بچه‌ی نوتروفیلی من ، سلام 💜

به رسم همیشه که توی این مسیر کنارت بودیم ، این بار هم یک مجموعه سوال برای شب امتحانت آماده کردیم که با کار کردنشون تسلطت رو افزایش بدی و به امید خدا بری واسه نمره‌ی ۲۰ 😍
جان دلم نترسی از سختی امتحانات اگه به کتاب درسی کاملا مسلط باشی و این مجموعه سوال رو هم به عنوان مکمل حل کنی مطمئن باش نمره‌ت بهتر از چیزی که فکرش رو کنی میشه ✌️
یادت باشه امتحانات نهایی رو جدی رو بگیری چون با نمره ی خوب این امتحانات کار کنکورت رو خیلی آسون میکنی
یه حرف دلی هم دارم با بچه هایی که کمی دیرتر شروع کردن ...
مبادا خودت رو ببازی بچه‌ی من امید دارم بهت و میدونم اگه خوب بخونی قطعا میتونی نمره ی عالی بگیری پس پرقدرت بریم واسه ترکوندن اولین امتحان 💪
یادت نره این فایل رو برای اون دوستت که بهش احتیاج داره بفرستی و جزئی از این زنجیره ی عشق و مهربونی باشی 🩷

پ ن: مرسی که با وجود درگیری‌های ذهنی و عدم تمرکزی که ماجرای کارت ورود به جلسه براتون به همراه داشت ، همچنان قوی موندی و ادامه میدی 💜
به امید روزی که اینجا به عنوان همکار کنار خانواده‌ی بزرگ نوتروفیل باشی

دوست همیشگی تو ، نوتروفیل

روش مطالعه :

قبل از هر چیزی یادت باشه از ریاضی نترسی !
ریاضی نهایی نسبت به کنکور خیلی ساده تره و اگه خوب بخونی میتونی ازش نمره ی خوب بگیری .
بهترین روش برای خوندن درس ریاضی اینه اول بری سراغ یه درسنامه‌ی خلاصه و در عین حال کامل .
بعد تمام تمارین کتاب درسی رو مسلط بشی . حالا وقتشه بری سراغ یه مجموعه نمونه سوال خفن که همه‌ی تیپ سوالات رو پوشش بده و با حل کردن نمونه سوال کاملا به مطلب مسلط بشی .
مرور فرمول ها و نکات مهم هم یادت نره

سوالات مربوط به هر فصل از این شماره ها شروع میشه

فصل۱ : ۱
فصل۲ : ۱۹
فصل۳ : ۴۰
فصل۴ : ۶۲
فصل۵ : ۱۱۲
فصل۶ : ۱۴۸
فصل۷ : ۱۷۸

بارم بندی ریاضی دوازدهم تجربی

فصل	محدوده فصل	نوبت اول	نوبت دوم	شهریور / دی
۱	کل	۷	۲/۵	۳
۲	کل	۵	۲/۵	۳
۳	کل	۵	۲/۵	۳
۴	تا ص ۷۶	۳	۱	۵
	ص۷۷ به بعد		۳/۵	
۵	کل		۳	۳
۶	کل		۳	۲/۵
۷	کل		۳	۱/۵

ریاضی دوازدهم (تجربی)

۱ اگر $f=\{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$ و $g=\{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$ تابع fog را محاسبه کنید.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

۲ تابع $f(x)$ در بازه شامل a و b صعودی است، اگر $f(a)\leq f(b)$ آنگاه: $a\leq b$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

الف تابع $y=۲x(۱-۳x^۲)+۱$ یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ سوم است.

ب نمودار تابع $y=x^۲$ در بازهٔ $(۰,۱)$ پایین‌تر از نمودار تابع $y=x^۳$ است.

پ هر تابع یکنوا، یک‌به‌یک است.

۴ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x+۱)^۳-۴$ مفروض است.

الف نمودار تابع f را به کمک نمودار تابع $y=x^۳$ رسم کنید.

ب باتوجه‌به نمودار تابع f، مشخص کنید چرا این تابع وارون‌پذیر است.

پ ضابطهٔ تابع $f^{-۱}$ را به دست آورید.

۵ ابتدا نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ را رسم نموده سپس با استفاده از آن نمودار تابع $g(x)=-۲f(x)-۱$ را رسم کنید.

۶ دو تابع $f(x)=۳x^۲-۱$ و $g(x)=\frac{x}{x^۲-۴}$ داده شده‌اند.

الف ضابطهٔ تابع gof و دامنهٔ gof را با استفاده از تعریف تعیین کنید.

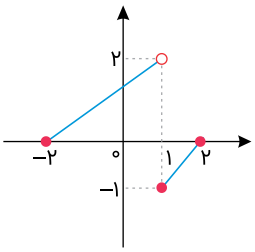
۷ اگر $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=۲x^۲-۱$ باشد:

الف دامنهٔ تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید.

ب ضابطهٔ تابع fog را بنویسید.

۸ ابتدا نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[۳]{x+۱} & ;x\leq ۰\\ x & ;۰<x<۱\\ ۲^{۱-x} & ;x\geq ۱\end{cases}$ را رسم کنید. سپس بازه‌هایی که تابع در آن بازه‌ها اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی هستند را تعیین کنید.

۹ نمودار $y=f(x)$ مطابق شکل زیر است، نمودار $y=-f(۲x-۱)+۱$ را رسم کنید. (مراحل ترسیم بیان شود.)



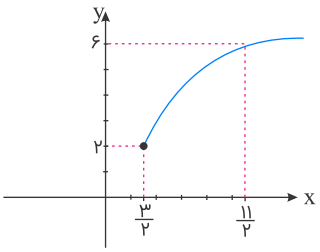
۱۰ ضابطهٔ تابع وارون $f(x) = -۵ - \sqrt{۳x + ۱}$ را به‌دست آورید.

۱۱ نمودار تابع $y = |۲x - ۴|$ را با استفاده از تعریف قدرمطلق رسم کنید.

۱۲ اگر $f(x - ۲) = x^۲ + ۴x$ ضابطه $f(۲x + ۱)$ را حساب کنید.

۱۳ ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + ۲ & ; x \geq ۰ \\ ۱ - x^۲ & ; x < ۰ \end{cases}$ را به دست آورید.

۱۴ نمودار زیر از انتقال‌های عمودی و یا افقی و همچنین انبساط یا انقباض افقی تابع $y = \sqrt{x}$ به دست آمده است. ضابطهٔ آن را بیابید.

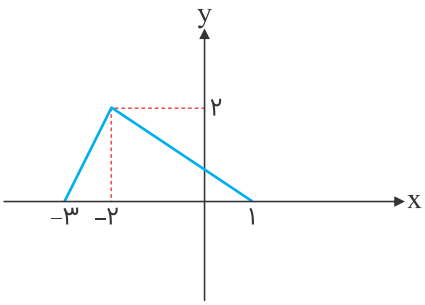


۱۵ الناز می‌خواهد از فروشگاه بهار یک لپ‌تاپ با قیمت بیش از دو میلیون تومان خریداری نماید. این فروشگاه در ماه رمضان مسابقه‌ای برگزار کرده و به برندگان کارت تخفیف ۲۰ درصدی داده است و الناز نیز در این مسابقه برنده شده است. همچنین این فروشگاه روزهای پنج‌شنبه به مشتریان خود در خریدهای بیش از یک و نیم میلیون تومان، ۲۰۰ هزار تومان تخفیف نقدی می‌دهد. با استفاده از تابع مرکب نشان دهید کدام‌یک از حالت‌های الف یا ب به نفع الناز است؟

الف) اول کارت تخفیف ۲۰ درصدی و بعد تخفیف نقدی را استفاده کند.

ب) اول تخفیف نقدی را استفاده کند و بعد کارت تخفیف را ارائه دهد.

۱۶ اگر $f(x) = \sqrt{x + |x|}$ و نمودار $g(x)$ به‌صورت زیر باشد، دامنهٔ تابع $y = fog(\frac{x}{۳})$ کدام است؟



۱) $[-۳, ۱]$

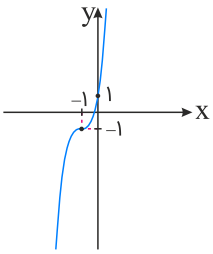
۲) $[-۹, ۳]$

۳) $[۰, ۱]$

۴) $[۰, ۳]$

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۷ شکل زیر نمودار تابع $f(x) = ax^{۳} + bx^{۲} + cx + d$ می‌باشد. حاصل‌ضرب مقادیر a، b، c و d کدام است؟



۱) ۴۸

۲) ۵۶

۳) ۶۴

۴) ۷۲

۱۸ بُرد تابع $y = ۲^{x-[x]} - ۲^{[x]-x}$ کدام است؟

۱) $[۱, ۲)$

۲) $[۰, \frac{۳}{۲})$

۳) $[۱, \frac{۳}{۲}]$

۴) $[۰, ۲)$

درستی یا نادرستی هریک از احکام زیر را مشخص کنید:

۱۹ اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $x \pm T \in D_f$ کوچک‌ترین عدد T با خاصیت $f(x \pm T) = f(x)$ را دوره تناوب f می‌نامیم.

۲۰ دوره تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $f(x) = ۲\sin(۲x) - ۳$ را محاسبه کنید.

۲۱ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف دورهٔ تناوب تابع $y = ۵\cos\frac{x}{۲} + ۱$ برابر با ۴π است.

ب تابع تانژانت در بازهٔ $(-\pi\ ,\ \pi)$، تابعی صعودی است.

۲۲ اگر α زاویه‌ای در ربع دوم باشد که $\sin\alpha = \frac{۳}{۵}$، مقدار $\sin ۲\alpha$ را محاسبه کنید.

۲۳ مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۱ - ۲\sin(\frac{-\pi}{۳}x)$ را به دست آورید.

۲۴ دورهٔ تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -۳\cos ۲\pi x + ۱$ را به دست آورید.

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۲۵ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y = \tan x$ به‌صورت $\{x \in \mathbb{R} | x \neq \ldots\ldots\}$ است.

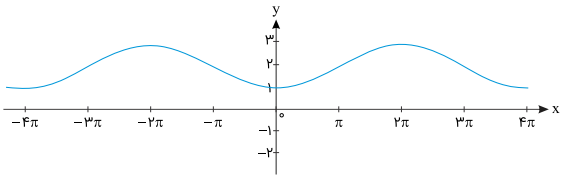
درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۲۶ مینیمم تابع $y = -۳\cos\pi x + ۲$ برابر با یک است.

۲۷ می‌توان بازه‌ای یافت که تابع تانژانت در آن نزولی باشد.

۲۸ فرض کنید $\tan\alpha = -\frac{۱}{۲}$ و α زاویه‌ای منفرجه باشد، عبارت $\cos ۲\alpha$ را محاسبه کنید.

۲۹ تابع مثلثاتی مربوط به نمودار زیر را بنویسید.



معادلات مثلثاتی زیر را حل کنید.

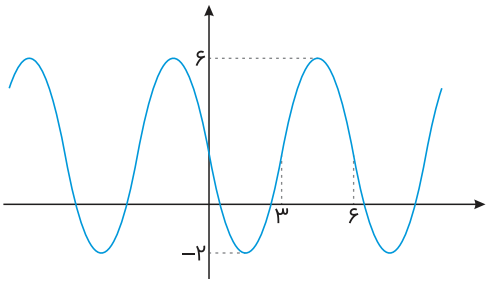
۳۰ $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$

۳۱ $\cos ۲x - \sin x = ۰$

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را بیابید.

۳۲ $\sin\frac{\pi}{۸} \times \cos\frac{\pi}{۸}$

۳۳ نمودار زیر مربوط به تابعی با ضابطهٔ $y = a\sin(bx) + c$ است. باتوجه‌به نمودار، ضابطهٔ آن را بنویسید.



۳۴ معادله مثلثاتی $۲\sin x\cos x = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$ را حل کنید.

۳۵ معادلهٔ مثلثاتی $\cos ۳x - \cos x = ۰$ را حل کنید.

۳۶ مقدار $\sin ۱۵^\circ$ را بیابید.

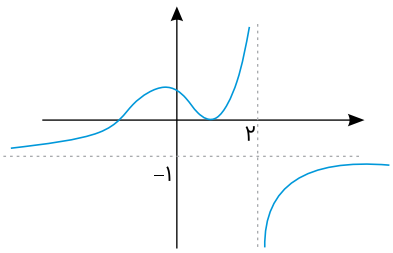
۳۷ اگر $\sin\alpha = -\frac{۱۲}{۱۳}$ و α در ربع چهارم باشد، مقادیر $\sin\frac{\alpha}{۲}$ و $\tan\frac{\alpha}{۲}$ را محاسبه کنید.

۳۸ مقدار کسر $A = \frac{\sqrt{\tan ۲x} - \sqrt{\cot ۲x}}{\sqrt{\tan ۲x} + \sqrt{\cot ۲x}}$ به ازای $x = \frac{\pi}{۲۴}$ چقدر است؟

۳۹ اگر $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$ و داشته باشیم: $\cot x - \tan x = -۲$، مقدار $\sin x - \cos x$ را محاسبه کنید.

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۴۰ نمودار تابع $y = f(x)$ مطابق شکل زیر است، حاصل حدود زیر را بیابید.



الف

$\lim_{x \to -\infty} f(x)$

ب

$\lim_{x \to ۲^-} f(x)$

پ

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$

جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۴۱ حاصل حد $\lim_{x \to +\infty} \frac{۳x + ۵}{x - ۲}$ برابر با ..... است.

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

۴۲ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = ۲x^۳ - x^۲ + ۱$ بر $x - ۱$ برابر ۲ است.

حدهای زیر را محاسبه کنید.

۴۳

$\lim_{x \to ۴} \frac{x^۲ - ۱۶}{\sqrt{x + ۱۲} - x}$

۴۴

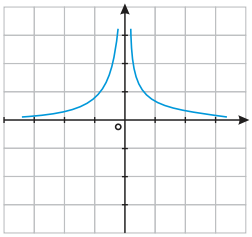
$\lim_{x \to ۰^+} \frac{۱}{۱ - \cos x}$

۴۵

$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x - ۱)(x - ۲)(۴ - x)}{۲x^۳ + ۱}$

جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.

۴۶ باتوجه‌به شکل زیر حد تابع $f(x) = \frac{۱}{|x|}$ در نقطهٔ $x = ۰$ برابر است با ..... .



حدهای زیر را محاسبه کنید.

۴۷ $$\lim_{x \to ۵} \frac{۵ - x}{\sqrt{۲x - ۱} - ۳}$$

۴۸ $$\lim_{x \to \pi^-} \frac{۲}{۱ + \cos x}$$

۴۹ $$\lim_{x \to -\infty} \frac{۳x + \sqrt{x^۲ + x + ۱}}{۷ + ۵x}$$

۵۰ مقدار k را چنان بیابید که چندجمله‌ای $p(x) = ۲x^۳ - kx^۲ - x + ۳$ بر $x + ۱$ بخش‌پذیر باشد.

حاصل هر کدام از حدهای زیر را به‌دست آورید.

۵۱ $$\lim_{x \to -۱} \frac{\sqrt[۳]{x} + ۱}{x^۲ + ۳x + ۲}$$

۵۲ $$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} \tan x$$

۵۳ $$\lim_{x \to -\infty} \frac{-۶x^۳ + ۷x - ۹}{۲x^۳ - ۴x^۲ + x}$$

حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۵۴ $$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{۴x^۲ - ۵x + ۳} - ۲x + ۷}{۳x - ۵}$$

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۵۵ اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x) = ۳x^۲ + mx + ۲m + ۱$ بر $x - ۲$ برابر ۳ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x) = mx^۲ - mx + ۳$ بر $x + ۲$ را تعیین کنید.

حدهای زیر را محاسبه کنید.

۵۶ $$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ - ۴}{۳ - \sqrt{x + ۷}}$$

۵۷ $$\lim_{x \to ۳^+} \frac{x + ۱}{۹ - x^۲}$$

۵۸ $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{۱۰x^۲ + \sqrt{x^۲ + x}}{۲x^۳ + ۱}$$

حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

۵۹ $$\lim_{x \to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۲ - ۱} + x^۲ - ۴x + ۳}{\sqrt{x^۳ - ۱} + x^۲ + ۲x - ۳}$$

حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

۶۰ $$\lim_{x \to \frac{۳\pi}{۲}} \frac{۱ + \sin x}{\cos x}$$

۶۱ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف $$\lim_{x \to ۲} \frac{۲x^۲ - ۳x - ۲}{\sqrt{x + ۲} - ۲}$$

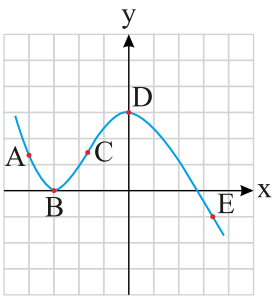
۶۲ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = ۲t^۳ + t - ۱$ است،

الف سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $[۱, ۲]$ را محاسبه کنید.

ب سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t = ۲$ چقدر است؟

۶۳ آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x) = \sqrt{x + ۵}$ را وقتی تغییر از $x = -۱$ به $x = ۴$ تغییر می‌کند به دست آورید.

۶۴ باتوجه‌به نمودار زیر:



الف در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع منفی است؟

ب در کدام نقطه مقدار تابع و مقدار مشتق تابع برابر صفر است؟

پ در بین نقاط داده شده کدام نقطه بیشترین شیب را دارد؟

ت شیب نقاط D و A را باهم مقایسه نمایید.

۶۵ تابع $f(x) = x^{۲} + ۵x - ۶$ داده شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی‌که متغیر از $x = ۱$ به $x = ۴$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

مشتق توابع زیر را به دست آورید: (ساده کردن مشتق الزامی نیست.)

۶۶ $y = (x^{۳} + \frac{۱}{x})$

۶۷ $y = ۳(۲x - ۵)^{۴} + \sqrt[۳]{x}$

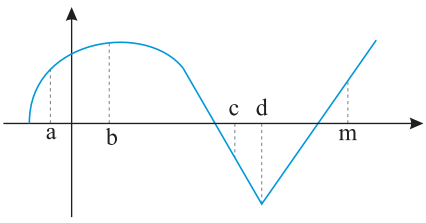
۶۸ یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + t^{۲}$ گرم است. آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری در لحظهٔ $t = ۹$ چقدر است؟

۶۹ معادلهٔ حرکت متحرکی به‌صورت $f(t) = \frac{۱}{۲}t^{۲} - ۳t + ۱$ می‌باشد.

الف سرعت متوسط این متحرک را در فاصلهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = ۴$ به دست آورید.

ب آهنگ آنی تغییرات $f(t)$ را در $t = ۷$ بیابید.

۷۰ باتوجه‌به نمودار f به سوالات زیر پاسخ دهید.

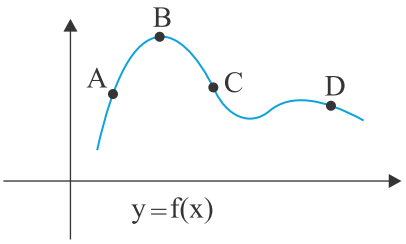


الف طول نقطه‌ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید.

ب طول نقطهٔ "گوشه‌ای" را بنویسید.

پ طول نقطه‌ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است، را بنویسید.

۷۱ باتوجه‌به نمودار زیر:



الف علامت شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقاط مشخص‌شده را بنویسید.

ب علامت $f'(x_A) + f'(x_D)$ چیست؟

۷۲ گوشه‌ای بودن نقطه‌ای به طول $x = ۰$ در تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x > ۰ \\ -x^۲ & ; x \leq ۰ \end{cases}$ را بررسی کنید.

در جاهای خالی عبارت مناسب بنویسید.

۷۳ اگر $f(x) = ۵x^۳ - ۴x^۲ - ۳x$، مقدار $f''(-۱)$ برابر ..... است.

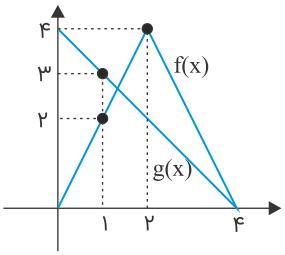
۷۴ تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ + x & x \leq ۱ \\ x + ۱ & x > ۱ \end{cases}$ را در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری تابع را در نقطهٔ $x = ۱$ بررسی کنید.

۷۵ تابعی با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۳x - ۶}{x^۲ + ۲}$ را در نظر بگیرید:

الف آهنگ تغییر متوسط در بازه $[-۲, ۰]$ را به دست آورید.

ب آهنگ تغییر لحظه‌ای در $x = -۱$ را به دست آورید.

۷۶ نمودار تابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید. اگر $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(۱)$ را بیابید.



۷۷ تابع $f(x) = \begin{cases} x^۲ & ; x \geq ۰ \\ ۲x + ۱ & ; x < ۰ \end{cases}$ داده شده است؛

الف نشان دهید که $f'(۰)$ وجود ندارد.

ب ضابطهٔ تابع مشتق را بنویسید.

پ نمودار تابع f' را رسم کنید.

۷۸ مشتق تابع $f(x) = \sqrt{۶ - ۲x}$ را به دست آورده و دامنه مشتق پذیری آن را مشخص کنید.

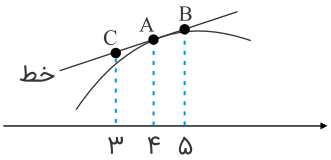
۷۹ آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن، برای دایره‌ای به محیط ۳π را بیابید.

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۸۰ با استفاده از تعریف، مشتق تابع $f(x) = x|x^۲ - ۲x|$ را در نقطهٔ $x = ۲$ در صورت وجود به دست آورید.

۸۱ با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع $f(x) = \frac{۲}{x}$ را در $x = ۳$ حساب کنید.

۸۲ برای تابع f در شکل زیر داریم $f'(۴) = ۱/۵$ و $f(۴) = ۲۴$. باتوجه‌به شکل، مختصات نقاط A، B و C را بیابید.



۸۳ در تابعی با ضابطهٔ $f(x) = \frac{۳۶}{x^۲}$ آهنگ متوسط تابع در بازهٔ $[۲, ۳]$ چقدر از آهنگ لحظه‌ای آن در $x = \sqrt[۳]{۱۲}$ بیشتر است؟

مشتق توابع زیر را به دست آورید (ساده کردن مشتق الزامی نیست).

۸۴ $f(x) = (۵x^۳ - x)^۹(\sqrt{۲x + ۱})$

۸۵ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۲ - x + ۳$ داده‌شده است. آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی از $x_۱ = ۱$ به $x_۲ = ۵$ تغییر می‌کند، تعیین کنید.

۸۶ مشتق تابع $f(x) = (۱ + \sqrt{x})^۳$ را به دست آورید و دامنهٔ مشتق‌پذیری آن را مشخص کنید.

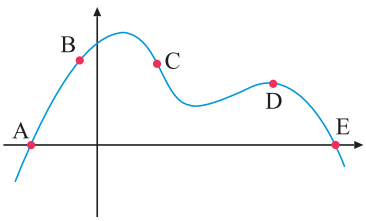
۸۷ اگر f و g توابع مشتق‌پذیر باشند و $f(۲) = ۳$، $f'(۲) = ۱$، $g(۲) = -۳$ و $g'(۲) = ۲$، مقادیر $(fg)'(۲)$ و $(f + g)'(۲)$ را به دست آورید.

۸۸ مشتق‌پذیری تابع $f(x) = |x^۲ - ۴|$ را در $x = ۲$ بررسی کنید.

۸۹ اگر $f(x) = x[x]$ باشد، مقدار $f'_+(۰)$ و $f'_-(۰)$ چقدر است؟

۹۰ یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t) = \sqrt{t} + ۲t$ گرم است. در چه لحظه‌ای، آهنگ رشد جرم تودهٔ باکتری برابر آهنگ تغییر متوسط آن در بازهٔ زمانی $۰ \le t \le ۴$ می‌شود؟

۹۱ از بین نقاط مشخص‌شدهٔ A، B، C، D و E روی نمودار زیر، در کدام نقطه:



الف) مقدار تابع صفر ولی مقدار مشتق آن مثبت است؟

ب) مقدار تابع مثبت ولی مقدار مشتق آن منفی است؟

۹۲ اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند و $f'(۱) = ۳$ و $g'(۱) = ۵$، مقدار $(۳f + ۲g)'(۱)$ را به دست آورید.

مشتق توابع زیر را حساب کنید. (ساده کردن الزامی نیست)

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

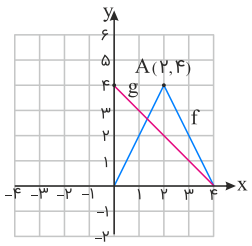
۹۳ $g(x) = \left(\frac{۳x^۲ - x}{x^۲ + ۱}\right)^{-\frac{۱}{۳}}$

۹۴ با استفاده از تعریف مشتق، معادلهٔ خط مماس بر منحنی تابع $f(x) = -x^۲ + ۱۰x$ را در نقطهٔ $A\,(۲, f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

۹۵ محیط هر دایره ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره ای به مساحت ۲π حساب کنید.

۹۶ تابع $f(x) = x^۲|x - ۱|$ مفروض است. این تابع را بدون قدر مطلق نوشته و ضابطه و دامنهٔ تابع مشتق، یعنی f' را به دست آورید.

۹۷ نمودار توابع f و g را در شکل زیر در نظر بگیرید.

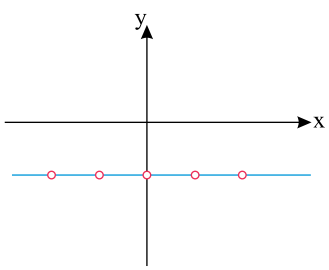


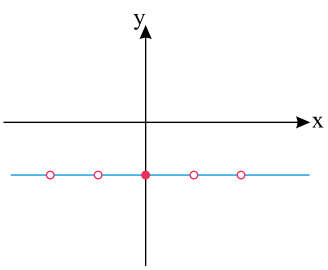
الف اگر $h\,(x) = f\,(x).g\,(x)$ ، مطلوب است $h'\,(۱)$، $h'\,(۲)$ و $h'\,(۳)$.

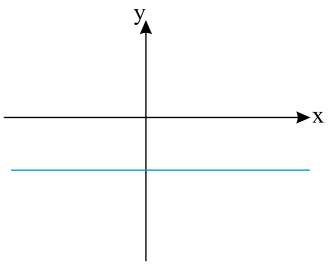
ب اگر $k\,(x) = \frac{f\,(x)}{g\,(x)}$ مطلوب است $k'\,(۱)$، $k'\,(۲)$ و $k'\,(۳)$.

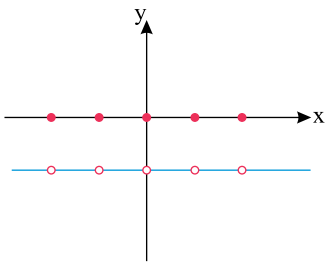
۹۸ تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۴\sqrt{x} + x^۲ & ; x > ۱ \\ ۲x^۳ - ۳\sqrt[۳]{x} + ۶ & ; -۱ \le x \le ۱ \\ ۳x + ۱۰ & ; x < -۱ \end{cases}$ مفروض است. ضابطه و دامنهٔ تابع مشتق f، یعنی f' را به دست آورید.

۹۹ نمودار تابع مشتق $f(x) = x([x] + [-x])$ به کدام شکل است؟

(۱)


(۲)


(۳)


(۴)


نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

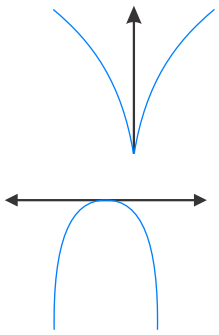
۱۰۰ اگر $f(x) = x^۲ - ۲x$ و $g(x) = x^۳ + ۱$ باشد، عرض از مبدأ خط مماس بر نمودار تابع fog در نقطه‌ای به طول -۲ واقع بر آن، کدام است؟

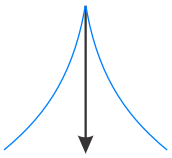
۱) ۳۱
۲) ۳۲۱
۳) -۳۱
۴) -۳۲۱

۱۰۱ اگر $f(x) = \begin{cases} ۳x + ۱ & ; x \geq ۱ \\ x^۲ - ۱ & ; x < ۱ \end{cases}$ آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{h \to ۰^+} \dfrac{f(۱ - h) - f(۱ - ۲h)}{h}$ کدام است؟

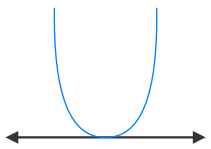
۱) وجود ندارد
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۲

۱۰۲ اگر تابع f در $x = a$ پیوسته باشد $(f(a) \neq ۰)$ و $f'_+(a) = -\infty$ و $f'_-(a) = +\infty$، نمودار تابع $y = \dfrac{۱}{f(x)}$ در همسایگی $x = a$ کدام است؟

۱)


۲)


۳)

۴)


۱۰۳ اگر $f(x) = \begin{cases} |x - ۳| & ; x \leq ۴ \\ |x^۲ + ۳x| - ۲۷ & ; x > ۴ \end{cases}$، مجموع عرض نقاط گوشه‌ای $y = ۲f(x + ۱) + ۲$ کدام است؟

۱) ۲
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۶

۱۰۴ اگر $g(x) = f(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))$ باشد، درصورتی‌که $f'(۰) = -۲$ و $f'(۱) = ۱$، $g'(۰)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) $f'(-۱)$
۳) $f'(-۲)$
۴) $f'(۲)$

۱۰۵ اگر $f(x) = x[x]$ باشد، $f'(x)$ و $D_{f'}$ کدام است؟

۱) $\begin{cases} f'(x) = [x] \\ D_{f'} = \mathbb{R} \end{cases}$
۲) $\begin{cases} f'(x) = ۰ \\ D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$
۳) $\begin{cases} f'(x) = [x] \\ D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$
۴) $\begin{cases} f'(x) = [x] - ۱ \\ D_{f'} = \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$

۱۰۶ آهنگ متوسط تغییر تابع $f(x) = ۳\sqrt{۴x+۱}$ در بازهٔ $[۲\ ,\ ۲/۰۰۱]$ کدام است؟

۱) $۳/۰۰۱$ ۲) $۲/۰۰۱$

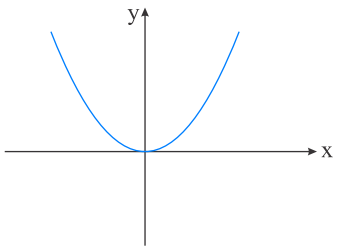
۳) $۲/۹۹۹$ ۴) $۱/۹۹۹$

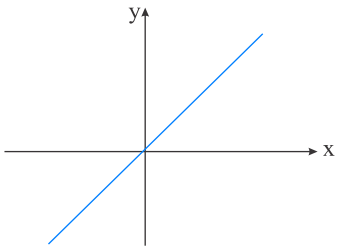
۱۰۷ تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^۲ + ax + ۲}$ در نقاطی به طول‌های ۱ و b دارای خط مماس قائم است. مقدار $a - b$ کدام است؟

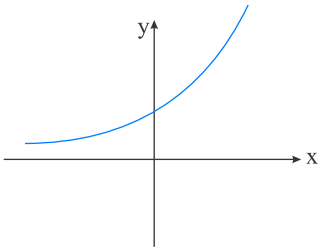
۱) ۱ ۲) -۱

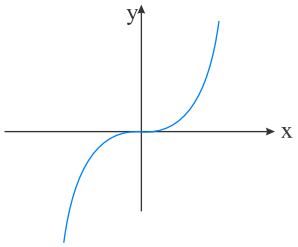
۳) ۵ ۴) -۵

۱۰۸ تابع f به‌گونه‌ای است که مقدار آن در هر نقطه با مشتق آن برابر است. کدام گزینه می‌تواند نمودار تقریبی این تابع باشد؟

۱)


۲)


۳)


۴)


۱۰۹ اگر $f'(۳) = ۴$ باشد، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰} \dfrac{f(۳-۲h) - f(۳-۵h)}{h}$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) -۱۲

۳) ۲۸ ۴) -۲۸

۱۱۰ تابع $f(x) = (۳x^۲ + ax + b)[-x]$ در $x_۰ = ۲$ مشتق‌پذیر است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

۱) -۷۲ ۲) -۱۴۴

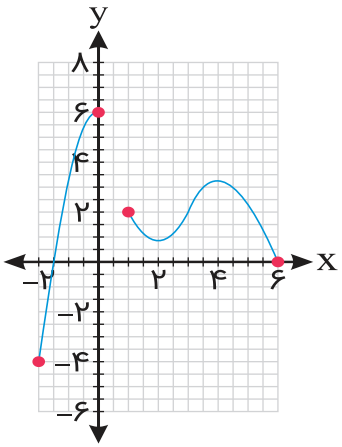
۳) -۳۶ ۴) -۱۲

۱۱۱ تعداد نقاط مشتق‌ناپذیر تابع $f(x) = \begin{cases} |x-۲| & ;\ x > ۱ \\ \sqrt[۵]{x^۲ - ۴x} & ;\ x \le ۱ \end{cases}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

باتوجه‌به نمودار داده‌شده، به سؤالات زیر پاسخ دهید.



۱۱۲ مقدار ماکزیمم مطلق را بنویسید.

۱۱۳ مقدار مینیمم مطلق را بنویسید.

۱۱۴ طول نقطه ماکزیمم نسبی را بنویسید.

۱۱۵ طول نقطه مینیمم نسبی را بنویسید.

جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

۱۱۶ اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c باشد که به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ..... تابع f می‌نامیم.

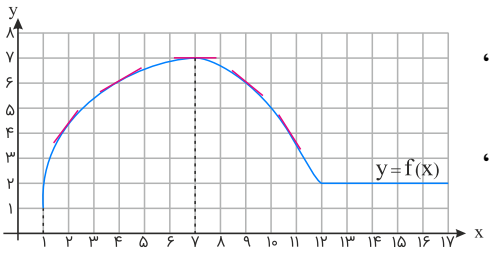
۱۱۷ تابع با ضابطهٔ $f(x) = -x^2 + 2x + 2$ را در نظر بگیرید. f همواره مشتق‌پذیر است.

الف ریشهٔ معادلهٔ $f'(x) = 0$ را محاسبه کنید تا طول نقاط بحرانی تابع به دست آید.

ب با رسم نمودار سهمی، تحقیق کنید که آیا نقطهٔ اکسترمم f منطبق بر نقطهٔ بحرانی آن است؟

۱۱۸ باتوجه‌به توضیحات کتاب، می‌دانیم مشتق هر تابع در یک نقطه، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه برابر است. تابع زیر را درنظر بگیرید:

موارد زیر را کامل کنید.



الف) در بازهٔ $(1, 7)$ که f اکیداً صعودی است، شیب خطهای مماس بر نمودار f ، مثبت است. بنابراین در این بازه علامت f' ..... است.

ب) در بازهٔ $(7, 12)$ که تابع اکیداً نزولی است، شیب خطهای مماس بر نمودار f ، ..... است. بنابراین در این بازه علامت f' ..... است.

پ) در بازهٔ $(12, +\infty)$ که تابع مقدار ثابت دارد، مقدار f' برابر ..... است.

۱۱۹ کشاورزی می‌خواهد دور یک مزرعه مستطیل شکل به مساحت ثابت ۱۰۰۰ مترمربع را دیوارکشی کند. هزینه هر متر دیوارهای شمالی و جنوبی ۲ میلیون تومان و هزینه هر متر دیوارهای شرقی و غربی ۸ میلیون تومان است.

الف هزینه موردنیاز برای انجام این کار را به‌صورت یک تابع بنویسید.

ب ابعاد مزرعه چقدر باشد تا هزینهٔ دیوارکشی به حداقل مقدار ممکن برسد؟

۱۲۰ تابع $f(x) = x^3 - 12x + 4$ را در نظر بگیرید و به قسمت‌های زیرپاسخ دهید.

الف مختصات نقاط اکسترمم نسبی این تابع را بیابید.

ب بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع f در آن اکیداً نزولی است را مشخص کنید.

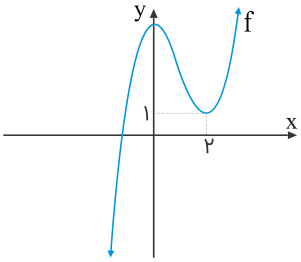
۱۲۱ ضرایب a و b در تابع $f(x) = -x^۴ + ax + b$ را طوری تعیین کنید که در نقطهٔ $(۱, ۲)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۱۲۲ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = x^۳ - ۳x + ۷$ را در بازهٔ $[-۱, ۳]$، در صورت وجود به دست آورید.

جاهای خالی را با عدد و یا عبارت ریاضی مناسب پر کنید.

۱۲۳ اگر تابع $y = f(x)$ در بازهٔ $[a, b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه ..... است.

۱۲۴ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ + bx^۲ + d$ به‌صورت شکل زیر رسم شده است. مقادیر b و d را بیابید.



۱۲۵ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۲۶ تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^۳ - ۳x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه اکیداً نزولی است؟

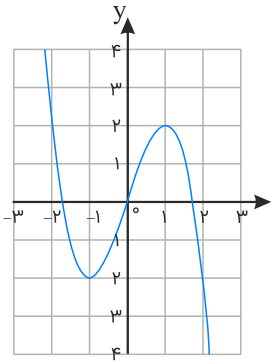
۱۲۷ در تابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

$$f(x) = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x - ۱۰$$

۱۲۸ در کره‌ای به قطر ۱۲ سانتی‌متر یک استوانه با حجم ماکزیمم محاط کرده‌ایم. ارتفاع استوانه را به دست آورید.

۱۲۹ تابع $g(x) = -x^۲ - ۱$ را در فاصلهٔ $[-۱, ۲]$ رسم کنید و نقاط بحرانی را مشخص کنید.

۱۳۰ نمودار تابع $f(x) = -x^۳ + ۳x$ را رسم کرده‌ایم.



الف) طول‌های نقاط اکسترمم نسبی f را تعیین کنید.

ب) می‌دانیم این تابع در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است. ریشه‌های معادلهٔ $f'(x) = ۰$، یعنی طول‌های نقاط بحرانی تابع را به دست آورید.

پ) باتوجه‌به الف و ب، درستی قضیهٔ فرما (هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع یک نقطهٔ بحرانی آن است) را در مورد این تابع بررسی کنید.

۱۳۱ اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ + ۱$ را در فاصلهٔ $[-۱, ۳]$ محاسبه کنید.

۱۳۲ با یک نرده به طول ۱۰۰ متر، می‌خواهیم به دور یک زمین مستطیل‌شکل با مساحت ماکزیمم، حصار بکشیم. طول و عرض مستطیل را به دست آورید.

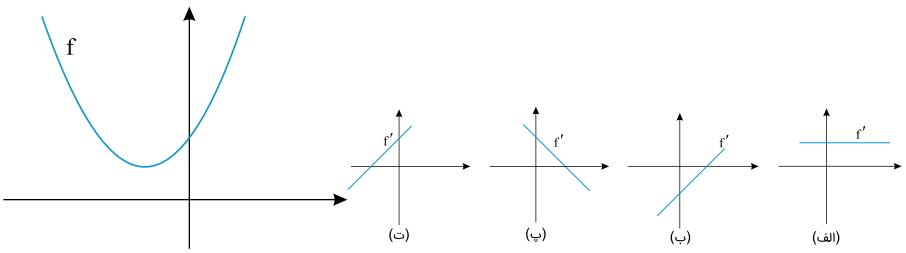
۱۳۳ تابع $f(x) = -۲x^۳ + ۳x^۲ + ۱۲x - ۹$ را در نظر بگیرید:

الف با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

ب مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در بازهٔ $[۰, ۳]$ را در صورت وجود به دست آورید.

۱۳۴ اگر بین دو عدد حقیقی x و y رابطهٔ $۵x - y = ۱۰$ برقرار باشد، مقدار x و y را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب دو عدد مینیمم گردد.

۱۳۵ باتوجه‌به نمودار تابع f، نمودار f' را با ذکر دلیل مشخص کنید.

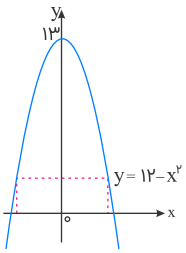


۱۳۶ ورق فلزی مربع‌شکل به طول ضلع یک متر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از چهار گوشهٔ آن مربع‌های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آن‌ها را کنار بگذاریم؛ سپس لبهٔ جعبه را به‌اندازهٔ x برمی‌گردانیم تا یک جعبهٔ در باز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه حداکثر مقدار ممکن گردد؟

۱۳۷ اگر تابع $f(x) = ax^۲ + bx$ در $x = ۱$ دارای ماکزیمم نسبی برابر با ۷ باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

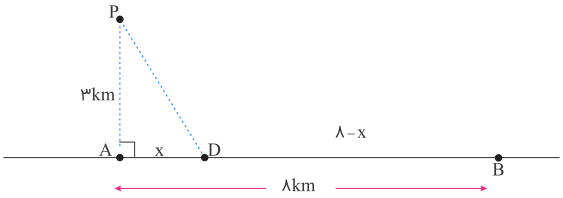
۱۳۸ می‌خواهیم یک قوطی فلزی استوانه‌ای‌شکل و درباز بسازیم که گنجایش آن دقیقاً ۹۰۰ سانتی‌متر مکعب است. ابعاد قوطی چقدر باشد تا مقدار فلز به‌کاررفته در تولید آن مینیمم شود؟ $(\pi \simeq ۳)$

۱۳۹ ابعاد مستطیلی با بیشترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور xها و دو رأس دیگرش بالای محور xها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.



۱۴۰ آرتا درون قایقی در نقطهٔ P قرار دارد که فاصلهٔ آن از نزدیک‌ترین نقطهٔ ساحل یعنی نقطهٔ A، معادل ۳ کیلومتر است. او می‌خواهد به نقطهٔ B در ساحل برسد که در ۸ کیلومتری A قرار دارد. فرض کنید سرعت حرکت قایق $۲km/h$ و سرعت پیاده‌روی آرتا در ساحل $۴km/h$ باشد. اگر او بخواهد در کوتاه‌ترین زمان ممکن به B برسد، در چه نقطه‌ای از ساحل باید پیاده شده و به‌سوی B پیاده‌روی کند؟

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL



۱۴۱ نشان دهید در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۱۴ سانتی‌متر، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن هم‌اندازه باشند.

در هریک از توابع زیر، ابتدا نقاط بحرانی تابع را به دست آورید و سپس با رسم جدول تغییرات تابع، نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی آن را در صورت وجود مشخص کنید.

۱۴۲ $f(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۹x - ۱۰$

۱۴۳ $g(x) = -۲x^{۳} + ۳x^{۲} + ۱۲x - ۹$

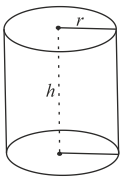
۱۴۴ $h(x) = -x^{۳} - ۳x + ۲$

۱۴۵ غلظت یک داروی شیمیایی در خون، t ساعت پس از تزریق در ماهیچه از رابطهٔ $C(t) = \frac{۳t}{t^{۳} + ۲۷}$ به دست می‌آید. چند ساعت پس از تزریق این دارو، غلظت آن در خون، بیشترین مقدار ممکن خواهد بود؟

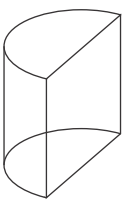
۱۴۶ یک مستطیل در یک نیم‌دایره به شعاع ۲ محاط شده است، طول و عرض مستطیل را طوری بیابید که مساحت مستطیل ماکزیمم شود.

۱۴۷ تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x$ در چه بازه‌هایی اکیداً صعودی و در کدام بازه‌ها اکیداً نزولی است؟

۱۴۸ استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h مفروض است. اگر صفحهٔ P این استوانه را برش بدهد چه شکل‌هایی از سطح مقطع به دست می‌آید؟ (سه نمونهٔ آن را ذکر کنید)



۱۴۹ در شکل زیر نصف یک استوانه داده شده است. سطح مقطع این شکل در برخورد با صفحه‌های عمودی و افقی به چه شکل است؟



۱۵۰ معادلهٔ دایره‌ای به‌صورت $x^{۲} + y^{۲} - ۲x - ۶y + ۶ = ۰$ است، مختصات مرکز این دایره را به دست آورید.

در هر قسمت، عبارت مناسب را انتخاب کنید.

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۵۱ اگر صفحه‌ای بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و در هیچ حالتی با مولد سطح مخروطی موازی نشود و از رأس نگذرد، شکل حاصل از تقاطع صفحه با سطح مخروطی ..... خواهد بود. (بیضی - سهمی - هذلولی)

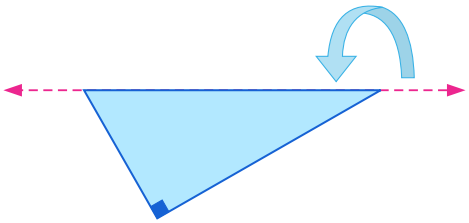
۱۵۲ اگر خروج از مرکز بیضی به صفر نزدیک شود، شکل بیضی به شکل ..... نزدیک خواهد شد. (پاره خط - دایره - نقطه)

۱۵۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن نقطهٔ $O(۳, -۲)$ بوده و بر محور xها مماس باشد.

۱۵۴ معادلهٔ گستردهٔ دایره‌ای به‌صورت $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۲y + ۶ = ۰$ است. مرکز و شعاع دایره را بنویسید.

۱۵۵ حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲ + y^۲ - ۳x + ۵y + a = ۰$ بتواند معادله یک دایره باشد.

۱۵۶ شکل حاصل از دوران یک مثلث قائم‌الزاویه حول وتر آن چیست؟



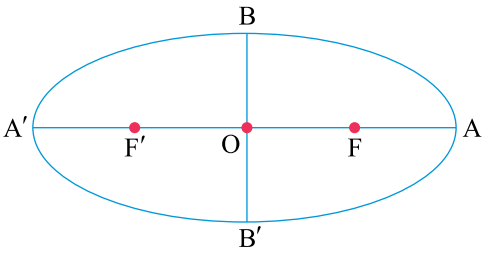
۱۵۷ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش $O\ (-۱, ۳)$ بوده و از نقطهٔ $A\ (۲, ۱)$ می‌گذرد.

۱۵۸ اگر معادله دایره به شکل $(x + ۱)^۲ + y^۲ = ۴$ باشد:

الف) مختصات مرکز دایره و اندازه شعاع دایره را بنویسید.

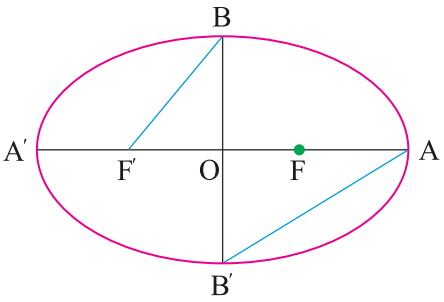
ب) مختصات تقاطع دایره با محور xها را پیدا کنید.

۱۵۹ اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{B}F'$ چند درجه است؟



۱۶۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O\ (-۱, -۱)$ مرکز آن بوده و روی خط $۲x + y = ۲$ وتری به طول ۴ ایجاد کند.

۱۶۱ در بیضی زیر، خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید.



۱۶۲ وضعیت دو دایره به معادلات $(x - ۱)^۲ + (y + ۲)^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y - ۶ = ۰$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه راه‌حل)

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۶۳ اگر دو دایره به معادله‌های $x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰$ و $(x - ۲)^۲ + (y + ۱)^۲ = m^۲$ مماس خارج باشد، مقدار m را بیابید.

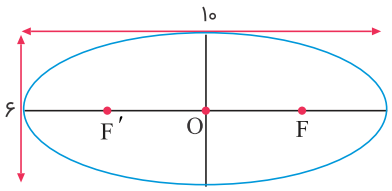
۱۶۴ مساحت بین دو دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y = ۳$ و $(x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = m$ برابر ۴π است. m را بیابید.

۱۶۵ معادلهٔ گستردهٔ دایرهٔ $C(O, R)$ به شکل $x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x - ۴ = ۰$ است.

الف) مختصات مرکز و شعاع دایرهٔ C را محاسبه کنید.

ب) آیا نقطهٔ $A(۰, ۳)$ روی محیط دایرهٔ C قرار دارد؟ چرا؟

۱۶۶ در بیضی زیر فاصلهٔ کانونی را محاسبه کنید (F و F' کانون‌های بیضی هستند).



۱۶۷ مستطیلی که طول آن $۱/۵$ برابر عرض آن است را ابتدا حول طول آن و سپس حول عرض آن دوران می‌دهیم. نسبت حجم‌های دو جسم حاصل را بیابید.

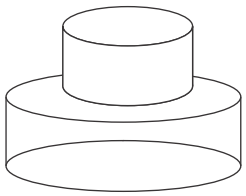
۱۶۸ خروج از مرکز یک بیضی افقی $\frac{۴}{۵}$، مرکز آن $(-۴, -۱)$ و طول قطر کوچک این بیضی ۶ واحد است.

الف) طول قطر کانونی و فاصله کانونی را محاسبه کنید.

ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را پیدا کنید.

۱۶۹ وضعیت دو دایره $\begin{cases} x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ = ۱ \end{cases}$ را بررسی کنید.

۱۷۰ دو استوانه روی یکدیگر قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای از بالا به‌طور عمودی هر دو استوانه را برش دهد، سطح مقطع حاصل چه شکلی خواهد بود؟ (همراه با رسم شکل)



۱۷۱ شکل حاصل از دوران هریک را با رسم نام ببرید.

الف) نیم‌دایره حول قطر آن

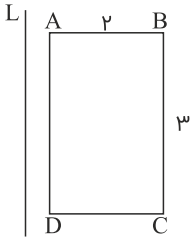
ب) مستطیل حول طول یا عرض

پ) مثلث قائم‌الزاویه حول یک ضلع زاویهٔ قائمه

ت) ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه حول ساق قائم آن

۱۷۲ وضعیت نقطهٔ $A\ (۱, -۲)$ نسبت به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰$ را تعیین کنید.

۱۷۳ در شکل زیر، ضلع AD از مستطیل ABCD موازی با خط L و به فاصلهٔ ۱ واحد از آن است. حجم جسم حاصل از دوران مستطیل حول خط L، چقدر است؟

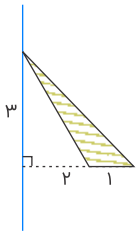


۱۷۴ معادلهٔ قطر کانونی یک بیضی، $y = -1$ و معادلهٔ قطر کوچک، $x = 2$ است. اگر طول قطرهای بزرگ و کوچک به ترتیب ۱۲ و ۸ واحد باشند، مرکز بیضی و فاصلهٔ کانونی را به دست آورید.

۱۷۵ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکزش روی خط $x + y = 2$ و بر خطوط $y = x - 3$ و $y = x + 1$ مماس باشد.

۱۷۶ استوانهٔ قائم به شعاع قاعدهٔ ۲ و ارتفاع ۱ واحد را روی استوانهٔ قائم دیگری به شعاع قاعدهٔ ۳ و ارتفاع ۲ واحد، قرار داده‌ایم. اگر صفحه‌ای قائم، استوانه‌ها را قطع کند، حداکثر مساحت سطح مقطع حاصل، چقدر است؟

۱۷۷ حجم حاصل از دوران سطح هاشورخورده حول خط d را محاسبه کنید.



۱۷۸ مدرسه A سه برابر مدرسه B دانش‌آموز دارد. ۳۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسه B معدلی بالای ۱۸ دارند، اگر همه دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم:

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی، معدلی بالای ۱۸ دارد؟

در جاهای خالی گزینهٔ مناسب داخل پرانتز را انتخاب کنید.

۱۷۹ دو پیشامدی که باهم رخ ندهند، دو پیشامد ..... (مستقل - ناسازگار) هستند.

۱۸۰ مدرسهٔ A سه برابر مدرسهٔ B دانش‌آموز دارد. ۲۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ A و ۱۵ درصد دانش‌آموزان مدرسهٔ B معدلی بالای ۱۸ دارند. اگر همهٔ دانش‌آموزان هر دو مدرسه در یک محوطه حاضر باشند و به‌تصادف یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم:

الف) با چه احتمالی فرد انتخابی از مدرسهٔ A و با چه احتمالی از مدرسهٔ B است؟

ب) با چه احتمالی فرد انتخابی معدلی بالای ۱۸ دارد؟

۱۸۱ در یک دانشگاه ۱۲۰۰ نفری ۸۰۰ دانشجوی دختر وجود دارند و بقیه پسر هستند. اگر ۶۰% دختران و ۷۰% پسران در یک درس قبول شده باشند:

الف) با چه احتمالی یک دانشجو که به‌دلخواه از دانشکده انتخاب شده است، در این درس قبول نشده است؟

جمله‌های زیر را کامل کنید.

۱۸۲ هرگاه برای دو پیشامد A و B داشته باشیم $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ آن‌گاه دو پیشامد A و B، ..... هستند.

۱۸۳ اگر احتمال انتقال نوعی بیماری عفونی به نوزاد پسر ۰/۰۷ و نوزاد دختر ۰/۰۴ باشد و خانواده‌ای منتظر به دنیا آمدن فرزندی باشند، با چه احتمالی نوزاد آن‌ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

۱۸۴ یک سکه را پرتاب می‌کنیم و اگر پشت بیاید ۳ سکهٔ دیگر را باهم پرتاب می‌کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، چقدر است؟

۱۸۵ درون کیسهٔ A، سه مهرهٔ آبی و پنج مهرهٔ قرمز و درون کیسهٔ B، چهار مهرهٔ آبی و چهار مهرهٔ قرمز موجود است. از کیسهٔ A یک مهره خارج کرده و در کیسهٔ B قرار می‌دهیم. حال از کیسهٔ B یک مهره خارج می‌کنیم. با چه احتمالی مهره‌های خارج‌شده از کیسهٔ A و B همرنگ خواهد بود؟

۱۸۶ در جعبه‌ای سه ظرف وجود دارد. ظرف اول شامل یک مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ سیاه، ظرف دوم شامل یک مهرهٔ سفید و دو مهرهٔ سیاه و ظرف سوم شامل سه مهرهٔ سفید و دو مهرهٔ سیاه است. در برداشتن یک مهره به‌تصادف از یک ظرف احتمال خارج شدن مهرهٔ سیاه کدام است؟

۱۸۷ دو ظرف یکسان داریم. ظرف اول شامل ۷ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی و ظرف دوم شامل ۶ مهرهٔ قرمز و ۶ آبی است. از ظرف اول به تصادف یک مهره انتخاب کرده، در ظرف دوم قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از ظرف دوم انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی این مهره قرمز است؟

در جاهای خالی عبارت مناسب قرار دهید.

۱۸۸ اگر A مجموعه اعداد طبیعی اول، B مجموعه اعداد طبیعی مرکب و $C =$..... باشند، آنگاه A، B و C یک افراز روی مجموعه اعداد طبیعی است.

۱۸۹ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۴۵ درصد مرد و ۵۵ درصد زن باشد و شیوع یک بیماری ویروسی به ترتیب در این دو دسته ۴ درصد و ۶ درصد باشد. اگر فردی به‌تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

۱۹۰ ظرف A، شامل ۳ مهرهٔ آبی و ۴ مهرهٔ قرمز و ظرف B شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۷ مهرهٔ قرمز است. از ظرف A، دو مهره به‌تصادف و باهم خارج می‌کنیم و در ظرف B قرار می‌دهیم سپس از ظرف B یک مهره خارج می‌کنیم. اگر مهرهٔ خارج شده از ظرف B آبی باشد با چه احتمالی مهره‌های خارج‌شده از ظرف A همرنگ بوده‌اند؟

۱۹۱ ۴ ظرف یکسان داریم. در اولین ظرف ۱۴ مهره قرار دارد که ۴تای آن‌ها قرمز است. در ظرف دوم همهٔ مهره‌ها قرمزند. در ظرف سوم ۸ مهره قرار دارد که ۶تای آن‌ها قرمزند و در ظرف چهارم هیچ مهرهٔ قرمزی وجود ندارد. با چشم بسته یکی از ظرف‌ها را انتخاب کرده و از آن یک مهره بیرون می‌آوریم. احتمال اینکه مهرهٔ انتخابی قرمز باشد چقدر است؟

۱۹۲ مینا در انتخاب رشتهٔ خود برای تحصیل در دبیرستان بین سه رشتهٔ ریاضی، تجربی و انسانی مردد است. اگر او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند، به احتمال ۰/۴۵، اگر تجربی را انتخاب کند به احتمال ۰/۱ و اگر انسانی را انتخاب کند به احتمال ۰/۳ در آزمون ورودی دانشگاه پذیرفته خواهد شد. اگر احتمال اینکه او رشتهٔ ریاضی را انتخاب کند ۰/۱، احتمال اینکه رشتهٔ تجربی را انتخاب کند ۰/۶ و احتمال اینکه رشتهٔ انسانی را انتخاب کند ۰/۳ باشد، با چه احتمالی در دانشگاه پذیرفته خواهد شد؟

۱۹۳ سامان در یک مسابقه شرکت کرده است. سه بسته سؤال که یکی شامل سؤال‌های ادبیات، یکی ریاضی و یکی اطلاعات عمومی است، وجود دارد. اگر بستهٔ سؤال‌های ادبیات را به او بدهند، به احتمال ۹۰ درصد برنده خواهد شد. اگر بستهٔ سؤال‌های ریاضی را به او بدهند، به احتمال ۶۰ درصد و اگر بستهٔ سؤال‌های اطلاعات عمومی را به او بدهند، به احتمال ۸۵ درصد برنده خواهد شد. درصورتی‌که با چرخاندن عقربهٔ چرخان در شکل زیر نوع سؤال‌هایی که به او داده می‌شود مشخص شود، تعیین کنید او به چه احتمالی برنده خواهد شد؟

۱۹۴ فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰ درصد کودک و نوجوان، ۵۰ درصد میانسال و ۳۰ درصد سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته‌ها به ترتیب ۳ درصد، ۵ درصد و ۱ درصد باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی به بیماری موردنظر مبتلا است؟

۱۹۵ درون جعبه A چهار مهره زرد و سه مهره قرمز و درون جعبه B سه مهره زرد و سه مهره قرمز قرار دارد. از جعبه A مهره‌ای را برداشته و در جعبه B قرار می‌دهیم، سپس از جعبه B مهره‌ای انتخاب می‌کنیم. اگر دو مهره همرنگ باشند، با چه احتمالی هر دو زرداند؟

۱) $\frac{۴}{۵}$
۲) $\frac{۴}{۷}$
۳) $\frac{۳}{۷}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

۱۹۶ یک تاس را پرتاب می‌کنیم و به تعداد عدد روشده سکه می‌اندازیم. با چه احتمالی دقیق ۳ سکه رو داریم؟

۱) $\frac{۱}{۴}$
۲) $\frac{۲}{۶}$
۳) $\frac{۱}{۱۲}$
۴) $\frac{۱}{۶}$

۱۹۷ دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز، ۵ کارت یک رو قرمز و یک رو آبی، ۳ کارت دو رو آبی است. کارتی را به تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را می‌بینیم، با چه احتمالی رویی که دیده‌ایم آبی است؟

۱) $\frac{۵}{۲۰}$
۲) $\frac{۹}{۲۰}$
۳) $\frac{۱۱}{۲۰}$
۴) $\frac{۷}{۲۰}$

۱۹۸ در کلاسی که n دانشجوی پسر $(n > ۵)$ و ۵ دانشجوی دختر دارد، به‌تصادف دو دانشجو را یکی پس از دیگری انتخاب می‌کنیم. با احتمال $\frac{۱۰}{۲۱}$ دانشجویان انتخابی هم‌جنس نیستند. تعداد دانشجویان پسر، کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰
۲) ۷
۳) ۱۱
۴) ۱۶

۱۹۹ دو کلاس به نام‌های A و B داریم که در کلاس A، ۵ دانش‌آموز ریاضی و ۳ تجربی و در کلاس B، ۳ دانش‌آموز ریاضی و ۲ تجربی وجود دارد. تاسی را پرتاب می‌کنیم، اگر مضرب ۳ بیاید یک دانش‌آموز از کلاس B انتخاب و به کلاس A انتقال می‌دهیم و سپس یک دانش‌آموز از کلاس A انتخاب می‌کنیم. در غیر این صورت از کلاس A دانش‌آموزی انتخاب و به کلاس B انتقال داده و سپس یک دانش‌آموز از کلاس B انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه هر دو دانش‌آموز هم‌رشته نباشند، کدام است؟

۱) $\frac{۴۳۷}{۱۰۸۰}$
۲) $\frac{۴۳۷}{۹۴۰}$
۳) $\frac{۲۱۷}{۱۰۸۰}$
۴) $\frac{۲۱۷}{۹۴۰}$

۲۰۰ در یک جامعه نسبت تعداد زنان به مردان ۴ به ۳ است. اگر ۴۰ درصد زنان و ۶۰ درصد مردان باسواد باشند، با چه احتمالی فرد انتخابی از جامعه زن یا باسواد است؟

۱) $\frac{۲۸}{۴۹}$
۲) $\frac{۲۹}{۳۵}$
۳) $\frac{۲۷}{۳۵}$
۴) $\frac{۲۷}{۴۹}$

پاسخنامه

۱

$x = ۲ : y = fog(۲) = f(۱۱) = ۷$
$x = ۴ : y = fog(۴) = f(-۲) = ۴$
$x = ۶ : y = fog(۶) = -۵$
$x = ۳ : y = fog(۳) = -۵$
$fog = \{(۲, ۷), (۴, ۴), (۶, -۵), (۳, -۵)\}$

پاسخ سؤال ۲

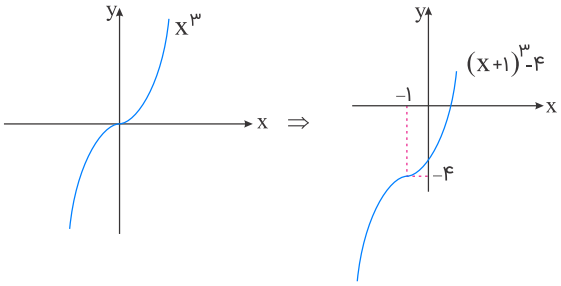
۲ درست

۳ الف درست

ب نادرست

پ نادرست

۴ الف

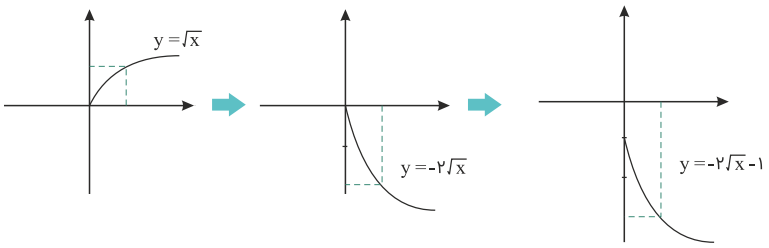


ب چون نمودار تابع f اکیداً صعودی است، پس وارون‌پذیر می‌باشد.

پ

$y = (x+۱)^۳ - ۴ \Rightarrow (x+۱)^۳ = y + ۴ \Rightarrow x + ۱ = \sqrt[۳]{y+۴}$
$\Rightarrow x = \sqrt[۳]{y+۴} - ۱ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \sqrt[۳]{x+۴} - ۱$

۵



۶ الف

$$(gof)(x) = g(f(x)) = g(۳x^۲ - ۱) = \frac{۳x^۲ - ۱}{(۳x^۲ - ۱)^۲ - ۴}$$

$$D_f = \mathbb{R} \text{ و } D_g = \mathbb{R} - \{\pm ۲\}$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \,|\, f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} | ۳x^۲ - ۱ \neq \pm ۲\} = \mathbb{R} - \{\pm ۱\}$$

۷ الف

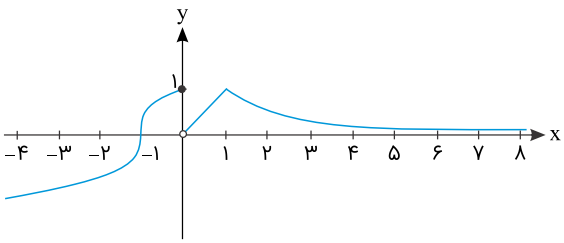
$$D_f = [۱, +\infty) \;,\; D_g = \mathbb{R} \quad , \quad D_{fog} = \{x \in D_g \,|\, g(x) \in D_f\}$$

$$\Rightarrow D_{fog} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, ۲x^۲ - ۱ \in [۱, +\infty)\} \Rightarrow D_{fog} = (-\infty, -۱] \cup [۱, +\infty)$$

ب

$$f(g(x)) = \sqrt{۲x^۲ - ۲}$$

۸



اکیداً صعودی: $(-\infty, ۰]$

اکیداً صعودی: $(۰, ۱)$

اکیداً نزولی: $[۱, +\infty)$

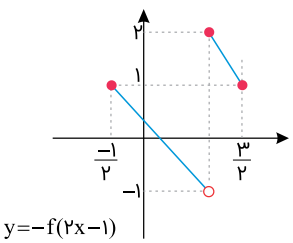
۹

۱- ابتدا نمودار را یک واحد به راست منتقل کنید.

۲- طول نقاط را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنید.

۳- نسبت به محور xها قرینه نمایید.

۴- یک واحد به بالا ببرید.



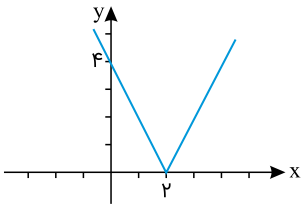
نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۰

$$y = -۵ - \sqrt{۳x+۱} \Rightarrow \sqrt{۳x+۱} = -۵ - y \Rightarrow ۳x+۱ = ۲۵ + ۱۰y + y^۲$$
$$\Rightarrow ۳x = y^۲ + ۱۰y + ۲۴ \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱}{۳}x^۲ + \frac{۱۰}{۳}x + ۸$$

۱۱

$$f(x) = |۲x - ۴|$$
$$۲x - ۴ = ۰ \Rightarrow ۲x = ۴ \Rightarrow x = ۲$$
$$f(x) = \begin{cases} ۲x - ۴ & ; x \geq ۲ \\ -۲x + ۴ & ; x < ۲ \end{cases}$$



۱۲

$$\underbrace{f(x-۲)}_{t} = x^۲ + ۴x$$

$$x - ۲ = t \Rightarrow x = t + ۲ \Rightarrow f(t) = (t+۲)^۲ + ۴(t+۲)$$
$$\Rightarrow f(t) = t^۲ + ۴t + ۴ + ۴t + ۸$$
$$\Rightarrow f(t) = t^۲ + ۸t + ۱۲$$
$$\xrightarrow{t=۲x+۱} f(۲x+۱) = (۲x+۱)^۲ + ۸(۲x+۱) + ۱۲$$
$$\Rightarrow f(۲x+۱) = ۴x^۲ + ۴x + ۱ + ۱۶x + ۸ + ۱۲$$
$$\Rightarrow f(۲x+۱) = ۴x^۲ + ۲۰x + ۲۱$$

۱۳ برای تعیین ضابطهٔ وارون سعی می‌کنیم x را برحسب y بیابیم؛ یعنی:

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} + ۲ & ; x \geq ۰ \\ ۱ - x^۲ & ; x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x} + ۲ & ; x \geq ۰ \\ y = ۱ - x^۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = y - ۲ & ; x \geq ۰ \\ x^۲ = ۱ - y & ; x < ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (y-۲)^۲ & ; x \geq ۰ \\ x = -\sqrt{۱-y} & ; x < ۰ \end{cases}$$

حال جای x و y را عوض می‌کنیم؛ یعنی:

$$\begin{cases} y = (x-۲)^۲ & ; y \geq ۰ \xrightarrow{(x-۲)^۲ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۲} \\ y = -\sqrt{۱-x} & ; y < ۰ \xrightarrow{-\sqrt{۱-x} < ۰ \Rightarrow x < ۱} \end{cases} f^{-۱}(x) = y = \begin{cases} (x-۲)^۲ & ; x \geq ۲ \\ -\sqrt{۱-x} & ; x < ۱ \end{cases}$$

۱۴ چون نقطهٔ شروع ۲ واحد بالا رفته، پس یک انتقال عمودی ۲ واحدی صورت گرفته است. حال اگر فرض کنیم نمودار به‌اندازهٔ a واحد به راست انتقال پیدا کرده و سپس با ضریب b، انبساط یا انقباض افقی صورت گرفته، ضابطهٔ تابع به‌صورت زیر خواهد بود:

$$y=\sqrt{x} \xrightarrow[\text{به بالا}]{\text{۲ واحد انتقال}} y=\sqrt{x}+۲ \xrightarrow[\text{راست}]{\text{a واحد به}} y=\sqrt{x-a}+۲$$

$$\xrightarrow[\text{انبساط یا انقباض افقی}]{\text{با ضریب b}} y=\sqrt{bx-a}+۲=f(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\frac{۳}{۲})=۲ \Rightarrow \sqrt{\frac{۳}{۲}b-a}+۲=۲ \\ f(\frac{۱۱}{۲})=۶ \Rightarrow \sqrt{\frac{۱۱}{۲}b-a}+۲=۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۳}{۲}b-a=۰ \\ \frac{۱۱}{۲}b-a=۱۶ \end{cases} \xrightarrow{\text{تفریق}} ۴b=۱۶ \Rightarrow b=۴ \Rightarrow a=۶$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{۴x-۶}+۲$$

۱۵ اگر قیمت لپ‌تاپ را x تومان در نظر بگیریم، بعد از ٪۲۰ تخفیف برابر است با:

$$f(x)=x-\frac{۲۰}{۱۰۰}x=\frac{۴}{۵}x$$

و برای تخفیف ۲۰۰۰۰۰ تومانی، تابع g را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x)=x-۲۰۰۰۰۰ \quad ;x>۱۵۰۰۰۰۰$$

حال $fog(x)$ و $gof(x)$ را حساب می‌کنیم:

$$fog(x)=f(x-۲۰۰۰۰۰)=\frac{۴}{۵}(x-۲۰۰۰۰۰)=\frac{۴}{۵}x-۱۶۰۰۰۰ \quad ;D_{fog}=[۱۵۰۰۰۰۰,+\infty)$$

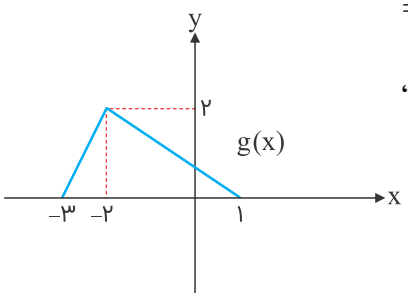
$$gof(x)=g(\frac{۴}{۵}x)=\frac{۴}{۵}x-۲۰۰۰۰۰ \quad ;D_{gof}=[۱۵۰۰۰۰۰,+\infty)$$

ملاحظه می‌کنید که $fog(x)>gof(x)$ است، یعنی $gof(x)$ برای النار به‌صرفه است.

۱۶ گزینه ۲

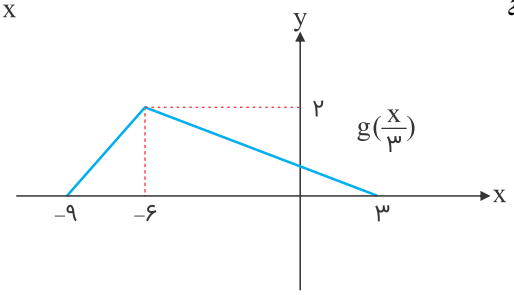
$$f(x)=\sqrt{x+|x|}=\begin{cases} \sqrt{x+x}=\sqrt{۲x} & ;x>۰ \\ \sqrt{x-x}=۰ & ;x\le ۰ \end{cases} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow D_g=[-۳,۱]$$



باتوجه‌به اینکه برای رسم $g(\frac{x}{۳})$ باید نمودار تابع $y=g(x)$ را ۳ برابر در جهت محور xها باز کنیم، پس دامنهٔ $g(\frac{x}{۳})$ برابر است با: $D=[-۹,۳]$

چون دامنهٔ $f(x)$ برابر $\mathbb{R}$ است، پس دامنهٔ $fog(\frac{x}{۳})$ با دامنهٔ $g(\frac{x}{۳})$ برابر می‌شود.



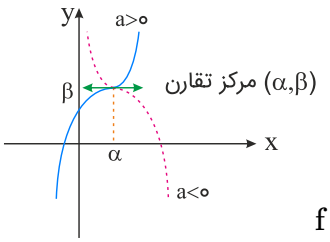
نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۷ گزینه ۴

برای نوشتن ضابطهٔ تابع درجه سومی که نمودار آن به‌صورت زیر بوده و مرکز تقارنش نقطهٔ (α,β) باشد، کافی است از ضابطهٔ $f(x)=a(x-\alpha)^{۳}+\beta$ استفاده نماییم. حال با داشتن یک نقطهٔ دیگر از این تابع و جایگذاری آن در تابع f، به‌راحتی مقدار a به دست می‌آید.

داریم:

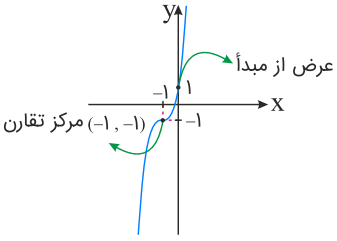
$$\Rightarrow f(x)=a(x-\alpha)^{۳}+\beta$$



چون در شکل داده‌شده مرکز تقارن نقطهٔ $(-۱,-۱)$ است، پس داریم:

$$f(x)=a(x+۱)^{۳}-۱$$

حال کافی است نقطهٔ عرض از مبدأ تابع f را در آن صدق دهیم تا a مشخص شده. داریم:



$$\xrightarrow{(۰,۱)\text{ را در }f\text{ صدق می‌دهیم}} a(۱)^{۳}-۱=۱\Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow f(x)=۲(x+۱)^{۳}-۱=۲(x^{۳}+۳x^{۲}+۳x+۱)-۱$$

$$=۲x^{۳}+۶x^{۲}+۶x+۱$$

در آخر مقادیر a، b، c و d را نظیر به نظیر برابر با ضرایب جملات $x^{۳}$، $x^{۲}$، x و عدد ثابت تابع به‌دست‌آمده قرار می‌دهیم. داریم:

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۲ \\ b=۶ \\ c=۶ \\ d=۱ \end{cases} \Rightarrow abcd=۲\times۶\times۶\times۱=۷۲$$

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۸ گزینه ۲

اگر ضابطهٔ تابع را مرکب ببینیم، داریم:

$$\begin{cases} f(x) = ۲^x - ۲^{-x} \\ g(x) = x - [x] \end{cases} \Rightarrow y = f(g(x))$$

با کمی دقت پی می‌بریم که تابع اصلی $f(x)$ اکیداً صعودی است، چون به‌صورت تفاضل یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع اکیداً نزولی است.

$$f(x) = \overset{\text{اکیداً صعودی}}{۲^x} - \underset{\text{اکیداً نزولی}}{۲^{-x}} \Rightarrow \text{اکیداً صعودی}$$

در تابع مرکب fog، برد تابع داخلی g، دامنهٔ تعریف تابع f است. تابع g تابع جزء اعشاری بوده و بُردش بازهٔ $R_g = [۰, ۱)$ است. پس به ترتیب همین بازه و جایگذاری آن در تابع اصلی f، بُرد به دست می‌آید، داریم:

$$f(x) = ۲^x - ۲^{-x}, D_f = R_g = [۰, ۱) \Rightarrow \begin{cases} f(۰) = ۰ \\ f(۱) = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_{fog(x)} = [f(۰), f(۱)) = [۰, \frac{۳}{۲})$$

پاسخ سؤال ۱۹

۱۹ نادرست

۲۰

$$T = \frac{۲\pi}{|b|} = \frac{۲\pi}{۲} = \pi$$
$$Max = |a| + c = ۲ + (-۳) = -۱$$
$$Min = -|a| + c = -۲ + (-۳) = -۵$$

۲۱ الف درست

ب نادرست

۲۲

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{۱ - \frac{۹}{۲۵}} = -\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow \sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{۲۴}{۲۵}$$

۲۳

$$max = |-۲| + ۱ = ۳ \ , \ \ min = -|-۲| + ۱ = -۱$$

۲۴

$$T = \frac{۲\pi}{|۲\pi|} = ۱ \ , \ max = |-۳| + ۱ = ۴ \ , \ min = -|-۳| + ۱ = -۲$$

پاسخ سؤال ۲۵

۲۵

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} : k \in \mathbb{Z}$$

پاسخ سؤالات ۲۶ تا ۲۷

۲۶ نادرست.

$$\min = -|a| + c = -۳ + ۲ = -۱$$

۲۷ نادرست

۲۸

$$\frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \tan^۲\alpha \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴} \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۴}{۵}$$

$$\cos ۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱ = ۲ \times (\frac{۴}{۵}) - ۱ = \frac{۳}{۵}$$

(باتوجه‌به اینکه در سؤال در اثر اشکال تایپی به‌جای $-\frac{۱}{۲}$ عدد $\frac{۱}{۲}$ تایپ شده است، در زمان تصحیح چنانچه داوطلب با $\frac{۱}{۲}$ حل نموده است، نمرهٔ کامل منظور گردد.)

۲۹

$$T = ۴\pi \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b|} = ۴\pi \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \Rightarrow b = \pm\frac{۱}{۲}$$

$$\max = |a| + c = ۳ \ , \ \min = -|a| + c = ۱ \Rightarrow c = ۲$$
$$\Rightarrow |a| = ۱ \Rightarrow a = -۱$$

$$f(x) = a\cos bx + c \Rightarrow f(x) = -\cos(\frac{۱}{۲}x) + ۲ \ , \ f(x) = -\cos(-\frac{۱}{۲}x) + ۲$$

پاسخ سؤالات ۳۰ تا ۳۱

۳۰

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \sin ۲x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \sin ۲x = \sin\frac{\pi}{۳}$$
$$\begin{cases} ۲x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳} \\ ۲x = ۲k\pi + \pi - \frac{\pi}{۳} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۳۱

$$۱-۲\sin^{۲}x-\sin x=۰\Rightarrow ۲\sin^{۲}x+\sin x-۱=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=-۱\Rightarrow x=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}\\ \sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}\end{cases}$$

پاسخ سؤال ۳۲

۳۲

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{۱}{۲}\sin۲\alpha\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۸}}\frac{۱}{۲}\sin۲\frac{\pi}{۸}=\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۴}$$

۳۳

$$T=۶\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۶\Rightarrow|b|=\frac{\pi}{۳}$$
$$\left.\begin{matrix}max=۶\\ min=-۲\end{matrix}\right\}\Rightarrow\begin{cases}|a|+c=۶\\ -|a|+c=-۲\end{cases}\Rightarrow ۲c=۴\Rightarrow c=۲\Rightarrow|a|=۴$$
$$y=a\sin bx+c\Rightarrow y=-۴\sin(\frac{\pi}{۳}x)+۲\quad\text{یا}\quad y=+۴\sin(-\frac{\pi}{۳}x)+۲$$

۳۴

$$۲\sin x\cos x=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\sin۲x=\sin\frac{\pi}{۳}$$
$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+\frac{\pi}{۳}\\ ۲x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۳}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\begin{cases}x=k\pi+\frac{\pi}{۶}\\ x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\end{cases}\quad k\in\mathbb{Z}$$

۳۵

$$\cos۳x=\cos x\Rightarrow\begin{cases}۳x=۲k\pi+x\Rightarrow x=k\pi\\ ۳x=۲k\pi-x\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}\end{cases}$$

۳۶

$$\sin۱۵^{\circ}=\sqrt{\frac{۱-\cos۳۰^{\circ}}{۲}}=\sqrt{\frac{۱-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۲}}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۳}}}{۲}$$

۳۷ نکته: $\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = ۱ - \frac{۱۴۴}{۱۶۹} = \frac{۲۵}{۱۶۹} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{۵}{۱۳} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع چهارم}} \cos\alpha = \frac{۵}{۱۳}$$

$$\cos\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \frac{۵}{۱۳} = ۱ - ۲\sin^۲\frac{\alpha}{۲} \Rightarrow \sin^۲\frac{\alpha}{۲} = \frac{۴}{۱۳} \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} = \pm\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi \Rightarrow \frac{۳\pi}{۴} < \frac{\alpha}{۲} < \pi \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} > ۰ \Rightarrow \sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\cos^۲\frac{\alpha}{۲} = ۱ - \sin^۲\frac{\alpha}{۲} = ۱ - \frac{۴}{۱۳} = \frac{۹}{۱۳} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{۲} = \pm\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\xrightarrow{\frac{\alpha}{۲} \text{ در ربع دوم}} \cos\frac{\alpha}{۲} = \frac{-۳}{\sqrt{۱۳}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{\sin\frac{\alpha}{۲}}{\cos\frac{\alpha}{۲}} = \frac{\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}}{\frac{-۳}{\sqrt{۱۳}}} = -\frac{۲}{۳}$$

۳۸ ابتدا صورت کسر و سپس مخرج کسر را به دست می آوریم:

$$\sqrt{\tan\frac{\pi}{۱۲}} - \sqrt{\cot\frac{\pi}{۱۲}} = a \xrightarrow{\text{توان } ۲} \tan\frac{\pi}{۱۲} + \cot\frac{\pi}{۱۲} - ۲\underbrace{\sqrt{\tan\frac{\pi}{۱۲}}\sqrt{\cot\frac{\pi}{۱۲}}}_{۲} = a^۲$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\frac{\pi}{۱۲}}{\cos\frac{\pi}{۱۲}} + \frac{\cos\frac{\pi}{۱۲}}{\sin\frac{\pi}{۱۲}} - ۲ = \frac{\sin^۲\frac{\pi}{۱۲} + \cos^۲\frac{\pi}{۱۲}}{\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}} - ۲$$

$$= \frac{۱}{\frac{۱}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}} - ۲ = ۴ - ۲ = ۲$$

$$\Rightarrow a^۲ = ۲ \Rightarrow a = \pm\sqrt{۲}$$

$$\tan\frac{\pi}{۱۲} = \frac{\sin\frac{\pi}{۱۲}}{\cos\frac{\pi}{۱۲}} \quad , \quad \cot\frac{\pi}{۱۲} = \frac{\cos\frac{\pi}{۱۲}}{\sin\frac{\pi}{۱۲}}$$

$$\xrightarrow{\cos\frac{\pi}{۱۲} > \sin\frac{\pi}{۱۲}} \tan\frac{\pi}{۱۲} < \cot\frac{\pi}{۱۲} \Rightarrow a < ۰ \Rightarrow a = -\sqrt{۲}$$

$$\sqrt{\tan\frac{\pi}{۱۲}} + \sqrt{\cot\frac{\pi}{۱۲}} = b \xrightarrow{\text{توان } ۲} \tan\frac{\pi}{۱۲} + \cot\frac{\pi}{۱۲} + ۲ = b^۲$$

$$\xrightarrow{\text{شبیه بالا}} ۴ + ۲ = b^۲ \xrightarrow{b>۰} b = \sqrt{۶} \Rightarrow A = -\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۶}} = -\frac{\sqrt{۱۲}}{۶} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۳۹

$$\cot x - \tan x = -۲ \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = -۲$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\sin x \cos x} = -۲ \Rightarrow \frac{\cos ۲x}{\frac{۱}{۲}\sin ۲x} = -۲$$

$$\Rightarrow \cot ۲x = -۱ \Rightarrow \begin{cases} ۲x = \frac{۳\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۳\pi}{۸} \\ ۲x = \frac{۷\pi}{۴} \Rightarrow x = \frac{۷\pi}{۸} \end{cases} \quad \text{غ.ق.ق} \ (\frac{\pi}{۲} < x < \pi)$$

$$\sin \frac{۷\pi}{۸} - \cos \frac{۷\pi}{۸} = a \xrightarrow{()^۲} \sin^۲ \frac{۷\pi}{۸} + \cos^۲ \frac{۷\pi}{۸} - ۲ \sin \frac{۷\pi}{۸} \cos \frac{۷\pi}{۸} = a^۲$$

$$۱ - \sin \frac{۷\pi}{۴} = a^۲ \Rightarrow ۱ + \frac{\sqrt{۲}}{۲} = a^۲ \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{۲ + \sqrt{۲}}{۲}}$$

دقت کنید چون $\frac{\pi}{۲} < x < \pi$، مقدار $\sin x$ عددی مثبت و $\cos x$ عددی منفی است، پس $\sin x - \cos x$ مثبت است.

نکته:

۱) $\cos^۲ x - \sin^۲ x = \cos ۲x$

۲) $۲ \sin x \cos x = \sin ۲x \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{۱}{۲}\sin ۲x$

۴۰

الف) (-۱)

ب) $(+\infty)$

پ) (-۱)

پاسخ سؤال ۴۱

۴۱ ۳

پاسخ سؤال ۴۲

۴۲ درست

پاسخ سؤالات ۴۳ تا ۴۵

۴۳

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۱۶}{\sqrt{x+۱۲}-x}=\lim_{x\to ۴}\frac{x^۲-۱۶}{\sqrt{x+۱۲}-x}\times\frac{\sqrt{x+۱۲}+x}{\sqrt{x+۱۲}+x}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x+۴)(x-۴)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{(x+۱۲-x^۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۴}\frac{(x+۴)(x-۴)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{-(x+۳)(x-۴)}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x+۴)\left(\sqrt{x+۱۲}+x\right)}{-(x+۳)}=-\frac{۶۴}{۷}$$

۴۴

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{۱-\cos x}=\frac{۱}{۱-۱^-}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$$

۴۵

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-۱)(x-۲)(۴-x)}{۲x^۳+۱}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^۳}{۲x^۳}=-\frac{۱}{۲}$$

پاسخ سؤال ۴۶

۴۶ حد تابع در نقطهٔ داده‌شده $+\infty$ است.

پاسخ سؤالات ۴۷ تا ۴۹

۴۷

$$\lim_{x\to ۵}\frac{۵-x}{\sqrt{۲x-۱}-۳}=\lim_{x\to ۵}\frac{(۵-x)\left(\sqrt{۲x-۱}+۳\right)}{\left(\sqrt{۲x-۱}-۳\right)\left(\sqrt{۲x-۱}+۳\right)}=\lim_{x\to ۵}\frac{(۵-x)\left(\sqrt{۲x-۱}+۳\right)}{-۲(۵-x)}=-۳$$

۴۸

$$\lim_{x\to \pi^-}\frac{۲}{۱+\cos x}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty$$

۴۹

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+\sqrt{x^۲+x+۱}}{۷+۵x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x-x}{۵x}=\frac{۲}{۵}$$

۵۰

$$p(-۱)=۰\Rightarrow ۲(-۱)^۳-k(-۱)^۲-(-۱)+۳=۰\Rightarrow k=۲$$

پاسخ سؤالات ۵۱ تا ۵۳

۵۱

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2}=\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x}+1}{(x+1)(x+2)}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+2)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{3}$$

۵۲

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\tan x=\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin x}{\cos x}=-\infty$$

۵۳

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{-6x^3+7x-9}{2x^3-4x^2+x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-6x^3}{2x^3}=-3$$

پاسخ سؤال ۵۴

۵۴ با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{4x^2-5x+3}-2x+7}{3x-5}=\lim_{x\to -\infty}\frac{|2x|-2x}{3x}=\frac{-4x}{3x}=-\frac{4}{3}$$

۵۵

$$P(2)=3\Rightarrow 12+2m+2m+1=3\Rightarrow 4m=-10\Rightarrow m=-\frac{5}{2}$$

$$f(-2)=-\frac{5}{2}(-2)^2-(-\frac{5}{2})(-2)+3=-12$$

پاسخ سؤالات ۵۶ تا ۵۸

۵۶

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3-\sqrt{x+7}}\times\frac{3+\sqrt{x+7}}{3+\sqrt{x+7}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)\,(3+\sqrt{x+7})}{2-x}$$

$$=\lim_{x\to 2}-(x+2)(3+\sqrt{x+7})=-24$$

۵۷

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+1}{9-x^2}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

۵۸

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{10x^2+\sqrt{x^2+x}}{2x^3+1}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{10x^2}{2x^3}=\lim_{x\to \pm\infty}\frac{5}{x}=0$$

پاسخ سؤال ۵۹

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۵۹

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}+(x-1)(x-3)}{\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}+(x-1)(x+3)}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{\sqrt{x-1}}}{\cancel{\sqrt{x-1}}}\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}(x-3))}{(\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x-1}(x+3))}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

در اینجا، پس از تجزیهٔ عبارات، در صورت و مخرج از $\sqrt{x-1}$ فاکتور گرفتیم.

پاسخ سؤال ۶۰

۶۰

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1+\sin x}{\cos x}\times\underbrace{\frac{1-\sin x}{1-\sin x}}_{2}$$

$$=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{2\cos x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{2\cos x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\frac{\cos x}{2}=0$$

۶۱ الف

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-3x-2}{\sqrt{x+2}-2}\times\frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(2x^2-3x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x+2-4}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(2x+1)(\sqrt{x+2}+2)}{\cancel{x-2}}=5(4)=20$$

۶۲ الف

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=15$$

ب

$$f'(t)=6t^2+1\Rightarrow f'(2)=25$$

۶۳

$$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{3-2}{5}=\frac{1}{5}$$

۶۴ الف

E

ب

B

پ

C

ت

$m_D > m_A$

۶۵

$$f'(x)=\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{30-0}{3}=10$$

۶۶

$$y' = ۳x^{۲} - \frac{۱}{x^{۲}}$$

۶۷

$$y' = ۳ \times ۴ \times ۲ \times (۲x - ۵)^{۳} + \frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^{۲}}}$$

۶۸

$$m'(t) = \frac{۱}{۲\sqrt{t}} + ۲t \Rightarrow m'(۹) = \frac{۱۰۹}{۶}$$

۶۹ الف

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f(۴) - f(۰)}{۴ - ۰} = \frac{(-۳) - (۱)}{۴} = -۱$$

ب

$$f'(t) = t - ۳ \Rightarrow f'(۷) = ۴$$

۷۰ الف

$$x = b$$

ب

$$x = d$$

پ

$$x = c$$

۷۱ الف

نقطه	A	B	C	D
شیب	+	صفر، بدون علامت	−	−

ب چون $f'(x_A) > f'(x_D)$ و همچنین $|f'(x_A)| > |f'(x_D)|$ است، پس علامت $f'(x_A) + f'(x_D)$ مثبت می‌باشد.

۷۲

تابع در $x = ۰$ پیوسته است. $\lim\limits_{x \to ۰^{+}} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to ۰^{-}} -x^{۲} = ۰$

$$f'_{+}(۰) = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to ۰^{+}} \frac{۱}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$f'_{-}(۰) = \lim_{x \to ۰^{-}} \frac{-x^{۲}}{x} = \lim_{x \to ۰^{-}} (-x) = ۰$$

مشتق راست نامتناهی و مشتق چپ یک عدد، پس نقطهٔ $x = ۰$ نقطهٔ گوشه‌ای تابع است.

پاسخ سؤال ۷۳

۷۳ −۳۸

۷۴

$$f'_+(۱) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x+۱-۲}{x-۱} = ۱$$
$$f'_-(۱) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{x^۲+x-۲}{x-۱} = ۳$$

$f'_+(۱) \neq f'_-(۱)$ درنتیجه تابع در $x = ۱$ مشتق‌پذیر نیست.

۷۵ الف

$$\frac{f(۰)-f(-۲)}{۰+۲} = \frac{-۳+۲}{۲} = -\frac{۱}{۲}$$

ب

$$f'(x) = \frac{-۳x^۲+۱۲x+۶}{(x^۲+۲)^۲} \Rightarrow f'(-۱) = -۱$$

۷۶

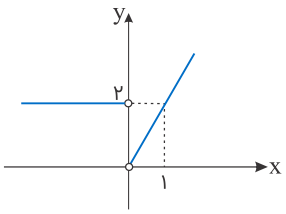
$$f'(۱) = ۲ \ , \ g'(۱) = -۱$$
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow h'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^۲}$$
$$\Rightarrow h'(۱) = \frac{f'(۱)\cdot g(۱) - g'(۱)\cdot f(۱)}{(g(۱))^۲}$$
$$\Rightarrow h'(۱) = \frac{۲(۳)-(-۱)(۲)}{(۳)^۲} \Rightarrow h'(۱) = \frac{۸}{۹}$$

۷۷ الف تابع f در صفر پیوسته نیست، بنابراین $f'(۰)$ موجود نیست.

ب

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x & ; x > ۰ \\ ۲ & ; x < ۰ \end{cases}$$

پ



نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۷۸

$$f'(x)=\frac{-۲}{۲\sqrt{۶-۲x}}\Rightarrow D_{f'}=(-\infty,۳)$$

۷۹

$$S(r)=\pi r^{۲},\ P(r)=۲\pi r\Rightarrow S(P)=\frac{۱}{۴\pi}P^{۲}\Rightarrow S'(P)=\frac{P}{۲\pi}$$
$$\Rightarrow S'(۳\pi)=\frac{۳}{۲}$$

۸۰

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{x|x^{۲}-۲x|-۰}{x-۲}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x|x^{۲}-۲x|-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^{+}}\dfrac{x(x^{۲}-۲x)}{x-۲}=۴\\ \lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{x|x^{۲}-۲x|-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^{-}}\dfrac{-x(x^{۲}-۲x)}{x-۲}=-۴\end{cases}$$

چون $f'_{-}(۲)\neq f'_{+}(۲)$ پس تابع f در $x=۲$ مشتق ندارد.

۸۱

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۲}{x}-\frac{۲}{۳}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۶-۲x}{۳x}}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{-۲}{۳x}=-\frac{۲}{۹}$$

۸۲

$$f'(۴)=m_{AB}\Rightarrow ۱/۵=\frac{y_B-۲۴}{۱}\Rightarrow y_B=۲۵/۵$$

$$f'(۴)=m_{AC}\Rightarrow\frac{y_C-۲۴}{-۱}=۱/۵\Rightarrow y_C=۲۲/۵$$

$$A\begin{vmatrix}۴\\ ۲۴\end{vmatrix},\quad B\begin{vmatrix}۵\\ ۲۵/۵\end{vmatrix},\quad C\begin{vmatrix}۳\\ ۲۲/۵\end{vmatrix}$$

۸۳

$$\begin{cases}\text{آهنگ متوسط}=\dfrac{f(۳)-f(۲)}{۳-۲}=\dfrac{۳۶}{۹}-\dfrac{۳۶}{۴}=۳۶(\dfrac{-۵}{۳۶})=-۵\\ f'(x)=\dfrac{-۷۲}{x^{۳}}\Rightarrow f'(\sqrt[۳]{۱۲})=\dfrac{-۷۲}{۱۲}=-۶\end{cases}\Rightarrow -۵-(-۶)=۱$$

آهنگ متوسط تابع یک واحد از آهنگ لحظه‌ای بیشتر است.

پاسخ سؤال ۸۴

۸۴

$$f'(x)=۹(۱۵x^{۲}-۱)(۵x^{۳}-x)^{۸}(\sqrt{۲x+۱})+(\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۱}})(۵x^{۳}-x)^{۹}$$

۸۵

$$f'(x)=\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}=\frac{f(۵)-f(۱)}{۵-۱}=\frac{(۲۵-۵+۳)-(۱-۱+۳)}{۴}=۵$$

۸۶

$$f'(x)=\frac{۳}{۲\sqrt{x}}(۱+\sqrt{x})^{۲}\Rightarrow D_{f'}=(۰,+\infty)$$

۸۷

$$(fg)'(۲)=f'(۲)g(۲)+f(۲)g'(۲)=۱\times(-۳)+۳\times۲=۳$$
$$(f+g)'(۲)=f'(۲)+g'(۲)=۳$$

۸۸

$$f'_{+}(۲)=\lim_{x\to۲^{+}}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to۲^{+}}\frac{|x^{۲}-۴|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to۲^{+}}\frac{x^{۲}-۴}{x-۲}=\lim_{x\to۲^{+}}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=۴$$

$$f'_{-}(۲)=\lim_{x\to۲^{-}}\frac{-(x^{۲}-۴)}{x-۲}=\lim_{x\to۲^{-}}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=-۴$$

$\Rightarrow f'_{+}(۲)\neq f'_{-}(۲)\Rightarrow$ تابع در این نقطه مشتق‌پذیر نیست

۸۹

$$f(۰)=۰\ ,\ \lim_{x\to۰}x[x]=۰$$

پس f در $x=۰$ پیوسته است.

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}=\lim_{x\to۰}\frac{x[x]}{x}=\lim_{x\to۰}[x]$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f'_{+}(۰)=\lim\limits_{x\to۰^{+}}[x]=۰\\ f'_{-}(۰)=\lim\limits_{x\to۰^{-}}[x]=-۱\end{cases}$$

۹۰

$$m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲\qquad\frac{۱۰-۰}{۴-۰}=\frac{۵}{۲}$$
$$\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲=\frac{۵}{۲}\Rightarrow\sqrt{t}=۱\Rightarrow t=۱$$

.

۹۱

الف A

ب C

۹۲

$$(۳f+۲g)'(۱)=۳f'(۱)+۲g'(۱)=۹+۱۰=۱۹$$

پاسخ سؤال ۹۳

۹۳

$$g'(x) = -\frac{۱}{۳}\left(\frac{۳x^۲ - x}{x^۲ + ۱}\right)^{-\frac{۴}{۳}} \times \frac{(۶x - ۱)(x^۲ + ۱) - ۲x(۳x^۲ - x)}{(x^۲ + ۱)^۲}$$

۹۴

$$f'(۲) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(۲ + h) - f(۲)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{-(۲ + h)^۲ + ۱۰(۲ + h) - ۱۶}{h}$$

$$= \lim_{h \to ۰} \frac{-h^۲ - ۴h - ۴ + ۲۰ + ۱۰h - ۱۶}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{-h^۲ + ۶h}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{h(۶ - h)}{h} = \lim_{h \to ۰} (۶ - h) = ۶$$

شیب خط مماس در نقطهٔ A $= f'(۲) = ۶$

$A\,(۲, f(۲)) = (۲, ۱۶)$

$y - ۱۶ = ۶(x - ۲) \Rightarrow y = ۶x + ۴$

۹۵

(محیط دایره) $P = ۲\pi R$

(مساحت دایره) $S = \pi R^۲ \Rightarrow R^۲ = \frac{S}{\pi} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}$

$$P = ۲\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow P'(S) = ۲\pi \frac{۱}{۲\sqrt{\pi S}} \xrightarrow{S = ۲\pi} \frac{\pi}{\sqrt{\pi \times ۲\pi}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۹۶

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ - x^۲ & ; x \geq ۱ \\ -x^۳ + x^۲ & ; x < ۱ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۳x^۲ - ۲x & ; x > ۱ \\ -۳x^۲ + ۲x & ; x < ۱ \end{cases}$$

چون $f'_+(۱) \neq f'_-(۱)$ پس دامنهٔ مشتق تابع برابر است با: $D_{f'} = \mathbb{R} - \{۱\}$

۹۷

الف تابع f دو ضابطهٔ خطی دارد.

$$O(۰,۰), A(۲,۴) \Rightarrow m_{AO} = \frac{۴-۰}{۲-۰} = ۲$$
$$AO: y = ۲x$$
$$A(۲,۴), B(۴,۰) \Rightarrow m_{AB} = \frac{۴-۰}{۲-۴} = -۲$$
$$AB: y - ۰ = -۲(x-۴) \Rightarrow y = -۲x + ۸$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & ;۰ \le x \le ۲ \\ ۸-۲x & ;۲ < x \le ۴ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲ & ;۰ \le x < ۲ \\ -۲ & ;۲ < x \le ۴ \end{cases} \Rightarrow f'(۲) = \text{وجود ندارد}$$

تابع g هم خطی است.

$$C(۰,۴), D(۴,۰) \Rightarrow m_{CD} = -۱ \Rightarrow CD: y = ۴ - x$$
$$\Rightarrow g(x) = ۴ - x \;;۰ \le x \le ۴ \Rightarrow g'(x) = -۱$$

$$h(x) = f(x).g(x) \Rightarrow h'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$
$$h'(۱) = f'(۱)g(۱) + g'(۱)f(۱) = ۲ \times ۳ + (-۱)(۲) = ۴$$
$$h'(۲) = f'(۲)g(۲) + g'(۲)f(۲) = \text{وجود ندارد}$$
$$h'(۳) = f'(۳)g(۳) + g'(۳)f(۳) = (-۲)(۱) + (-۱)(۲) = -۴$$

ب

$$O(۰,۰), A(۲,۴) \Rightarrow m_{AO} = \frac{۴-۰}{۲-۰} = ۲$$
$$AO: y = ۲x$$
$$A(۲,۴), B(۴,۰) \Rightarrow m_{AB} = \frac{۴-۰}{۲-۴} = -۲$$
$$AB: y - ۰ = -۲(x-۴) \Rightarrow y = -۲x + ۸$$

$$f(x) = \begin{cases} ۲x & ;۰ \le x \le ۲ \\ ۸-۲x & ;۲ < x \le ۴ \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} ۲ & ;۰ \le x < ۲ \\ -۲ & ;۲ < x \le ۴ \end{cases} \Rightarrow f'(۲) = \text{وجود ندارد}$$

تابع g هم خطی است.

$$C(۰,۴), D(۴,۰) \Rightarrow m_{CD} = -۱ \Rightarrow CD: y = ۴ - x$$
$$\Rightarrow g(x) = ۴ - x \;;۰ \le x \le ۴ \Rightarrow g'(x) = -۱$$

$$k(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow k'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^۲}$$
$$k'(۱) = \frac{۲ \times ۳ - (-۱)(۲)}{۳^۲} = \frac{۸}{۹}$$

$$k'(۲) = \text{وجود ندارد}$$
$$k'(۳) = \frac{(-۲)(۱) - (-۱)(۲)}{(۱)^۲} = ۰$$

۹۸

$$f'(x)=\begin{cases}۲x+\frac{۲}{\sqrt{x}} & ;x>۱\\ ۶x^{۲}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^{۲}}} & ;-۱<x<۱\\ ۳ & ;x<-۱\end{cases}$$

چون $f'_{-}(۱)\neq f'_{+}(۱)$ و $f'_{-}(-۱)\neq f'_{+}(-۱)$ و $f'(۰)=-\infty$ پس دامنهٔ مشتق تابع f برابر است با:

$$D_{f'}=\mathbb{R}-\{۰,\pm۱\}$$

۹۹

گزینه ۲

جعبهٔ ابزار:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}-۱ & ;x\notin\mathbb{Z}\\ ۰ & ;x\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

تابع $f(x)=x([x]+[-x])$ روی $\mathbb{Z}-\{۰\}$ ناپیوسته و مشتق‌ناپذیر است. این تابع در $x=۰$ پیوسته است. به روش زیر مشتق آن را می‌یابیم:

$$f'(۰)=\lim_{x\to۰}\frac{f(x)-f(۰)}{x-۰}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{x([x]+[-x])-۰}{x}=\lim_{x\to۰}[x]+[-x]=-۱$$

همچنین داریم:

$$x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow f(x)=x([x]+[-x])=-x\Rightarrow f'(x)=-۱$$

بنابراین مشتق تابع روی $(\mathbb{R}-\mathbb{Z})\cup\{۰\}$ برابر -۱ و در $\mathbb{Z}-\{۰\}$ مشتق وجود ندارد.

چالش سؤال: تشخیص مشتق‌پذیری تابع‌های براکتی

۱۰۰ گزینه ۴

جعبهٔ ابزار: مشتق تابع مرکب، به این شکل است:

$$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

شیب خط مماس بر نمودار fog در نقطهٔ به طول $x = -۲$ واقع بر آن، برابر با مشتق fog در این نقطه است. از طرفی:

$$(fog)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x)) \Rightarrow (fog)'(-۲) = g'(-۲) \cdot f'(g(-۲))$$

$g(x) = x^۳ + ۱$ پس $g(-۲) = -۸ + ۱ = -۷$ و درنتیجه:

$$(fog)'(-۲) = g'(-۲).f'(-۷)$$

$g'(x) = ۳x^۲$ پس $g'(-۲) = ۳(-۲)^۲ = ۱۲$. همچنین $f(x) = x^۲ - ۲x$ و $f'(x) = ۲x - ۲$ که از آن به دست می‌آید:

$$f'(-۷) = ۲(-۷) - ۲ = -۱۶$$

یعنی:

$$(fog)'(-۲) = ۱۲ \times (-۱۶) = -۱۹۲$$

شیب خط مماس را پیدا کردیم. عرض نقطهٔ به طول $x = -۲$ واقع بر منحنی fog را هم پیدا کنیم:

$$(fog)(-۲) = f(g(-۲)) = f(-۷) = (-۷)^۲ - ۲(-۷) = ۶۳$$

معادلهٔ خط مماس مورد نظر دارای شیب -۱۹۲ و گذرا از نقطهٔ $(-۲, ۶۳)$ به صورت زیر است:

$$y - y_۰ = m(x - x_۰) \Rightarrow y - ۶۳ = -۱۹۲(x - (-۲)) \Rightarrow y = -۱۹۲x - ۳۲۱$$

عرض از مبدأ این خط، -۳۲۱ می‌باشد.

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۰۱ گزینه ۴

جعبهٔ ابزار:

$$f'_+(a) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'_-(a) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

از حد هوپیتال می‌گیریم:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1-h)-f(1-2h)}{h}$$

$$\overset{HOP}{=\!=} \lim_{h\to 0^+} \frac{-f'(1-h)+2f'(1-2h)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} -f'(x) + \lim_{x\to 1^-} 2f'(x) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x = 2$$

دقت کنید: مشتق چپ تابع در $x = 1$ به دلیل ناپیوستگی وجود ندارد ولی حاصل حد خواسته‌شده موجود است. به روش کلاسیک و تشریحی زیر توجه فرمایید:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1-h)-f(1-2h)}{h}$$

$$\xrightarrow[1-2h<1]{1-h<1} \lim_{h\to 0^+} \frac{((1-h)^2-1)-((1-2h)^2-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h^2-2h)-(1+4h^2-4h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h-3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} 2-3h = 2$$

جالب نبود؟!!

چالش سؤال: تشخیص مشتق چپ و راست از روی تعریف

۱۰۲ گزینه ۱

$$y = \frac{1}{f} \Rightarrow y' = \frac{-f'(x)}{f^2(x)} \Rightarrow \begin{cases} y'_+(a) = \dfrac{-f'_+(a)}{f^2(a)} = +\infty \\ y'_-(a) = \dfrac{-f'_-(a)}{f^2(a)} = -\infty \end{cases}$$

باتوجه‌به مشتق چپ و راست $y = \frac{1}{f}$، گزینهٔ ۱ صحیح است. چون نیم‌مماس راست از زوایای کمتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود، بنابراین شیب آن به $+\infty$ میل می‌کند ولی نیم‌مماس چپ از زوایای بیشتر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود که شیب آن به $-\infty$ میل می‌کند.

۱۰۳ گزینه ۴

برای $x > ۴$ عبارت $x^۲ + ۳x$ مثبت است، پس تابع به‌صورت زیر خلاصه می‌شود.

$$f(x) = \begin{cases} |x - ۳| & ; x \leq ۴ \\ x^۲ + ۳x - ۲۷ & ; x > ۴ \end{cases}$$

این تابع در $x = ۴$ پیوسته است، زیرا:

$$f(x) = \lim_{x \to ۴} f(x) = ۱$$

این تابع در $x = ۴$ نقطه‌ای گوشه‌ای دارد، زیرا $f'_+(۴) \neq f'_-(۴)$، همچنین در $x = ۳$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد. پس تابع $f(x)$ در نقاط $(۱ , ۴)$ و $(۰ , ۳)$ نقطهٔ گوشه‌ای دارد و درنتیجه عرض نقاط گوشه‌ای تابع $۲f(x+۱) + ۲$ برابر است با:

$$y_۱ = ۲ \times ۱ + ۲ = ۴ \ , \ y_۲ = ۲ \times ۰ + ۲ = ۲$$

مجموع عرض‌ها برابر ۶ است.

۱۰۴ گزینه ۱

با مشتق ترکیب توابع مواجه‌ایم:

$$g'(x) = (f(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱)))' \xrightarrow{\text{مشتق مرکب}} \underbrace{(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))'}_{*} f'(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))$$

برای محاسبهٔ عبارت $*$ داریم:

$$(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))' = ۴x^۳ - \underbrace{(f(x^۳ + x^۲ + ۱))'}_{**}$$

و حالا برای محاسبهٔ عبارت $**$ داریم:

$$(f(x^۳ + x^۲ + ۱))' \xrightarrow{\text{مشتق مرکب}} (۳x^۲ + ۲x) f'(x^۳ + x^۲ + ۱)$$

پس عبارت $*$ به این صورت است:

$$۴x^۳ - (۳x^۲ + ۲x) f'(x^۳ + x^۲ + ۱)$$

و لذا داریم:

$$g'(x) = (۴x^۳ - (۳x^۲ + ۲x) f'(x^۳ + x^۲ + ۱)) f'(x^۴ - f(x^۳ + x^۲ + ۱))$$

حالا برای رسیدن به $g'(۰)$، با جایگذاری $x = ۰$ در رابطهٔ اخیر داریم:

$$g'(۰) = (۰ - (۰) f'(۱)) f'(۰ - f(۱)) = ۰$$

دقت دارید که $f'(۰) = -۲$ و $f'(۱) = ۱$ که در صورت سؤال داده‌شده، کاملاً سرکاری است.

۱۰۵ گزینه ۳

تابع $f(x)=x[x]$ در نقاط صحیح به غیر از $x=0$ مشتق‌ناپذیر است، پس f روی $\mathbb{Z}-\{0\}$ ناپیوسته است، ضمناً $f(x)$ در $x=0$ مشتق‌ناپذیر است، برای xهای غیر صحیح مشتق تابع $x[x]$ برابر $[x]$ است.

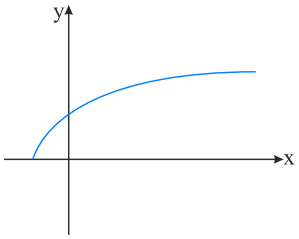
$$f(x)=x[x] \Rightarrow f'(x)=[x] \;;\; x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$$

۱۰۶ گزینه ۴

محاسبهٔ آهنگ تغییر مشکل است، ازطرفی تابع در نقطهٔ $x=2$ مشتق‌پذیر است و باتوجه‌به کوتاه‌بودن طول بازه، آهنگ متوسط خواسته‌شده بسیار نزدیک به آهنگ لحظه‌ای در نقطهٔ $x=2$ است.

$$f(x)=\sqrt[3]{4x+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3\times 4}{2\sqrt[3]{4x+1}} \Rightarrow f'(2)=2$$

پس پاسخ گزینهٔ "۲" یا "۴" است. ازطرفی باتوجه‌به نمودار تابع، آهنگ تغییر در این تابع نزولی است، پس پاسخ گزینهٔ "۴" می‌باشد.



$$f(x)=\sqrt[3]{4x+1}$$

۱۰۷ گزینه ۴

نکته: اگر $g(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد، آنگاه تابع $f(x)=\sqrt[3]{g(x)}$ در ریشه‌های سادهٔ معادلهٔ $g(x)=0$ دارای مماس قائم است.
در اینجا $x=1$ و $x=b$ ریشه‌های داخل رادیکال هستند:

$$x^2+ax+2=0 \xrightarrow[\text{هستند}]{\text{ریشه‌ها ۱ و b}} \begin{cases} \text{ضرب ریشه‌ها}: 1\times b=2 \\ \text{جمع ریشه‌ها}: 1+b=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=-3 \end{cases}$$

درنتیجه:

$$a-b=-3-2=-5$$

گزینه ۳

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ "۱": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) < 0$ و $y > 0$؛ پس برابر نیست.

گزینهٔ "۲": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y < 0$؛ پس برابر نیست.

گزینهٔ "۳": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

گزینهٔ "۴": به ازای $x > 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y > 0$؛ پس تابع و مشتق آن می‌تواند برابر باشد.

به ازای $x < 0 \leftarrow f'(x) > 0$ و $y < 0$؛ پس برابر نیست.

۱۰۹ گزینه ۱

راه‌حل اول:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-۲h)-f(۳-۵h)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-۲h)-f(۳-۵h)-f(۳)+f(۳)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۳-۲h)-f(۳)}{h}\right)-\lim_{h\to ۰}\left(\frac{f(۳-۵h)-f(۳)}{h}\right)$$

برای محاسبهٔ $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-۲h)-f(۳)}{h}$ از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$-۲h=t\Rightarrow\begin{cases}h=-\frac{t}{۲}\\ h\to ۰\Rightarrow t\to ۰\end{cases}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-۲h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+t)-f(۳)}{-\frac{t}{۲}}=-۲\lim_{t\to ۰}\frac{f(۳+t)-f(۳)}{t}=-۲f'(۳)$$

برای محاسبهٔ $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-۵h)-f(۳)}{h}$ نیز به روش بالا عمل می‌کنیم:

$$-۵h=t\Rightarrow\begin{cases}h=-\frac{t}{۵}\\ h\to ۰\Rightarrow t\to ۰\end{cases}$$

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-۵h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+t)-f(۳)}{-\frac{t}{۵}}=-۵\lim_{t\to ۰}\frac{f(۳+t)-f(۳)}{t}=-۵f'(۳)$$

پس حالا عبارت داده‌شده برابر است با:

$$-۲f'(۳)-(-۵f'(۳))=۳f'(۳)=۳\times ۴=۱۲$$

راه‌حل دوم:

نکته:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+mh)-f(a+nh)}{kh}=\left(\frac{m-n}{k}\right)f'(a)$$

بنابراین:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳-۲h)-f(۳-۵h)}{h}=\left(\frac{-۲-(-۵)}{۱}\right)f'(۳)=۳f'(۳)=۱۲$$

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۱۰ گزینه ۲

راه اول:

چون تابع $[-x]$ در $x_0 = ۲$ ناپیوسته است، پس تابعی که در آن ضرب می‌شود باید عامل $(x-۲)^۲$ داشته باشد (چرا؟) تا هم پیوسته و پس از آن مشتق‌پذیر شود.

بنابراین:

$$۳(x-۲)^۲ = ۳x^۲ + ax + b$$

بعد از صفر قرار دادن به دست می‌آید:

$$a = -۱۲$$
$$b = ۱۲$$

۱۱۱ گزینه ۲

ابتدا پیوستگی تابع را در نقطهٔ مرزی $x = ۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to ۱^+} |x-۲| = |۱-۲| = ۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} \sqrt[۵]{x^۲ - ۴x} = \sqrt[۵]{-۳}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{در } x=۱ \text{ ناپیوسته است} \Rightarrow \text{در } x=۱ \text{ مشتق‌ناپذیر است}$$

نکته: تابع قدرمطلق در ریشه مرتبه یک داخل قدرمطلق مشتق‌ناپذیر است.

$$x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۲ \Rightarrow \text{تابع در } x=۲ \text{ مشتق‌ناپذیر است}$$

نکته: در توابع رادیکالی با فرجهٔ فرد، تابع در ریشه‌های عبارت زیر رادیکال مشتق‌ناپذیر است (البته به شرطی که مرتبهٔ (توان) آن ریشه از فرجه رادیکال بیشتر نباشد).

$$x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(x-۴) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۴ \end{cases}$$

تابع در $x = ۰$ مشتق‌ناپذیر است. تابع در $x = ۴$ نیز مشتق‌ناپذیر است ولی چون $x = ۴$ در بازه $x \le ۱$ قرار ندارد قابل قبول نیست.

پس تابع در ۳ نقطه مشتق‌ناپذیر است.

پاسخ سؤالات ۱۱۲ تا ۱۱۵

۱۱۲ ۶

۱۱۳ ۴−

۱۱۴ ۴

۱۱۵ ۲

پاسخ سؤال ۱۱۶

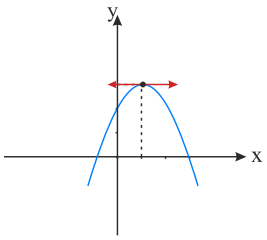
۱۱۶ ماکزیمم نسبی

۱۱۷ الف

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow -۲x + ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

ب طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{۲a} = ۱$ است، پس:

$$\text{عرض رأس} = f(۱) = -۱ + ۲ + ۲ = ۳$$



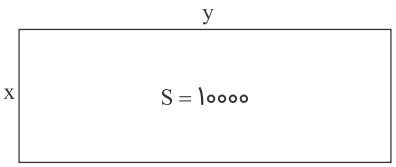
باتوجه‌به نمودار، در $x = ۱$ مماس بر تابع خطی افقی است، پس همین نقطه، نقطهٔ بحرانی تابع است.

۱۱۸ الف) مثبت

ب) منفی، منفی

پ) صفر

۱۱۹ الف



$$S = xy = ۱۰۰۰۰ \Rightarrow y = \frac{۱۰۰۰۰}{x}$$

$$\text{هزینه ساخت دیوارها} = C = ۲(۲y + ۸x) = ۴(y + ۴x) = ۴(\frac{۱۰۰۰۰}{x} + ۴x)$$

$$\Rightarrow C(x) = ۴(\frac{۱۰۰۰۰}{x} + ۴x) = ۱۶(\frac{۲۵۰۰}{x} + x)$$

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

ب

$$C'(x) = ۱۶(\frac{-۲۵۰۰}{x^۲} + ۱) = ۱۶(\frac{x^۲ - ۲۵۰۰}{x^۲}) = ۰ \Rightarrow x = ۵۰ \quad (x > ۰)$$

x	۰		۵۰		$+\infty$
$C'(x)$	‖	$-$	۰	$+$	
$C(x)$	‖ $+\infty$	↘	۱۶۰۰	↗	$+\infty$

پس باید ابعاد زمین $x = ۵۰$ و $y = ۲۰۰$ انتخاب شود تا هزینه حداقل شود. حداقل هزینه هم ۱۶۰۰ میلیون تومان یعنی یک میلیارد و ششصد میلیون تومان می‌باشد.

۱۲۰ الف

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲$$
$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = \pm ۲ \text{ نقاط بحرانی}$$

x		-۲		۲	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↗		↘		↗

$$f(۲) = ۸ - ۲۴ + ۴ = -۱۲ \Rightarrow \text{مینیمم نسبی} : \ (۲, -۱۲)$$
$$f(-۲) = -۸ + ۲۴ + ۴ = ۲۰ \Rightarrow \text{ماکزیمم نسبی} : \ (-۲, ۲۰)$$

ب

$$[-۲, ۲]$$

۱۲۱

$$f'(x) = -۴x^۳ + a \xrightarrow{f'(۱)=۰} -۴ + a = ۰ \Rightarrow a = ۴$$
$$f(۱) = ۲ \Rightarrow -۱ + ۴ + b = ۲ \Rightarrow b = -۱$$

۱۲۲

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳ = ۰ \quad \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$
$$f(-۱) = ۹$$
$$f(۱) = ۵ \quad \Rightarrow \quad \max : (۳, ۲۵), \quad \min : (۱, ۵)$$
$$f(۳) = ۲۵$$

پاسخ سؤال ۱۲۳

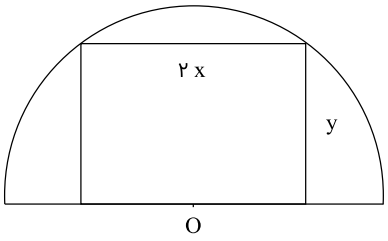
۱۲۳ مثبت

۱۲۴

$f'(۲) = ۰ \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ + ۲bx \Rightarrow b = -۳$

$f(۲) = ۱ \Rightarrow ۸ + (-۱۲) + d = ۱ \Rightarrow d = ۵$

۱۲۵



$y^۲ = ۱۶ - x^۲ \Rightarrow S(x) = ۲x(\sqrt{۱۶ - x^۲})$

$S'(x) = \frac{۳۲ - ۴x^۲}{\sqrt{۱۶ - x^۲}} = ۰ \qquad x = \sqrt{۸}\ ,\ y = \sqrt{۸}$

طول $۲\sqrt{۸}$ ، عرض $\sqrt{۸}$

۱۲۶

$f'(x) = ۰ \Rightarrow ۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$

x		-۱		$+۱$	
$f'(x)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$
	↗		↘		↗

اکیداً صعودی : $(-\infty, -۱), (۱, +\infty)$

اکیداً نزولی : $(-۱, +۱)$

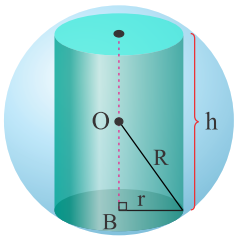
۱۲۷

$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \quad \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۳ \end{cases}$

x		-۳		۱	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↗	۱۷ max	↘	-۱۵ min	↗

نوتروفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۲۸



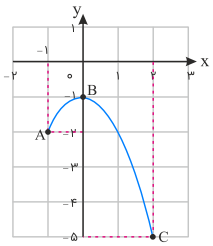
$$V_{\text{استوانه}} = \pi r^{۲} h \quad , \quad R = ۶cm$$

$$r^{۲} = R^{۲} - OB^{۲} = R^{۲} - (\frac{h}{۲})^{۲} = ۳۶ - \frac{۱}{۴}h^{۲}$$

$$V = \pi h(۳۶ - \frac{۱}{۴}h^{۲}) \Rightarrow V'(h) = \pi(۳۶ - \frac{۳}{۴}h^{۲}) = ۰$$

$$h^{۲} = ۴۸ \Rightarrow h = ۴\sqrt{۳}\,cm$$

۱۲۹



مشتق تابع $g(x) = -x^{۲} - ۱$ به ازای صفر، برابر صفر است، یعنی $g'(۰) = ۰$. بنابراین نقطهٔ $B(۰, -۱)$ نقطهٔ بحرانی تابع g است. همچنین نقاط $A(-۱, -۲)$ و $C(۲, -۵)$ نیز نقاط بحرانی هستند.

۱۳۰

الف) باتوجه‌به نمودار، تابع در $x = ۱$ ماکزیمم نسبی و در $x = -۱$ مینیمم نسبی دارد.

ب) ریشه‌های مشتق، نقاطی هستند که مماس در آن نقاط افقی است (مشتق در آن نقاط صفر است)، پس $x = ۱$ و $x = -۱$ نقاط بحرانی تابع هستند.

پ) طبق قضیهٔ فرما چون تابع f مشتق‌پذیر است، پس نقاط بحرانی در ریشه‌های مشتق رخ می‌دهد.

۱۳۱

$$f(x) = ۲x^{۳} - ۳x^{۲} + ۱ \Rightarrow f'(x) = ۶x^{۲} - ۶x = ۰$$

$$۶x(x-۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases} \quad (\text{نقاط بحرانی})$$

همچنین نقاط انتهایی بازه یعنی ۱- و ۳ نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند، پس:

x	-۱	۰	۱	۳
f(x)	-۴	۱	۰	۲۸

پس $\max f(x) = ۲۸$ و $\min f(x) = -۴$ است.

۱۳۲

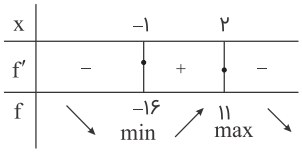
$$P_{\text{مستطیل}} = ۲(a+b) = ۱۰۰ \Rightarrow a + b = ۵۰ \Rightarrow b = ۵۰ - a$$

$$S_{\text{مستطیل}} = ab = a(۵۰ - a) = -a^{۲} + ۵۰a$$

$$S = \max \Rightarrow S'(a) = ۰ \Rightarrow ۵۰ - ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۲۵ \Rightarrow b = ۲۵$$

۱۳۳ الف

$$f'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۲ \end{cases}$$



ب

$f(۰) = -۹ \quad \min$

$f(۲) = ۱۱ \quad \max$

$f(۳) = ۰$

۱۳۴

$$p = xy = ۵x^۲ - ۱۰x \Rightarrow p'(x) = ۰ \Rightarrow ۱۰x - ۱۰ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ y = -۵ \end{cases}$$

۱۳۵ گزینهٔ ت صحیح است. مشتق سهمی، تابع خطی (غیرثابت) است. چون طول نقطهٔ مینیمم، منفی است پس f' محور xها را در ناحیهٔ $x < ۰$ قطع می‌کند.

۱۳۶

$$V(x) = (۱ - ۲x)^۲ \times x = x - ۴x^۲ + ۴x^۳$$

$$V'(x) = ۱ - ۸x + ۱۲x^۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \ , \ x = \frac{۱}{۶}$$

$x = \frac{۱}{۶}$ قابل‌قبول است.

۱۳۷

$$f'(x) = ۲ax + b \Rightarrow ۰ = ۲a + b \Rightarrow b = -۲a$$

$$f(۱) = ۷ \Rightarrow ۷ = a + b \Rightarrow a = -۷ \ , \ b = ۱۴$$

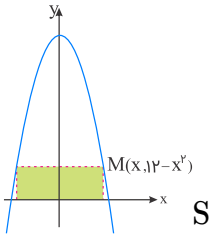
۱۳۸

$$h = \frac{۳۰۰}{r^۲} \ , \ S = \frac{۱۸۰۰}{r} + ۳r^۲$$

$$S' = \frac{-۱۸۰۰}{r^۲} + ۶r = ۰ \Rightarrow r = \sqrt[۳]{۳۰۰} \Rightarrow h = \sqrt[۳]{۳۰۰}$$

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۳۹



نقطه M را روی منحنی انتخاب می‌کنیم. مساحت مستطیل را حساب می‌کنیم:

$$S = ۲x(۱۲ - x^۲) = ۲۴x - ۲x^۳$$

$$S(x) = ۲۴x - ۲x^۳ \Rightarrow S'(x) = ۲۴ - ۶x^۲ = ۰ \xrightarrow{x>۰} x = ۲$$

x	۰		۲		$+\infty$
$S'(x)$		+	۰	−	
$S(x)$	۰	↗	۳۲	↘	$-\infty$

$$S(۲) = ۴(۱۲ - ۴) = ۳۲$$

پس طول و عرض مستطیل به ترتیب برابر با ۸ و ۴ هستند و بیشترین مساحت برابر ۳۲ است.

۱۴۰ نقطه‌ای از ساحل را که آرتا پیاده می‌شود، D می‌نامیم. می‌دانیم اگر x مسافت طی شده با سرعت ثابت v در مدت‌زمان t باشد، رابطهٔ $x = vt$ یا معادل آن $t = \frac{x}{v}$ برقرار است. بنابراین:

زمان پارو زدن مسیر P تا D : $t_۱ = \frac{PD}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲ + ۹}$

زمان پیاده‌روی مسیر D تا B : $t_۲ = \frac{DB}{۴} = \frac{۸ - x}{۴} = ۲ - \frac{۱}{۴}x$

زمان کل رسیدن از P به B : $t = t_۱ + t_۲$

$$t(x) = \frac{۱}{۲}\sqrt{x^۲ + ۹} + ۲(۲ - \frac{۱}{۴}x) \quad ; x \in [۰, ۸]$$

به دنبال یافتن مقدار مینیمم مطلق t هستیم. نقطهٔ بحرانی t را به دست می‌آوریم.

$$t'(x) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲ + ۹}} - \frac{۱}{۴} = \frac{۲x - \sqrt{x^۲ + ۹}}{۴\sqrt{x^۲ + ۹}}$$

$$t'(x) = ۰ \Rightarrow ۲x - \sqrt{x^۲ + ۹} = ۰ \Rightarrow ۴x^۲ = x^۲ + ۹ \Rightarrow x = \sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳ \ (km)$$

بنابراین نقاط به طول $\sqrt{۳}$، ۰ و ۸ نقاط بحرانی بازهٔ $[۰, ۸]$ است.

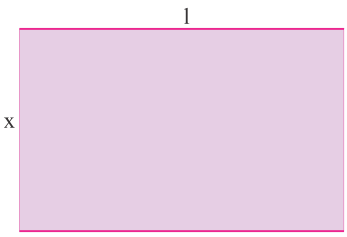
جدول تغییرات $t(x)$ به‌صورت زیر است:

x	۰		$\sqrt{۳}$		۸
$t'(x)$		−	۰	+	
$t(x)$ بر حسب ساعت	۳/۵	↘	$\frac{۸ + ۳\sqrt{۳}}{۴} \simeq ۳/۳$ مینیمم مطلق t	↗	$\frac{\sqrt{۷۳}}{۲} \simeq ۴/۲۷$

از جدول ملاحظه می‌شود که اگر x یعنی فاصله D از A، برابر $\sqrt{۳} \simeq ۱/۷۳$ کیلومتر انتخاب شود، زمان رسیدن آرتا از P به B کم‌ترین زمان ممکن یعنی تقریباً ۳/۳ ساعت معادل سه ساعت و ۱۸ دقیقه خواهد بود.

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۴۱ فرض کنیم ابعاد مستطیل x و l باشند. کمیتی که قرار است ماکزیمم شود، مساحت مستطیل زیر است:



$$S = x.l \quad (۱)$$

برای آنکه S به‌صورت تابعی از x بیان شود، می‌توانیم l را برحسب x به دست آوریم:

$$\text{محیط مستطیل} : P = ۱۴$$

$$۲(s + l) = ۱۴ \Rightarrow x + l = ۷ \Rightarrow l = ۷ - x \quad (۲)$$

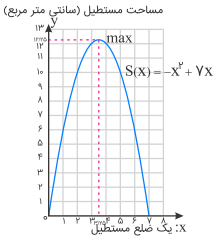
با جایگذاری رابطهٔ (۲) در (۱) خواهیم داشت:

$$S(x) = x(۷ - x)$$
$$S(x) = -x^{۲} + ۷x \quad ; x \in [۰, ۷]$$

همچنین ابتدا و انتهای بازه یعنی ۰ و ۷ نیز نقاط بحرانی محسوب می‌شوند.
ازآنجاکه S روی بازهٔ $(۰, ۷)$ مشتق‌پذیر است، برای یافتن بقیهٔ نقاط بحرانی آن کافی است ریشهٔ معادلهٔ $S'(x) = ۰$ را بیابیم.

$$S'(x) = ۰ \Rightarrow -۲x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = ۳/۵ \quad \text{(طول نقطهٔ بحرانی تابع)}$$

بنابراین نقاط به طول ۳/۵، ۷ و ۰ نقاط بحرانی بازهٔ $[۰, ۷]$ است.
جدول تغییرات تابع S در بازهٔ موردنظر به‌شکل زیر است:



x	۰		۳/۵		۷
$S'(x) = -۲x + ۷$		+	۰	−	
$S(x) = -x^{۲} + ۷x$	۰	↗	۱۲/۲۵ ماکزیمم مطلق	↘	۰

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

از جدول دیده می‌شود که بیشترین مقدار مساحت، ۱۲/۲۵ سانتی‌متر مربع است و این مقدار زمانی حاصل می‌شود که طول و عرض مستطیل هم‌اندازه و مساوی ۳/۵ سانتی‌متر باشند؛ یعنی یک مربع به ضلع ۳/۵ سانتی‌متر داشته باشیم.

پاسخ سؤالات ۱۴۲ تا ۱۴۴

۱۴۲

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x - ۹ = ۰ \Rightarrow ۳(x+۳)(x-۱) = ۰ \Rightarrow x = ۱, -۳$$

x	$-\infty$	-۳	۱	$+\infty$
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
یکنوایی f	$-\infty$ ↗	۱۷ ↘	-۱۵ ↗	$+\infty$

پس نقطهٔ $(-۳, ۱۷)$ ماکزیمم نسبی و نقطهٔ $(۱, -۱۵)$ مینیمم نسبی f است. دو نقطهٔ $(-۳, ۱۷)$ و $(۱, -۱۵)$ نقاط بحرانی هستند.

۱۴۳

$$g'(x) = -۶x^۲ + ۶x + ۱۲ = ۰ \Rightarrow x = -۱, x = ۲$$

x	$-\infty$	-۱	۲	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$
یکنوایی g	$+\infty$ ↘	-۱۶ ↗	۱۱ ↘	$-\infty$

نقطهٔ $(-۱, -۱۶)$ مینیمم نسبی و نقطهٔ $(۲, ۱۱)$ ماکزیمم نسبی تابع g است. دو نقطهٔ $(-۱, -۱۶)$ و $(۲, ۱۱)$ نقاط بحرانی هستند.

۱۴۴

$$h'(x) = -۳x^۲ - ۳ = ۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد}$$

x	$-\infty$	به ازای هر x	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	
یکنوایی h	$+\infty$	↘	$-\infty$

چون تابع $h(x)$ نزولی اکید است، پس اکسترمم نسبی ندارد. تابع نقطهٔ بحرانی ندارد.

۱۴۵ ابتدا نقاط بحرانی تابع C را به دست می‌آوریم.

$$C'(x) = \frac{۳\left(t^۳ + ۲۷\right) - ۳t^۲\left(۳t\right)}{\left(t^۳ + ۲۷\right)^۲}$$

$$C'(t) = ۰ \Rightarrow ۳\left(t^۳ + ۲۷\right) - ۹t^۳ = ۰ \Rightarrow \left(t^۳ + ۲۷\right) - ۳t^۳ = ۰ \Rightarrow t^۳ = \frac{۲۷}{۲}$$

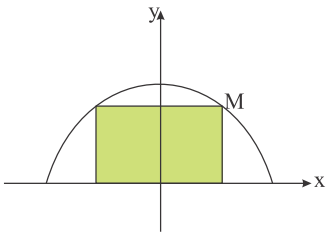
$$\Rightarrow t = \frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}} \simeq ۲/۳۸ \,(\text{ساعت}) \quad (\text{نقطهٔ بحرانی تابع } C)$$

در $C'(t)$، علامت مخرج همواره مثبت است، پس علامت $C'(t)$ درواقع همان علامت صورت مشتق خواهد بود. بنابراین، جدول تغییرات تابع C به شکل زیر است:

x	۰		$\sqrt[۳]{۴/۵}$		$+\infty$
$C'(x)$		−	۰	+	
$C(x)$	$+\infty$	↘	≈۱۶۳۵ مینیمم مطلق C	↗	$+\infty$

باتوجه‌به جدول، دیده می‌شود که $\frac{۳}{\sqrt[۳]{۲}} \simeq ۲/۳۸$ ساعت پس از تزریق، میزان غلظت دارو در خون، حداکثر میزان ممکن خواهد بود.

۱۴۶ نیم‌دایره را به‌صورت شکل زیر و به معادلهٔ $y = \sqrt{۴ - x^۲}$ در نظر می‌گیریم.



اگر نقطهٔ M را روی نیم‌دایره در نظر بگیریم $M\left(x, \sqrt{۴ - x^۲}\right)$ خواهد بود.
برای مساحت مستطیل تابعی می‌نویسیم.

$$S(x) = ۲x\sqrt{۴ - x^۲} \;,\; D = [۰, ۲]$$

$$S'(x) = ۲\left(\sqrt{۴ - x^۲} + \frac{-۲x}{۲\sqrt{۴ - x^۲}}x\right) = \frac{۲(۴ - ۲x^۲)}{\sqrt{۴ - x^۲}} = ۰ \Rightarrow x = \pm\sqrt{۲}$$

$$S(۰) = S(۲) = ۰ \;,\; S(\sqrt{۲}) = ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۲} = ۴ \Rightarrow S_{max} = ۴$$

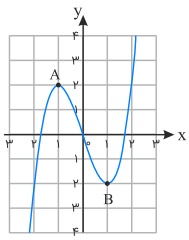
نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۴۷ f' را به دست آورده و آن را تعیین علامت می‌کنیم.

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

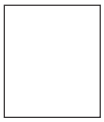
$$f'(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۱ \end{cases}$$

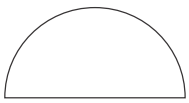
x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
بازه		$(-\infty,-۱)$		$(-۱,۱)$		$(۱,+\infty)$	
علامت f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
یکنوایی f	$-\infty$	اکیداً صعودی	۲	اکیداً نزولی	-۲	اکیداً صعودی	$+\infty$



۱۴۸ دایره - مستطیل - بیضی

۱۴۹


عمودی (مستطیل)


افقی (نیم‌دایره)

۱۵۰

$$O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (\frac{۲}{۲}, \frac{۶}{۲}) = (۱, ۳)$$

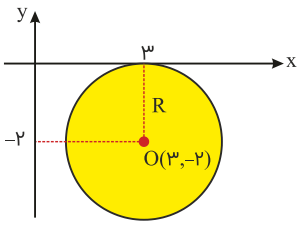
پاسخ سؤالات ۱۵۱ تا ۱۵۲

۱۵۱ بیضی

۱۵۲ دایره

نوتروفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۵۳ مطابق شکل شعاع دایره برابر با قدر مطلق عرض مرکز است؛ پس داریم: $R = |-۲| = ۲$



$\Rightarrow$ معادلهٔ دایره : $(x-۳)^۲ + (y+۲)^۲ = ۴$

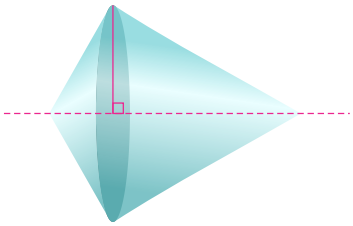
۱۵۴

$$O\left|\begin{matrix}\frac{-a}{۲}=۳\\ \frac{-b}{۲}=-۱\end{matrix}\right. \qquad r = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c} = ۲$$

۱۵۵ به دست می‌آید:

$$a^۲+b^۲-۴c>۰ \Rightarrow ۹+۲۵-۴a>۰ \Rightarrow \frac{۱۷}{۲}>a$$

۱۵۶ شکل حاصل دو مخروط است که در قاعده مشترک‌اند.



۱۵۷ شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$OA = r \Rightarrow r = \sqrt{(-۱-۲)^۲+(۳-۱)^۲} = \sqrt{۱۳}$$

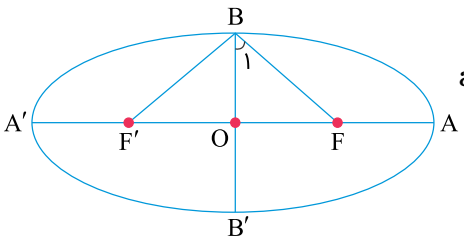
حال با داشتن مرکز و شعاع، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x+۱)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۳$$

۱۵۸ الف $O(-۱,۰)$, $R = ۲$

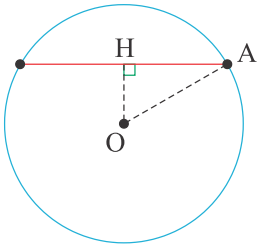
ب $(۱,۰)$, $(-۳,۰)$

۱۵۹



$$a = ۲b \Rightarrow c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۴b^۲ - b^۲ = ۳b^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۳}b$$
$$\tan B_۱ = \frac{OF}{OB} = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{۳}b}{b} = \sqrt{۳} \Rightarrow B_۱ = ۶۰^\circ$$
$$\Rightarrow F\hat{B}F' = ۲ \times ۶۰ = ۱۲۰^\circ$$

۱۶۰



$$OH = \frac{|۲(-۱) + ۱(-۱) - ۲|}{\sqrt{۲^۲ + ۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$
$$AOH\ (H = ۹۰) : OH^۲ + AH^۲ = OA^۲ \Rightarrow \left(\sqrt{۵}\right)^۲ + ۲^۲ = r^۲$$
$$r = ۳ \Rightarrow (x+۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۹$$

۱۶۱

$$\frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$
$$\frac{S_{\overset{\Delta}{OBF'}}}{S_{\overset{\Delta}{OAB'}}} = \frac{\frac{۱}{۲}OB \times OF'}{\frac{۱}{۲}OB' \times OA} = \frac{\frac{۱}{۲}bc}{\frac{۱}{۲}ba} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

۱۶۲

$$(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱ \Rightarrow O(۱, -۲)\ ,\ R = ۱$$
$$x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y - ۶ = ۰ \Rightarrow O'(-۳, -۱)\ ,\ R' = ۴$$
$$d = OO' = \sqrt{۱۷}$$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند: $۳ < \sqrt{۱۷} < ۵$

۱۶۳

$$x^۲ + y^۲ + ۲x - ۴y + ۱ = ۰ : O(-۱, ۲)\ ,\ r = ۲$$
$$(x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = m^۲ : O'(۲, -۱)\ ,\ r' = m$$
$$OO' = ۳\sqrt{۲}$$
$$OO' = r + r' \Rightarrow m + ۲ = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow m = ۳\sqrt{۲} - ۲$$

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL

۱۶۴ ابتدا مختصات مرکز و شعاع دو دایره را حساب می‌کنیم:

$$C : x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y = ۳ \Rightarrow O\,(۲, -۳) \quad , \quad r = \frac{\sqrt{۱۶ + ۳۶ + ۱۲}}{۲} = ۴$$
$$C' : (x - ۲)^۲ + (y + ۳)^۲ = m \Rightarrow O'(۲, -۳) \quad , \quad r' = \sqrt{m}$$

یعنی این دو دایره هم‌مرکز هستند. مساحت بین دو دایره برابر $S = \pi \left| r^۲ - r'^۲ \right|$ است (زیرا نمی‌دانیم r بزرگ‌تر است یا r').

$$۴\pi = \pi(|۱۶ - m|) \Rightarrow \begin{cases} ۱۶ - m = -۴ \Rightarrow m = ۲۰ \\ ۱۶ - m = +۴ \Rightarrow m = ۱۲ \end{cases}$$

هر دو مقدار به‌دست‌آمده برای m قابل‌قبول است.

۱۶۵ الف

$$O(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}) = (۲, -۱)\,,\ R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = ۳$$

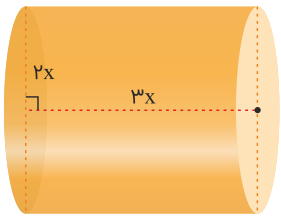
ب خیر، زیرا:

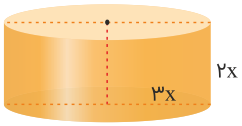
$$(۰)^۲ + (۳)^۲ + ۲(۳) - ۴(۰) - ۴ \neq ۰$$

۱۶۶

$$a^۲ = b^۲ + c^۲ \xrightarrow{a=۵\,,\,b=۳} c = ۴ \Rightarrow FF' = ۸$$

۱۶۷ چون نسبت طول به عرض مستطیل، $\frac{۳}{۲}$ است، طول آن را $۳x$ و عرض آن را $۲x$ فرض می‌کنیم. اجسام حاصل، دو استوانه‌اند و مطابق شکل، داریم:





$$\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{\pi(۲x)^۲(۳x)}{\pi(۳x)^۲(۲x)} = \frac{۲}{۳}$$

۱۶۸ الف

$$c = \frac{۴}{۵}a \Rightarrow ۹ + \frac{۱۶}{۲۵}a^۲ = a^۲ \Rightarrow a = ۵\,,\ c = ۴\,,\ FF' = ۸\,,\ ۲a = ۱۰$$

ب

$A(۱, -۱)\ ,\ A'(-۹, -۱)$

۱۶۹

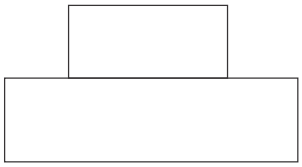
$$x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} O(۳\ ,\ ۱) \\ r = \sqrt{۹ + ۱ - ۹} = ۱ \end{cases}$$

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \Rightarrow \begin{cases} O'(۰\ ,\ ۰) \\ r' = ۱ \end{cases}$$

$$|OO'| = \sqrt{۹ + ۱} = \sqrt{۱۰}$$

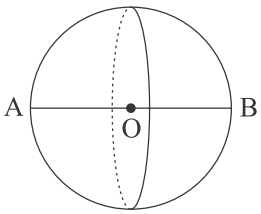
چون $|OO'| > r + r'$ است، پس دو دایره متخارج‌اند.

۱۷۰ دو مستطیل به‌هم‌چسبیده و روی هم مانند شکل.

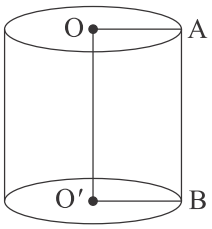


۱۷۱

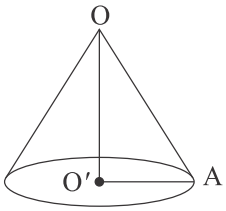
الف کره



ب استوانه

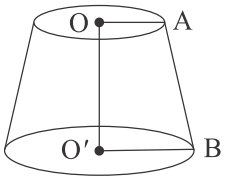


پ مخروط



نوتروفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

ت مخروط ناقص



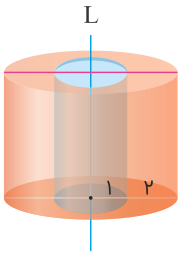
۱۷۲ مرکز و شعاع دایره را به دست می‌آوریم.

$$x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y = ۰ \Rightarrow O\,(۱, -۱)\ \ ,\ \ r = \sqrt{۲}$$
$$OA = \sqrt{۰ + ۱} = ۱ \Rightarrow OA < r$$

پس نقطه داخل دایره قرار دارد.

۱۷۳

مطابق شکل، باید حجم ناحیهٔ بین دو استوانه را بیابیم که برابر است با:



$$\pi(۳^۲)(۳) - \pi(۱^۲)(۳) = ۲۴\pi$$

۱۷۴ مرکز بیضی محل برخورد قطر کانونی و قطر کوچک است، پس $O(۲\ ,\ -۱)$. باتوجه‌به اینکه $AA' = ۱۲$ و $BB' = ۸$، بنابراین:

$$AA' = ۲a = ۱۲ \Rightarrow a = ۶$$
$$BB' = ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴$$

همچنین:

$$c^۲ = ۳۶ - ۱۶ = ۲۰ \Rightarrow c = ۲\sqrt{۵} \Rightarrow FF' = ۲c = ۴\sqrt{۵}$$

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۷۵ ازآنجاکه خطوط $y = x - ۳$ و $y = x + ۱$ موازی هستند، مرکز دایره روی خطی که موازی این دو خط و دقیقاً وسط آن‌ها قرار دارد، است. معادلهٔ خط مذکور عبارت است از $y = x + (\frac{۱ - ۳}{۲})$، یعنی $y = x - ۱$. برای یافتن مرکز دایره، دو خط $y = x - ۱$ و $x + y = ۲$ را تلاقی می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = x - ۱ \\ y = -x + ۲ \end{cases} \Rightarrow x - ۱ = -x + ۲$$

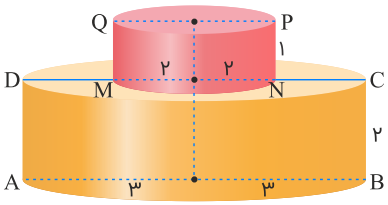
$$\Rightarrow ۲x = ۳ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۳}{۲} \\ y = \frac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow O(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲})$$

حال فاصلهٔ بین دو خط موازی $y = x - ۳$ و $y = x + ۱$ که برابر قطر دایرهٔ موردنظر است را پیدا می‌کنیم:

$$۲r = \frac{|-۳ - ۱|}{\sqrt{۲}} = \frac{۴}{\sqrt{۲}} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow r = \sqrt{۲}$$

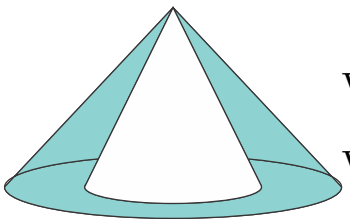
$$\Rightarrow (x - \frac{۳}{۲})^۲ + (y - \frac{۱}{۲})^۲ = ۲$$

۱۷۶ مساحت سطح مقطع در صورتی به حداکثر می‌رسد که صفحه، از محور هر دو استوانه بگذرد که در این صورت، داریم:



$$S_{\text{سطح مقطع}} = S_{ABCD} + S_{MNPQ} = ۶ \times ۲ + ۴ \times ۱ = ۱۶$$

۱۷۷ حجم حاصل، فضای بین دو مخروط هم‌ارتفاع به ارتفاع ۳ و شعاع‌های ۳ و ۲ است.



$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^۲ h \quad , \quad V_۱ = \frac{\pi}{۳}(۳)^۲(۳) = ۹\pi \quad , \quad V_۲ = \frac{\pi}{۳}(۲)^۲(۳) = ۴\pi$$

$$V_۱ - V_۲ = ۹\pi - ۴\pi = ۵\pi$$

۱۷۸ الف

$$P(C) = P(A)P(C|A) + P(B)P(C|A)$$

$$= \frac{۳}{۴} \times \frac{۳۵}{۱۰۰} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۵}{۱۰۰} = \frac{۱۰۵ + ۱۵}{۴۰۰} = \frac{۳}{۱۰}$$

پاسخ سؤال ۱۷۹

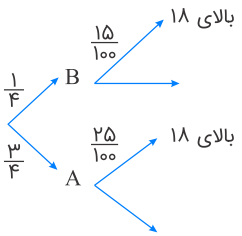
۱۷۹ ناسازگار

۱۸۰ الف

$$P\,(\text{از مدرسهٔ A}) = \frac{۳}{۴}$$

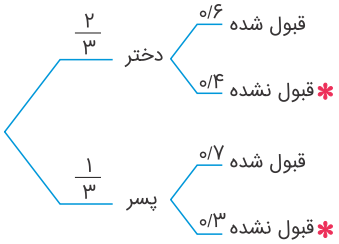
$$P\,(\text{از مدرسهٔ B}) = \frac{۱}{۴}$$

ب



$$P\,(\text{معدل بالای ۱۸}) = \frac{۱}{۴} \times \frac{۱۵}{۱۰۰} + \frac{۳}{۴} \times \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{۱۵ + ۷۵}{۴۰۰} = \frac{۹۰}{۴۰۰} = \frac{۹}{۴۰}$$

۱۸۱ الف



$$P\,(\text{قبول نشده}) = \frac{۲}{۳} \times ۰/۴ + \frac{۱}{۳} \times ۰/۳ = \frac{۸}{۳۰} + \frac{۳}{۳۰} = \frac{۱۱}{۳۰}$$

پاسخ سؤال ۱۸۲

۱۸۲ مستقل

۱۸۳

$$P\,(A) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۷}{۱۰۰} + \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۱۰۰} = \frac{۱۱}{۲۰۰}$$

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

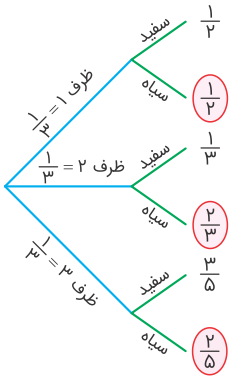
۱۸۴

$$P(A) = \frac{۱}{۲} + (\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}) \times ۳ = \frac{۱۱}{۱۶}$$

۱۸۵

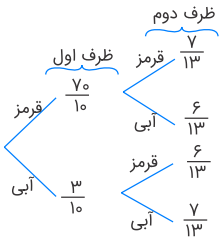
$$P(\text{همرنگ بودن}) = P(\text{هر دو آبی}) + P(\text{هر دو قرمز})$$
$$= \frac{۳}{۸} \times \frac{۵}{۹} + \frac{۵}{۸} \times \frac{۵}{۹} = \frac{۱۵ + ۲۵}{۷۲} = \frac{۴۰}{۷۲} = \frac{۵}{۹}$$

۱۸۶



$$\Rightarrow \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۵} = \frac{۴۷}{۹۰}$$

۱۸۷



$$P(\text{قرمز بودن}) = \frac{۷}{۱۰} \times \frac{۷}{۱۳} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۶}{۱۳} = \frac{۴۹ + ۱۸}{۱۳۰} = \frac{۶۷}{۱۳۰}$$

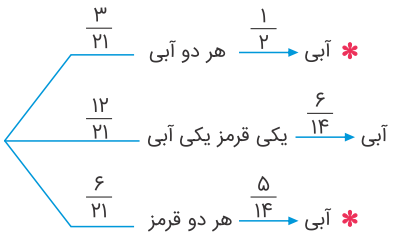
پاسخ سؤال ۱۸۸

۱۸۸ {۱}

۱۸۹

$$P = (۰/۴۵ \times ۰/۰۴) + (۰/۵۵ \times ۰/۰۶) = ۰/۰۵۱$$

۱۹۰



$$\frac{\frac{۳}{۲۱}\times\frac{۷}{۱۴}+\frac{۶}{۲۱}\times\frac{۵}{۱۴}}{\frac{۳}{۲۱}\times\frac{۷}{۱۴}+\frac{۱۲}{۲۱}\times\frac{۶}{۱۴}+\frac{۶}{۲۱}\times\frac{۵}{۱۴}}=\frac{۱۷}{۱۷+۲۴}=\frac{۱۷}{۴۱}$$

۱۹۱ پیشامد انتخاب ظرف‌ها را به ترتیب با $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$ و $A_۴$ و پیشامد خارج شدن مهرهٔ قرمز را با B نمایش می‌دهیم. بنابراین به دنبال یافتن $P(B)$ هستیم و داریم:

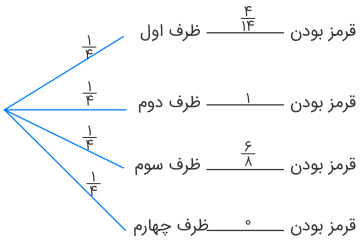
$$P(A_۱)=P(A_۲)=P(A_۳)=P(A_۴)=\frac{۱}{۴}$$

$$P(B|A_۱)=\frac{۴}{۱۴}\quad,\quad P(B|A_۲)=۱\quad,\quad P(B|A_۳)=\frac{۶}{۸}\quad,\quad P(B|A_۴)=۰$$

$$P(B)=P(A_۱)P(B|A_۱)+P(A_۲)P(B|A_۲)+P(A_۳)P(B|A_۳)+P(A_۴)P(B|A_۴)$$

$$=\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}+\frac{۱}{۴}\times۱+\frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۸}+\frac{۱}{۴}\times۰=\frac{۵۷}{۱۱۲}$$

با نمودار درختی به‌صورت زیر نیز می‌توان مسئله را حل کرد:



احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف اول باشد: $\frac{۱}{۴}\times\frac{۴}{۱۴}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف دوم باشد: $\frac{۱}{۴}\times۱$

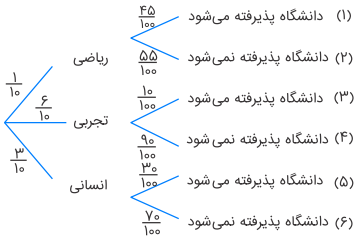
احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف سوم باشد: $\frac{۱}{۴}\times\frac{۶}{۸}$

احتمال اینکه مهرهٔ قرمزی خارج شود و از ظرف چهارم باشد: $\frac{۱}{۴}\times۰$

حال مجموع احتمال‌های بالا پاسخ مسئله می‌باشد.

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۹۲



$$P(\text{پذیرفته شدن}) = P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{ریاضی}) + P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{تجربی}) + P(\text{پذیرفته شدن} \cap \text{انسانی})$$

$$= P(\text{ریاضی}) \times P(\text{پذیرفته شدن}|\text{ریاضی}) + P(\text{تجربی}) \times P(\text{پذیرفته شدن}|\text{تجربی}) + P(\text{انسانی}) \times P(\text{پذیرفته شدن}|\text{انسانی})$$

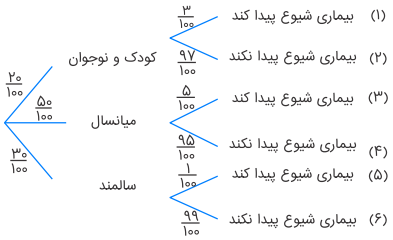
$$= \frac{۱}{۱۰} \times \frac{۴۵}{۱۰۰} + \frac{۶}{۱۰} \times \frac{۱۰}{۱۰۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۳۰}{۱۰۰} = \frac{۴۵}{۱۰۰۰} + \frac{۶۰}{۱۰۰۰} + \frac{۹۰}{۱۰۰۰} = \frac{۱۹۵}{۱۰۰۰} = ۰/۱۹۵$$

۱۹۳ اگر انتخاب ادبیات، ریاضی و اطلاعات عمومی را به ترتیب با $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ و برنده شدن سامان را با B نمایش دهیم، خواهیم داشت:

$$P(B) = P(A_۱)P(B|A_۱) + P(A_۲)P(B|A_۲) + P(A_۳)P(B|A_۳)$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۹۰}{۱۰۰} + \frac{۱}{۶} \times \frac{۶۰}{۱۰۰} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۸۵}{۱۰۰} = \frac{۵}{۶}$$

۱۹۴



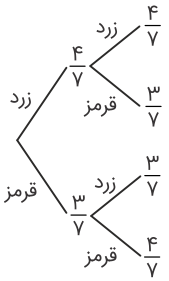
احتمال موردنظر شاخه‌های ۱ و ۳ و ۵ است که به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = P(\text{شاخهٔ ۱}) + P(\text{شاخهٔ ۳}) + P(\text{شاخهٔ ۵})$$

$$= \frac{۲۰}{۱۰۰} \times \frac{۳}{۱۰۰} + \frac{۵۰}{۱۰۰} \times \frac{۵}{۱۰۰} + \frac{۳۰}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۳۴۰}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۳۴$$

نوترو فیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۱۹۵ گزینه ۲



$$P(\text{هر دو زرد} \mid \text{همرنگ باشند}) = \frac{\frac{۴}{۷}\times\frac{۴}{۷}}{\frac{۳}{۷}\times\frac{۴}{۷}+\frac{۴}{۷}\times\frac{۴}{۷}} = \frac{۱۶}{۱۲+۱۶} = \frac{۴}{۷}$$

۱۹۶ گزینه ۴

$$P(\text{۳ سکه رو}) = P(\text{۳ سکه رو}\mid\text{۳ آمدن تاس}).P(\text{۳ آمدن تاس}) + P(\text{۴ سکه رو}\mid\text{۴ آمدن تاس}).P(\text{۴ آمدن تاس}) + P(\text{۵ سکه رو}\mid\text{۵ آمدن تاس}).P(\text{۵ آمدن تاس}) + P(\text{۶ سکه رو}\mid\text{۶ آمدن تاس}).P(\text{۶ آمدن تاس})$$

$$= \frac{۱}{۶}\left[\binom{۳}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۳} + \binom{۴}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۴} + \binom{۵}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۵} + \binom{۶}{۳}\left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶}\right]$$

$$= \frac{۱}{۶}\left[\frac{۱}{۸} + \frac{۴}{۱۶} + \frac{۱۰}{۳۲} + \frac{۲۰}{۶۴}\right] = \frac{۱}{۶}\frac{۲+۴+۵+۵}{۱۶} = \frac{۱}{۶}$$

۱۹۷ گزینه ۳

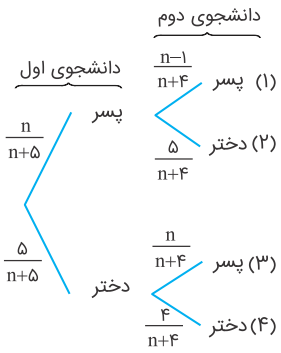
اگر بخواهیم آن روی کارت که دیده‌ایم آبی باشد، ممکن است یکی از دو اتفاق زیر افتاده باشد:
یک کارت دو رو آبی (BB) برداشته‌ایم یا اینکه یک کارت یک رو آبی و یک رو قرمز برداشته‌ایم. (RB)، پس داریم:

$$P(B) = P(BB)P(B|BB) + P(RB)P(B|RB)$$

$$= \frac{۳}{۱۰}\times ۱ + \frac{۵}{۱۰}\times\frac{۱}{۲} = \frac{۳}{۱۰} + \frac{۵}{۲۰} = \frac{۱۱}{۲۰}$$

وقتی یک کارت یک رو آبی و یک رو قرمز است به احتمال $\frac{۱}{۲}$ روی آبی آن به طرف ما است.

۱۹۸ گزینه ۱

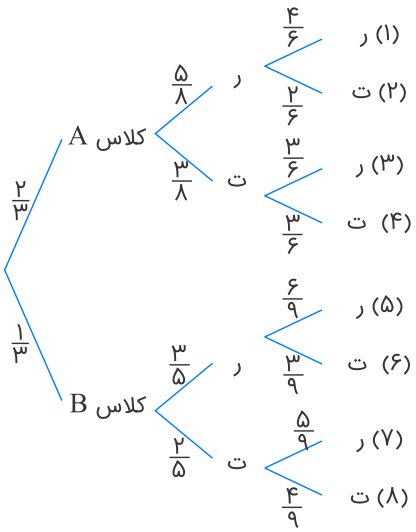


$$P = P\left((\text{۲ شاخهٔ})\right) + P\left((\text{۳ شاخهٔ})\right)$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰}{۲۱} = \frac{n}{n+۵} \times \frac{۵}{n+۴} + \frac{۵}{n+۵} \times \frac{n}{n+۴} = \frac{۱۰n}{n^۲ + ۹n + ۲۰}$$

$$\Rightarrow n^۲ + ۹n + ۲۰ = ۲۱n \Rightarrow n^۲ - ۱۲n + ۲۰ = ۰ \Rightarrow n = \begin{cases} ۲ & \text{غ.ق.ق} \\ ۱۰ & \text{ق.ق} \end{cases}$$

۱۹۹ گزینه ۱



$$P = P\left(\text{۲ شاخهٔ}\right) + P\left(\text{۳ شاخهٔ}\right) + P\left(\text{۶ شاخهٔ}\right) + P\left(\text{۷ شاخهٔ}\right))$$

$$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۵}{۸} \times \frac{۲}{۶} + \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۸} \times \frac{۳}{۶} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۳}{۵} \times \frac{۳}{۹} + \frac{۱}{۳} \times \frac{۲}{۵} \times \frac{۵}{۹} = \frac{۴۳۷}{۱۰۸۰}$$

نوتروفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM
NOTRUPHIL

۲۰۰ گزینه ۲

پیشامد زن بودن را با Z، مرد بودن را با M و باسواد بودن را با B نمایش می‌دهیم.

$$\frac{n(Z)}{n(M)} = \frac{۴}{۳} \Rightarrow n(Z) = \frac{۴}{۳}n(M) \Rightarrow P(Z) = \frac{۴}{۳}P(M)$$

$$P(Z) + P(M) = ۱ \Rightarrow \frac{۴}{۳}P(M) + P(M) = ۱$$

$$\Rightarrow P(M) = \frac{۳}{۷}\ ,\ P(Z) = \frac{۴}{۷}$$

$$P(Z \cup B) = P(Z) + P(B) - P(Z \cap B)$$

$$= \frac{۴}{۷} + (\frac{۴}{۷} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۶۰}{۱۰۰}) - \frac{۴}{۷} \times \frac{۴۰}{۱۰۰}$$

$$= \frac{۴}{۷} + \frac{۳}{۷} \times \frac{۳}{۵} = \frac{۲۰ + ۹}{۳۵} = \frac{۲۹}{۳۵}$$

نوترفیل
WWW.NOTRUPHIL.COM NOTRUPHIL