۱ (۳) |

دو کلاس به نام‌های A و B داریم که در کلاس A، ۵ دانش‌آموز ریاضی و ۳ تجربی و در کلاس B، ۳ دانش‌آموز ریاضی و ۲ تجربی وجود دارد. تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر مضرب ۳ بیاید یک دانش‌آموز از کلاس B انتخاب و به کلاس A انتقال می‌دهیم و سپس یک دانش‌آموز از کلاس A انتخاب می‌کنیم. در غیر این صورت از کلاس A دانش‌آموزی انتخاب و به کلاس B انتقال داده و سپس یک دانش‌آموز از کلاس B انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه هر دو دانش‌آموز هم‌رشته نباشند، کدام است؟

$$\frac{437}{940} \quad (2)$$

$$\frac{217}{940} \quad (4)$$

$$\frac{437}{1080} \quad (1)$$

$$\frac{217}{1080} \quad (3)$$

در یک جامعه نسبت تعداد زنان به مردان ۴ به ۳ است. اگر ۴۰ درصد زنان و ۶۰ درصد مردان باسواد باشند، با چه احتمالی فرد انتخابی از جامعه زن یا باسواد است؟

$$\frac{29}{35} \quad (2)$$

$$\frac{27}{49} \quad (4)$$

$$\frac{28}{49} \quad (1)$$

$$\frac{27}{35} \quad (3)$$



پاسخنامه

$$\begin{aligned}x = ۲ : y = fog(۲) &= f(۱۱) = ۷ \\x = ۴ : y = fog(۴) &= f(-۲) = ۴ \\x = ۶ : y = fog(۶) &= -۵ \\x = ۳ : y = fog(۳) &= -۵ \\fog &= \{(۲, ۷), (۴, ۴), (۶, -۵), (۳, -۵)\}\end{aligned}$$

۱

پاسخ سؤال ۲

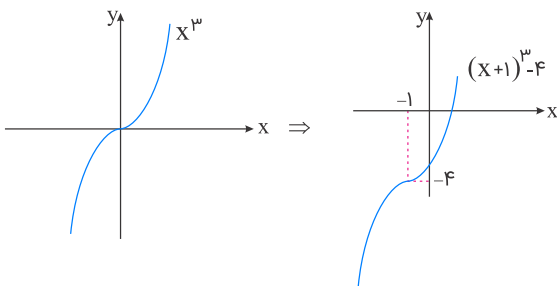
۲ درست

۳ درست الف

ب نادرست

پ نادرست

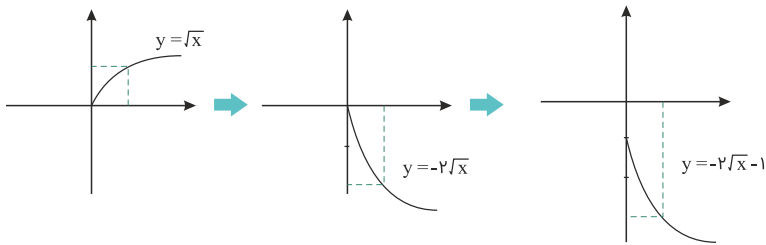
۴ الف



ب چون نمودار تابع f اکیداً صعودی است، پس وارون پذیر می باشد.

پ

$$\begin{aligned}y = (x+1)^3 - ۴ &\Rightarrow (x+1)^3 = y + ۴ \Rightarrow x+1 = \sqrt[3]{y+۴} \\ \Rightarrow x &= \sqrt[3]{y+۴} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+۴} - 1\end{aligned}$$



$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt[3]{x^2} - 1) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{(\sqrt[3]{x^2} - 1)^2 - 4}$$

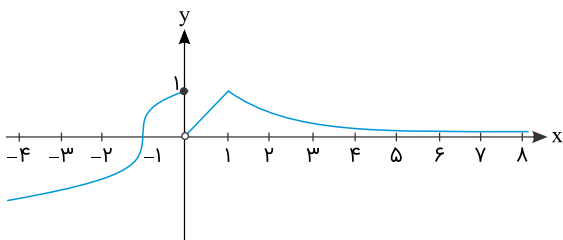
$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x^2} - 1 \neq \pm 2\} = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$D_f = [1, +\infty), D_g = \mathbb{R}, D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{f \circ g} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt[3]{x^2} - 1 \in [1, +\infty)\} \Rightarrow D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

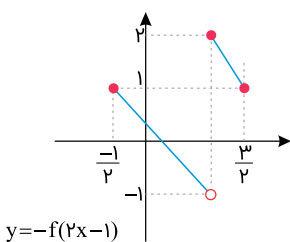
$$f(g(x)) = \sqrt{\sqrt[3]{x^2} - 2}$$



اکیداً صعودی: $(-\infty, 0]$

اکیداً صعودی: $(0, 1)$

اکیداً نزولی: $[1, +\infty)$



۱- ابتدا نمودار را یک واحد به راست منتقل کنید.

۲- طول نقاط را در $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ضرب کنید.

۳- نسبت به محور xها قرینه نمایید.

۴- یک واحد به بالا ببرید.

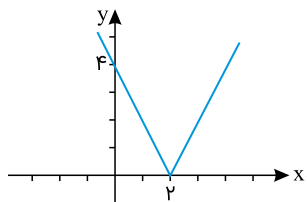
$$y = -\omega - \sqrt{\omega x + 1} \Rightarrow \sqrt{\omega x + 1} = -\omega - y \Rightarrow \omega x + 1 = \omega^2 + 1\omega y + y^2$$

$$\Rightarrow \omega x = y^2 + 1\omega y + \omega^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{\omega}x^2 + \frac{1\omega}{\omega}x + \omega$$

$$f(x) = |2x - 4|$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 4 & ; x \geq 2 \\ -2x + 4 & ; x < 2 \end{cases}$$



$$f(x - 2) = x^2 + 4x$$

$$x - 2 = t \Rightarrow x = t + 2 \Rightarrow f(t) = (t + 2)^2 + 4(t + 2)$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 4t + 4 + 4t + 8$$

$$\Rightarrow f(t) = t^2 + 8t + 12$$

$$\xrightarrow{t=2x+1} f(2x + 1) = (2x + 1)^2 + 8(2x + 1) + 12$$

$$\Rightarrow f(2x + 1) = 4x^2 + 4x + 1 + 16x + 8 + 12$$

$$\Rightarrow f(2x + 1) = 4x^2 + 20x + 21$$

برای تعیین ضابطه وارون سعی می‌کنیم X را برحسب y بیابیم؛ یعنی:

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} + 2 & ; x \geq 0 \\ 1 - x^2 & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x} + 2 & ; x \geq 0 \\ y = 1 - x^2 & ; x < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = y - 2 & ; x \geq 0 \\ x^2 = 1 - y & ; x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (y - 2)^2 & ; x \geq 0 \\ x = -\sqrt{1 - y} & ; x < 0 \end{cases}$$

حال جای X و y را عوض می‌کنیم؛ یعنی:

$$f^{-1}(x) = y = \begin{cases} (x - 2)^2 & ; x \geq 2 \\ -\sqrt{1 - x} & ; x < 1 \end{cases}$$

چون نقطه شروع ۲ واحد بالا رفته، پس یک انتقال عمودی ۲ واحدی صورت گرفته است. حال اگر فرض کنیم نمودار به اندازه a واحد به راست انتقال پیدا کرده و سپس با ضریب b ، انبساط یا انقباض افقی صورت گرفته، ضابطه تابع به صورت زیر خواهد بود:

$$y = \sqrt{x} \xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۲ واحد انتقال}} y = \sqrt{x} + 2 \xrightarrow[\text{راست}]{\text{a واحد به}} y = \sqrt{x - a} + 2$$

$$\xrightarrow[\text{انبساط یا انقباض افقی}]{\text{با ضریب b}} y = \sqrt{bx - a} + 2 = f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}b - a} + 2 = 2 \\ f\left(\frac{11}{2}\right) = 6 \Rightarrow \sqrt{\frac{11}{2}b - a} + 2 = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{2}b - a = 0 \\ \frac{11}{2}b - a = 16 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} 4b = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 6$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{4x - 6} + 2$$

اگر قیمت لپتاپ را x تومان در نظر بگیریم، بعد از ۲۰٪ تخفیف برابر است با:

$$f(x) = x - \frac{20}{100}x = \frac{4}{5}x$$

و برای تخفیف ۲۰۰۰۰۰ تومانی، تابع g را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) = x - 200000 \quad ; x > 1500000$$

حال $f \circ g(x)$ و $g \circ f(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$f \circ g(x) = f(x - 200000) = \frac{4}{5}(x - 200000) = \frac{4}{5}x - 160000 \quad ; D_{f \circ g} = [1500000, +\infty)$$

$$g \circ f(x) = g\left(\frac{4}{5}x\right) = \frac{4}{5}x - 200000 \quad ; D_{g \circ f} = [1500000, +\infty)$$

ملاحظه می‌کنید که $f \circ g(x) > g \circ f(x)$ است، یعنی $g \circ f(x)$ برای الناز به صرفه است.

گزینه ۲

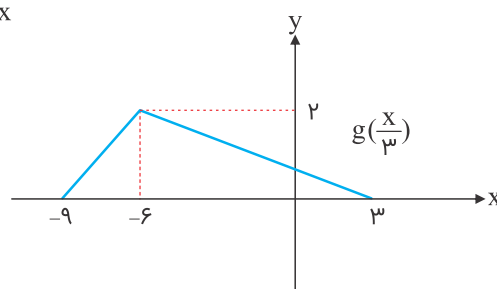
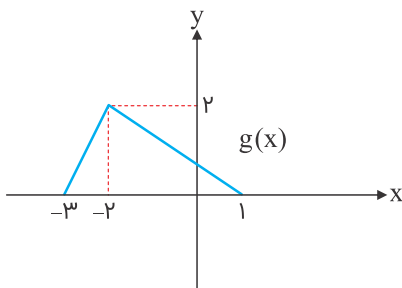
$$f(x) = \sqrt{x + |x|} = \begin{cases} \sqrt{x+x} = \sqrt{2x} & ; x > 0 \\ \sqrt{x-x} = 0 & ; x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_g = [-3, 1]$$

باتوجه به اینکه برای رسم $g\left(\frac{x}{3}\right)$ باید نمودار تابع $y = g(x)$ را ۳ برابر در جهت محور x ها باز کنیم،

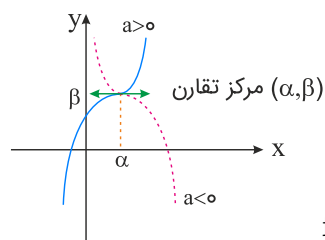
پس دامنه $g\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر است با: $D = [-9, 3]$

چون دامنه $f(x)$ برابر \mathbb{R} است، پس دامنه $f \circ g\left(\frac{x}{3}\right)$ با دامنه $g\left(\frac{x}{3}\right)$ برابر می‌شود.



برای نوشتن ضابطه تابع درجه سوم که نمودار آن به صورت زیر بوده و مرکز تقارنش نقطه (α, β) باشد، کافی است از ضابطه $f(x) = a(x - \alpha)^3 + \beta$ استفاده نماییم. حال با داشتن یک نقطه دیگر از این تابع و جایگذاری آن در تابع f ، به راحتی مقدار a به دست می‌آید.
داریم:

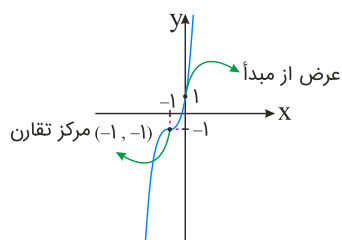
$$\Rightarrow f(x) = a(x - \alpha)^3 + \beta$$



چون در شکل داده شده مرکز تقارن نقطه $(-1, -1)$ است، پس داریم:

$$f(x) = a(x + 1)^3 - 1$$

حال کافی است نقطه عرض از مبدأ تابع f را در آن صدق دهیم تا a مشخص شده. داریم:



$$\xrightarrow{\text{عرض از مبدأ}} a(1)^3 - 1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= 2(x + 1)^3 - 1 = 2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 1 \\ &= 2x^3 + 6x^2 + 6x + 1 \end{aligned}$$

در آخر مقادیر a ، b ، c و d را نظیر به نظیر برابر با ضرایب جملات x^3 ، x^2 ، x و عدد ثابت تابع به دست آمده قرار می‌دهیم. داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 6 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow abcd = 2 \times 6 \times 6 \times 1 = 72$$

اگر ضابطه تابع را مرکب ببینیم، داریم:

$$\begin{cases} f(x) = 2^x - 2^{-x} \\ g(x) = x - [x] \end{cases} \Rightarrow y = f(g(x))$$

با کمی دقت پی می‌بریم که تابع اصلی $f(x)$ اکیداً صعودی است، چون به صورت تفاضل یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع اکیداً نزولی است.

$$f(x) = \overset{\text{اکیداً صعودی}}{2^x} - \underset{\text{اکیداً نزولی}}{2^{-x}} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

در تابع مرکب $f \circ g$ ، برد تابع داخلی g ، دامنه تعریف تابع f است. تابع g تابع جزء اعشاری بوده و بردش بازه $[0, 1)$ است. پس به ترتیب همین بازه و جایگذاری آن در تابع اصلی f ، بُرد به دست می‌آید، داریم:

$$f(x) = 2^x - 2^{-x}, D_f = R_g = [0, 1) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{f \circ g} = [f(0), f(1)) = [0, \frac{3}{2})$$

پاسخ سؤال ۱۹

۱۹ نادرست

۲۰

$$T = \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{Max} = |a| + c = 2 + (-3) = -1$$

$$\text{Min} = -|a| + c = -2 + (-3) = -5$$

۲۱ درست

۲۲ نادرست

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{24}{25}$$

$$\text{max} = |-2| + 1 = 3, \text{min} = -|-2| + 1 = -1$$

$$T = \frac{2\pi}{|2\pi|} = 1, \text{max} = |-3| + 1 = 4, \text{min} = -|-3| + 1 = -2$$

۲۵

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} : k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ سؤالات ۲۶ تا ۲۷

۲۶ نادرست.

$$\min = -|a| + c = -3 + 2 = -1$$

۲۷ نادرست

۲۸

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \times \left(\frac{4}{5}\right) - 1 = \frac{3}{5}$$

(باتوجه به اینکه در سؤال در اثر اشکال تایی به جای $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ عدد $\frac{1}{\sqrt{2}}$ تایپ شده است، در زمان تصحیح چنانچه داوطلب با $\frac{1}{\sqrt{2}}$ حل نموده است، نمره کامل منظور گردد.)

۲۹

$$T = 4\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 4\pi \Rightarrow |b| = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{2}$$

$$\max = |a| + c = 3, \quad \min = -|a| + c = 1 \Rightarrow c = 2 \\ \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = -1$$

$$f(x) = a \cos bx + c \Rightarrow f(x) = -\cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 2, \quad f(x) = -\cos\left(-\frac{1}{2}x\right) + 2$$

پاسخ سؤالات ۳۰ تا ۳۱

۳۰

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \\ \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$1 - 2 \sin^2 x - \sin x = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \end{cases}$$

پاسخ سؤال ۳۲

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\alpha \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2 \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} \max = 6 \\ \min = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a| + c = 6 \\ -|a| + c = -2 \end{cases} \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow |a| = 4$$

$$y = a \sin bx + c \Rightarrow y = -4 \sin\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 2 \quad \text{یا} \quad y = +4 \sin\left(-\frac{\pi}{3}x\right) + 2$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 2x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 3x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + x \Rightarrow x = k\pi \\ 3x = 2k\pi - x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{13} \xrightarrow{\text{در ربع چہارم}} \cos \alpha = \frac{5}{13}$$

$$\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \frac{5}{13} = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{13} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \pi \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} > 0 \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{4}{13} = \frac{9}{13} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\xrightarrow{\text{در ربع دوم}} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{13}}}{\frac{-3}{\sqrt{13}}} = -\frac{2}{3}$$

ابتدا صورت کسر و سپس مخرج کسر را به دست می آوریم:

$$\sqrt{\tan \frac{\pi}{12}} - \sqrt{\cot \frac{\pi}{12}} = a \xrightarrow{\text{توان}} \tan \frac{\pi}{12} + \cot \frac{\pi}{12} - 2 \underbrace{\sqrt{\tan \frac{\pi}{12} \cot \frac{\pi}{12}}}_2 = a^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} - 2 = \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}} - 2$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}} - 2 = 4 - 2 = 2$$

$$\Rightarrow a^2 = 2 \Rightarrow a = \pm \sqrt{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}}, \quad \cot \frac{\pi}{12} = \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}}$$

$$\xrightarrow{\cos \frac{\pi}{12} > \sin \frac{\pi}{12}} \tan \frac{\pi}{12} < \cot \frac{\pi}{12} \Rightarrow a < 0 \Rightarrow a = -\sqrt{2}$$

$$\sqrt{\tan \frac{\pi}{12}} + \sqrt{\cot \frac{\pi}{12}} = b \xrightarrow{\text{توان}} \tan \frac{\pi}{12} + \cot \frac{\pi}{12} + 2 = b^2$$

$$\xrightarrow{\text{شبهه بالا}} 4 + 2 = b^2 \xrightarrow{b > 0} b = \sqrt{6} \Rightarrow A = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{12}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot x - \tan x = -2 \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = -2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = -2 \Rightarrow \frac{\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2$$

$$\Rightarrow \cot 2x = -1 \Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{8} \\ 2x = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{8} \end{cases} \text{ غ.ق.ق } \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi \right)$$

$$\sin \frac{7\pi}{8} - \cos \frac{7\pi}{8} = a \xrightarrow{(\cdot)^2} \sin^2 \frac{7\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8} - 2 \sin \frac{7\pi}{8} \cos \frac{7\pi}{8} = a^2$$

$$1 - \sin \frac{7\pi}{4} = a^2 \Rightarrow 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 \Rightarrow a = \pm \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}$$

دقت کنید چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، مقدار $\sin x$ عددی مثبت و $\cos x$ عددی منفی است، پس $\sin x - \cos x$ مثبت است.
نکته:

$$1) \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

$$2) 2 \sin x \cos x = \sin 2x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

(-1)

($+\infty$)

(-1)

الف ۴۰

ب

پ

پاسخ سؤال ۴۱

۳ ۴۱

پاسخ سؤال ۴۲

درست ۴۲

پاسخ سؤالات ۴۳ تا ۴۵

۴۳

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+12} - x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+12} - x} \times \frac{\sqrt{x+12} + x}{\sqrt{x+12} + x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x+12} + x)}{(x+12 - x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(x-4)(\sqrt{x+12} + x)}{-(x+3)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x+4)(\sqrt{x+12} + x)}{-(x+3)} = -\frac{64}{7}$$

۴۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - 1^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

۴۵

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)(x-2)(4-x)}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3}{2x^3} = -\frac{1}{2}$$

پاسخ سؤال ۴۶

۴۶

حد تابع در نقطه داده شده $+\infty$ است.

پاسخ سؤالات ۴۷ تا ۴۹

۴۷

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{5-x}{\sqrt{2x-1} - 3} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(\sqrt{2x-1} + 3)}{(\sqrt{2x-1} - 3)(\sqrt{2x-1} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(\sqrt{2x-1} + 3)}{-2(5-x)} = -3$$

۴۸

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{2}{1 + \cos x} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

۴۹

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + \sqrt{x^2 + x + 1}}{7 + 5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - x}{5x} = \frac{2}{5}$$

۵۰

$$p(-1) = 0 \Rightarrow 2(-1)^p - k(-1)^p - (-1) + 3 = 0 \Rightarrow k = 2$$

پاسخ سؤالات ۵۱ تا ۵۳

۵۱

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x^2 + 3x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{(x+1)(x+2)} \times \frac{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x} + 1)} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

۵۲

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{\cos x} = -\infty$$

۵۳

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3 + 7x - 9}{2x^3 - 4x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-6x^3}{2x^3} = -3$$

پاسخ سؤال ۵۴

۵۴

با استفاده از قاعده پرتوان داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 - 5x + 3} - 2x + 7}{3x - 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|2x| - 2x}{3x} = \frac{-4x}{3x} = -\frac{4}{3}$$

۵۵

$$P(2) = 3 \Rightarrow 12 + 2m + 2m + 1 = 3 \Rightarrow 4m = -10 \Rightarrow m = -\frac{5}{2}$$

$$f(-2) = -\frac{5}{2}(-2)^2 - (-\frac{5}{2})(-2) + 3 = -12$$

پاسخ سؤالات ۵۶ تا ۵۸

۵۶

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3 - \sqrt{x+7}} \times \frac{3 + \sqrt{x+7}}{3 + \sqrt{x+7}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)(3 + \sqrt{x+7})}{2-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} -(x+2)(3 + \sqrt{x+7}) = -24$$

۵۷

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+1}{9-x^2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

۵۸

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2 + \sqrt{x^2 + x}}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{10x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5}{x} = 0$$

پاسخ سؤال ۵۹

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x-1)(x+1)} + (x-1)(x-3)}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)} + (x-1)(x+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}(x-3))}{\sqrt{x-1} (\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x-1}(x+3))} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

در اینجا، پس از تجزیه عبارات، در صورت و مخرج از $\sqrt{x-1}$ فاکتور گرفتیم.

پاسخ سؤال ۶۰

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 + \sin x}{\cos x} \times \underbrace{\frac{1 - \sin x}{1 - \sin x}}_2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \sin^2 x}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{2} = 0$$

۶۰

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x+2} - 2} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x^2 - 3x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{x + 2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+1)(\sqrt{x+2} + 2)}{x-2} = 5(4) = 20$$

۶۱ الف

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 15$$

۶۲ الف

$$f'(t) = 6t^2 + 1 \Rightarrow f'(2) = 25$$

ب

$$\frac{f(4) - f(-1)}{4 - (-1)} = \frac{3 - 2}{5} = \frac{1}{5}$$

۶۳

۶۴ الف E

ب B

پ C

ت $m_D > m_A$

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{3 - 0}{3} = 10$$

۶۵

$$y' = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$$

۶۶

$$y' = 3 \times 4 \times 2 \times (2x - 5)^3 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

۶۷

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2t \Rightarrow m'(9) = \frac{109}{6}$$

۶۸

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{(-3) - (1)}{4} = -1$$

۶۹ الف

$$f'(t) = t - 3 \Rightarrow f'(7) = 4$$

ب

$$x = b$$

۷۰ الف

$$x = d$$

ب

$$x = c$$

پ

نقطه	A	B	C	D
شیب	+	صفر، بدون علامت	-	-

۷۱ الف

چون $f'(x_A) > f'(x_D)$ و همچنین $|f'(x_A)| > |f'(x_D)|$ است، پس علامت $f'(x_A) + f'(x_D)$ مثبت می‌باشد.

ب

تابع در $x = 0$ پیوسته است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 = 0$

۷۲

$$f'_+(\circ) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$f'_-(\circ) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

مشتق راست نامتناهی و مشتق چپ یک عدد، پس نقطه $x = 0$ نقطه گوشه‌ای تابع است.

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} = 1$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

در نتیجه تابع در $x = 1$ مشتق پذیر نیست. $f'_+(1) \neq f'_-(1)$

$$\frac{f(0) - f(-2)}{0 + 2} = \frac{-3 + 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{-3x^2 + 12x + 6}{(x^2 + 2)^2} \Rightarrow f'(-1) = -1$$

$$f'(1) = 2, \quad g'(1) = -1$$

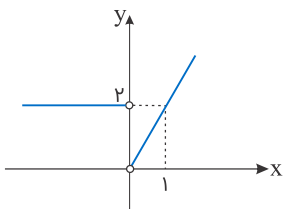
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{(g(x))^2}$$

$$\Rightarrow h'(1) = \frac{f'(1) \cdot g(1) - g'(1) \cdot f(1)}{(g(1))^2}$$

$$\Rightarrow h'(1) = \frac{2(3) - (-1)(2)}{(3)^2} \Rightarrow h'(1) = \frac{8}{9}$$

تابع f در صفر پیوسته نیست، بنابراین $f'(0)$ موجود نیست.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & ; x > 0 \\ 2 & ; x < 0 \end{cases}$$



$$f'(x) = \frac{-2}{2\sqrt{6-2x}} \Rightarrow D_{f'} = (-\infty, 3)$$

$$S(r) = \pi r^2, P(r) = 2\pi r \Rightarrow S(P) = \frac{1}{4\pi} P^2 \Rightarrow S'(P) = \frac{P}{2\pi}$$

$$\Rightarrow S'(2\pi) = \frac{2\pi}{2\pi}$$

$$f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x|x^2 - 2x| - 0}{x - 2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x|x^2 - 2x| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x(x^2 - 2x)}{x - 2} = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x|x^2 - 2x| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x(x^2 - 2x)}{x - 2} = -4 \end{cases}$$

چون $f'_+(2) \neq f'_-(2)$ پس تابع f در $x = 2$ مشتق ندارد.

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$\Rightarrow f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{6 - 2x}{3x}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{3x} = -\frac{2}{9}$$

$$f'(4) = m_{AB} \Rightarrow 1/5 = \frac{y_B - 24}{1} \Rightarrow y_B = 29/5$$

$$f'(4) = m_{AC} \Rightarrow \frac{y_C - 24}{-1} = 1/5 \Rightarrow y_C = 23/5$$

$$A \begin{vmatrix} 4 \\ 24 \end{vmatrix}, \quad B \begin{vmatrix} 5 \\ 29/5 \end{vmatrix}, \quad C \begin{vmatrix} 3 \\ 23/5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \text{آهنگ متوسط} = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = \frac{36}{9} - \frac{36}{4} = 36 \left(\frac{-5}{36} \right) = -5 \\ f'(x) = \frac{-72}{x^3} \Rightarrow f'(\sqrt[3]{12}) = \frac{-72}{12} = -6 \end{cases} \Rightarrow -5 - (-6) = 1$$

آهنگ متوسط تابع یک واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

پاسخ سؤال ۸۴

$$f'(x) = 9(15x^2 - 1)(5x^3 - x)^4(\sqrt{2x+1}) + \left(\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\right)(5x^3 - x)^4$$

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{(2 \cdot 5 - 5 + 3) - (1 - 1 + 3)}{4} = 5$$

۸۵

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}(1 + \sqrt{x})^2 \Rightarrow D_{f'} = (0, +\infty)$$

۸۶

$$(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = 1 \times (-3) + 3 \times 2 = 3$$

۸۷

$$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 3$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4| - 0}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

۸۸

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)(x+2)}{x-2} = -4$$

$\Rightarrow f'_+(2) \neq f'_-(2) \Rightarrow$ تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست

$$f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x[x] = 0$$

۸۹

پس f در $x = 0$ پیوسته است.

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x[x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [x]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x] = 0 \\ f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1 \end{cases}$$

$$m'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 \quad \frac{10 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} + 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{t} = 1 \Rightarrow t = 1$$

۹۰

A الف ۹۱

C ب

$$(3f + 2g)'(1) = 3f'(1) + 2g'(1) = 9 + 10 = 19$$

۹۲

پاسخ سؤال ۹۳

$$g'(x) = -\frac{1}{3} \left(\frac{3x^2 - x}{x^2 + 1} \right)^{-\frac{4}{3}} \times \frac{(6x - 1)(x^2 + 1) - 2x(3x^2 - x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(2+h)^2 + 10(2+h) - 16}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 - 4h - 4 + 20 + 10h - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^2 + 6h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6-h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6-h) = 6 \end{aligned}$$

A شیب خط مماس در نقطه $f'(2) = 6$

$$A(2, f(2)) = (2, 16)$$

$$y - 16 = 6(x - 2) \Rightarrow y = 6x + 4$$

P = $2\pi R$ (محیط دایره)

$$S = \pi R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{S}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow P'(S) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{\pi S}} \xrightarrow{S=2\pi} \frac{\pi}{\sqrt{\pi} \times 2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - x^2 & ; x \geq 1 \\ -x^3 + x^2 & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x & ; x > 1 \\ -3x^2 + 2x & ; x < 1 \end{cases}$$

چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ پس دامنه مشتق تابع برابر است با: $D_{f'} = \mathbb{R} - \{1\}$

$$O(0, 0), A(2, 4) \Rightarrow m_{AO} = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$$AO : y = 2x$$

$$A(2, 4), B(4, 0) \Rightarrow m_{AB} = \frac{4-0}{2-4} = -2$$

$$AB : y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 8 - 2x & ; 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq x < 2 \\ -2 & ; 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(2) = \text{وجود ندارد}$$

تابع g هم خطی است.

$$C(0, 4), D(4, 0) \Rightarrow m_{CD} = -1 \Rightarrow CD : y = 4 - x$$

$$\Rightarrow g(x) = 4 - x ; 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow g'(x) = -1$$

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

$$h'(1) = f'(1)g(1) + g'(1)f(1) = 2 \times 3 + (-1)(4) = 2$$

$$h'(2) = f'(2)g(2) + g'(2)f(2) = \text{وجود ندارد}$$

$$h'(3) = f'(3)g(3) + g'(3)f(3) = (-2)(1) + (-1)(4) = -6$$

ب

$$O(0, 0), A(2, 4) \Rightarrow m_{AO} = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$$AO : y = 2x$$

$$A(2, 4), B(4, 0) \Rightarrow m_{AB} = \frac{4-0}{2-4} = -2$$

$$AB : y - 0 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 8$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 8 - 2x & ; 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq x < 2 \\ -2 & ; 2 < x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(2) = \text{وجود ندارد}$$

تابع g هم خطی است.

$$C(0, 4), D(4, 0) \Rightarrow m_{CD} = -1 \Rightarrow CD : y = 4 - x$$

$$\Rightarrow g(x) = 4 - x ; 0 \leq x \leq 4 \Rightarrow g'(x) = -1$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$$

$$k'(1) = \frac{2 \times 3 - (-1)(4)}{3^2} = \frac{10}{9}$$

$$k'(2) = \text{وجود ندارد}$$

$$k'(3) = \frac{(-2)(1) - (-1)(4)}{(1)^2} = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + \frac{2}{\sqrt{x}} & ; x > 1 \\ 6x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} & ; -1 < x < 1 \\ 3 & ; x < -1 \end{cases}$$

چون $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ و $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ و $f'(0) = -\infty$ پس دامنه مشتق تابع f برابر است با:

$$D_{f'} = \mathbb{R} - \{0, \pm 1\}$$

گزینه ۲

جعبه ابزار:

$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تابع $f(x) = x([x] + [-x])$ روی $\mathbb{Z} - \{0\}$ مشتق ناپیوسته و مشتق ناپذیر است. این تابع در $x = 0$ پیوسته است. به روش زیر مشتق آن را می‌یابیم:

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x([x] + [-x]) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} [x] + [-x] = -1 \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$x \notin \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = x([x] + [-x]) = -x \Rightarrow f'(x) = -1$$

بنابراین مشتق تابع روی $\{0\} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Z})$ برابر -1 و در $\mathbb{Z} - \{0\}$ مشتق وجود ندارد.

چالش سؤال: تشخیص مشتق پذیری تابع‌های براکتی

جعبه ابزار: مشتق تابع مرکب، به این شکل است:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

شیب خط مماس بر نمودار $f \circ g$ در نقطه به طول $x = -2$ واقع بر آن، برابر با مشتق $f \circ g$ در این نقطه است. از طرفی:

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \Rightarrow (f \circ g)'(-2) = g'(-2) \cdot f'(g(-2))$$

$$g(x) = x^3 + 1 \text{ پس } g(-2) = -8 + 1 = -7 \text{ و در نتیجه:}$$

$$(f \circ g)'(-2) = g'(-2) \cdot f'(-7)$$

$$g'(x) = 3x^2 \text{ پس } g'(-2) = 3(-2)^2 = 12 \text{ همچنین } f(x) = x^2 - 2x \text{ و } f'(x) = 2x - 2 \text{ که از آن به دست می‌آید:}$$

$$f'(-7) = 2(-7) - 2 = -16$$

یعنی:

$$(f \circ g)'(-2) = 12 \times (-16) = -192$$

شیب خط مماس را پیدا کردیم. عرض نقطه به طول $x = -2$ واقع بر منحنی $f \circ g$ را هم پیدا کنیم:

$$(f \circ g)(-2) = f(g(-2)) = f(-7) = (-7)^2 - 2(-7) = 63$$

معادله خط مماس مورد نظر دارای شیب -192 و گذرا از نقطه $(-2, 63)$ به صورت زیر است:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 63 = -192(x - (-2)) \Rightarrow y = -192x - 321$$

عرض از مبدأ این خط، -321 می‌باشد.

جعبه ابزار:

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

از حد هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1-2h)}{h}$$

$$\underline{\underline{\text{HOP}}} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-f'(1-h) + 2f'(1-2h)}{1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -f'(x) + \lim_{x \rightarrow 1^-} 2f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

دقت کنید: مشتق چپ تابع در $x = 1$ به دلیل ناپیوستگی وجود ندارد ولی حاصل حد خواسته شده موجود است. به روش کلاسیک و تشریحی زیر توجه فرمایید:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1-h) - f(1-2h)}{h}$$

$$\xrightarrow[1-2h < 1]{1-h < 1} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{((1-h)^2 - 1) - ((1-2h)^2 - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{(1+h^2 - 2h) - (1+4h^2 - 4h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h - 3h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 - 3h = 2$$

جالب نبود؟!؟

چالش سؤال: تشخیص مشتق چپ و راست از روی تعریف

$$y = \frac{1}{f} \Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow \begin{cases} y'_+(a) = \frac{-f'_+(a)}{f^2(a)} = +\infty \\ y'_-(a) = \frac{-f'_-(a)}{f^2(a)} = -\infty \end{cases}$$

باتوجه به مشتق چپ و راست $y = \frac{1}{f}$ ، گزینه ۱ صحیح است. چون نیم‌ماس راست از زوایای کمتر از $\frac{\pi}{4}$ به $\frac{\pi}{4}$ نزدیک می‌شود، بنابراین شیب آن به $+\infty$ میل می‌کند ولی نیم‌ماس چپ از زوایای بیشتر از $\frac{\pi}{4}$ به $\frac{\pi}{4}$ نزدیک می‌شود که شیب آن به $-\infty$ میل می‌کند.

برای $x > ۴$ عبارت $x^۲ + ۳x$ مثبت است، پس تابع به صورت زیر خلاصه می شود.

$$f(x) = \begin{cases} |x - ۳| & ; x \leq ۴ \\ x^۲ + ۳x - ۲۷ & ; x > ۴ \end{cases}$$

این تابع در $x = ۴$ پیوسته است، زیرا:

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow ۴} f(x) = ۱$$

این تابع در $x = ۴$ نقطه‌ای گوشه‌ای دارد، زیرا $f'_+(۴) \neq f'_-(۴)$ ، همچنین در $x = ۳$ نقطه گوشه‌ای دارد. پس تابع $f(x)$ در نقاط $(۴, ۱)$ و $(۳, ۰)$ نقطه گوشه‌ای دارد و در نتیجه عرض نقاط گوشه‌ای تابع $۲f(x+۱) + ۲$ برابر است با:

$$y_۱ = ۲ \times ۱ + ۲ = ۴, \quad y_۲ = ۲ \times ۰ + ۲ = ۲$$

مجموع عرض‌ها برابر ۶ است.

با مشتق ترکیب توابع مواجه‌ایم:

$$g'(x) = (f(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱)))' \xrightarrow{\text{مشتق مرکب}} \underbrace{(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))}' f'(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))$$

برای محاسبه عبارت * داریم:

$$(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))' = ۴x^۳ - \underbrace{(f(x^۳ + x^۲ + ۱))}'_{**}$$

و حالا برای محاسبه عبارت ** داریم:

$$(f(x^۳ + x^۲ + ۱))' \xrightarrow{\text{مشتق مرکب}} (۳x^۲ + ۲x)f'(x^۳ + x^۲ + ۱)$$

پس عبارت * به این صورت است:

$$۴x^۳ - (۳x^۲ + ۲x)f'(x^۳ + x^۲ + ۱)$$

و لذا داریم:

$$g'(x) = (۴x^۳ - (۳x^۲ + ۲x)f'(x^۳ + x^۲ + ۱))f'(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))$$

حالا برای رسیدن به $g'(۰)$ ، با جایگذاری $x = ۰$ در رابطه اخیر داریم:

$$g'(۰) = (۰ - (۰)f'(۱))f'(۰ - f(۱)) = ۰$$

دقت دارید که $f'(۰) = -۲$ و $f'(۱) = ۱$ که در صورت سؤال داده شده، کاملاً سرکاری است.

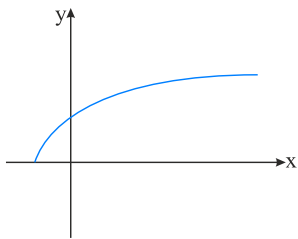
تابع $f(x) = x[x]$ در نقاط صحیح به غیر از $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است، پس f روی $\mathbb{Z} - \{0\}$ ناپیوسته است، ضمناً $f(x)$ در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است، برای x های غیر صحیح مشتق تابع $x[x]$ برابر $[x]$ است.

$$f(x) = x[x] \Rightarrow f'(x) = [x] ; x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

محاسبه آهنگ تغییر مشکل است، از طرفی تابع در نقطه $x = 2$ مشتق‌پذیر است و باتوجه به کوتاه بودن طول بازه، آهنگ متوسط خواسته شده بسیار نزدیک به آهنگ لحظه‌ای در نقطه $x = 2$ است.

$$f(x) = 3\sqrt{4x+1} \Rightarrow f'(x) = \frac{3 \times 4}{2\sqrt{4x+1}} \Rightarrow f'(2) = 2$$

پس پاسخ گزینه "۳" یا "۴" است. از طرفی باتوجه به نمودار تابع، آهنگ تغییر در این تابع نزولی است، پس پاسخ گزینه "۴" می‌باشد.



$$f(x) = 3\sqrt{4x+1}$$

نکته: اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع $f(x) = \sqrt[3]{g(x)}$ در ریشه‌های ساده معادله $g(x) = 0$ دارای مماس قائم است. در اینجا $x = 1$ و $x = b$ ریشه‌های داخل رادیکال هستند:

$$x^2 + ax + 2 = 0 \xrightarrow{\text{ریشه‌ها 1 و b هستند}} \begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها: } 1 \times b = 2 \\ \text{جمع ریشه‌ها: } 1 + b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -3 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$a - b = -3 - 2 = -5$$

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه "۱": به ازای $x > 0$ و $f'(x) > 0$ و $y > 0$ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد. به ازای $x < 0$ و $f'(x) < 0$ و $y > 0$ پس برابر نیست.

گزینه "۲": به ازای $x > 0$ و $f'(x) > 0$ و $y > 0$ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد. به ازای $x < 0$ و $f'(x) > 0$ و $y < 0$ پس برابر نیست.

گزینه "۳": به ازای $x > 0$ و $f'(x) > 0$ و $y > 0$ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد. به ازای $x < 0$ و $f'(x) > 0$ و $y > 0$ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

گزینه "۴": به ازای $x > 0$ و $f'(x) > 0$ و $y > 0$ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد. به ازای $x < 0$ و $f'(x) > 0$ و $y < 0$ پس برابر نیست.

راه حل اول:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - 2h) - f(x - \Delta h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - 2h) - f(x - \Delta h) - f(x) + f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x - 2h) - f(x)}{h} \right) - \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x - \Delta h) - f(x)}{h} \right)$$

برای محاسبه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - 2h) - f(x)}{h}$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$-2h = t \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{t}{2} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - 2h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{-\frac{t}{2}} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = -2f'(x)$$

برای محاسبه $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta h) - f(x)}{h}$ نیز به روش بالا عمل می‌کنیم:

$$-\Delta h = t \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{t}{\Delta} \\ h \rightarrow 0 \Rightarrow t \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{-\frac{t}{\Delta}} = -\Delta \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + t) - f(x)}{t} = -\Delta f'(x)$$

پس حالا عبارت داده شده برابر است با:

$$-2f'(x) - (-\Delta f'(x)) = xf'(x) = x \times 4 = 12$$

راه حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + mh) - f(a + nh)}{kh} = \left(\frac{m - n}{k} \right) f'(a)$$

بنابراین:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - 2h) - f(x - \Delta h)}{h} = \left(\frac{-2 - (-\Delta)}{1} \right) f'(x) = xf'(x) = 12$$

راه اول:

چون تابع $[-x]$ در $x_0 = 2$ ناپیوسته است، پس تابعی که در آن ضرب می‌شود باید عامل $(x - 2)^2$ داشته باشد (چرا؟) تا هم پیوسته و پس از آن مشتق پذیر شود.

بنابراین:

$$3(x - 2)^2 = 3x^2 + ax + b$$

بعد از صفر قرار دادن به دست می‌آید:

$$a = -12$$

$$b = 12$$

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطه مرزی $x = 1$ بررسی می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} |x - 2| = |1 - 2| = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[5]{x^2 - 4x} = \sqrt[5]{-3} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{در } x = 1 \text{ مشتق ناپذیر است} \Rightarrow \text{در } x = 1 \text{ ناپیوسته است}$$

نکته: تابع قدرمطلق در ریشه مرتبه یک داخل قدرمطلق مشتق ناپذیر است.

تابع در $x = 2$ مشتق ناپذیر است $\Rightarrow x = 2 \Rightarrow x - 2 = 0$

نکته: در توابع رادیکالی با فرجه فرد، تابع در ریشه‌های عبارت زیر رادیکال مشتق ناپذیر است (البته به شرطی که مرتبه توان آن ریشه از فرجه رادیکال بیشتر نباشد).

$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

تابع در $x = 0$ مشتق ناپذیر است. تابع در $x = 4$ نیز مشتق ناپذیر است ولی چون $x = 4$ در بازه $x \leq 1$ قرار ندارد قابل قبول نیست. پس تابع در $x = 3$ نقطه مشتق ناپذیر است.

پاسخ سؤالات ۱۱۲ تا ۱۱۵

۶ ۱۱۲

-۴ ۱۱۳

۴ ۱۱۴

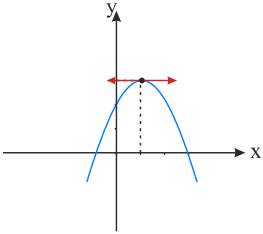
۲ ۱۱۵

پاسخ سؤال ۱۱۶

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a} = 1$ است، پس:

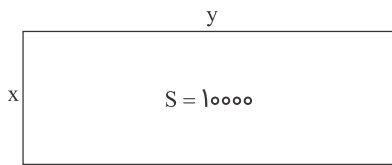
$$\text{عرض رأس} = f(1) = -1 + 2 + 2 = 3$$



باتوجه به نمودار، در $x = 1$ مماس بر تابع خطی افقی است، پس همین نقطه، نقطه بحرانی تابع است.

(ب) منفی، منفی

(پ) صفر



$$S = xy = 10000 \Rightarrow y = \frac{10000}{x}$$

$$\text{هزینه ساخت دیوارها} = C = 2(2y + 1x) = 4(y + 1x) = 4\left(\frac{10000}{x} + 1x\right)$$

$$\Rightarrow C(x) = 4\left(\frac{10000}{x} + 1x\right) = 16\left(\frac{2500}{x} + x\right)$$

$$C'(x) = 16\left(\frac{-2500}{x^2} + 1\right) = 16\left(\frac{x^2 - 2500}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow x = 50 \quad (x > 0)$$

x	0	50	+
C'(x)		-	+
C(x)	+	1600	+

پس باید ابعاد زمین $x = 50$ و $y = 200$ انتخاب شود تا هزینه حداقل شود. حداقل هزینه هم 1600 میلیون تومان یعنی یک میلیارد و ششصد میلیون تومان می‌باشد.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \text{ نقاط بحرانی}$$

x	-2	2	
f'	+	-	+
f			

$$f(2) = 8 - 24 + 4 = -12 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی : } (2, -12)$$

$$f(-2) = -8 + 24 + 4 = 20 \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی : } (-2, 20)$$

$$[-2, 2]$$

$$f'(x) = -4x^3 + a \xrightarrow{f'(1)=0} -4 + a = 0 \Rightarrow a = 4$$

$$f(1) = 2 \Rightarrow -1 + 4 + b = 2 \Rightarrow b = -1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

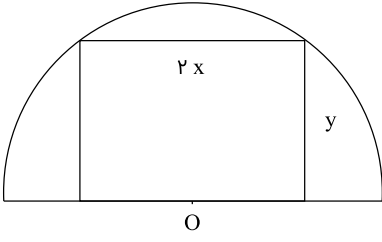
$$f(-1) = 9$$

$$f(1) = 5 \Rightarrow \text{max : } (3, 25), \quad \text{min : } (1, 5)$$

$$f(3) = 25$$

$$f'(2) = 0 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2bx \Rightarrow b = -3$$

$$f(2) = 1 \Rightarrow \lambda + (-12) + d = 1 \Rightarrow d = 5$$



$$y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow S(x) = 2x(\sqrt{16 - x^2})$$

$$S'(x) = \frac{32 - 4x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = 0 \quad x = \sqrt{4}, y = \sqrt{4}$$

طول $2\sqrt{4}$ ، عرض $\sqrt{4}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

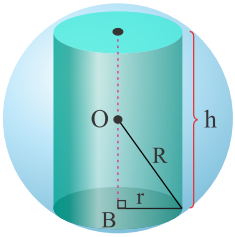
x	-1	+1
f'(x)	+	-
	↗	↘

اكيداً صعودى : $(-\infty, -1), (1, +\infty)$

اكيداً نزولى : $(-1, +1)$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

x	-3	1
f'	+	-
f	17	-15
	max	min

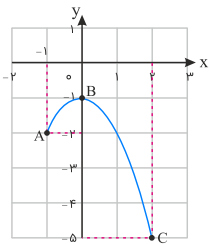


$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^2 h, \quad R = 6 \text{ cm}$$

$$r^2 = R^2 - OB^2 = R^2 - \left(\frac{h}{4}\right)^2 = 36 - \frac{1}{4}h^2$$

$$V = \pi h \left(36 - \frac{1}{4}h^2\right) \Rightarrow V'(h) = \pi \left(36 - \frac{3}{4}h^2\right) = 0$$

$$h^2 = 48 \Rightarrow h = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$



مشتق تابع $g(x) = -x^2 - 1$ به ازای صفر، برابر صفر است، یعنی $g'(0) = 0$. بنابراین نقطه $B(0, -1)$ نقطه بحرانی تابع g است. همچنین نقاط $A(-1, -2)$ و $C(2, -5)$ نیز نقاط بحرانی هستند.

الف) باتوجه به نمودار، تابع در $x = 1$ ماکزیمم نسبی و در $x = -1$ مینیمم نسبی دارد.
ب) ریشه‌های مشتق، نقاطی هستند که مماس در آن نقاط افقی است (مشتق در آن نقاط صفر است)، پس $x = -1$ و $x = 1$ نقاط بحرانی تابع هستند.
پ) طبق قضیه فرما چون تابع f مشتق‌پذیر است، پس نقاط بحرانی در ریشه‌های مشتق رخ می‌دهد.

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad (\text{نقاط بحرانی})$$

همچنین نقاط انتهایی بازه یعنی -1 و 3 نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس:

x	-1	0	1	3
$f(x)$	-4	1	0	28

پس $\max f(x) = 28$ و $\min f(x) = -4$ است.

$$P_{\text{مستطیل}} = 2(a+b) = 100 \Rightarrow a+b = 50 \Rightarrow b = 50 - a$$

$$S_{\text{مستطیل}} = ab = a(50 - a) = -a^2 + 50a$$

$$S = \max \Rightarrow S'(a) = 0 \Rightarrow 50 - 2a = 0 \Rightarrow a = 25 \Rightarrow b = 25$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	-1	2
f'	-	+
f	-9 min	11 max

$$f(-1) = -9 \text{ min}$$

$$f(2) = 11 \text{ max}$$

$$f(3) = 0$$

$$p = xy = 5x^2 - 10x \Rightarrow p'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -5 \end{cases}$$

گزینه ت صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطهٔ مینیمم، منفی است پس f' محور x ها را در ناحیهٔ $x < 0$ قطع می‌کند.

$$V(x) = (1 - 2x)^2 \times x = x - 4x^2 + 4x^3$$

$$V'(x) = 1 - 8x + 12x^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{6}$$

$x = \frac{1}{6}$ قابل قبول است.

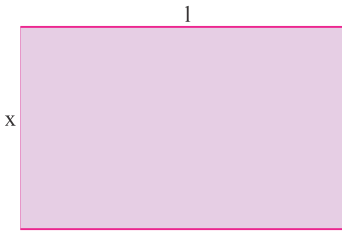
$$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow 0 = 2a + b \Rightarrow b = -2a$$

$$f(1) = 7 \Rightarrow 7 = a + b \Rightarrow a = -7, b = 14$$

$$h = \frac{300}{r^2}, S = \frac{1800}{r} + 3r^2$$

$$S' = \frac{-1800}{r^3} + 6r = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{300} \Rightarrow h = \sqrt[3]{300}$$

فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل زیر است:



$$S = x.l \quad (1)$$

برای آنکه S به صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را بر حسب x به دست آوریم:

$$P = 14 : \text{محیط مستطیل}$$

$$2(s + l) = 14 \Rightarrow x + l = 7 \Rightarrow l = 7 - x \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$S(x) = x(7 - x)$$

$$S(x) = -x^2 + 7x \quad ; x \in [0, 7]$$

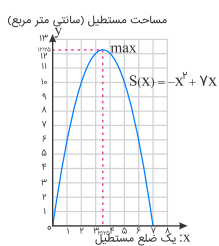
همچنین ابتدا و انتهای بازه یعنی 0 و 7 نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.

از آنجاکه S روی بازه $(0, 7)$ مشتق‌پذیر است، برای یافتن بقیه نقاط بحرانی آن کافی است ریشه معادله $S'(x) = 0$ را بیابیم.

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 7 = 0 \Rightarrow x = 3/5 \quad (\text{طول نقطه بحرانی تابع})$$

بنابراین نقاط به طول $3/5$ ، 7 و 0 نقاط بحرانی بازه $[0, 7]$ است.

جدول تغییرات تابع S در بازه موردنظر به شکل زیر است:



x	0	$3/5$	7
$S'(x) = -2x + 7$		+	-
$S(x) = -x^2 + 7x$	0	$12/5$ ماکزیمم مطلق	0

از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، $۱۲/۲۵$ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم‌اندازه و مساوی $۳/۵$ سانتی‌متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع $۳/۵$ سانتی‌متر داشته باشیم.

پاسخ سؤالات ۱۴۲ تا ۱۴۴

۱۴۲

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow 3(x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1, -3$$

x	$-\infty$	-۳	۱	$+\infty$
f'	+	۰	-	۰
یکنوایی f	$-\infty$	۱۷	-۱۵	$+\infty$

پس نقطه $(-3, 17)$ ماکزیمم نسبی و نقطه $(1, -15)$ مینیمم نسبی f است. دو نقطه $(-3, 17)$ و $(1, -15)$ نقاط بحرانی هستند.

۱۴۳

$$g'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$$

x	$-\infty$	-۱	۲	$+\infty$
g'(x)	-	۰	+	۰
یکنوایی g	$+\infty$	-۱۶	۱۱	$-\infty$

نقطه $(-1, -16)$ مینیمم نسبی و نقطه $(2, 11)$ ماکزیمم نسبی تابع g است. دو نقطه $(-1, -16)$ و $(2, 11)$ نقاط بحرانی هستند.

۱۴۴

$$h'(x) = -3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

x	$-\infty$	به ازای هر x	$+\infty$
h'(x)		-	
یکنوایی h	$+\infty$		$-\infty$

چون تابع $h(x)$ نزولی اکید است، پس اکسترمم نسبی ندارد. تابع نقطه بحرانی ندارد.

$$C'(x) = \frac{3(t^3 + 27) - 3t^2(3t)}{(t^3 + 27)^2}$$

$$C'(t) = 0 \Rightarrow 3(t^3 + 27) - 9t^3 = 0 \Rightarrow (t^3 + 27) - 3t^3 = 0 \Rightarrow t^3 = \frac{27}{2}$$

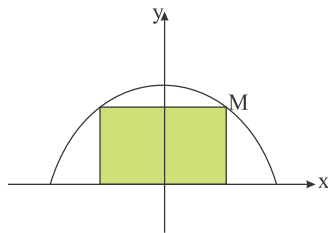
$$\Rightarrow t = \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \simeq 2/38 \text{ (ساعت)} \quad (\text{نقطه بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$ ، علامت مخرج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ در واقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است:

x	0	$\sqrt[3]{4/5}$	$+\infty$
$C'(x)$		-	+
$C(x)$	$+\infty$	≈ 1635 مینیمم مطلق C	$+\infty$

باتوجه به جدول، دیده می‌شود که $\frac{3}{\sqrt[3]{2}} \simeq 2/38$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.

نیم‌دایره را به صورت شکل زیر و به معادله $y = \sqrt{4 - x^2}$ در نظر می‌گیریم.



اگر نقطه M را روی نیم‌دایره در نظر بگیریم $M(x, \sqrt{4 - x^2})$ خواهد بود. برای مساحت مستطیل تابعی می‌نویسیم.

$$S(x) = 2x\sqrt{4 - x^2}, \quad D = [0, 2]$$

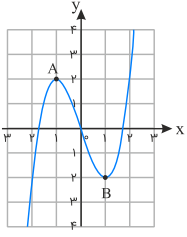
$$S'(x) = 2 \left(\sqrt{4 - x^2} + \frac{-2x}{2\sqrt{4 - x^2}}x \right) = \frac{2(4 - 2x^2)}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$S(0) = S(2) = 0, \quad S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4 \Rightarrow S_{\max} = 4$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

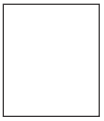
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
بازه		$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$	
علامت f'		+	-	+	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی	اکیداً نزولی	اکیداً صعودی	$+\infty$

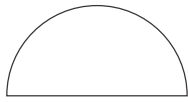


۱۴۸ دایره - مستطیل - بیضی

۱۴۹



عمودی (مستطیل)



افقی (نیم‌دایره)

$$O\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{b}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = (1, 1)$$

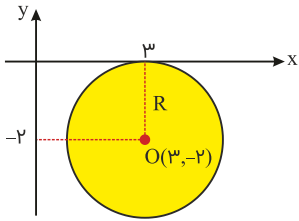
۱۵۰

پاسخ سؤالات ۱۵۱ تا ۱۵۲

۱۵۱ بیضی

۱۵۲ دایره

مطابق شکل شعاع دایره برابر با قدر مطلق عرض مرکز است؛ پس داریم: $R = |-۲| = ۲$



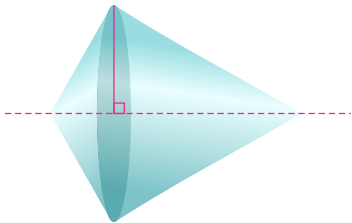
\Rightarrow معادله دایره: $(x - ۳)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۴$

$$O \begin{cases} \frac{-a}{۲} = ۳ \\ \frac{-b}{۲} = -۱ \end{cases} \quad r = \frac{1}{۲} \sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = ۲$$

به دست می‌آید:

$a^۲ + b^۲ - ۴c > ۰ \Rightarrow ۹ + ۲۵ - ۴a > ۰ \Rightarrow \frac{۱۷}{۲} > a$

شکل حاصل دو مخروط است که در قاعده مشترک‌اند.



شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$OA = r \Rightarrow r = \sqrt{(-۱ - ۲)^۲ + (۳ - ۱)^۲} = \sqrt{۱۳}$

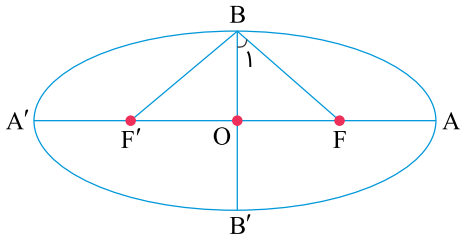
حال با داشتن مرکز و شعاع، معادله دایره را می‌نویسیم:

$(x + ۱)^۲ + (y - ۳)^۲ = ۱۳$

O(-۱, ۰) , R = ۲ **الف**

(۱, ۰) , (-۳, ۰) **ب**

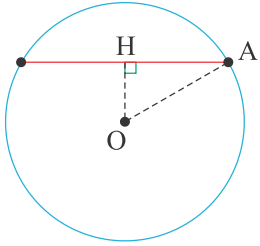




$$a = \sqrt{3}b \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 3b^2 - b^2 = 2b^2 \Rightarrow c = \sqrt{2}b$$

$$\tan B_1 = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{2}b}{b} = \sqrt{2} \Rightarrow B_1 = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \angle F B_1 F' = 2 \times 45^\circ = 90^\circ$$



$$OH = \frac{|2(-1) + 1(-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$AOH (H = 90^\circ) : OH^2 + AH^2 = OA^2 \Rightarrow (\sqrt{5})^2 + 2^2 = r^2$$

$$r = 3 \Rightarrow (x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

$$\frac{c}{a} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{S_{\triangle OBF'}}{S_{\triangle OAB'}} = \frac{\frac{1}{2}OB \times OF'}{\frac{1}{2}OB' \times OA} = \frac{\frac{1}{2}bc}{\frac{1}{2}ba} = \frac{c}{a} = \frac{2}{5}$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1 \Rightarrow O(1, -2), R = 1$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow O'(-3, -1), R' = 2$$

$$d = OO' = \sqrt{17}$$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند: $3 < \sqrt{17} < 5$

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 : O(-1, 2), r = 2$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = m^2 : O'(2, -1), r' = m$$

$$OO' = 3\sqrt{2}$$

$$OO' = r + r' \Rightarrow m + 2 = 3\sqrt{2} \Rightarrow m = 3\sqrt{2} - 2$$

$$C: x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3 \Rightarrow O(2, -3), r = \frac{\sqrt{16 + 36 + 12}}{2} = 4$$

$$C': (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = m \Rightarrow O'(2, -3), r' = \sqrt{m}$$

یعنی این دو دایره هم‌مرکز هستند. مساحت بین دو دایره برابر $S = \pi |r^2 - r'^2|$ است (زیرا نمی‌دانیم r بزرگ‌تر است یا r').

$$4\pi = \pi(|16 - m|) \Rightarrow \begin{cases} 16 - m = -4 \Rightarrow m = 20 \\ 16 - m = +4 \Rightarrow m = 12 \end{cases}$$

هر دو مقدار به‌دست‌آمده برای m قابل قبول است.

۱۶۵
الف

$$O\left(-\frac{a}{p}, -\frac{b}{p}\right) = (2, -1), R = \frac{1}{p} \sqrt{a^2 + b^2 - 4c} = 3$$

ب

خیر، زیرا:

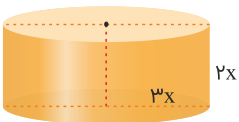
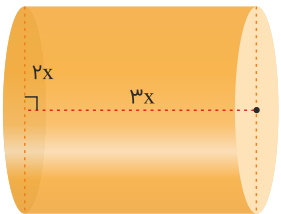
$$(0)^2 + (3)^2 + 2(3) - 4(0) - 4 \neq 0$$

۱۶۶

$$a^2 = b^2 + c^2 \xrightarrow{a=5, b=3} c = 4 \Rightarrow FF' = \lambda$$

۱۶۷

چون نسبت طول به عرض مستطیل، $\frac{3}{2}$ است، طول آن را $3x$ و عرض آن را $2x$ فرض می‌کنیم. اجسام حاصل، دو استوانه‌اند و مطابق شکل، داریم:



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi(2x)^2(3x)}{\pi(3x)^2(2x)} = \frac{2}{3}$$

۱۶۸
الف

$$c = \frac{4}{5}a \Rightarrow 9 + \frac{16}{25}a^2 = a^2 \Rightarrow a = 5, c = 4, FF' = \lambda, 2a = 10$$

$$A(1, -1), A'(-9, -1)$$

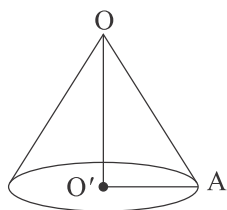
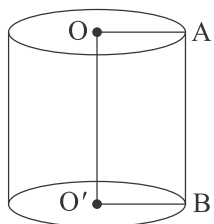
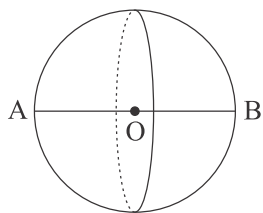
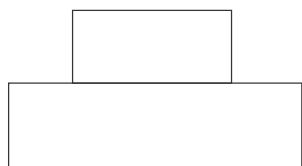
$$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} O(3, 1) \\ r = \sqrt{9 + 1 - 9} = 1 \end{cases}$$

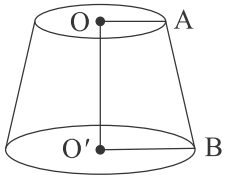
$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} O'(0, 0) \\ r' = 1 \end{cases}$$

$$|OO'| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

چون $|OO'| > r + r'$ است، پس دو دایره متخارج‌اند.

۱۷۰ دو مستطیل به هم چسبیده و روی هم مانند شکل.





۱۲۲ مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

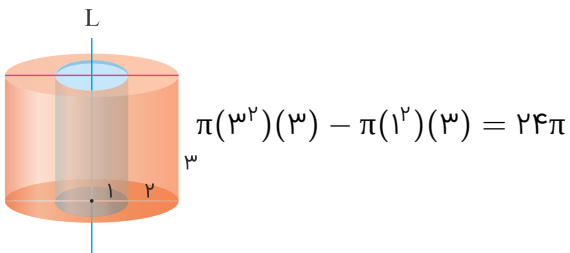
$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0 \Rightarrow O(1, -1), r = \sqrt{2}$$

$$OA = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \Rightarrow OA < r$$

پس نقطه داخل دایره قرار دارد.

۱۲۳

مطابق شکل، باید حجم ناحیه بین دو استوانه را بیابیم که برابر است با:



۱۲۴

مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس $O(2, -1)$. باتوجه به اینکه $AA' = 12$ و $BB' = 8$ ، بنابراین:

$$AA' = 2a = 12 \Rightarrow a = 6$$

$$BB' = 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

همچنین:

$$c^2 = 36 - 16 = 20 \Rightarrow c = 2\sqrt{5} \Rightarrow FF' = 2c = 4\sqrt{5}$$

از آنجا که خطوط $y = x + 1$ و $y = x - 3$ موازی هستند، مرکز دایره روی خطی که موازی این دو خط و دقیقاً وسط آنها قرار دارد، است. معادله خط مذکور عبارت است از $y = x + (\frac{1-3}{2})$ ، یعنی $y = x - 1$. برای یافتن مرکز دایره، دو خط $x + y = 2$ و $y = x - 1$ را تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x + 2 \end{cases} \Rightarrow x - 1 = -x + 2$$

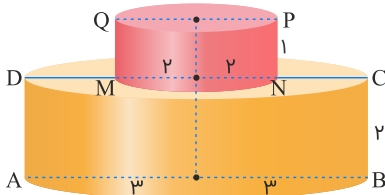
$$\Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow O(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

حال فاصله بین دو خط موازی $y = x + 1$ و $y = x - 3$ که برابر قطر دایره موردنظر است را پیدا می‌کنیم:

$$2r = \frac{|-3 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{2}$$

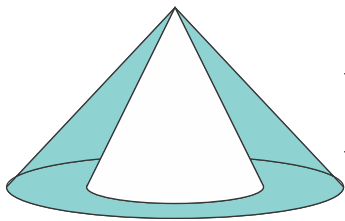
$$\Rightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 2$$

مساحت سطح مقطع در صورتی به حداکثر می‌رسد که صفحه، از محور هر دو استوانه بگذرد که در این صورت، داریم:



$$S_{\text{سطح مقطع}} = S_{ABCD} + S_{MNPQ} = 6 \times 2 + 4 \times 1 = 16$$

حجم حاصل، فضای بین دو مخروط هم‌ارتفاع به ارتفاع ۳ و شعاع‌های ۲ و ۳ است.



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h, \quad V_1 = \frac{\pi}{3}(3)^2(3) = 9\pi, \quad V_2 = \frac{\pi}{3}(2)^2(3) = 4\pi$$

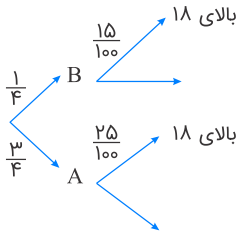
$$V_1 - V_2 = 9\pi - 4\pi = 5\pi$$

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|A)$$

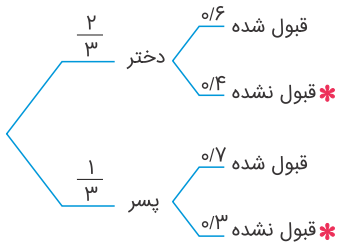
$$= \frac{3}{4} \times \frac{35}{100} + \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} = \frac{105 + 15}{400} = \frac{3}{10}$$

$$P(A \text{ از مدرسه } A) = \frac{3}{4}$$

$$P(B \text{ از مدرسه } B) = \frac{1}{4}$$



$$P(\text{معدل بالای ۱۸}) = \frac{1}{4} \times \frac{15}{100} + \frac{3}{4} \times \frac{25}{100} = \frac{15 + 75}{400} = \frac{90}{400} = \frac{9}{40}$$



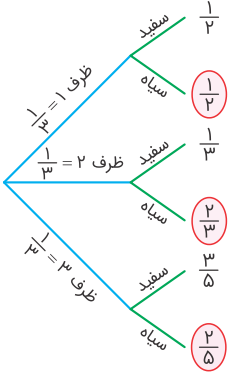
$$P(\text{قبول نشده}) = \frac{2}{3} \times \frac{0}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{0}{3} = \frac{0}{30} + \frac{0}{30} = \frac{0}{30}$$

پاسخ سؤال ۱۸۲

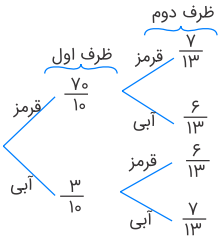
$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{100} = \frac{11}{200}$$

$$P(A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 3 = \frac{11}{16}$$

$$P(\text{هر دو قرمز}) = P(\text{هر دو آبی}) + P(\text{هر دو قرمز}) \\ = \frac{3}{8} \times \frac{5}{9} + \frac{5}{8} \times \frac{5}{9} = \frac{15 + 25}{72} = \frac{40}{72} = \frac{5}{9}$$



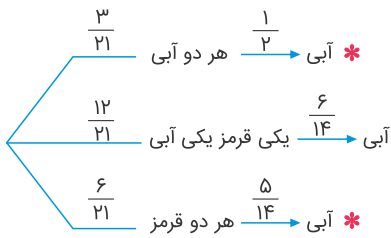
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{47}{90}$$



$$P(\text{قرمز بودن}) = \frac{7}{10} \times \frac{7}{13} + \frac{3}{10} \times \frac{6}{13} = \frac{49 + 18}{130} = \frac{67}{130}$$

پاسخ سؤال ۱۸۸

$$P = (0/45 \times 0/04) + (0/55 \times 0/06) = 0/051$$



$$\frac{\frac{3}{21} \times \frac{7}{14} + \frac{6}{21} \times \frac{5}{14}}{\frac{3}{21} \times \frac{7}{14} + \frac{12}{21} \times \frac{6}{14} + \frac{6}{21} \times \frac{5}{14}} = \frac{17}{17 + 24} = \frac{17}{41}$$

پیشامد انتخاب ظرفها را به ترتیب با A_1, A_2, A_3, A_4 و پیشامد خارج شدن مهره قرمز را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم:

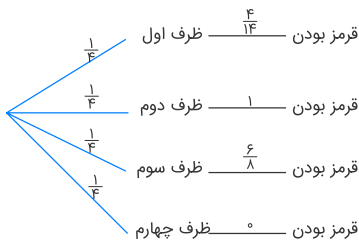
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = \frac{1}{4}$$

$$P(B|A_1) = \frac{4}{14}, \quad P(B|A_2) = 1, \quad P(B|A_3) = \frac{6}{8}, \quad P(B|A_4) = 0$$

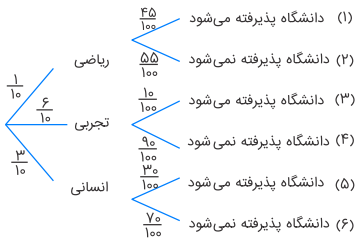
$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) + P(A_4)P(B|A_4)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{4}{14} + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{6}{8} + \frac{1}{4} \times 0 = \frac{57}{112}$$

با نمودار درختی به صورت زیر نیز می‌توان مسئله را حل کرد:



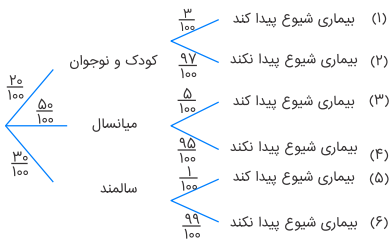
احتمال اینکه مهره قرمزی خارج شود و از ظرف اول باشد: $\frac{1}{4} \times \frac{4}{14}$
 احتمال اینکه مهره قرمزی خارج شود و از ظرف دوم باشد: $\frac{1}{4} \times 1$
 احتمال اینکه مهره قرمزی خارج شود و از ظرف سوم باشد: $\frac{1}{4} \times \frac{6}{8}$
 احتمال اینکه مهره قرمزی خارج شود و از ظرف چهارم باشد: $\frac{1}{4} \times 0$
 حال مجموع احتمال‌های بالا پاسخ مسئله می‌باشد.



$$\begin{aligned}
 P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{انسانی}) + P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{تجربی}) + P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{ریاضی}) \\
 = P(\text{انسانی}) \times P(\text{انسانی|پذیرفته شدن}) + P(\text{تجربی}) \times P(\text{تجربی|پذیرفته شدن}) \\
 + P(\text{ریاضی}) \times P(\text{ریاضی|پذیرفته شدن}) \\
 = \frac{1}{10} \times \frac{45}{100} + \frac{6}{10} \times \frac{10}{100} + \frac{3}{10} \times \frac{30}{100} = \frac{45}{1000} + \frac{60}{1000} + \frac{90}{1000} = \frac{195}{1000} = 0.195
 \end{aligned}$$

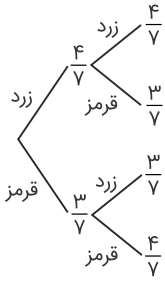
اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به ترتیب با A_1 ، A_2 و A_3 و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 P(B) &= P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + P(A_3)P(B|A_3) \\
 &= \frac{1}{2} \times \frac{90}{100} + \frac{1}{6} \times \frac{60}{100} + \frac{1}{3} \times \frac{85}{100} = \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$



احتمال موردنظر شاخه‌های ۱ و ۳ و ۵ است که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 P &= P(\text{شاخه ۱}) + P(\text{شاخه ۳}) + P(\text{شاخه ۵}) \\
 &= \frac{20}{100} \times \frac{3}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{5}{100} + \frac{30}{100} \times \frac{1}{100} = \frac{340}{10000} = 0.034
 \end{aligned}$$



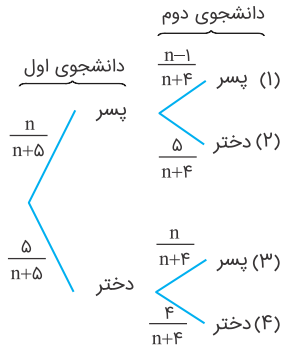
$$P(\text{هر دو زرد} \mid \text{همرنگ باشند}) = \frac{\frac{4}{7} \times \frac{3}{6}}{\frac{3}{7} \times \frac{4}{6} + \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}} = \frac{12}{12 + 12} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} P(4 \text{ آمدن تاس}) &= P(3 \text{ آمدن تاس} \mid 3 \text{ سکه رو}) \cdot P(3 \text{ آمدن تاس}) + P(4 \text{ آمدن تاس} \mid 3 \text{ سکه رو}) \cdot P(4 \text{ آمدن تاس}) \\ &+ P(5 \text{ آمدن تاس} \mid 3 \text{ سکه رو}) \cdot P(5 \text{ آمدن تاس}) + P(6 \text{ آمدن تاس} \mid 3 \text{ سکه رو}) \cdot P(6 \text{ آمدن تاس}) \\ &= \frac{1}{6} \left[\binom{3}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \binom{4}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \binom{6}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{8} + \frac{4}{16} + \frac{10}{32} + \frac{20}{64} \right] = \frac{1}{6} \frac{12 + 4 + 10 + 20}{16} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

اگر بخواهیم آن روی کارت که دیده‌ایم آبی باشد، ممکن است یکی از دو اتفاق زیر افتاده باشد:
یک کارت دو رو آبی (BB) برداشته‌ایم یا اینکه یک کارت یک رو آبی و یک رو قرمز برداشته‌ایم. (RB)، پس داریم:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(BB)P(B|BB) + P(RB)P(B|RB) \\ &= \frac{3}{10} \times 1 + \frac{5}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10} + \frac{5}{20} = \frac{11}{20} \end{aligned}$$

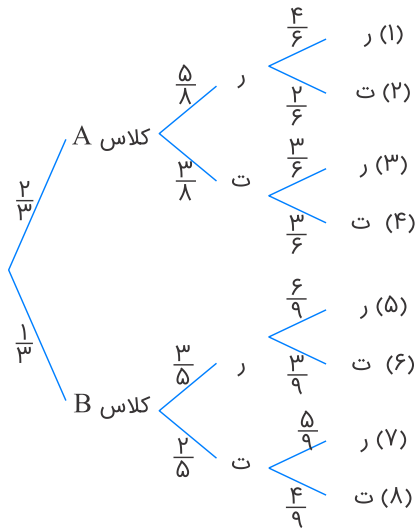
وقتی یک کارت یک رو آبی و یک رو قرمز است به احتمال $\frac{1}{2}$ روی آبی آن به طرف ما است.



$$P = P((۲) \text{ شاخه}) + P((۳) \text{ شاخه})$$

$$\Rightarrow \frac{10}{21} = \frac{n}{n+5} \times \frac{5}{n+4} + \frac{5}{n+5} \times \frac{n}{n+4} = \frac{10n}{n^2 + 9n + 20}$$

$$\Rightarrow n^2 + 9n + 20 = 21n \Rightarrow n^2 - 12n + 20 = 0 \Rightarrow n = \begin{cases} 2 & \text{غ.ق.ق} \\ 10 & \text{ق.ق} \end{cases}$$



$$P = P(۲ \text{ شاخه}) + P(۳ \text{ شاخه}) + P(۶ \text{ شاخه}) + P(۷ \text{ شاخه})$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} \times \frac{5}{9} = \frac{437}{1080}$$

پیشامد زن بودن را با Z ، مرد بودن را با M و باسواد بودن را با B نمایش می‌دهیم.

$$\frac{n(Z)}{n(M)} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow n(Z) = \frac{۴}{۳}n(M) \Rightarrow P(Z) = \frac{۴}{۳}P(M)$$

$$P(Z) + P(M) = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{۳}P(M) + P(M) = ۱$$

$$\Rightarrow P(M) = \frac{۳}{۷}, P(Z) = \frac{۴}{۷}$$

$$P(Z \cup B) = P(Z) + P(B) - P(Z \cap B)$$

$$= \frac{۴}{۷} + \left(\frac{۴}{۷} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۶۰}{۱۰۰} \right) - \frac{۴}{۷} \times \frac{۴۰}{۱۰۰}$$

$$= \frac{۴}{۷} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۲۰+۹}{۳۵} = \frac{۲۹}{۳۵}$$